

KỲ THI TRUNG HỌC QUỐC GIA 2019-2020

CHUYÊN ĐỀ TOÁN 10 TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

Th.s NGUYỄN CHÍNH EM

Mục lục

I	ĐẠI SỐ	1
1	MỆNH ĐỀ TẬP HỢP	2
1	MỆNH ĐỀ	2
A	Tóm tắt lí thuyết	2
1	Mệnh đề	2
2	Mệnh đề chứa biến	2
3	Mệnh đề phủ định	2
4	Mệnh đề kéo theo và mệnh đề đảo	3
5	Mệnh đề tương đương	3
6	Các kí hiệu $\forall$ và $\exists$	4
B	Các dạng toán	4
	<i>Đạng 1. Mệnh đề có nội dung đại số và số học</i>	4
	<i>Đạng 2. Mệnh đề có nội dung hình học</i>	10
	<i>Đạng 3. Thành lập mệnh đề - Mệnh đề phủ định</i>	12
C	Câu hỏi trắc nghiệm	17
2	TẬP HỢP	35
A	Tóm tắt lí thuyết	35
1	Tập hợp và phần tử	35
2	Cách xác định tập hợp	35
3	Tập hợp rỗng	35
4	Tập con. Hai tập hợp bằng nhau	35
5	Tính chất	35
B	Các dạng toán	36
	<i>Đạng 1. Xác định tập hợp - phần tử của tập hợp</i>	36
	<i>Đạng 2. Tập hợp rỗng</i>	40
	<i>Đạng 3. Tập con. Tập bằng nhau</i>	41
C	Câu hỏi trắc nghiệm	48
3	CÁC PHÉP TOÁN TẬP HỢP	68
A	Tóm tắt lí thuyết	68

1	Giao của hai tập hợp	68
2	Hợp của hai tập hợp	68
3	Hiệu và phần bù của hai tập hợp	68
B	Các dạng toán	69
	<i>Đạng 1. Tìm giao và hợp của các tập hợp</i>	69
	<i>Đạng 2. Hiệu và phần bù của hai tập hợp</i>	72
	<i>Đạng 3. Sử dụng biểu đồ Ven và công thức tính số phần tử của tập hợp $A \cup B$ để giải toán</i>	74
C	Câu hỏi trắc nghiệm	82
4	CÁC TẬP HỢP SỐ	113
A	Tóm tắt lí thuyết	113
	1 Các tập hợp số đã học	113
	2 Các tập con thường dùng của $\mathbb{R}$	113
B	Các dạng toán	114
	<i>Đạng 1. Xác định giao - hợp của hai tập hợp</i>	114
	<i>Đạng 2. Xác định hiệu và phần bù của hai tập hợp</i>	118
	<i>Đạng 3. Tìm m thỏa điều kiện cho trước</i>	121
C	Câu hỏi trắc nghiệm	127
5	SỐ GẦN ĐÚNG - SAI SỐ	161
A	Số gần đúng	161
B	Quy tròn số gần đúng	161
C	Câu hỏi trắc nghiệm	162
2	HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI	176
1	ĐẠI CƯƠNG VỀ HÀM SỐ	176
A	Tóm tắt lí thuyết	176
	1 Hàm số và tập xác định của hàm số	176
	2 Cách cho hàm số	176
	3 Đồ thị của hàm số	176
	4 Sự biến thiên của hàm số	176
	5 Tính chẵn lẻ của hàm số	177
B	Các dạng toán	177
	<i>Đạng 1. Tìm tập xác định của hàm số</i>	177
	<i>Đạng 2. Tính giá trị của hàm số tại một điểm</i>	179
	<i>Đạng 3. Dùng định nghĩa xét tính đơn điệu của hàm số</i>	181
	<i>Đạng 4. Tính đơn điệu của hàm bậc nhất</i>	186
	<i>Đạng 5. Xét tính chẵn lẻ của hàm số</i>	190
C	Câu hỏi trắc nghiệm	194
2	HÀM SỐ $Y = AX + B$	277
A	Tóm tắt lí thuyết	277
B	Các dạng toán	277

	▢ Dạng 1. Vẽ đồ thị hàm số bậc nhất	277
	▢ Dạng 2. Xác định hệ số a và b của số bậc nhất	280
	▢ Dạng 3. Xét sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số bậc nhất có chứa giá trị tuyệt đối	283
	▢ Dạng 4. Vẽ đồ thị hàm số cho bởi hệ nhiều công thức	286
	▢ Dạng 5. Sự tương giao giữa các đường thẳng	289
C	Câu hỏi trắc nghiệm	294
3	HÀM SỐ BẬC HAI	369
A	Tóm tắt lí thuyết	369
	1 Hàm số bậc hai	369
	2 Đồ thị của hàm số bậc hai	369
	3 Chiều biến thiên của hàm số bậc hai	369
	4 Phương trình hoành độ giao điểm	370
	5 Định lý Vi-ét	370
	6 Một vài công thức cần nhớ	371
B	Các dạng toán	371
	▢ Dạng 1. Vẽ đồ thị và lập bảng biến thiên của hàm số bậc hai	371
	▢ Dạng 2. Tìm tọa độ của đỉnh và các giao điểm của parabol với các trục tọa độ. Tọa độ giao điểm giữa parabol (P) và một đường thẳng.	375
	▢ Dạng 3. Dựa vào đồ thị biện luận theo m số giao điểm của parabol (P) và đường thẳng.	377
	▢ Dạng 4. Xác định hàm số bậc hai khi biết các yếu tố liên quan.	379
	▢ Dạng 5. Các bài toán liên quan đồ thị hàm số trị tuyệt đối của một hàm bậc hai	384
	▢ Dạng 6. Các bài toán liên quan đồ thị hàm số đối với trị tuyệt đối của biến	385
	▢ Dạng 7. Tính đơn điệu của hàm bậc hai	387
C	Câu hỏi trắc nghiệm	392
3	PHƯƠNG TRÌNH HỆ PHƯƠNG TRÌNH	524
1	MỞ ĐẦU VỀ PHƯƠNG TRÌNH	524
A	Tìm tập xác định của phương trình	524
	▢ Dạng 1. Tìm điều kiện xác định của phương trình	524
B	Phương trình hệ quả	529
	1 Tóm tắt lí thuyết	529
	2 Các phép biến đổi dẫn đến phương trình hệ quả thường gặp	529
	3 Phương pháp giải phương trình dựa vào phương trình hệ quả	530
	▢ Dạng 2. Khử mẫu (nhân hai vế với biểu thức)	530
	▢ Dạng 3. Bình phương hai vế (làm mất căn)	533
C	Phương trình tương đương	537
	▢ Dạng 4. Phương pháp chứng minh hai phương trình tương đương	538
	Bài tập tổng hợp	541
D	Câu hỏi trắc nghiệm	546
2	PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT, BẬC HAI	583

A	Tóm tắt lí thuyết	583
B	Các dạng toán	583
	✎ Dạng 1. Giải và biện luận phương trình bậc nhất	583
	✎ Dạng 2. Phương trình chứa ẩn dưới dấu căn	588
	✎ Dạng 3. Phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối	594
	✎ Dạng 4. Phương trình chứa ẩn ở mẫu. Phương trình bậc bốn trùng phương . . .	603
	✎ Dạng 5. Biện luận theo m có áp dụng định lí Viète	607
	Bài tập tổng hợp	611
C	Câu hỏi trắc nghiệm	619
3	PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN	727
A	Tóm tắt lí thuyết	727
	1 Phương trình bậc nhất hai ẩn	727
	2 Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn	727
	3 Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn	727
B	Các dạng toán	728
	✎ Dạng 1. Giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp thế hoặc phương pháp cộng đại số	728
	✎ Dạng 2. Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn	733
	✎ Dạng 3. Giải và biện luận hệ 2 phương trình bậc nhất 2 ẩn có chứa tham số (PP Crame)	738
C	Câu hỏi trắc nghiệm	745
4	HỆ PHƯƠNG TRÌNH HAI ẨN	811
A	Hệ phương trình gồm các phương trình bậc nhất và bậc hai	811
B	Hệ phương trình đối xứng loại 1	814
C	Hệ phương trình đối xứng loại 2	818
	✎ Dạng 1. Giải hệ phương trình đối xứng loại 2.	818
	✎ Dạng 2. Tìm điều kiện của tham số thỏa điều kiện cho trước.	821
D	Hệ phương trình đẳng cấp	824
E	Hệ phương trình hai ẩn khác	829
4	BẤT ĐẲNG THỨC-BẤT PHƯƠNG TRÌNH	840
1	BẤT ĐẲNG THỨC	840
A	Tóm tắt lí thuyết	840
	1 Các khái niệm	840
	2 Tính chất	840
B	Các dạng toán	841
	✎ Dạng 1. Sử dụng phép biến đổi tương đương	841
	✎ Dạng 2. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si	844
	✎ Dạng 3. Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki	852
	✎ Dạng 4. Sử dụng các bất đẳng thức hệ quả	853
	✎ Dạng 5. Chứng minh bất đẳng thức dựa vào tọa độ véc-tơ	855

	✎ Dạng 6. Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối	856
C	Câu hỏi trắc nghiệm	858
2	BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN	898
A	Tóm tắt lí thuyết	898
	1 Giải và biện luận bất phương trình $ax + b > 0$	898
	2 Giải và biện luận bất phương trình $ax + b \leq 0$	898
B	Các dạng toán	898
	✎ Dạng 1. Giải bất phương trình bậc nhất một ẩn	898
	✎ Dạng 2. Giải và biện luận bất phương trình bậc nhất một ẩn	904
	✎ Dạng 3. Tìm giá trị của tham số để bất phương trình có tập nghiệm thỏa điều kiện cho trước	906
	✎ Dạng 4. Hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn	908
	✎ Dạng 5. Giải và biện luận hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn	909
	✎ Dạng 6. Tìm giá trị của tham số để hệ bất phương trình có tập nghiệm thỏa điều kiện cho trước	912
C	Câu hỏi trắc nghiệm	917
3	DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT	983
A	Tóm tắt lí thuyết	983
	1 Nhị thức bậc nhất	983
	2 Định lý về dấu của nhị thức bậc nhất	983
	3 Các ví dụ minh họa	984
B	Các dạng toán	985
	✎ Dạng 1. Xét dấu tích - thương các nhị thức bậc nhất	985
	✎ Dạng 2. Xét dấu nhị thức có chứa tham số	990
	✎ Dạng 3. Giải bất phương trình tích	995
	✎ Dạng 4. Giải bất phương trình chứa ẩn ở mẫu thức	998
	✎ Dạng 5. Giải bất phương trình bậc nhất chứa dấu giá trị tuyệt đối.	1002
C	Câu hỏi trắc nghiệm	1012
4	BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN	1054
A	Tóm tắt lí thuyết	1054
	1 Bất phương trình bậc nhất hai ẩn	1054
	2 Hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn	1054
B	Các dạng toán	1054
	✎ Dạng 1. Biểu diễn tập nghiệm bất phương trình bậc nhất hai ẩn	1054
	✎ Dạng 2. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.	1057
	✎ Dạng 3. Các bài toán thực tiễn	1060
5	DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI	1073
A	Tóm tắt lí thuyết	1073
	1 Tam thức bậc hai	1073
	2 Định lý về dấu của tam thức bậc hai	1073

3	Định lí về dấu của tam thức bậc hai	1073
4	Bất phương trình bậc hai một ẩn	1073
B	Các dạng toán	1073
	<i>✎ Dạng 1. Xét dấu tam thức bậc hai</i>	1073
	<i>✎ Dạng 2. Tìm điều kiện của tham số để tam thức bậc hai luôn mang một dấu . .</i>	1076
	<i>✎ Dạng 3. Giải bất phương trình bậc hai.</i>	1078
	<i>✎ Dạng 4. Bài toán có chứa tham số</i>	1084
C	Câu hỏi trắc nghiệm	1090
5	THỐNG KÊ	1209
1	BẢNG PHÂN BỐ TẦN SỐ VÀ TẦN SUẤT	1209
A	Tóm tắt lí thuyết	1209
1	Bảng phân bố tần số và tần suất	1209
2	Bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp	1209
B	Các dạng toán	1209
	<i>✎ Dạng 1. Bảng phân bố tần số và tần suất</i>	1209
	<i>✎ Dạng 2. Lập bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp</i>	1213
2	BIỂU ĐỒ	1219
A	Tóm tắt lí thuyết	1219
1	Biểu đồ tần suất hình cột	1219
2	Đường gấp khúc tần suất	1219
3	Biểu đồ hình quạt	1220
B	Các dạng toán	1220
	<i>✎ Dạng 1. Vẽ biểu đồ tần số và tần suất hình cột</i>	1220
	<i>✎ Dạng 2. Biểu đồ đường gấp khúc</i>	1224
	<i>✎ Dạng 3. Biểu đồ hình quạt</i>	1229
3	SỐ TRUNG BÌNH CỘNG. SỐ TRUNG VỊ. MÓT	1233
A	Tóm tắt lí thuyết	1233
1	Số trung bình cộng	1233
2	Số trung vị	1233
3	Mốt	1233
B	Các dạng toán	1234
	<i>✎ Dạng 1. Số trung bình</i>	1234
	<i>✎ Dạng 2. Số trung vị</i>	1235
	<i>✎ Dạng 3. Mốt</i>	1237
4	PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN	1243
A	Tóm tắt lí thuyết	1243
B	Các dạng toán	1244
	<i>✎ Dạng 1. Tính phương sai và độ lệch chuẩn của bảng số liệu KHÔNG ghép lớp .</i>	1244
	<i>✎ Dạng 2. Tính phương sai và độ lệch chuẩn của bảng số liệu ghép lớp</i>	1247

6 CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC	1254
1 CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC	1254
A Tóm tắt lí thuyết	1254
1 Khái niệm cung và góc lượng giác	1254
2 Số đo của cung và góc lượng giác	1255
B Các dạng toán	1256
📁 Dạng 1. Liên hệ giữa độ và radian	1256
📁 Dạng 2. Độ dài cung lượng giác	1257
📁 Dạng 3. Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác	1259
C Câu hỏi trắc nghiệm	1268
2 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG	1276
A Tóm tắt lí thuyết	1276
1 Định nghĩa	1276
2 Hệ quả	1276
3 Ý nghĩa hình học của tang và côtang	1277
4 Công thức lượng giác cơ bản	1277
5 Giá trị lượng giác của các cung có liên quan đặc biệt	1278
B Các dạng toán	1279
📁 Dạng 1. Dấu của các giá trị lượng giác	1279
📁 Dạng 2. Tính giá trị lượng giác của một cung	1282
📁 Dạng 3. Sử dụng cung liên kết để tính giá trị lượng giác	1285
📁 Dạng 4. Rút gọn biểu thức và chứng minh đẳng thức	1287
C Câu hỏi trắc nghiệm	1292
3 CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC	1325
A Công thức cộng	1325
📁 Dạng 1. Công thức cộng	1325
B Công thức nhân đôi	1329
C Các dạng toán	1329
📁 Dạng 2. Tính các giá trị lượng giác của các góc cho trước	1329
📁 Dạng 3. Rút gọn biểu thức cho trước	1330
📁 Dạng 4. Chứng minh đẳng thức lượng giác	1330
D Công thức biến đổi	1333
📁 Dạng 5. Biến đổi một biểu thức thành một tổng hoặc thành một tích	1333
📁 Dạng 6. Chứng minh một đẳng thức lượng giác có sử dụng nhóm công thức biến đổi	1337
📁 Dạng 7. Dùng công thức biến đổi để tính giá trị (rút gọn) của một biểu thức lượng giác	1342
📁 Dạng 8. Nhận dạng tam giác. Một số hệ thức trong tam giác	1346
E Câu hỏi trắc nghiệm	1361

II HÌNH HỌC

1394

1 VEC-TƠ

1395

1	CÁC ĐỊNH NGHĨA	1395
A	Tóm tắt lí thuyết	1395
1	Định nghĩa, sự xác định véc-tơ	1395
2	Hai véc-tơ cùng phương, cùng hướng	1396
3	Hai véc-tơ bằng nhau	1396
B	Các dạng toán	1397
	☞ Dạng 1. Xác định một véc-tơ, phương hướng của véc-tơ, độ dài của véc-tơ	1397
	☞ Dạng 2. Chứng minh hai véc-tơ bằng nhau	1399
C	Câu hỏi trắc nghiệm	1404
2	TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ	1421
A	Tóm tắt lí thuyết	1421
1	Định nghĩa tổng và hiệu hai véc-tơ	1421
2	Quy tắc hình bình hành	1422
3	Các tính chất của phép cộng, trừ hai véc-tơ	1422
B	Các dạng toán	1422
	☞ Dạng 1. Xác định véc-tơ	1422
	☞ Dạng 2. Xác định điểm thỏa đẳng thức véc-tơ cho trước	1426
	☞ Dạng 3. Tính độ dài của tổng và hiệu hai véc-tơ	1430
	☞ Dạng 4. Chứng minh đẳng thức véc-tơ	1434
C	Câu hỏi trắc nghiệm	1444
3	TÍCH CỦA MỘT VECTƠ VỚI MỘT SỐ	1494
A	Tóm tắt lí thuyết	1494
B	Các dạng toán	1495
	☞ Dạng 1. Các bài toán sử dụng định nghĩa và tính chất của phép nhân véc-tơ với một số.	1495
	☞ Dạng 2. Phân tích một véc-tơ theo hai véc-tơ không cùng phương	1497
	☞ Dạng 3. Chứng minh đẳng thức véc-tơ có chứa tích của véc-tơ với một số	1502
	☞ Dạng 4. Chứng minh tính thẳng hàng, đồng quy	1510
	☞ Dạng 5. Xác định M thỏa mãn đẳng thức véc-tơ	1513
C	Bài tập tổng hợp	1517
D	Câu hỏi trắc nghiệm	1524
4	HỆ TRỤC TỌA ĐỘ	1611
A	Tóm tắt lí thuyết	1611
B	Các dạng toán	1612
	☞ Dạng 1. Tìm tọa độ của một điểm và độ dài đại số của một véc-tơ trên trục	1612
	☞ Dạng 2. Xác định tọa độ của một véc-tơ và một điểm trên mặt phẳng tọa độ Oxy	1616
	☞ Dạng 3. Tính tọa độ trung điểm - trọng tâm	1619

	 <i>Dạng 4. Chứng minh ba điểm thẳng hàng, điểm thuộc đường thẳng</i>	1622
C	Bài tập tổng hợp	1627
D	Câu hỏi trắc nghiệm	1635
2	TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VEC-TƠ VÀ ỨNG DỤNG	1695
1	GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KỲ TỪ 0° ĐẾN 180°	1695
A	Tóm tắt lý thuyết	1695
	1 Giá trị lượng giác của một góc bất kỳ từ 0° đến 180°	1695
	2 Góc giữa hai vec-tơ	1696
B	Các dạng toán	1696
	 <i>Dạng 1. Tính các giá trị lượng giác</i>	1696
	 <i>Dạng 2. Tính giá trị các biểu thức lượng giác.</i>	1698
	 <i>Dạng 3. Chứng minh đẳng thức lượng giác</i>	1700
C	Câu hỏi trắc nghiệm	1706
2	TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ	1737
3	Tích vô hướng của hai vec-tơ	1737
A	Tóm tắt lý thuyết	1737
	1 Định nghĩa	1737
	2 Các tính chất của tích vô hướng	1737
	3 Biểu thức tọa độ của tích vô hướng	1738
	4 Ứng dụng	1738
B	Các dạng toán	1738
	 <i>Dạng 1. Các bài toán tính tích vô hướng của hai vec-tơ</i>	1738
	 <i>Dạng 2. Tính góc giữa hai vec-tơ -góc giữa hai đường thẳng-điều kiện vuông góc</i>	1742
	 <i>Dạng 3. Chứng minh đẳng thức về tích vô hướng hoặc về độ dài.</i>	1745
	 <i>Dạng 4. Ứng dụng của biểu thức tọa độ tích vô hướng vào tìm điểm thỏa mãn điều kiện cho trước</i>	1750
	 <i>Dạng 5. Tìm tọa độ các điểm đặc biệt trong tam giác - tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của một điểm lên đường thẳng</i>	1754
C	Câu hỏi trắc nghiệm	1758
4	HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ GIẢI TAM GIÁC	1827
A	Tóm tắt lý thuyết	1827
	1 Hệ thức lượng trong tam giác vuông	1827
	2 Định lý hàm số cosin, công thức trung tuyến.	1827
	3 Định lý sin	1828
	4 Các công thức diện tích tam giác	1828
B	Các dạng toán	1829
	 <i>Dạng 1. Một số bài tập giúp nắm vững lý thuyết</i>	1829
	 <i>Dạng 2. Xác định các yếu tố còn lại của một tam giác khi biết một số yếu tố về cạnh và góc của tam giác đó</i>	1835
	 <i>Dạng 3. Diện tích tam giác</i>	1840

Dạng 4. Chứng minh hệ thức liên quan giữa các yếu tố trong tam giác	1842
Dạng 5. Nhận dạng tam giác vuông	1847
Dạng 6. Nhận dạng tam giác cân	1850
Dạng 7. Nhận dạng tam giác đều.	1853
Dạng 8. Ứng dụng giải tam giác vào đo đạc	1855
C Câu hỏi trắc nghiệm	1861

3 PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG

1949

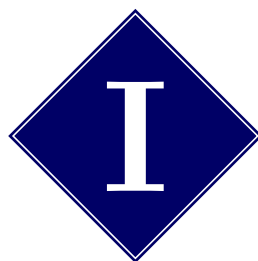
1 PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT VÀ PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ CỦA ĐƯỜNG THẲNG	1949
A Tóm tắt lý thuyết	1949
1 Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng	1949
2 Phương trình tham số của đường thẳng	1949
3 Phương trình chính tắc của đường thẳng	1949
4 Véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng	1949
5 Phương trình tổng quát của đường thẳng	1950
B Các dạng toán	1950
Dạng 1. Viết phương trình tham số của đường thẳng	1950
Dạng 2. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng	1951
Dạng 3. Vị trí tương đối và góc giữa hai đường thẳng	1954
Dạng 4. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng	1957
Dạng 5. Viết phương trình đường phân giác của góc do Δ_1 và Δ_2 tạo thành	1959
Dạng 6. Phương trình đường thẳng trong tam giác	1962
C Câu hỏi trắc nghiệm	1970
2 PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN	2079
A Tóm tắt lý thuyết	2080
1 Phương trình đường tròn khi biết tâm và bán kính	2080
2 Dạng khác của phương trình đường tròn	2080
3 Phương trình tiếp tuyến của đường tròn	2080
B Các dạng toán	2080
Dạng 1. Tìm tâm và bán kính đường tròn.	2080
Dạng 2. Lập phương trình đường tròn.	2082
Dạng 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn tại một điểm	2089
Dạng 4. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn đi một điểm	2092
Dạng 5. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn thỏa mãn điều kiện cho trước	2097
Dạng 6. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn	2104
Dạng 7. Vị trí tương đối của hai đường tròn.	2109
Dạng 8. Phương trình đường thẳng chứa tham số	2110
Dạng 9. Phương trình đường tròn chứa tham số	2113

	📁 Dạng 10. Tìm tọa độ một điểm thỏa một điều kiện cho trước	2117
C	Câu hỏi trắc nghiệm	2129
3	ĐƯỜNG ELIP	2178
A	Tóm tắt lý thuyết	2178
	1 Định nghĩa	2178
	2 Phương trình chính tắc của Elip	2178
	3 Hình dạng của elip	2179
B	Các dạng toán	2180
	📁 Dạng 1. Xác định các yếu tố của elip	2180
	📁 Dạng 2. Viết phương trình đường Elip	2183
	📁 Dạng 3. Tìm điểm thuộc elip thỏa điều kiện cho trước	2186
C	Câu hỏi trắc nghiệm	2197

III	ĐỀ KIỂM HKI	2225
	1 Đề HK1, Bình Phú, Hồ Chí Minh	2226
	2 Đề HK1 T10, Chuyên Trần Phú, Hải Phòng	2230
	3 Đề HK1, THPT Trần Phú, Hà Nội	2242
	4 HK1, Toán 10, Sở GD & ĐT Bắc Giang	2251
	5 Trung Học Thực Hành Sư Phạm-HCM	2259
	6 Phước Vĩnh, Bình Dương	2263
	7 HK1, Chuyên QH Huế	2271
	8 Đề HK1, Trần Quốc Tuấn, Gia Lai	2281
	9 Đề thi HK1 Toán 10, Nguyễn Việt Dũng, Cần Thơ	2284
	10 Đề HK1 Toán 10, Phước Thạnh, Tiền Giang	2290

IV	ĐỀ KIỂM HKII	2302
	11 Đề HK2 (2016-2017), Chuyên Hạ Long, Quảng Ninh	2303
	12 Đề HK2, THPT Long Mỹ, Hậu Giang	2318
	13 Đề HK2, THPT Hải An - Hải Phòng	2326
	14 Đề HK2, Sở Giáo dục và Đào tạo Vĩnh Phúc	2332
	15 Đề HK2, Sở Giáo dục & Đào tạo An Giang	2338
	16 Đề GHK2, THPT Chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai	2350
	17 Đề GHK2, THPT Nguyễn Trãi, Khánh Hòa	2363
	18 Đề HK2, THPT Quỳnh Lưu 4, Nghệ An	2370
	19 Đề HK2, THPT Nguyễn Trãi, Ba Đình	2385
	20 Đề HK2, THPT Chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai	2393

PHẦN



ĐẠI SỐ

Chương 1: MỆNH ĐỀ TẬP HỢP

§1 MỆNH ĐỀ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 MỆNH ĐỀ

Định nghĩa. Mệnh đề logic (gọi tắt là mệnh đề) là một câu khẳng định **hoặc đúng hoặc sai**.

- Một mệnh đề không thể vừa đúng vừa sai.
- Một câu khẳng định đúng gọi là **mệnh đề đúng**. Một câu khẳng định sai gọi là **mệnh đề sai**.

Những điểm cần lưu ý.

- Các câu hỏi, câu cảm thán, câu mệnh lệnh không phải là mệnh đề.
- Mệnh đề thường được kí hiệu bằng các chữ cái in hoa.
Ví dụ: Q: “6 chia hết cho 3”.
- Một câu mà chưa thể nói đúng hay sai nhưng chắc chắn nó chỉ đúng hoặc sai, không thể vừa đúng vừa sai cũng là một mệnh đề.
Ví dụ: “Có sự sống ngoài Trái Đất” là mệnh đề.
- Trong thực tế, có những mệnh đề mà tính đúng sai của nó luôn gắn với một thời gian và địa điểm cụ thể: đúng ở thời gian hoặc địa điểm này nhưng sai ở thời gian hoặc địa điểm khác. Nhưng ở bất kì thời điểm nào, địa điểm nào cũng luôn có giá trị chân lí đúng hoặc sai.
Ví dụ: Sáng nay bạn An đi học.

2 MỆNH ĐỀ CHỨA BIẾN

Định nghĩa. Những câu khẳng định mà tính **đúng-sai** của chúng tùy thuộc vào giá trị của biến gọi là những **mệnh đề chứa biến**.

Ví dụ: Cho $P(x) : x > x^2$ với x là số thực. Khi đó $P(2)$ là mệnh đề sai, $P\left(\frac{1}{2}\right)$ là mệnh đề đúng.

3 MỆNH ĐỀ PHỦ ĐỊNH

Định nghĩa. Cho mệnh đề P . Mệnh đề “**Không phải P** ” được gọi là mệnh đề phủ định của P và kí hiệu là $\overline{P}$.

- Mệnh đề P và mệnh đề phủ định $\bar{P}$ là hai câu khẳng định trái ngược nhau. Nếu P đúng thì $\bar{P}$ sai, nếu P sai thì $\bar{P}$ đúng.
- Mệnh đề phủ định của P có thể diễn đạt theo nhiều cách khác nhau. Chẳng hạn, xét mệnh đề P : “2 là số chẵn”. Khi đó, mệnh đề phủ định của P có thể phát biểu là $\bar{P}$: “2 không phải là số chẵn” hoặc “2 là số lẻ”.

4 MỆNH ĐỀ KÉO THEO VÀ MỆNH ĐỀ ĐẢO

Định nghĩa. Cho hai mệnh đề P và Q . Mệnh đề “Nếu P thì Q ” được gọi là **mệnh đề kéo theo**.

- Kí hiệu là $P \Rightarrow Q$.
- Mệnh đề kéo theo chỉ sai khi P đúng Q sai.
- $P \Rightarrow Q$ còn được phát biểu là “ P kéo theo Q ”, “ P suy ra Q ” hay “Vì P nên Q ”.

Chú ý

- Trong toán học, định lí là một mệnh đề đúng, thường có dạng: $P \Rightarrow Q$. Khi đó ta nói P là giả thiết, Q là kết luận của định lí, hoặc P là điều kiện đủ để có Q , hoặc Q là điều kiện cần để có P .
- Trong logic toán học, khi xét giá trị chân lí của mệnh đề $P \Rightarrow Q$ người ta không quan tâm đến mối quan hệ về nội dung của hai mệnh đề P, Q . Không phân biệt trường hợp P có phải là nguyên nhân để có Q hay không mà chỉ quan tâm đến tính đúng, sai của chúng.
Ví dụ: “Nếu mặt trời quay quanh trái đất thì Việt Nam nằm ở châu Âu” là một mệnh đề đúng. Vì ở đây hai mệnh đề P : “Mặt trời quay xung quanh trái đất” và Q : “Việt Nam nằm ở châu Âu” đều là mệnh đề sai.

Định nghĩa. Cho mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$. Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là **mệnh đề đảo** của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

! Mệnh đề đảo của một mệnh đề đúng không nhất thiết là một mệnh đề đúng.

5 MỆNH ĐỀ TƯƠNG ĐƯƠNG

Định nghĩa. Cho hai mệnh đề P và Q . Mệnh đề có dạng “ P nếu và chỉ nếu Q ” được gọi là mệnh đề tương đương.

- Kí hiệu là $P \Leftrightarrow Q$
- Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng khi cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ cùng đúng hoặc cùng sai. (Hay $P \Leftrightarrow Q$ đúng khi cả hai mệnh đề P và Q cùng đúng hoặc cùng sai)
- $P \Leftrightarrow Q$ còn được phát biểu là “ P khi và chỉ khi Q ”, “ P tương đương với Q ”, hay “ P là điều kiện cần và đủ để có Q ”.

! Hai mệnh đề P, Q tương đương với nhau hoàn toàn không có nghĩa là nội dung của chúng như nhau, mà nó chỉ nói lên rằng chúng có cùng giá trị chân lí (cùng đúng hoặc cùng sai).
Ví dụ: “Hình vuông có một góc tù khi và chỉ khi 100 là số nguyên tố” là một mệnh đề đúng.

6

CÁC KÍ HIỆU $\forall$ VÀ $\exists$

- Kí hiệu $\forall$ (với mọi): “ $\forall x \in X, P(x)$ ” hoặc “ $\forall x \in X : P(x)$ ”.
- Kí hiệu $\exists$ (tồn tại): “ $\exists x \in X, P(x)$ ” hoặc “ $\exists x \in X : P(x)$ ”.

Chú ý

- Phủ định của mệnh đề “ $\forall x \in X, P(x)$ ” là mệnh đề “ $\exists x \in X, \overline{P(x)}$ ”.
- Phủ định của mệnh đề “ $\exists x \in X, P(x)$ ” là mệnh đề “ $\forall x \in X, \overline{P(x)}$ ”.

B CÁC DẠNG TOÁN**Dạng 1. Mệnh đề có nội dung đại số và số học****🔗🔗🔗 BÀI TẬP DẠNG 1 🔗🔗🔗**

Ví dụ 1. Tìm mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau:

- A : “ $\sqrt{6}$ là số hữu tỉ”.
- B : “ n chia hết cho 3 và 5 thì n chia hết cho 15”.
- C : “ $\forall x \in \mathbb{N} : x^2 + x + 3 > 0$ ”.
- D : “ $\exists x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{R} : \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2$ ”.

Lời giải.

- $\overline{A}$: “ $\sqrt{6}$ không là số hữu tỉ”.
- $\overline{B}$: “ n không chia hết cho 3 hoặc n không chia hết cho 5 thì nó không chia hết cho 15”.
- $\overline{C}$: “ $\exists x \in \mathbb{N} : x^2 + x + 3 \leq 0$ ”.
- $\overline{D}$: “ $\forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{R} : \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \neq 2$ ”.

□

Ví dụ 2. Xét tính đúng - sai của các mệnh đề sau và tìm mệnh đề phủ định của nó:

- $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 6 > 0$.
- $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 = 0$.
- $\exists x \in \mathbb{R} : x > x^2$.

Lời giải.

- Mệnh đề đúng.
Phủ định là $\overline{A} : \exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 6 \leq 0$.
- Mệnh đề sai vì phương trình $x^2 + x + 1 = 0$ vô nghiệm trong $\mathbb{R}$.
Phủ định là $\overline{B} : “\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 \neq 0$ ”.
- Mệnh đề đúng, ví dụ $x = \frac{1}{2}$.
Phủ định là $\forall x \in \mathbb{R} : x \leq x^2$

□

Ví dụ 3. Điều chỉnh các mệnh đề sau để được các mệnh đề đúng:

- a) $\forall x \in \mathbb{R} : 3x - 1 = 0$.
- b) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x = 0$.
- c) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 < 0$.
- d) $\forall x \in \mathbb{R} : x > \frac{1}{x}$.

Lời giải.

- a) $\exists x \in \mathbb{R} : 3x - 1 = 0$.
- b) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x = 0$.
- c) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 > 0$ hoặc $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 > 0$.
- d) $\exists x \in \mathbb{R} : x > \frac{1}{x}$.

□

Ví dụ 4. Chứng minh “Nếu n^2 là số chẵn thì n là số chẵn.”

Lời giải.

Giả sử n là số lẻ $\Rightarrow n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$
 $\Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
 $\Rightarrow n^2$ là số lẻ (trái giả thiết).

Vậy n là số chẵn.

□

Ví dụ 5. Chứng minh rằng:

- a) Với mọi số nguyên n thì $n^3 - n$ chia hết cho 3.
- b) Với mọi số nguyên n thì $n(n - 1)(2n - 1)$ chia hết cho 6.

Lời giải.

a) Ta có: $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1) = (n - 1)n(n + 1)$.

Do $n - 1, n, n + 1$ là 3 số nguyên liên tiếp nên có 1 số chia hết cho 3.

Khi đó $(n - 1)n(n + 1)$ chia hết cho 3 hay $n^3 - n$ chia hết cho 3.

b) Ta có $n - 1, n$ là 2 số nguyên liên tiếp nên tích $n(n - 1)(2n - 1)$ chia hết cho 2.

Xét 3 số nguyên liên tiếp $n - 1, n, n + 1$, trong 3 số này có ít nhất 1 số chia hết cho 3.

- Nếu 1 trong 2 số $n - 1, n$ cho hết cho 3 thì tích $n(n - 1)(2n - 1)$ chia hết cho 3.
- Nếu $n + 1$ chia hết cho 3 thì $2n - 1 = 2(n + 1) - 3$ cũng chia hết cho 3. Suy ra tích $n(n - 1)(2n - 1)$ chia hết cho 3.

Vậy tích $n(n - 1)(2n - 1)$ vừa chia hết cho 2 vừa chia hết cho 3 nên chia hết cho 6.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Hãy xét tính đúng - sai của các mệnh đề sau đây và tìm mệnh đề phủ định của chúng:

- a) $A : “\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 1”$.

- b) $B : “\exists x \in \mathbb{Z} : 6x^2 - 13x + 6 = 0”$.
 c) $C : “\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} : y = x + 2”$.
 d) $D : “\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 0”$.

Lời giải.

- a) Mệnh đề sai, ví dụ như $x = 0$.

Phủ định là $\bar{A} : “\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 1”$.

- b) Mệnh đề sai vì $6x^2 - 13x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$, cả hai nghiệm đều không thuộc $\mathbb{Z}$.

Phủ định là $\bar{B} : “\forall x \in \mathbb{Z} : 6x^2 - 13x + 6 \neq 0”$.

- c) Mệnh đề đúng.

Phủ định là $\bar{C} : “\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N} : y \neq x + 2”$.

- d) Mệnh đề sai, ví dụ $x = 1, y = -2$.

Phủ định là $\bar{D} : “\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : \frac{x}{y} + \frac{y}{x} < 0”$.

□

Bài 2. Xét tính đúng - sai của các mệnh đề sau. Nếu mệnh đề sai hãy sửa lại cho đúng:

- a) $\forall x \in \mathbb{R} : x > 4 \Rightarrow x > 16$.
 b) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 36 \Rightarrow x > 6$.
 c) $\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 0$.
 d) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : \begin{cases} a > b \\ b > c \end{cases} \Leftrightarrow a > c$.
 e) $\forall a, b \in \mathbb{Z} : \begin{cases} a : 3 \\ b : 2 \end{cases} \Leftrightarrow ab : 6$.

Lời giải.

- a) Mệnh đề đúng.

- b) Mệnh đề sai, ví dụ $x = -7$.

Sửa lại là $\forall x \in \mathbb{R} : x > 6 \Rightarrow x^2 > 36$ hoặc $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 > 36 \Rightarrow x > 6$.

- c) Mệnh đề đúng.

- d) Mệnh đề $\begin{cases} a > b \\ b > c \end{cases} \Rightarrow a > c$ là đúng.

Mệnh đề $a > c \Rightarrow \begin{cases} a > b \\ b > c \end{cases}$ là sai, ví dụ như $a = 3, c = 1, b = 0$.

Như vậy mệnh đề $\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 0$ là sai.

Sửa lại mệnh đề đúng là $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : \begin{cases} a > b \\ b > c \end{cases} \Rightarrow a > c$.

e) Mệnh đề $\begin{cases} a:3 \\ b:2 \end{cases} \Rightarrow ab:6$ là đúng.

Mệnh đề $ab:6 \Rightarrow \begin{cases} a:3 \\ b:2 \end{cases}$ là sai, ví dụ như $a = 6, b = 1$.

Như vậy mệnh đề $\forall a, b \in \mathbb{Z} : \begin{cases} a:3 \\ b:2 \end{cases} \Leftrightarrow ab:6$ là sai.

Sửa lại mệnh đề đúng là $\forall a, b \in \mathbb{Z} : \begin{cases} a:3 \\ b:2 \end{cases} \Rightarrow ab:6$

□

Bài 3. Xét tính đúng - sai các mệnh đề sau và tìm mệnh đề phủ định của chúng:

a) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} : (a + b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

b) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} : a^2 + 2 > b^2 + 1$.

c) $\exists a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} : a + b > 1$.

d) $\exists a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} : a^2 < b$.

e) $\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} : a^2 = b + 1$.

f) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ mà $a + b + c = 0$ thì $-\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = ab + bc + ca$.

Lời giải.

a) Mệnh đề sai vì $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Phủ định là $\exists a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} : (a + b)^2 \neq a^2 + 2ab + b^2$.

b) Mệnh đề sai, ví dụ $a = 0, b = 2$.

Phủ định là $\exists a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} : a^2 + 2 \leq b^2 + 1$.

c) Mệnh đề đúng.

Phủ định là $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} : a + b \leq 1$.

d) Mệnh đề sai, ví dụ $a = 3, b = 1$.

Phủ định là $\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} : a^2 \geq b$.

e) Mệnh đề đúng, số b xác định bởi $b = a^2 - 1, \forall a \in \mathbb{R}$.

Phủ định là $\exists a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} : a^2 \neq b + 1$.

f) Mệnh đề đúng vì $a + b + c = 0 \Leftrightarrow (a + b + c)^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 0$
 $\Leftrightarrow -\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = ab + bc + ca$.

Phủ định là $\exists a, b, c \in \mathbb{R}$ mà $a + b + c \neq 0$ thì $-\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \neq ab + bc + ca$.

□

Bài 4. Chứng minh rằng $\forall a, b > 0 : \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Lời giải.

Giả sử: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} < 2 \Rightarrow a^2 + b^2 < 2ab \Rightarrow (a - b)^2 < 0$
 (vô lý).

□

Vậy $\forall a, b > 0 : \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Bài 5.

- a) Nếu $a + b < 2$ thì một trong hai số a và b nhỏ hơn 1.
 b) Nếu $x \neq -1$ và $y \neq -1$ thì $x + y + xy \neq -1$.
 c) Nếu tích của hai số tự nhiên là một số lẻ thì tổng của chúng là một số chẵn.
 d) Nếu $x^2 + y^2 = 0$ thì $x = 0$ và $y = 0$.

Lời giải.

- a) Giả sử $a \geq 1$ và $b \geq 1$, suy ra $a + b \geq 2$ (trái giả thiết).

Vậy nếu $a + b < 2$ thì một trong hai số a và b nhỏ hơn 1.

- b) Giả sử: $x + y + xy = 1 \Rightarrow x + 1 + y + xy = 0 \Rightarrow (x + 1)(y + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$ (trái giả thiết).

Vậy nếu $x \neq -1$ và $y \neq -1$ thì $x + y + xy \neq -1$.

- c) Giả sử tổng $a + b$ là số lẻ thì một trong hai số a, b có 1 số là số lẻ còn số còn lại là số chẵn nên tích $a.b$ là số chẵn (trái giả thiết).

Vậy nếu tích của hai số tự nhiên là một số lẻ thì tổng của chúng là một số chẵn.

- d) Giả sử $x \neq 0$ hoặc $y \neq 0$.
- Nếu $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 > 0$ (trái giả thiết).
 - Nếu $y \neq 0 \Rightarrow y^2 > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 > 0$ (trái giả thiết).

Vậy nếu $x^2 + y^2 = 0$ thì $x = 0$ và $y = 0$.

□

Bài 6. Chứng minh rằng $\begin{cases} |x| < 1 \\ |y| < 1 \end{cases} \Rightarrow |x + y| < |1 + xy|$.

Lời giải.

Giả sử $|x + y| \geq |1 + xy| \Rightarrow (|x + y|)^2 \geq (|1 + xy|)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy \geq 1 + x^2y^2 + 2xy$
 $\Rightarrow (1 - x^2)(1 - y^2) \leq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} 1 - x^2 \leq 0 \\ 1 - y^2 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \\ 1 - y^2 \leq 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} |x| \geq 1 \\ |y| \leq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} |x| \leq 1 \\ |y| \geq 1 \end{cases} \end{cases} \text{ (trái giả thiết)}$$

Vậy $\begin{cases} |x| < 1 \\ |y| < 1 \end{cases} \Rightarrow |x + y| < |1 + xy|$.

□

Bài 7. Chứng minh $\sqrt{a} + \sqrt{a + 2} < 2\sqrt{a + 1}, \forall a > 0$.

Lời giải.

Giả sử $\sqrt{a} + \sqrt{a + 2} \geq 2\sqrt{a + 1}, \forall a > 0$
 $\Rightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{a + 2})^2 \geq (2\sqrt{a + 1})^2$
 $\Rightarrow a + 2\sqrt{a(a + 2)} + a + 2 \geq 4(a + 1)$
 $\Rightarrow \sqrt{a(a + 2)} \geq a + 1, \text{ với } a + 1 > 0$

$$\Rightarrow a^2 + 2a \geq a^2 + 2a + 1$$

$$\Rightarrow 0 > 1 \text{ (vô lí)}$$

$$\text{Vậy } \forall a > 0 : \sqrt{a} + \sqrt{a+2} < 2\sqrt{a+1}. \quad \square$$

Bài 8. Chứng minh rằng nếu $ac > 2(b+d)$ thì ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm

$$x^2 + ax + b = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + cx + d = 0 \quad (2)$$

Lời giải.

Giả sử cả hai phương trình đều vô nghiệm, khi đó ta có

$$\begin{cases} \Delta_1 = a^2 - 4b < 0 \\ \Delta_2 = c^2 - 4d < 0 \end{cases} \Rightarrow a^2 + c^2 < 4(b+d)$$

$$\Rightarrow a^2 + c^2 < 2ac \text{ (do } 2(b+d) \leq ac)$$

$$\Rightarrow (a-c)^2 < 0 \text{ (vô lí).}$$

Vậy ít nhất 1 trong 2 phương trình đã cho có nghiệm. $\square$

Bài 9. Chứng minh khi ta nhốt $n+1$ con gà vào n cái lồng thì có ít nhất 1 lồng chứa ít nhất 2 con gà.

Lời giải.

Giả sử không có lồng nào chứa nhiều hơn 1 con gà. Khi đó số gà sẽ không nhiều hơn số lồng. Vậy có nhiều nhất là n con gà. Điều này mâu thuẫn với giả thiết có $n+1$ con gà.

Vậy khi ta nhốt $n+1$ con gà vào n cái lồng thì có ít nhất 1 lồng chứa ít nhất 2 con gà. $\square$

Bài 10. Chứng minh với mọi số tự nhiên n :

a) $n^2 + n + 1$ không chia hết cho 9.

b) $n^2 + 11n + 39$ không chia hết cho 49.

Lời giải.

a) Giả sử $n^2 + n + 1$ chia hết cho 9, khi đó $n^2 + n + 1 = 9k$, với k là số nguyên. Như vậy phương trình $n^2 + n + 1 - 9k = 0$ (1) sẽ có nghiệm nguyên.

Xét $\Delta = 1 - 4(1 - 9k) = 36k - 3 = 3(12k - 1)$. Ta thấy Δ chia hết cho 3, $12k - 1$ không chia hết cho 3 nên Δ không chia hết cho 9, do đó Δ không là số chính phương nên phương trình (1) không có nghiệm nguyên (mâu thuẫn giả thiết).

Vậy $n^2 + n + 1$ không chia hết cho 9.

b) Giả sử $n^2 + 11n + 39$ chia hết cho 49, khi đó $n^2 + 11n + 39 = 49k$, với k là số nguyên. Như vậy phương trình $n^2 + 11n + 39 - 49k = 0$ (1) sẽ có nghiệm nguyên.

Xét $\Delta = 11^2 - 4(39 - 49k) = 196k - 35 = 7(28k - 5)$. Ta thấy Δ chia hết cho 7, $28k - 5$ không chia hết cho 7 nên Δ không chia hết cho 49, do đó Δ không là số chính phương nên phương trình (1) không có nghiệm nguyên (mâu thuẫn giả thiết).

Vậy $n^2 + 11n + 39$ không chia hết cho 49. $\square$

📁 Dạng 2. Mệnh đề có nội dung hình học

🔗🔗🔗 BÀI TẬP DẠNG 2 🔗🔗🔗

Ví dụ 1. Xét tính đúng-sai của các mệnh đề sau:

- a) P : “Hai véc-tơ bằng nhau thì có độ dài bằng nhau”.
- b) Q : “Hai véc-tơ bằng nhau nếu chúng có độ dài bằng nhau”.

Lời giải.

- a) Mệnh đề P là mệnh đề đúng theo định nghĩa hai véc-tơ bằng nhau.
- b) Mệnh đề Q là mệnh đề sai. Hai véc-tơ bằng nhau nếu chúng cùng hướng và có độ dài bằng nhau. Như vậy còn thiếu điều kiện về hướng của hai véc-tơ.

□

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC . Xét tính đúng-sai của các mệnh đề sau:

- a) Nếu $AB^2 + AC^2 = BC^2$ thì tam giác ABC vuông tại B .
- b) Nếu $AB > AC$ thì $\widehat{C} > \widehat{B}$.
- c) Tam giác ABC đều khi và chỉ khi nó thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $AB = AC$ và $\widehat{A} = 60^\circ$.

Lời giải.

- a) Mệnh đề sai. Mệnh đề đúng là: “Nếu $AB^2 + AC^2 = BC^2$ thì tam giác ABC vuông tại A ”.
- b) Mệnh đề đúng theo mối liên hệ giữa góc và cạnh đối diện trong tam giác.
- c) Mệnh đề đúng theo dấu hiệu nhận biết tam giác đều.

□

Ví dụ 3. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Xét tính đúng-sai của các mệnh đề sau:

- a) Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật khi và chỉ khi nó thỏa mãn $AC = BD$.
- b) Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật nếu nó có ba góc vuông.

Lời giải.

- a) Mệnh đề sai. Mệnh đề có cấu trúc $P \Leftrightarrow Q$ trong đó mệnh đề $P \Rightarrow Q$: “Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật thì $AC = BD$ ” là mệnh đề đúng còn mệnh đề $Q \Rightarrow P$ là mệnh đề sai.
- b) Mệnh đề đúng, theo dấu hiệu nhận biết hình chữ nhật.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Xét tính đúng-sai của các mệnh đề sau:

- a) Hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng với véc-tơ $\vec{c}$ thì $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.
- b) Trong ba véc-tơ khác véc-tơ $\vec{0}$ và cùng phương thì có ít nhất hai véc-tơ cùng hướng.

Lời giải.

- a) Mệnh đề đúng theo cách hiểu về hướng của véc-tơ.

- b) Mệnh đề đúng. Thật vậy: Xét ba véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ khác véc-tơ $\vec{0}$ và cùng phương. Khi đó có 2 trường hợp:

Trường hợp 1. Hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng

Trường hợp này phù hợp kết luận.

Trường hợp 2. Hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng

Khi đó nếu véc-tơ $\vec{c}$ ngược hướng với véc-tơ $\vec{a}$ thì $\vec{c}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

□

Bài 2. Xét tính đúng-sai của các mệnh đề sau:

- a) Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng có diện tích bằng nhau.
 b) Một tam giác là tam giác đều khi và chỉ khi nó có một góc bằng 60° và hai đường trung tuyến bằng nhau.

Lời giải.

- a) Mệnh đề sai vì hai tam giác bằng nhau thì có diện tích bằng nhau nhưng ngược lại, hai tam giác có diện tích bằng nhau thì có thể không bằng nhau. Ví dụ một tam giác vuông có cạnh góc vuông là 2 và 8, tam giác vuông thứ hai có cạnh góc vuông là 4 và 4 có cùng diện tích nhưng hai tam giác không bằng nhau.
 b) Mệnh đề đúng. Thật vậy, xét tam giác ABC tùy ý.
 +) Nếu tam giác ABC đều thì cả ba góc bằng 60° và cặp trung tuyến nào cũng bằng nhau.
 +) Ngược lại, giả sử có hai trung tuyến BM và CN bằng nhau. Khi đó hình thang $BCMN$ có hai đường chéo bằng nhau nên nó là hình thang cân. Do đó tam giác ABC có $\widehat{B} = \widehat{C}$ và góc một góc bằng 60° nên tam giác ABC đều.

□

Bài 3. Xét tính đúng-sai của các mệnh đề sau:

- a) Một tứ giác là hình bình hành khi và chỉ khi nó có một cặp cạnh đối song song và bằng nhau.
 b) Một tứ giác là hình bình hành khi và chỉ khi nó có hai đường chéo bằng nhau.

Lời giải.

- a) Mệnh đề đúng, theo dấu hiệu nhận biết hình bình hành.
 b) Mệnh đề sai. Chẳng hạn hình thang cân có hai đường chéo bằng nhau nhưng không nhất thiết phải là hình bình hành.

□

Bài 4. Cho tứ giác $ABCD$. Xét hai mệnh đề:

P : “Tứ giác $ABCD$ là hình vuông”.

Q : “Tứ giác $ABCD$ là hình thoi có hai đường chéo bằng nhau”.

Phát biểu mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ bằng hai cách và cho biết mệnh đề đó đúng hay sai.

Lời giải.

Phát biểu mệnh đề:

Cách 1. “Tứ giác $ABCD$ là hình vuông khi và chỉ khi nó là hình thoi có hai đường chéo bằng nhau”.

Cách 2. “Tứ giác $ABCD$ là hình vuông là điều kiện cần và đủ để nó là hình thoi có hai đường chéo bằng nhau”.

Mệnh đề này đúng theo tính chất và dấu hiệu nhận biết hình vuông.

□

Bài 5. Xét các tập hợp:

X: tập hợp các tứ giác.

A: Tập hợp các hình vuông.

B: Tập hợp các hình chữ nhật.

D: Tập hợp các hình thoi.

E: Tập hợp các tứ giác có trục đối xứng.

Phát biểu thành lời nội dung các mệnh đề sau và xét tính đúng sai của chúng.

- a) $\forall x \in X, x \in B \Rightarrow x \in A$.
- b) $\forall x \in X, x \in A \Rightarrow x \in D$.
- c) $\forall x \in X, x \in E \Rightarrow x \in B$.
- d) $\forall x \in X, x \in D \Rightarrow x \in E$.
- e) $\exists x \in E: x \notin B$.

Lời giải.

- a) Phát biểu: “Mọi hình chữ nhật đều là hình vuông”.

Mệnh đề này sai vì hai cạnh của hình chữ nhật không phải lúc nào cũng bằng nhau.

- b) Phát biểu: “Mọi hình vuông đều là hình thoi”.

Mệnh đề này đúng vì mọi hình vuông đều là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.

- c) Phát biểu: “Mọi tứ giác có trục đối xứng đều là hình chữ nhật”.

Mệnh đề này sai, ví dụ hình thang cân có trục đối xứng nhưng hình thang cân có các góc có số đo không nhất thiết phải bằng 90° .

- d) Phát biểu: “Mọi hình thoi đều có trục đối xứng”.

Mệnh đề này đúng vì mỗi hình thoi đều có *ít nhất* hai trục đối xứng là hai đường chéo.

- e) Phát biểu: “Tồn tại một tứ giác có trục đối xứng mà không phải là hình chữ nhật”.

Mệnh đề này đúng, chẳng hạn hình thang cân có góc ở đáy bằng 60° .

□

Dạng 3. Thành lập mệnh đề - Mệnh đề phủ định

- a) Phát biểu thành lời khi cho cho một mệnh đề dạng kí hiệu.
- b) Dùng kí hiệu $\forall, \exists$ phát biểu một mệnh đề.
- c) Xét tính Đúng – Sai của các mệnh đề.
- d) Phủ định một mệnh đề.

BÀI TẬP DẠNG 3**Ví dụ 1.** Phát biểu thành lời các mệnh đề sau đây:

- a) “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 0$ ”.
- b) “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < \frac{1}{2}$ ”.
- c) “ $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{x} \geq x$ ”.
- d) “ $\exists x \in \mathbb{R}, \sqrt{x} > x$ ”.

Lời giải.

- a) Mọi số thực đều có bình phương khác không.
- b) Tồn tại một số thực mà bình phương của nó nhỏ hơn $\frac{1}{2}$.
- c) Mọi số thực đều có nghịch đảo lớn hơn hoặc bằng chính nó.
- d) Tồn tại một số thực sao cho căn bậc hai của nó lớn hơn nó.

□

Ví dụ 2. Dùng các kí hiệu $\forall, \exists$ phát biểu các mệnh đề sau:

- a) Tồn tại một số tự nhiên chia hết cho 9.
- b) Mọi số không âm đều lớn hơn không.
- c) Tồn tại một số thực không là số dương cũng không là số âm.

Lời giải.

- a) “ $\exists n \in \mathbb{N}, n : 9$ ”.
- b) “ $\forall x \geq 0, x > 0$ ”.
- c) “ $\exists x \in \mathbb{R}, x = 0$ ”.

□

Ví dụ 3. Xét tính Đúng – Sai của các mệnh đề sau:

- a) “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$ ”.
- b) “ $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 > n$ ”.

Lời giải.

- a) $\exists x = 0 \in \mathbb{R}, 0^2 = 0 \Rightarrow$ Mệnh đề sai.
- b) $\exists n = 1 \in \mathbb{N}, 1^2 = 1 \Rightarrow$ Mệnh đề sai.

□

Ví dụ 4. Phủ định các mệnh đề sau đây:

- a) Tất cả bài tập trong sách này đều dễ.
- b) Có ít nhất một hình thang nội tiếp được trong đường tròn.
- c) “ $\exists x \in \mathbb{R}, x + 3 = 5$ ”.
- d) “ $\forall x \in \mathbb{R}, x > 5$ ”.

Lời giải.

- a) Tồn tại một bài tập trong sách không dễ.
- b) Mọi hình thang đều không nội tiếp được trong đường tròn.
- c) “ $\forall x \in \mathbb{R}, x + 3 \neq 5$ ”.
- d) “ $\exists x \in \mathbb{R}, x \leq 5$ ”.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Phát biểu thành lời các mệnh đề sau đây:

- a) “ $\exists x \in \mathbb{R}, \frac{1}{x} = x$ ”.

- b) " $\exists n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n} \in \mathbb{N}$ ".
- c) " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 4x + 8 > 0$ ".
- d) " $\exists x \in \mathbb{Z}, x^2 + 5x \leq 0$ ".

Lời giải.

- a) Tồn tại một số thực mà nghịch đảo của nó bằng với nó.
- b) Tồn tại số tự nhiên sao cho nghịch đảo của nó thuộc tập số tự nhiên.
- c) Với mọi số thực ta đều có bình phương của nó hiệu bốn lần nó và cộng thêm 8 lớn hơn 0.
- d) Tồn tại một số nguyên mà tổng bình phương của nó với năm lần nó bé hơn hoặc bằng 0.

□

Bài 2. Dùng các kí hiệu $\forall, \exists$ phát biểu các mệnh đề sau:

- a) Có một số tự nhiên khác không mà căn bậc hai của nó thuộc tập số tự nhiên khác không.
- b) Mọi số nguyên đều là số tự nhiên.
- c) Có một số tự nhiên không là số nguyên.
- d) Mọi số tự nhiên đều là số thực.
- e) Tồn tại một số thực không có nghịch đảo.

Lời giải.

- a) " $\exists n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n} \in \mathbb{N}^*$ ".
- b) " $\forall n \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ ".
- c) " $\exists n \in \mathbb{N}, n \notin \mathbb{Z}$ ".
- d) " $\forall n \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{R}$ ".
- e) " $\exists x \in \mathbb{R}, \text{không tồn tại } \frac{1}{x}$ ".

□

Bài 3. Phủ định các mệnh đề sau:

- a) Mọi học sinh trong lớp em đều biết dùng máy tính.
- b) Có một học sinh trong lớp em chưa được leo núi.
- c) Mọi học sinh trong lớp em không biết đá bóng.
- d) Có một học sinh trong lớp em thích bóng chuyền.

Lời giải.

- a) Có một học sinh trong lớp em không biết dùng máy tính.
- b) Mọi học sinh trong lớp em đều được leo núi.
- c) Có một học sinh trong lớp em biết đá bóng.
- d) Mọi học sinh trong lớp em không thích bóng chuyền.

□

Bài 4. Xét xem các mệnh đề sau đúng hay sai và nêu các mệnh đề phủ định của chúng.

- a) " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 7x + 15 > 0$ ".
- b) " $\exists x \in \mathbb{R}, x^3 + 2x^2 + 8x + 16 = 0$ ".
- c) " $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, 2x + 3y = 5$ ".
- d) " $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 - 2x - 4y = -1$ ".

Lời giải.

a) Ta có:

$$x^2 - 7x + 15 = x^2 - 2 \cdot \frac{7}{2} \cdot x + \frac{49}{4} + 15 - \frac{49}{4} = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \geq \frac{11}{4} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vậy mệnh đề đúng.

Mệnh đề phủ định: “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 7x + 15 \leq 0$ ”.

b) $\exists x = -2 \in \mathbb{R}, (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 + 8 \cdot (-2) + 16 = 0 \Rightarrow$ Mệnh đề đúng.

Mệnh đề phủ định: “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 + 2x^2 + 8x + 16 \neq 0$ ”.

c) $\exists x = 0 \in \mathbb{R}, \exists y = 0 \in \mathbb{R}, 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0 \neq 0 \Rightarrow$ Mệnh đề sai.

Mệnh đề phủ định: “ $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, 2x + 3y \neq 0$ ”.

d) $\exists x = 1 \in \mathbb{R}, \exists y = 0 \in \mathbb{R}, 1^2 + 0^2 - 2 \cdot 1 - 4 \cdot 0 = -1 \Rightarrow$ Mệnh đề đúng.

Mệnh đề phủ định: “ $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 - 2x - 4y = -1$ ”.

□

Bài 5. Tìm hai giá trị thực của x để từ mỗi câu sau ta được một mệnh đề đúng và một mệnh đề sai.

a) $x^2 < x$.

b) $x = 5$.

c) $x^2 > 0$.

d) $x > \frac{1}{x}$.

Lời giải.

a) Với $x = \frac{1}{2}$ thì mệnh đề đúng.

Với $x = 1$ thì mệnh đề sai.

b) Với $x = 5$ thì mệnh đề đúng.

Với $x = 0$ thì mệnh đề sai.

c) Với $x = 1$ thì mệnh đề đúng.

Với $x = 0$ thì mệnh đề sai.

d) Với $x = 2$ thì mệnh đề đúng.

Với $x = \frac{1}{2}$ thì mệnh đề sai.

□

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 6. Chứng minh rằng: Nếu nhốt 25 con thỏ vào 6 cái chuồng thì sẽ có ít nhất một chuồng chứa nhiều hơn 4 con thỏ.

Lời giải.

Ta định nghĩa mệnh đề Q .

Q : Ít nhất 1 chuồng chứa nhiều hơn 4 con thỏ.

Suy ra mệnh đề $\overline{Q}$: Tất cả các chuồng chứa ít hơn hoặc bằng 4 con thỏ.

Giả sử mệnh đề $\overline{Q}$ đúng, tức là tất cả các chuồng chứa ít hơn hoặc bằng 4 con thỏ. Khi đó số thỏ sẽ có tối đa là $4 \cdot 6 = 24$ con, mâu thuẫn với giả thiết số thỏ là 25 con.

Suy ra mệnh đề $\overline{Q}$ sai, do đó mệnh đề Q đúng.

Vậy nếu nhốt 25 con thỏ vào 6 cái chuồng thì sẽ có ít nhất 1 chuồng chứa nhiều hơn 4 con thỏ. □

Bài 7. Cho các mệnh đề chứa biến $P(n)$: “ n là số chẵn” và $Q(n)$: “ $7n + 4$ là số chẵn”.

- a) Phát biểu và chứng minh mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow Q(n)$ ”.
- b) Phát biểu và chứng minh mệnh đề đảo của mệnh đề ở câu 1.

Lời giải.

- a) Với mọi số tự nhiên n , nếu n là số chẵn thì $3n + 4$ cũng là số chẵn.

Chứng minh:

Với mọi số tự nhiên n chẵn, ta có: $3n$ và 4 là các số chẵn. Suy ra $3n + 4$ là một số chẵn.

Vậy mệnh đề đúng.

- b) Với mọi số tự nhiên n , nếu $3n + 4$ là số chẵn thì n cũng là số chẵn.

Chứng minh:

Với mọi số tự nhiên n mà $3n + 4$ là số chẵn thì ta suy ra $3n$ là số chẵn (do 4 là số chẵn). Khi đó n là một số chẵn.

Vậy mệnh đề đảo đúng.

□

C CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong các câu sau, câu nào không phải là mệnh đề?

- A. Buồn ngủ quá!
- B. Hình thoi có hai đường chéo vuông góc với nhau.
- C. 8 là số chính phương.
- D. Băng Cốc là thủ đô của Mianma.

Lời giải.

Câu cảm thán không phải là mệnh đề

Chọn đáp án **A**

☐

Câu 2. Trong các câu sau, có bao nhiêu câu không phải là mệnh đề?

- a) Huế là một thành phố của Việt Nam.
- b) Sông Hương chảy ngang qua thành phố Huế.
- c) Hãy trả lời câu hỏi này!
- d) $5 + 19 = 24$.
- e) $6 + 81 = 25$.
- f) Bạn có rồi tối nay không?
- g) $x + 2 = 11$

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải.

Các câu c), f) không phải là mệnh đề vì không phải là một câu khẳng định.

Chọn đáp án **B**

☐

Câu 3. Trong các câu sau, có bao nhiêu câu là mệnh đề?

- a) Hãy đi nhanh lên!
- b) Hà Nội là thủ đô của Việt Nam.
- c) $5 + 7 + 4 = 15$.
- d) Năm 2018 là năm nhuận.

A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.

Lời giải.

Câu a) là câu cảm thán không phải là mệnh đề

Chọn đáp án **B**

☐

Câu 4. Trong các câu sau, có bao nhiêu câu là mệnh đề?

- a) Cố lên, sắp đối rồi!
- b) Số 15 là số nguyên tố.
- c) Tổng các góc của một tam giác là 180°
- d) x là số nguyên dương.

A. 3. B. 2. C. 4. D. 1.

Lời giải.

Câu a) không là mệnh đề

Chọn đáp án **A**

☐

Câu 5. Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề?

- A.** Đi ngủ đi!.
- B.** Trung Quốc là nước đông dân nhất thế giới.
- C.** Bạn học trường nào?.
- D.** Không được làm việc riêng trong giờ học.

Lời giải.

Chọn đáp án **B**

☐

Câu 6. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề **đúng**?

- A. Tổng của hai số tự nhiên là một số chẵn khi và chỉ khi cả hai số đều là số chẵn.
B. Tích của hai số tự nhiên là một số chẵn khi và chỉ khi cả hai số đều là số chẵn.
C. Tổng của hai số tự nhiên là một số lẻ khi và chỉ khi cả hai số đều là số lẻ.
D. Tích của hai số tự nhiên là một số lẻ khi và chỉ khi cả hai số đều là số lẻ.

Lời giải.

B là mệnh đề sai: Ví dụ: $2 \cdot 3 = 6$ là số chẵn nhưng 3 là số lẻ.

C là mệnh đề sai: Ví dụ: $1 + 3 = 4$ là số chẵn nhưng 1 và 3 là số lẻ.

Chọn đáp án **B**

☐

Câu 7. Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề **đúng**?

- A. Nếu $a \geq b$ thì $a^2 \geq b^2$.
 B. Nếu a chia hết cho 9 thì a chia hết cho 3.
 C. Nếu em chăm chỉ thì em thành công.
 D. Nếu một tam giác có một góc bằng 60° thì tam giác đó đều.

Lời giải.

Mệnh đề A là một mệnh đề sai vì $b \leq a < 0$ thì $a^2 \leq b^2$.

Mệnh đề B là mệnh đề đúng. Vì $a:9 \Rightarrow \begin{cases} a = 9n, n \in \mathbb{Z} \\ 9:3 \end{cases} \Rightarrow a:3$.

Câu C chưa là mệnh đề vì chưa khẳng định được tính đúng, sai.

Mệnh đề D là mệnh đề sai vì chưa đủ điều kiện để khẳng định một tam giác là đều.

Chọn đáp án **B**

☐

Câu 8. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề **sai**?

- A. $-\pi < -2 \Leftrightarrow \pi^2 < 4$.
 B. $\pi < 4 \Leftrightarrow \pi^2 < 16$.
 C. $\sqrt{23} < 5 \Rightarrow 2\sqrt{23} < 2.5$.
 D. $\sqrt{23} < 5 \Rightarrow -2\sqrt{23} > -2.5$.

Lời giải.

Ta có: $\pi^2 < 4 \Leftrightarrow |\pi| < 2 \Leftrightarrow -2 < \pi < 2$ Suy ra mệnh đề $-\pi < -2 \Leftrightarrow \pi^2 < 4$ sai.

Chọn đáp án 

☐

Câu 9. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề **sai**?

- A.** Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng đồng dạng và có một góc bằng nhau.
- B.** Một tứ giác là hình chữ nhật khi và chỉ khi chúng có 3 góc vuông.
- C.** Một tam giác là vuông khi và chỉ khi nó có một góc bằng tổng hai góc còn lại.
- D.** Một tam giác là đều khi và chỉ khi chúng có hai đường trung tuyến bằng nhau và có một góc bằng 60° .

Lời giải.

Đáp án A sai vì hai tam giác đồng dạng thì các góc tương ứng bằng nhau. Hai tam giác đồng dạng bằng nhau khi chúng có cặp cạnh tương ứng bằng nhau

Chọn đáp án **A**

□

Câu 10. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào có mệnh đề đảo **đúng**?

- A. Nếu số nguyên n có chữ số tận cùng là 5 thì số nguyên n chia hết cho 5.
- B. Nếu tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
- C. Nếu tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật thì tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo bằng nhau.
- D. Nếu tứ giác $ABCD$ là hình thoi thì tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau.

Lời giải.

Xét mệnh đề đảo của đáp án A: “Nếu số nguyên n chia hết cho 5 thì số nguyên n có chữ số tận cùng là 5”. Mệnh đề này sai vì số nguyên n cũng có thể có chữ số tận cùng là 0. Xét mệnh đề đảo của đáp án B: “Nếu tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường”. Mệnh đề này đúng.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 11. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào có mệnh đề đảo **đúng**?

- A. Nếu số nguyên n có tổng các chữ số bằng 9 thì số tự nhiên n chia hết cho 3.
- B. Nếu $x > y$ thì $x^2 > y^2$.
- C. Nếu $x = y$ thì $t \cdot x = t \cdot y$.
- D. Nếu $x > y$ thì $x^3 > y^3$.

Lời giải.

Xét mệnh đề đảo của đáp án A: “Nếu số tự nhiên n chia hết cho 3 thì số nguyên n có tổng các chữ số bằng 9”. Mệnh đề này sai vì tổng các chữ số của n phải chia hết cho 9 thì n mới chia hết cho 9.

Xét mệnh đề đảo của đáp án B: “Nếu $x^2 > y^2$ thì $x > y$ ” sai vì $x^2 > y^2 \Leftrightarrow |x| > |y| \Leftrightarrow \begin{cases} x > y \\ x < -y \end{cases}$.

Xét mệnh đề đảo của đáp án C: “Nếu $t \cdot x = t \cdot y$ thì $x = y$ ” sai với $t = 0 \Rightarrow x, y \in \mathbb{R}$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 12. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề sai?

- A. " ABC là tam giác đều $\Leftrightarrow$ tam giác ABC cân".
- B. " ABC là tam giác đều $\Leftrightarrow$ tam giác ABC cân và có một góc 60° ".
- C. " ABC là tam giác đều $\Leftrightarrow ABC$ là tam giác có ba cạnh bằng nhau".
- D. " ABC là tam giác đều $\Leftrightarrow$ tam giác ABC có hai góc bằng 60° ".

Lời giải.

Mệnh đề kéo theo " ABC là tam giác đều $\Rightarrow$ tam giác ABC cân" là mệnh đề đúng, nhưng mệnh đề đảo " Tam giác ABC cân $\Rightarrow ABC$ là tam giác đều" là mệnh đề sai.

Do đó, 2 mệnh đề " ABC là tam giác đều" và " tam giác ABC cân" không phải là 2 mệnh đề tương đương.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 13. Mệnh đề nào sau đây là phủ định của mệnh đề “Mọi động vật đều di chuyển”?

- A. Mọi động vật đều không di chuyển. B. Mọi động vật đều đứng yên.
C. Có ít nhất một động vật không di chuyển. D. Có ít nhất một động vật di chuyển.

Lời giải.

Phủ định của mệnh đề " $\forall x \in K, P(x)$ " là mệnh đề " $\exists x \in K, \overline{P(x)}$ ".

Do đó, phủ định của mệnh đề "Mọi động vật đều di chuyển" là mệnh đề "Có ít nhất một động vật không di chuyển"

Chọn đáp án **C** □

Câu 14. Phủ định của mệnh đề "Có ít nhất một số vô tỷ là số thập phân vô hạn tuần hoàn" là mệnh đề nào sau đây?

- A. Mọi số vô tỷ đều là số thập phân vô hạn tuần hoàn.
B. Có ít nhất một số vô tỷ là số thập phân vô hạn không tuần hoàn.
C. Mọi số vô tỷ đều là số thập phân vô hạn không tuần hoàn.
D. Mọi số vô tỷ đều là số thập phân tuần hoàn.

Lời giải.

Phủ định của mệnh đề " $\exists x \in K, P(x)$ " là mệnh đề " $\forall x \in K, \overline{P(x)}$ ".

Do đó, phủ định của mệnh đề "Có ít nhất một số vô tỷ là số thập phân vô hạn tuần hoàn" là mệnh đề "Mọi số vô tỷ đều là số thập phân vô hạn không tuần hoàn"

Chọn đáp án **C** □

Câu 15. Lập mệnh đề phủ định của mệnh đề: "Số 6 chia hết cho 2 và 3".

- A. Số 6 chia hết cho 2 hoặc 3. B. Số 6 không chia hết cho 2 và 3.
C. Số 6 không chia hết cho 2 hoặc 3. D. Số 6 không chia hết cho 2 và chia hết cho 3.

Lời giải.

Phủ định của mệnh đề "Số 6 chia hết cho 2 và 3" là mệnh đề: "Số 6 không chia hết cho 2 hoặc 3"

Chọn đáp án **C** □

Câu 16. Viết mệnh đề phủ định $\overline{P}$ của mệnh đề P : "Tất cả các học sinh khối 10 của trường em đều biết bơi".

- A. $\overline{P}$: "Tất cả các học sinh khối 10 trường em đều biết bơi".
B. $\overline{P}$: "Tất cả các học sinh khối 10 trường em có bạn không biết bơi".
C. $\overline{P}$: "Trong các học sinh khối 10 trường em có bạn biết bơi".
D. $\overline{P}$: "Tất cả các học sinh khối 10 trường em đều không biết bơi".

Lời giải.

Chọn đáp án **D** □

Câu 17. Kí hiệu X là tập hợp các cầu thủ x trong đội tuyển bóng rổ, $P(x)$ là mệnh đề chứa biến " x cao trên 180 cm". Mệnh đề " $\forall x \in X, P(x)$ " khẳng định rằng

- A. Mọi cầu thủ trong đội tuyển bóng rổ đều cao trên 180 cm.
B. Trong số các cầu thủ của đội tuyển bóng rổ có một số cầu thủ cao trên 180 cm.
C. Bất cứ ai cao trên 180 cm đều là cầu thủ của đội tuyển bóng rổ.
D. Có một số người cao trên 180 cm là cầu thủ của đội tuyển bóng rổ.

Lời giải.

Mệnh đề " $\forall x \in X, x$ cao trên 180 cm" khẳng định: "Mọi cầu thủ trong đội tuyển bóng rổ đều cao trên 180 cm."

Chọn đáp án **A**

□

Câu 18. Mệnh đề " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 2$ " khẳng định rằng:

- A. Bình phương của mỗi số thực bằng 2.
- B. Có ít nhất một số thực mà bình phương của nó bằng 2.
- C. Chỉ có một số thực mà bình phương của nó bằng 2.
- D. Nếu x là một số thực thì $x^2 = 2$.

Lời giải.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 19. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **đúng**?

- A. Không có số chẵn nào là số nguyên tố.
- B. $\forall x \in \mathbb{R}, -x^2 < 0$.
- C. $\exists n \in \mathbb{N}, n(n+11) + 6$ chia hết cho 11.
- D. Phương trình $3x^2 - 6 = 0$ có nghiệm hữu tỷ.

Lời giải.

Với $n = 4 \in \mathbb{N} \Rightarrow n(n+11) + 6 = 4(4+11) + 6 = 66:11$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 20. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?

- A. $\exists x \in \mathbb{Z}, 2x^2 - 8 = 0$.
- B. $\exists n \in \mathbb{N}, (n^2 + 11n + 2)$ chia hết cho 11.
- C. Tồn tại số nguyên tố chia hết cho 5.
- D. $\exists n \in \mathbb{N}, (n^2 + 1)$ chia hết cho 4.

Lời giải.

Với $k \in \mathbb{N}$, ta có:

- Khi $n = 4k \Rightarrow n^2 + 1 = 16k^2 + 1$ không chia hết cho 4.
- Khi $n = 4k + 1 \Rightarrow n^2 + 1 = 16k^2 + 8k + 2$ không chia hết cho 4.
- Khi $n = 4k + 2 \Rightarrow n^2 + 1 = 16k^2 + 16k + 5$ không chia hết cho 4.
- Khi $n = 4k + 3 \Rightarrow n^2 + 1 = 16k^2 + 24k + 10$ không chia hết cho 4.

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ không chia hết cho 4.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 21. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?

- A. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y^2 \geq 0$.
- B. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 \geq 0$.
- C. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 \geq 0$.
- D. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 \leq 0$.

Lời giải.

Với $x = -1 \in \mathbb{R}, y = 0 \in \mathbb{R}$ thì $x + y^2 = -1 + 0 < 0$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 22. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **đúng**?

- A. Với mọi số thực x , nếu $x < -2$ thì $x^2 > 4$.
- B. Với mọi số thực x , nếu $x^2 < 4$ thì $x < -2$.
- C. Với mọi số thực x , nếu $x < -2$ thì $x^2 < 4$.
- D. Với mọi số thực x , nếu $x^2 > 4$ thì $x > -2$.

Lời giải.

- B sai vì $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1 < 4$ nhưng $1 > -2$.
- C sai vì $x = -3 < -2$ nhưng $x^2 = 9 > 4$.
- D sai vì $x = -3 \Rightarrow x^2 = 9 > 4$ nhưng $-3 < -2$.

Chọn đáp án **A**

☐

Câu 23. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **đúng**?

- A.** $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < x.$ **B.** $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > x.$
C. $\forall x \in \mathbb{R}, |x| > 1 \Rightarrow x > 1.$ **D.** $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq x.$

Lời giải.

Với $x = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$, $x^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2} = x$.

Chọn đáp án **A**

☐

Câu 24. Cho x là số thực, mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A.** $\forall x, x^2 > 5 \Rightarrow x > \sqrt{5}$ hoặc $x < -\sqrt{5}$. **B.** $\forall x, x^2 > 5 \Rightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$.
C. $\forall x, x^2 > 5 \Rightarrow x > \pm\sqrt{5}$. **D.** $\forall x, x^2 > 5 \Rightarrow x \geq \sqrt{5}$ hoặc $x \leq -\sqrt{5}$.

Lời giải.

Đáp án A đúng vì $\forall x, x^2 > 5 \Rightarrow |x| > \sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} x > \sqrt{5} \\ x < -\sqrt{5}. \end{cases}$

Chọn đáp án A

☐

Câu 25. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $\forall x \in \mathbb{N}^*$, $x^2 - 1$ là bội số của 3. **B.** $\exists x \in \mathbb{Q}$, $x^2 = 3$.
C. $\forall x \in \mathbb{N}$, $2^x + 1$ là số nguyên tố. **D.** $\forall x \in \mathbb{N}$, $2^x \geq x + 2$.

Lời giải.

- Đáp án B sai vì $x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$ là số vô tỉ.
- Đáp án C sai với $x = 3 \Rightarrow 2^3 + 1 = 9$ là hợp số.
- Đáp án D sai với $x = 0 \Rightarrow 2^0 = 1 < 0 + 2 = 2$.

Chọn đáp án A

☐

Câu 26. Mệnh đề $P(x) : “\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 < 0”$. Phủ định của mệnh đề P là

- A.** $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 > 0$. **B.** $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 > 0$.
C. $\forall x \notin \mathbb{R}, x^2 - x + 7 \geq 0$. **D.** $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 \geq 0$.

Lời giải.

Phủ định của mệnh đề P là $\overline{P(x)}$: “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 \geq 0$ ”.

Chọn đáp án **D**

☐

Câu 27. Mệnh đề phủ định của mệnh đề $P(x) : “x^2 + 3x + 1 > 0$ với mọi $x”$ là

- A.** Tồn tại x sao cho $x^2 + 3x + 1 > 0$. **B.** Tồn tại x sao cho $x^2 + 3x + 1 \leq 0$.
C. Tồn tại x sao cho $x^2 + 3x + 1 = 0$. **D.** Tồn tại x sao cho $x^2 + 3x + 1 < 0$.

Lời giải.

Phủ định của mệnh đề $P(x)$ là $\overline{P(x)}$: “Tồn tại x sao cho $x^2 + 3x + 1 < 0$ ”.

Chọn đáp án **B**

☐

Câu 28. Mệnh đề phủ định của mệnh đề $P(x) : “\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x + 5 \text{ là số nguyên tố}”$ là

- A.** $\forall x \notin \mathbb{R} : x^2 + 2x + 5$ là hợp số. **B.** $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x + 5$ là hợp số.

C. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x + 5$ là hợp số.

D. $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x + 5$ là số thực.

Lời giải.

Phủ định của mệnh đề $P(x)$ là $\overline{P(x)} : “\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x + 5$ là hợp số”.

Chọn đáp án **C** □

Câu 29. Phủ định của mệnh đề $P(x) : “\exists x \in \mathbb{R}, 5x - 3x^2 = 1”$ là

A. $“\exists x \in \mathbb{R}, 5x - 3x^2 = 1”$.

B. $“\forall x \in \mathbb{R}, 5x - 3x^2 = 1”$.

C. $“\forall x \in \mathbb{R}, 5x - 3x^2 \neq 1”$.

D. $“\exists x \in \mathbb{R}, 5x - 3x^2 \geq 1”$.

Lời giải.

Phủ định của mệnh đề $P(x)$ là $\overline{P(x)} : “\forall x \in \mathbb{R}, 5x - 3x^2 \neq 1”$

Chọn đáp án **C** □

Câu 30. Cho mệnh đề $P(x) : “\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 > 0”$. Mệnh đề phủ định của mệnh đề $P(x)$ là

A. $“\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 < 0”$.

B. $“\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 \leq 0”$.

C. $“\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 \leq 0”$.

D. $“x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 > 0”$.

Lời giải.

Phủ định của mệnh đề $P(x)$ là: $\overline{P(x)} : “\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 \leq 0”$

Chọn đáp án **C** □

Câu 31. Mệnh đề nào sau đây có **mệnh đề đảo** là mệnh đề đúng?

A. Nếu a và b cùng chia hết cho c thì $a + b$ chia hết cho c .

B. Nếu $a > b$ thì $a^2 > b^2$.

C. Nếu số nguyên chia hết cho 14 thì chia hết cho cả 7 và 2.

D. Hai tam giác bằng nhau có diện tích bằng nhau.

Lời giải.

Xét từng mệnh đề ta có các mệnh đề đảo tương ứng là

- “Nếu $a + b$ chia hết cho c thì a và b cùng chia hết cho c ”, đây là mệnh đề **sai**.
- “Nếu $a^2 > b^2$ thì $a > b$ ”, đây là mệnh đề **sai**.
- “Nếu một số nguyên chỉ hết cho cả 7 và 2 thì số nguyên đó chia hết cho 14”, đây là mệnh đề **đúng**.
- “Nếu hai tam giác có diện tích bằng nhau thì hai tam giác đó bằng nhau”, đây là mệnh đề **sai**.

Chọn đáp án **C** □

Câu 32. Với giá trị nào của x thì $“x^2 - 1 = 0, x \in \mathbb{N}”$ là mệnh đề đúng?

A. $x = 0$.

B. $x = -1$.

C. $x = \pm 1$.

D. $x = 1$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in \mathbb{N} \\ x = -1 \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

Vậy mệnh đề chứa biến đã cho trở thành mệnh đề đúng khi và chỉ khi $x = 1$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 33. Trong các câu sau, có bao nhiêu câu **không** phải là mệnh đề?

(1) Huế là một thành phố của Việt Nam.

(2) Sông Hương chảy ngang qua thành phố Huế.

- (3) Hãy trả lời câu hỏi này!
 (4) $4 + 19 = 24$.
 (5) $6 + 81 = 25$.
 (6) Bạn có rồi tối nay không?
 (7) $x + 2 = 11$.

A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải.

Có 3 câu không phải là mệnh đề, gồm (3), (6), (7).

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 34. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề **sai**?

- A. $-\pi < -2 \Leftrightarrow \pi^2 < 4$. B. $\pi < 4 \Leftrightarrow \pi^2 < 16$.
 C. $\sqrt{23} < 5 \Rightarrow 2\sqrt{23} < 2 \cdot 5$. D. $\sqrt{23} < 5 \Rightarrow -2\sqrt{23} > -2 \cdot 5$.

Lời giải.

- Ta có $-\pi < -2$ là mệnh đề đúng, $\pi^2 < 4$ là mệnh đề sai.
Suy ra mệnh đề $-\pi < -2 \Leftrightarrow \pi^2 < 4$ là mệnh đề sai.
- Ta có $\pi < 4$ là mệnh đề đúng, $\pi^2 < 16$ là mệnh đề đúng.
Suy ra $\pi < 4 \Leftrightarrow \pi^2 < 16$ là mệnh đề đúng.
- Ta có $\sqrt{23} < 5$ là mệnh đề đúng, $2\sqrt{23} < 2 \cdot 5$ là mệnh đề đúng.
Suy ra mệnh đề $\sqrt{23} < 5 \Rightarrow 2\sqrt{23} < 2 \cdot 5$ đúng.
- Ta có $\sqrt{23} < 5$ là mệnh đề đúng, $-2\sqrt{23} > -2 \cdot 5$ là mệnh đề đúng.
Suy ra mệnh đề $\sqrt{23} < 5 \Rightarrow -2\sqrt{23} > -2 \cdot 5$ đúng.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 35. Mệnh đề $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2 + a > 0$, với a là số thực cho trước. Tìm a để mệnh đề đúng.

- A. $a < 2$. B. $a = 2$. C. $a > 2$. D. $a \leq 2$.

Lời giải.

Ta có $x^2 - 2 + a > 0 \Leftrightarrow x^2 > 2 - a$. Do đó, mệnh đề đã cho đúng khi và chỉ khi $2 - a < 0 \Leftrightarrow a > 2$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 36. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. $\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 = -2x$. B. $\forall x \in \mathbb{N} : x^2 > 0$. C. $\forall x \in \mathbb{N}^* : x^2 > 0$. D. $\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 \leq x$.

Lời giải.

$\forall x \in \mathbb{N} : x^2 > 0$ là mệnh đề sai, chẳng hạn tại $x = 0 \in \mathbb{N}$ thì $x^2 = 0 > 0$ sai.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 37. Cho mệnh đề P : " $\forall x \in \mathbb{R} : 9x^2 - 1 \neq 0$ ". Mệnh đề phủ định của mệnh đề P là

- A. $\bar{P}$: " $\exists x \in \mathbb{R} : 9x^2 - 1 = 0$ ". B. $\bar{P}$: " $\exists x \in \mathbb{R} : 9x^2 - 1 \leq 0$ ".
 C. $\bar{P}$: " $\exists x \in \mathbb{R} : 9x^2 - 1 > 0$ ". D. $\bar{P}$: " $\forall x \in \mathbb{R} : 9x^2 - 1 = 0$ ".

Lời giải.

Mệnh đề phủ định của mệnh đề P : " $\forall x \in \mathbb{R} : 9x^2 - 1 \neq 0$ " là $\bar{P}$: " $\exists x \in \mathbb{R} : 9x^2 - 1 = 0$ ".

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 38. Cho mệnh đề " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$ ". Mệnh đề phủ định của mệnh đề đã cho là

A. " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \leq 0$ ".

B. " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 < 0$ ".

C. " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \leq 0$ ".

D. " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$ ".

Lời giải.Mệnh đề phủ định của mệnh đề " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$ " là " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \leq 0$ ".Chọn đáp án **C** □**Câu 39.** Mệnh đề phủ định của mệnh đề "2018 là số tự nhiên chẵn" là

A. 2018 là số chẵn.

B. 2018 là số nguyên tố.

C. 2018 không là số tự nhiên chẵn.

D. 2018 là số chính phương.

Lời giải.

Phủ định của mệnh đề đã cho là "2018 không là số tự nhiên chẵn".

Chọn đáp án **C** □**Câu 40.** Mệnh đề phủ định của mệnh đề " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 13 = 0$ " là

A. " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 13 \neq 0$ ".

B. " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 13 > 0$ ".

C. " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 13 = 0$ ".

D. " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 13 \neq 0$ ".

Lời giải.Mệnh đề phủ định của mệnh đề " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 13 = 0$ " là " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 13 \neq 0$ ".Chọn đáp án **A** □**Câu 41.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?A. $6\sqrt{2}$ là số hữu tỷ.B. Phương trình $x^2 + 7x - 2 = 0$ có 2 nghiệm trái dấu.

C. 17 là số chẵn.

D. Phương trình $x^2 + x + 7 = 0$ có nghiệm.**Lời giải.**Vì $\sqrt{2}$ là số vô tỷ nên $6\sqrt{2}$ là số vô tỷ.Phương trình $x^2 + 7x - 2 = 0$ có $a \cdot c = 1 \cdot (-2) < 0$ nên có 2 nghiệm trái dấu.

17 là số lẻ.

Vì $x^2 + x + 7 = (x + 2)^2 + 3 \geq 3 > 0$ nên phương trình $x^2 + x + 7 = 0$ vô nghiệm.Chọn đáp án **B** □**Câu 42.** Cho mệnh đề P : "9 là số chia hết cho 3". Mệnh đề phủ định của mệnh đề P làA. $\bar{P}$: "9 là ước của 3".B. $\bar{P}$: "9 là bội của 3".C. $\bar{P}$: "9 là số không chia hết cho 3".D. $\bar{P}$: "9 là số lớn hơn 3".**Lời giải.**Mệnh đề P : "9 là số chia hết cho 3" có mệnh đề phủ định là $\bar{P}$: "9 là số không chia hết cho 3".Chọn đáp án **C** □**Câu 43.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $x + y > 0 \Rightarrow xy > 0$.

B. $(x + y)^2 \geq x^2 + y^2$.

C. $x + y > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$.

D. $x \geq y \Rightarrow x^2 \geq y^2$.

Lời giải.

Ta xét các mệnh đề

- $x + y > 0 \Rightarrow xy > 0$ sai ví dụ $x = 2$ và $y = -1$ không thỏa mệnh đề.
- $(x + y)^2 \geq x^2 + y^2$ sai ví dụ $x = 2$ và $y = -1$ không thỏa mệnh đề.
- $x + y > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$ đúng vì nếu ngược lại thì cả hai x và y đều không dương thì $x + y \leq 0$ vô lý.
- $x \geq y \Rightarrow x^2 \geq y^2$ sai ví dụ $x = 1$ và $y = -2$ không thỏa mệnh đề.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 44. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $\exists x \in \mathbb{Q}, 4x^2 - 1 = 0$. B. $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ chia hết cho 4.
C. $\forall x \in \mathbb{N}, n^2 > n$. D. $\forall x \in \mathbb{R}, (x - 1)^2 \neq x - 1$.

Lời giải.

$$\text{Có } 4x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 45. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Số 141 chỉ hết cho 3 $\Rightarrow$ 141 chia hết cho 9.
B. 81 là số chính phương $\Rightarrow \sqrt{81}$ là số nguyên.
C. 7 là số lẻ $\Rightarrow$ 7 chia hết cho 2.
D. $3 \cdot 5 = 15 \Rightarrow$ Bắc Kinh là thủ đô của Hàn Quốc.

Lời giải.

Có 81 là số chính phương là mệnh đề đúng, $\sqrt{81} = 9$ là số nguyên cũng là mệnh đề đúng.
Do đó 81 là số chính phương $\Rightarrow \sqrt{81}$ là số nguyên là mệnh đề đúng.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 46. Trong các câu sau, câu nào không phải mệnh đề?

- A. $2x^2 + 1 > 0$. B. $\sqrt{17} - 3 > 0$. C. $2 - 3 = 4$. D. Đẹp quá!

Lời giải.

Câu "Đẹp quá!" không phải mệnh đề vì câu này không có tính đúng sai.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 47. Cho các phát biểu sau.

- (1) Hôm nay các em có khỏe không? (4) 2018 là một số chẵn.
(2) Số 1320 là một số lẻ. (5) Chúc các em kiểm tra đạt kết quả tốt!
(3) 13 là một số nguyên tố. (6) $x^2 + 8x + 12 \geq 0$.

Trong các phát biểu trên có tất cả bao nhiêu phát biểu là mệnh đề?

- A. 4. B. 3. C. 5. D. 2.

Lời giải.

Ta có (1), (5), (6) không phải là mệnh đề.

Vậy có tất cả 4 mệnh đề.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 48. Tìm mệnh đề phủ định của mệnh đề P : " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 > 0$ ".

A. $\bar{P}$: " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 \leq 0$ ".

B. $\bar{P}$: " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 < 0$ ".

C. $\bar{P}$: " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 < 0$ ".

D. $\bar{P}$: " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 \leq 0$ ".

Lời giải.

Ta có $\bar{P}$: " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 \leq 0$ ".

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 49. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Để tứ giác T là một hình vuông, điều kiện cần là nó có bốn cạnh bằng nhau..

B. Một tam giác là đều khi và chỉ khi nó có hai đường trung tuyến bằng nhau và một góc 60° .

C. Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng đồng dạng và có một cạnh bằng nhau.

D. Một tứ giác là hình chữ nhật khi và chỉ khi nó có ba góc vuông.

Lời giải.

Xét tam giác ABC có $AB = 4$; $BC = 3$; $AC = 2$ và tam giác DEF có $EF = 4$; $FD = 6$; $DE = 8$.
Dễ thấy tam giác ABC đồng dạng với tam giác DEF và $AB = EF$ nhưng hai tam giác này không bằng nhau.

Do đó mệnh đề "Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng đồng dạng và có một cạnh bằng nhau" là mệnh đề sai.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 50. Tìm mệnh đề phủ định của mệnh đề " $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ chia hết cho 3".

A. " $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ không chia hết cho 3".

B. " $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ chia hết cho 3".

C. " $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ không chia hết cho 3".

D. " $\forall n \notin \mathbb{N}, n^2 + 1$ không chia hết cho 3".

Lời giải.

Mệnh đề phủ định của mệnh đề " $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ chia hết cho 3" là mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ không chia hết cho 3".

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 51. Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề?

A. Số 345 có chia hết cho 3 không?.

B. Số 625 là số chính phương.

C. Kết quả của bài toán này rất đẹp.

D. Bạn Hoa thật xinh.

Lời giải.

Câu "Số 625 là số chính phương" là mệnh đề.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 52. Cho mệnh đề P : " $\forall x \in \mathbb{R} | x^2 + x + 1 > 0$ ", mệnh đề phủ định của mệnh đề P là

A. $\bar{P}$: " $\exists x \in \mathbb{R} | x^2 + x + 1 < 0$ ".

B. $\bar{P}$: " $\forall x \in \mathbb{R} | x^2 + x + 1 < 0$ ".

C. $\bar{P}$: " $\exists x \in \mathbb{R} | x^2 + x + 1 \leq 0$ ".

D. $\bar{P}$: " $\forall x \in \mathbb{R} | x^2 + x + 1 \leq 0$ ".

Lời giải.

$\bar{P}$: " $\exists x \in \mathbb{R} | x^2 + x + 1 \leq 0$ ".

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 53. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\exists x \in \mathbb{Z}, x^2 < 0$.

B. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0$.

C. $\exists x \in \mathbb{N}, 2x^2 - 1 < 0$.

D. $\exists x \in \mathbb{Q}, x^2 - 2 = 0$.

Lời giải.Mệnh đề $\exists x \in \mathbb{N}, 2x^2 - 1 < 0$ đúng vì tồn tại $x = 0$ thoả mãn $2x^2 - 1 < 0$.Chọn đáp án **C** □**Câu 54.** Câu nào trong các câu sau **không phải** là mệnh đề?A. π có phải là một số vô tỷ không?.

B. $2 + 2 = 5$.

C. $\sqrt{2}$ là một số hữu tỷ.

D. $\frac{4}{2} = 2$.

Lời giải.“ π có phải là một số vô tỷ không?” là câu hỏi, nên không phải là mệnh đề.Chọn đáp án **A** □**Câu 55.** Phủ định của mệnh đề “ $\exists x \in \mathbb{Q}: 2x^2 - 5x + 2 = 0$ ” là

A. “ $\exists x \in \mathbb{Q}: 2x^2 - 5x + 2 > 0$ ”.

B. “ $\exists x \in \mathbb{Q}: 2x^2 - 5x + 2 \neq 0$ ”.

C. “ $\forall x \in \mathbb{Q}: 2x^2 - 5x + 2 \neq 0$ ”.

D. “ $\forall x \in \mathbb{Q}: 2x^2 - 5x + 2 = 0$ ”.

Lời giải.Phủ định của mệnh đề “ $\exists x \in \mathbb{Q}: 2x^2 - 5x + 2 = 0$ ” là “ $\forall x \in \mathbb{Q}: 2x^2 - 5x + 2 \neq 0$ ”.Chọn đáp án **C** □**Câu 56.** Cho $P \Leftrightarrow Q$ là mệnh đề đúng. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\overline{P} \Leftrightarrow Q$ sai.

B. $\overline{P} \Leftrightarrow \overline{Q}$ đúng.

C. $\overline{Q} \Leftrightarrow P$ sai.

D. $\overline{P} \Leftrightarrow \overline{Q}$ sai.

Lời giải.Ta có $P \Leftrightarrow Q$ là mệnh đề đúng $\Leftrightarrow \begin{cases} P \text{ đúng và } Q \text{ đúng} \\ P \text{ sai và } Q \text{ sai.} \end{cases}$ • Ta có $\overline{P}$ đúng $\Leftrightarrow P$ sai $\Leftrightarrow Q$ sai $\Leftrightarrow \overline{Q}$ đúng.• Ta có $\overline{P}$ sai $\Leftrightarrow P$ đúng $\Leftrightarrow Q$ đúng $\Leftrightarrow \overline{Q}$ sai.Vậy $\overline{P} \Leftrightarrow \overline{Q}$ là mệnh đề đúng.Chọn đáp án **D** □**Câu 57.** Trong các câu sau câu nào **không phải** là mệnh đề?A. $\sqrt{11}$ là số vô tỷ.

B. Hai vec-tơ cùng phương thì chúng cùng hướng.

C. Tích của một vec-tơ với một số thực là một vec-tơ.

D. Hôm nay lạnh thế nhỉ!.

Lời giải.

“Hôm nay lạnh thế nhỉ!” không phải là một câu khẳng định.

Chọn đáp án **D** □**Câu 58.** Tìm mệnh đề phủ định của mệnh đề “ $\exists x \in \mathbb{Q}: 2x^2 - 5x + 2 = 0$ ”.

A. “ $\forall x \in \mathbb{Q}: 2x^2 - 5x + 2 = 0$ ”.

B. “ $\exists x \in \mathbb{Q}: 2x^2 - 5x + 2 > 0$ ”.

C. “ $\forall x \in \mathbb{Q}: 2x^2 - 5x + 2 \neq 0$ ”.

D. “ $\exists x \in \mathbb{Q}: 2x^2 - 5x + 2 \neq 0$ ”.

Lời giải.

$$P: “\exists x \in \mathbb{Q}: 2x^2 - 5x + 2 = 0” \Rightarrow \overline{P}: “\forall x \in \mathbb{Q}: 2x^2 - 5x + 2 \neq 0”.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 59. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 : 9 \Rightarrow n : 9$.

B. $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 : 3 \Rightarrow n : 3$.

C. $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 : 2 \Rightarrow n : 2$.

D. $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 : 6 \Rightarrow n : 6$.

Lời giải.

Ta có $3^2 : 9$ nhưng $3 \not: 9$. Bởi vậy, mệnh đề " $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 : 9 \Rightarrow n : 9$ " **sai**.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 60. Phát biểu nào sau đây **không** phải là mệnh đề?

A. 5 là số nguyên tố.

B. Năm 2016 là năm nhuận.

C. Đề thi trắc nghiệm môn toán hay quá !.

D. Hà Nội là thủ đô của Việt Nam.

Lời giải.

Mỗi mệnh đề phải hoặc đúng hoặc sai. Một mệnh đề không thể vừa đúng vừa sai.

Câu "Đề thi trắc nghiệm môn toán hay quá !" không thể nói là đúng hay sai nên không phải là mệnh đề.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 61. Mệnh đề phủ định của mệnh đề " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 2x$ " là

A. " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 2x$ ". B. " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 2x$ ". C. " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 > 2x$ ". D. " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 2x$ ".

Lời giải.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 62. Cho mệnh đề $P(x)$: " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 > 0$ ". Mệnh đề phủ định của $P(x)$ là

A. " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 \leq 0$ ".

B. " $\nexists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 > 0$ ".

C. " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 \leq 0$ ".

D. " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 < 0$ ".

Lời giải.

Với $P(x)$: " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 > 0$ " thì phủ định của $P(x)$ là

$\overline{P(x)}$: " $\exists x \in \mathbb{R}, \overline{x^2 + x + 1 > 0}$ " hay " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 \leq 0$ ".

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 63. Mệnh đề phủ định của mệnh đề P : " $\forall x \in \mathbb{R}: x^3 + 1 > x$ " là

A. $\overline{P}$: " $\exists x \in \mathbb{R}: x^3 + 1 < x$ ".

B. $\overline{P}$: " $\exists x \in \mathbb{R}: x^3 + 1 \leq x$ ".

C. $\overline{P}$: " $\exists x \in \mathbb{R}: x^3 + 1 > x$ ".

D. $\overline{P}$: " $\forall x \in \mathbb{R}: x^3 + 1 \leq x$ ".

Lời giải.

Với P : " $\forall x \in \mathbb{R}: x^3 + 1 > x$ " ta có $\overline{P}$: " $\exists x \in \mathbb{R}: \overline{x^3 + 1 > x}$ " hay $\overline{P}$: " $\exists x \in \mathbb{R}: x^3 + 1 \leq x$ ".

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 64. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào có mệnh đề đảo đúng?

A. Nếu a chia hết cho 3 thì a chia hết cho 9.

B. Nếu a và b chia hết cho c thì $a + b$ chia hết cho c .

C. Nếu một số tận cùng bằng 0 thì số đó chia hết cho 5.

D. Nếu hai tam giác bằng nhau thì có diện tích bằng nhau.

Lời giải.

Mệnh đề "Nếu a chia hết cho 3 thì a chia hết cho 9" có mệnh đề đảo là "Nếu a chia hết cho 9 thì a chia hết cho 3". Mệnh đề đảo là đúng.

Số chia hết cho 9 có dạng $9k$, với mọi $k \in \mathbb{N}$. Mà $9k = 3 \cdot (3k)$ nên nó chia hết cho 3.

Mệnh đề “Nếu a và b chia hết cho c thì $a + b$ chia hết cho c ” có mệnh đề đảo là “Nếu $a + b$ chia hết cho c thì a và b chia hết cho c ”. Mệnh đề đảo là sai.

Ví dụ $2 + 6$ chia hết cho 4 nhưng cả 2 và 6 đều không chia hết cho 4.

Mệnh đề “Nếu một số tận cùng bằng 0 thì số đó chia hết cho 5” có mệnh đề đảo là “Nếu một số chia hết cho 5 thì số đó có tận cùng là 0”. Mệnh đề đảo là sai.

Ví dụ 15 chia hết cho 5 nhưng không có tận cùng là 0.

Mệnh đề “Nếu hai tam giác bằng nhau thì có diện tích bằng nhau” có mệnh đề đảo là “Nếu hai tam giác có diện tích bằng nhau thì hai tam giác bằng nhau”. Mệnh đề đảo là mệnh đề sai.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 65. Có bao nhiêu số nguyên dương n để mệnh đề chứa biến $P(n)$: “ $2n - 7 < 0$ ” là một mệnh đề đúng?

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Lời giải.

Ta có

$$2n - 7 < 0 \Leftrightarrow n < \frac{7}{2} \Rightarrow n \in \{1; 2; 3\}.$$

Vậy có 3 giá trị nguyên dương của n thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 66. Mệnh đề phủ định của mệnh đề “ $\exists x \in \mathbb{Z}, x \leq \frac{1}{x}$ ” là

A. “ $\forall x \in \mathbb{Z}, x \geq \frac{1}{x}$ ”. B. “ $\exists x \in \mathbb{Z}, x > \frac{1}{x}$ ”. C. “ $\forall x \in \mathbb{Z}, x > \frac{1}{x}$ ”. D. “ $\exists x \in \mathbb{Z}, x \leq \frac{1}{x}$ ”.

Lời giải.

Phủ định của mệnh đề “ $\exists x \in \mathbb{R}$ ” là “ $\forall x \in \mathbb{R}$ ”.

Phủ định của “ $x \leq \frac{1}{x}$ ” là “ $x > \frac{1}{x}$ ”.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 67. Phủ định của mệnh đề “ $\forall x \in \mathbb{Q}: 3x^2 + 3 \geq 0$ ” là

A. “ $\exists x \in \mathbb{Q}: 3x^2 + 3 \leq 0$ ”. B. “ $\exists x \in \mathbb{Q}: 3x^2 + 3 \neq 0$ ”.
C. “ $\exists x \in \mathbb{Q}: 3x^2 + 3 < 0$ ”. D. “ $\forall x \in \mathbb{Q}: 3x^2 + 3 \leq 0$ ”.

Lời giải.

Mệnh đề phủ định “ $\exists x \in \mathbb{Q}: 3x^2 + 3 < 0$ ”.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 68. Câu nào sau đây là mệnh đề?

A. Thời gian làm bài kiểm tra học kì I môn Toán là 90 phút.
B. Phải ghi mã đề vào giấy làm bài.
C. Đề kiểm tra lần này dễ quá!
D. Có được sử dụng tài liệu khi kiểm tra không?.

Lời giải.

- Đề kiểm tra lần này dễ quá! Là câu cầu khiến nên không phải là mệnh đề.
- Có được sử dụng tài liệu khi kiểm tra không? Câu hỏi nên không phải là mệnh đề.

- Phải ghi mã đề vào giấy làm bài. Câu cảm thán nên không phải là mệnh đề.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 69. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

- A. Đồ thị của hàm số chẵn nhận gốc tọa độ là tâm đối xứng.
- B. Đồ thị của hàm số lẻ nhận trục tung làm trục đối xứng.
- C. Đồ thị của hàm số lẻ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.
- D. Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục hoành làm trục đối xứng.

Lời giải.

Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ là tâm đối xứng.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 70. Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề?

- A. n^2 là số nguyên tố.
- B. Hôm nay là thứ mấy?
- C. $5 + x = 2$.
- D. 7 là số vô tỉ.

Lời giải.

“7 là số vô tỉ” là khẳng định sai nên nó là mệnh đề.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 71. Xét ba mệnh đề: $P: “\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0”$; $S: “\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt[3]{x} > 0”$ và $T: “\exists x \in \mathbb{R}, |x| \leq 0”$. Hỏi trong ba mệnh đề đã cho có bao nhiêu mệnh đề đúng?

- A. 2.
- B. 3.
- C. 1.
- D. 0.

Lời giải.

- Với $x = -1 \Rightarrow \sqrt[3]{-1} = -1 < 0$. Vậy mệnh đề S sai.
- Với $x = 0 \Rightarrow 0^2 = 0 > 0$ sai. Vậy mệnh đề P không đúng với mọi x .
- Với $x = 0$ mệnh đề T đúng.

Vậy trong ba mệnh đề trên chỉ có một mệnh đề đúng.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 72. Trong các mệnh đề sau đây mệnh đề nào đúng?

- A. $\forall x \in \mathbb{R}, |x| < 3 \Leftrightarrow x < 3$.
- B. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 = 0$.
- C. $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ chia hết cho 5.
- D. $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 2$ không chia hết cho 3.

Lời giải.

Mệnh đề “ $\forall x \in \mathbb{R}, |x| < 3 \Leftrightarrow x < 3$ ” sai do $\forall x \in \mathbb{R}, |x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$.

Mệnh đề “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 = 0$ ” sai do $x^2 + x + 1 = 0$ vô nghiệm.

Mệnh đề “ $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ chia hết cho 5” đúng vì với $n = 3 \Rightarrow n^2 + 1 = 10$ chia hết cho 5.

Mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 2$ không chia hết cho 3” sai vì $n = 2$ thì $2^2 + 2$ chia hết cho 3.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 73. Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề?

- A. $a + b = c$.
- B. $x^2 + x = 0$.
- C. 15 là số nguyên tố.
- D. $2n + 1$ chia hết cho 3.

Lời giải.

- Các câu “ $a + b = c$ ”, “ $x^2 + x = 0$ ”, “ $2n + 1$ chia hết cho 3” là các mệnh đề chứa biến, các câu này cần một giá trị cụ thể của các biến để xác định tính đúng sai và trở thành mệnh đề.
- Câu “15 là số nguyên tố” là một mệnh đề, đây là mệnh đề sai.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 74. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào là mệnh đề **sai**?

- A. Số π không phải là một số hữu tỉ.
- B. Tổng của hai cạnh một tam giác lớn hơn cạnh thứ ba.
- C. Số 12 chia hết cho 3.
- D. Số 21 không phải là số lẻ.

Lời giải.

Rõ ràng số 21 là số lẻ.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 75. Mệnh đề **phủ định** của “ $\forall x \in \mathbb{N}: x^2 - 2 \neq 0$ ” là

- A. $\forall x \in \mathbb{N}: x^2 - 3 = 0$.
- B. $\exists x \in \mathbb{N}: x^2 - 3 = 0$.
- C. $\exists x \in \mathbb{N}: x^2 - 3 \leq 0$.
- D. $\exists x \in \mathbb{N}: x^2 \geq 3$.

Lời giải.

Mệnh đề phủ định của mệnh đề “ $\forall x \in \mathbb{N}: x^2 - 2 \neq 0$ ” là mệnh đề “ $\exists x \in \mathbb{N}: x^2 - 2 = 0$ ”.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 76. Tìm mệnh đề phủ định của mệnh đề P : “ $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq x^2$ ”?

- A. $\bar{P}$: “ $\exists x \in \mathbb{R}, x \leq x^2$ ”.
- B. $\bar{P}$: “ $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x^2$ ”.
- C. $\bar{P}$: “ $\exists x \in \mathbb{R}, x \neq x^2$ ”.
- D. $\bar{P}$: “ $\exists x \in \mathbb{R}, x < x^2$ ”.

Lời giải.

Phủ định của mệnh đề P : “ $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq x^2$ ” là $\bar{P}$: “ $\exists x \in \mathbb{R}, x < x^2$ ”.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 77. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. Một số thực có bình phương là số dương khi và chỉ khi số thực đó khác 0.
- B. Một tứ giác là hình thoi khi và chỉ khi tứ giác đó có hai đường chéo vuông góc nhau.
- C. Một số tự nhiên chia hết cho 10 khi và chỉ khi số tự nhiên đó có chữ số tận cùng là 0.
- D. Một tam giác có ba góc bằng nhau khi và chỉ khi tam giác đó có ba cạnh bằng nhau.

Lời giải.

Một tứ giác là hình thoi thì nó có hai đường chéo vuông góc nhau. Chiều ngược lại không đúng.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 78. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. $1 < 0 \Rightarrow 3 > 2$.
- B. $\forall x \in \mathbb{R}, (x + 1)^2 \geq x^2$.
- C. $\exists n \in \mathbb{N}, 2^n \geq n + 2$.
- D. $\exists x \in \mathbb{Z}, -x > x$.

Lời giải.

Mệnh đề $\forall x \in \mathbb{R}, (x + 1)^2 \geq x^2$ sai, chẳng hạn khi $x = -3$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 79. Cho mệnh đề P : “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1$ là số nguyên tố”. Mệnh đề phủ định của P là mệnh đề nào sau đây?

- A. “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1$ là số nguyên tố”. B. “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1$ không là số nguyên tố”.
C. “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1$ không là số nguyên tố”. D. “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1$ là số chẵn”.

Lời giải.

Phủ định của mệnh đề “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1$ là số nguyên tố” là mệnh đề “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1$ không là số nguyên tố”.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 80. Mệnh đề phủ định của mệnh đề “ $\forall x \in \mathbb{R}: 2x^2 + 1 > 0$ ” là

- A. “ $\forall x \in \mathbb{R}: 2x^2 + 1 \leq 0$ ”. B. “ $\exists x \in \mathbb{R}: 2x^2 + 1 \leq 0$ ”.
C. “ $\forall x \in \mathbb{R}: 2x^2 + 1 \geq 0$ ”. D. “ $\exists x \in \mathbb{R}: 2x^2 + 1 < 0$ ”.

Lời giải.

Mệnh đề phủ định của mệnh đề “ $\forall x \in \mathbb{R}: 2x^2 + 1 > 0$ ” là “ $\exists x \in \mathbb{R}: 2x^2 + 1 \leq 0$ ”.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 81. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. $\exists n \in \mathbb{N}: n^2 = n$. B. $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0$.
C. $\forall n \in \mathbb{Z}$ thì $n < 2n$. D. $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 - 3x + 2 = 0$.

Lời giải.

Mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{Z}$ thì $n < 2n$ ” sai vì tồn tại $-2 \in \mathbb{Z}$ mà $-2 > 2 \cdot (-2)$.

Chọn đáp án **C**

□

ĐÁP ÁN

1. A	2. B	3. B	4. A	5. B	6. B	7. B	8. A	9. A	10. B
11. D	12. A	13. C	14. C	15. C	16. D	17. A	18. B	19. C	20. D
21. C	22. A	23. A	24. A	25. A	26. D	27. B	28. C	29. C	30. C
31. C	32. D	33. D	34. A	35. C	36. B	37. A	38. C	39. C	40. A
41. B	42. C	43. C	44. A	45. B	46. D	47. A	48. D	49. C	50. A
51. B	52. C	53. C	54. A	55. C	56. D	57. D	58. C	59. A	60. C
61. D	62. A	63. B	64. A	65. A	66. C	67. C	68. A	69. C	70. D
71. C	72. C	73. C	74. D	75. B	76. D	77. B	78. B	79. C	80. B
81. C									

§2 TẬP HỢP

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 TẬP HỢP VÀ PHẦN TỬ

- Tập hợp (gọi tắt là tập) là một khái niệm cơ bản của toán học, không định nghĩa.
- Ta thường dùng các chữ cái in hoa để kí hiệu cho tập hợp.
- Cho tập hợp A và phần tử x . Nếu x có mặt trong tập A ta nói x là một phần tử của tập A hay x thuộc A , kí hiệu $x \in A$ hoặc $A \ni x$. Nếu x không có mặt trong tập A ta nói x không thuộc A , kí hiệu $x \notin A$ hoặc $A \not\ni x$.

2 CÁCH XÁC ĐỊNH TẬP HỢP

- Liệt kê các phần tử của tập hợp.
- Chỉ ra các tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp.

3 TẬP HỢP RỖNG

Định nghĩa. Tập hợp rỗng, kí hiệu là $\emptyset$, là tập hợp không chứa phần tử nào.

4 TẬP CON. HAI TẬP HỢP BẰNG NHAU

- Tập hợp A gọi là tập con của tập hợp B , kí hiệu $A \subset B$ nếu mọi phần tử của tập hợp A đều thuộc B .
Với kí hiệu đó, ta có $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B)$
- Tập rỗng là tập hợp không chứa phần tử nào, kí hiệu là $\emptyset$.
Qui ước : $\emptyset \subset A$ với mọi tập hợp A .
- Hai tập hợp A và B gọi là bằng nhau, kí hiệu $A = B$ nếu mỗi phần tử của A là một phần tử của B và ngược lại.
Với định nghĩa đó, ta có $A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ và } B \subset A)$

5 TÍNH CHẤT

Tính chất 1.

- $\emptyset \subset A$, với mọi A .
- $A \subset A$, với mọi A
- Nếu $A \subset B$ và $B \subset C$ thì $A \subset C$

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xác định tập hợp - phần tử của tập hợp

- Liệt kê các phần tử của tập hợp (giải phương trình nếu cần).
- Nêu đặc trưng của tập hợp.

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 1 ❖❖❖

Ví dụ 1. Xác định tập hợp A gồm 10 số nguyên tố đầu tiên bằng phương pháp liệt kê

Lời giải.

$$A = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29\}$$

□

Ví dụ 2.

- Tập hợp A các số thực lớn hơn 1 và nhỏ hơn 3 là $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$.
- Tập hợp S gồm các nghiệm của phương trình $x^8 + 9 = 0$ là $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x^8 + 9 = 0\}$.

Ví dụ 3. Liệt kê các phần tử của các tập hợp sau:

- $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 5\}$.
- B là tập hợp các số tự nhiên lớn hơn 0 và nhỏ hơn 5.
- $C = \{x \in \mathbb{R} \mid (x - 1)(x + 2) = 0\}$.

Lời giải.

- $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$.
- $B = \{1; 2; 3; 4\}$.
- Ta có $(x - 1)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2. \end{cases}$

Mà $x \in \mathbb{R}$ nên $C = \{-2; 1\}$.

□

Ví dụ 4. Liệt kê các phần tử của các tập hợp sau:

- $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (2x^2 - 3x + 1)(x + 5) = 0\}$.
- $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid (x^2 - 2)(x^2 - 3x + 2) = 0\}$.

Lời giải.

- Ta có:

$$(2x^2 - 3x + 1)(x + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = -5. \end{cases}$$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $A = \{1; -5\}$.

b) Ta có:

$$(x^2 - 2)(x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \\ x = 1 \\ x = 2. \end{cases}$$

Vì $x \in \mathbb{Q}$ nên $B = \{1; 2\}$.

□

Ví dụ 5. Viết các tập hợp sau bằng phương pháp liệt kê:

- a) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid (x^2 - 2x + 1)(x^2 - 5)\} = 0$.
- b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 < n^2 < 40\}$.
- c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 9\}$.
- d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x + 1| = 5\}$.

Lời giải.

- a) $A = \{1\}$.
- b) $B = \{3; 4; 5; 6\}$.
- c) $C = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.
- d) Ta có $|2x + 1| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3. \end{cases}$

Vậy $C = \{2; -3\}$.

□

Ví dụ 6. Liệt kê các phần tử của mỗi tập hợp sau:

- a) Tập hợp A các số chính phương không vượt quá 50.
- b) Tập hợp $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n(n + 1) \leq 30\}$.

Lời giải.

$$A = \{0; 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49\}$$

$$B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$$

□

Ví dụ 7. Viết các tập hợp sau bằng cách chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp đó.

- a) $A = \{0; 4; 8; 12; 16; \dots; 52\}$.
- b) $B = \{3; 6; 9; 12; 15; \dots; 51\}$.
- c) $C = \{2; 5; 8; 11; 14; \dots; 62\}$.

Lời giải.

- a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 16 \text{ và } x : 4\}$.
- b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 \leq x \leq 51 \text{ và } x : 3\}$.

$$c) C = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 62 \text{ và } (x-2) : 3 \right\}.$$

□

Ví dụ 8. Viết các tập hợp sau bằng cách chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp đó.

a) $A = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17\}.$

b) $B = \{-2; 4; -8; 16; -32; 64\}.$

Lời giải.

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 17 \text{ và } x \text{ là số nguyên tố}\}.$

b) $B = \{x = (-2)^n \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 6\}.$

□

Ví dụ 9. Tìm một tính chất đặc trưng xác định các phần tử của mỗi tập hợp sau

$$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

$$B = \{0; 7; 14; 21; 28\}$$

Lời giải.

$$A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 9\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x : 7 \text{ và } x \leq 28\}$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. A là tập hợp các số nguyên tố nhỏ hơn 20. Liệt kê các phần tử của tập hợp A .

Lời giải.

$$A = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19\}.$$

□

Bài 2. Cho tập hợp $A = \{0; 2; 4; 6; 8; 10\}$ Hãy xác định tập hợp A bằng cách chỉ ra một tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó.

Lời giải.

A là tập hợp các số tự nhiên chẵn nhỏ hơn hoặc bằng 10.

□

Bài 3. Cho $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là ước của } 8\}$. Liệt kê các phần tử của tập hợp A .

Lời giải.

$$A = \{1; 2; 4; 8\}.$$

□

Bài 4. Cho $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ là ước của } 15\}$. Liệt kê các phần tử của tập hợp A .

Lời giải.

$$A = \{-15; -5; -3; -1; 1; 3; 5; 15\}.$$

□

Bài 5. Cho $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là ước chung của } 30 \text{ và } 20\}$.

Lời giải.

$$A = \{1; 2; 5; 10\}.$$

□

Bài 6. Cho $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là bội chung của } 15 \text{ và } 20, x \leq 60\}$.

Lời giải.

$$A = \{0; 30; 60\}.$$

□

Bài 7. Viết các tập hợp sau bằng cách chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp đó.

a) $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

b) $B = \{0; 2; 4; 5; 6; 8\}$.

Lời giải.

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 6\}$.

b) $B = \left\{x \in \mathbb{N} \mid x : 2 \text{ và } x \leq 8\right\}.$

□

Bài 8. Tìm một tính chất đặc trưng xác định các phần tử của mỗi tập hợp sau

a) $A = \{0; 2; 7; 14; 23; 34; 47\}$

b) $B = \{-1 + \sqrt{3}; -1 - \sqrt{3}\}$

Lời giải.

$$A = \{n^2 - 2 \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 7\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x - 2 = 0\}$$

□

Bài 9. Liệt kê các phần tử của mỗi tập hợp sau

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 8\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2 < |x| < \frac{21}{4}\}$

Lời giải.

$$A = \{-7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$$

$$B = \{-5; -4; -3; 3; 4; 5\}$$

□

Bài 10. Cho tập hợp $X = \{n \in \mathbb{N} \mid -5 < 5n + 2 < 303\}$. Tìm số phần tử của tập hợp X .

Lời giải.

$$-5 < 5n + 2 < 303 \Leftrightarrow -1 \leq n \leq 60. \text{ Vậy số phần tử của tập hợp } X \text{ là } 62.$$

□

Bài 11. Liệt kê các phần tử của tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x^2 - 4x)(x^4 - 6x^2 + 5) = 0\}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } (x^2 - 4x)(x^4 - 6x^2 + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x = 0 \\ x^4 - 6x^2 + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = 4 \\ x = \pm\sqrt{5} \end{cases}.$$

Từ đó ta có $A = \{0; -1; 1; 4\}$ chứa 4 phần tử.

□

Dạng 2. Tập hợp rỗng**BÀI TẬP DẠNG 2****Ví dụ 1.** Trong các tập hợp sau, tập hợp nào là tập hợp rỗng?

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x + 1 = 0\}.$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 + 1 = 0\}.$$

$$C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 1\}.$$

Lời giải.Các tập hợp rỗng là A, B . □**Ví dụ 2.** Tìm tất cả các giá trị thực của m để các tập hợp sau là tập hợp rỗng.

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < m \text{ và } x > 2m + 1\}.$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + m = 0\}$

Lời giải.

a) Để A là tập rỗng thì $m \geq 2m + 1 \Leftrightarrow m \leq -1$.

b) Để B là tập rỗng thì phương trình $x^2 - 2x + m = 0$ phải vô nghiệm, tức là $\Delta' = 1 - m < 0 \Leftrightarrow m > 1$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN**Bài 1.** Trong các tập hợp sau, tập hợp nào là tập hợp rỗng?

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - \sqrt{2} = 0\}.$$

$$B = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - \frac{1}{4} = 0\right\}.$$

$$C = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 0\}.$$

Lời giải.Tập hợp A, B . □**Bài 2.** Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = m\}$. Tìm m để $A = \emptyset$.**Lời giải.**Để $A = \emptyset$ thì $m \notin \mathbb{N}$. □**Bài 3.** Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để các tập hợp sau là tập hợp rỗng.

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < m + 3 \text{ và } x > 4m + 3\}.$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + m + 9 = 0\}$

Lời giải.

a) Để A là tập rỗng thì $m + 3 \geq 4m + 3 \Leftrightarrow m \leq 0$. Vậy m thuộc tập hợp các số nguyên không dương.

b) Để B là tập rỗng thì phương trình $x^2 - 2x + m = 0$ phải vô nghiệm, tức là $\Delta' = -8 - m < 0 \Leftrightarrow m > -8$. Vậy m thuộc tập hợp các số nguyên lớn hơn -8 . □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. Viết tập hợp sau dưới dạng liệt kê các phần tử.

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x^2 - 3x + 2)(2x^2 + 3x + 1) = 0\}.$

b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid |x| < 3\}.$

Lời giải.

a) $A = \{1; 2; -1\}.$

b) $B = \{0; 1; 2\}.$

□

Bài 2. Tìm tất cả các giá trị của m để tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < m\}$ là tập hợp rỗng.

Lời giải.

Để $A = \emptyset$ thì $m \leq 0.$

□

Bài 3. Cho $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x - m < 3\}$. Tìm tất cả các giá trị của m để $A = \{1\}$.

Lời giải.

Để $A = \{1\}$ thì $1 - m = 2 \Leftrightarrow m = -1.$

□

Bài 4. Cho $A = \{x \in \mathbb{N} \mid -4 < x < 3\}$. Liệt kê tất cả các phần tử của A .

Lời giải.

Ta có $A = \{0; 1; 2\}.$

□

Bài 5. Tìm tất cả các giá trị của m để $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x - m < 3\}$ là tập hợp rỗng.

Lời giải.

Ta có $A = (m + 1; m + 3) \cap \mathbb{N}$. Do đó, $A = \emptyset \Leftrightarrow m + 3 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -3.$

□

Bài 6. Cho tập hợp $A = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}, \text{ với } a, b, c \text{ là các số thực dương}\right\}$. Tìm số nhỏ nhất của tập hợp A .

Lời giải.

Ta có $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} \geq 1$. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$. Vậy số nhỏ nhất là 1.

□

Dạng 3. Tập con. Tập bằng nhau

- Tập hợp A là tập con của tập hợp B nếu mọi phần tử của A đều có trong B .
 $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B).$
- $\emptyset \subset A$, với mọi tập hợp A .
- $A \subset A$, với mọi tập hợp A .
- Có tập A gồm có n phần tử ($n \in \mathbb{N}$). Khi đó, tập A có 2^n tập con.
- $A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}.$

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 3 ❖❖❖

Ví dụ 1. Tìm tất cả các tập con của tập $A = \{a, 1, 2\}$.

Lời giải.

Tập A có $2^3 = 8$ tập con.

- 0 phần tử: $\emptyset$.
- 1 phần tử: $\{a\}, \{1\}, \{2\}$.
- 2 phần tử: $\{a, 1\}, \{a, 2\}, \{1, 2\}$.
- 3 phần tử: $\{a, 1, 2\}$.

□

Ví dụ 2. Tìm tất cả các tập con có 2 phần tử của tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Lời giải.

$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}$.

□

Ví dụ 3. Xác định tập hợp X biết $\{1, 2\} \subset X \subset \{1, 2, 5\}$.

Lời giải.

Ta có

- Vì $\{1, 2\} \subset X$ nên tập hợp X có chứa các phần tử 1, 2.
- Vì $X \subset \{1, 2, 5\}$ nên các phần tử của tập hợp X có thể là 1, 2, 5.

Khi đó tập hợp X có thể là $\{1, 2\}, \{1, 2, 5\}$.

□

Ví dụ 4. Xác định tập hợp X biết $\{a, 1\} \subset X \subset \{a, b, 1, 2\}$.

Lời giải.

Ta có

- Vì $\{a, 1\} \subset X$ nên tập hợp X có chứa 2 phần tử là $a, 1$.
- Vì $X \subset \{a, b, 1, 2\}$ nên các phần tử của tập hợp X có thể là $a, b, 1, 2$.

Suy ra, tập hợp X có 2 phần tử, 3 phần tử hoặc 4 phần tử.

Khi đó, tập hợp X có thể là $\{a, 1\}, \{a, 1, 2\}, \{a, b, 1\}, \{a, b, 2\}, \{a, b, 1, 2\}$.

□

Ví dụ 5. Cho ba tập hợp $A = \{2; 5\}$, $B = \{x; 5\}$ và $C = \{x; y; 5\}$. Tìm các giá trị của x, y sao cho $A = B = C$.

Lời giải.

$$A = B \Leftrightarrow x = 2.$$

Khi $x = 2$, ta có $C = \{2; y; 5\}$. Khi đó, ta có $\{2; y; 5\} \subset \{2; 5\}$ và $\{2; y; 5\} \supset \{2; 5\}$. Từ đây, suy ra $y = 2$ hoặc $y = 5$.

Vậy $(x; y) = (2; 2)$ hoặc $(x; y) = (2; 5)$ thỏa yêu cầu bài toán.

□

Ví dụ 6. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ chia hết cho } 3 \text{ và } 2\}$ và $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ chia hết cho } 6\}$. Chứng minh rằng $A = B$.

Lời giải.

Trước hết, ta cần chứng minh $A \subset B$. Thật vậy, với $x \in A$ bất kì, ta luôn có x chia hết cho 2 và x chia hết cho 3. Vì 2, 3 là hai số nguyên tố cùng nhau nên x chia hết cho 6. Suy ra, $x \in B$.

Mặt khác, vì $6 = 2 \cdot 3$ nên với phần tử $x \in B$ bất kì, ta luôn có x chia hết cho 2 và 3. Suy ra, $x \in A$. Do đó, $B \subset A$. □

Ví dụ 7. Cho biết x là một phần tử của tập hợp A , xác định tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) $x \in A$. b) $\{x\} \in A$. c) $x \subset A$. d) $\{x\} \subset A$.

Lời giải.

- a) $x \in A$: đúng.
 b) $\{x\} \in A$: sai về quan hệ giữa hai tập hợp.
 c) $x \subset A$: sai về quan hệ giữa phần tử và tập hợp.
 d) $\{x\} \subset A$: đúng. □

Ví dụ 8. Xác định tất cả các tập hợp con của mỗi tập hợp

- a) $A = \{x; y\}$. b) $B = \{1; 2; 3\}$

Lời giải.

- a) Các tập hợp con của tập hợp $A = \{x; y\}$ là: $\emptyset; \{x\}; \{y\}; \{x; y\}$.
 b) Các tập hợp con của tập hợp $B = \{1; 2; 3\}$ là: $\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1; 2\}; \{1; 3\}; \{2; 3\}$ và $\{1; 2; 3\}$. □

Ví dụ 9. Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Tìm tất cả các tập con có 3 phần tử của tập hợp A sao cho tổng các phần tử này là một số lẻ.

Lời giải.

Để tổng của ba số nguyên là một số lẻ thì trong ba số chỉ có một số lẻ hoặc cả ba số đều lẻ. Nói cách khác tập con này của A phải có một số lẻ hoặc ba số lẻ.

Chỉ có một tập con gồm ba số lẻ của A là $\{1; 3; 5\}$. Các tập con gồm ba số của A trong đó có một số lẻ là:

$\{1; 2; 4\}; \{1; 2; 6\}; \{1; 4; 6\}; \{3; 2; 4\}; \{3; 2; 6\}; \{3; 4; 6\}; \{5; 2; 4\}; \{5; 2; 6\}; \{5; 4; 6\}$. □

Ví dụ 10. Trong hai tập hợp A và B dưới đây, tập hợp nào là tập con của tập hợp còn lại? Hai tập hợp A và B có bằng nhau không?

- a) A là tập hợp các hình chữ nhật
 B là tập hợp các hình bình hành.
 b) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ là một ước chung của } 12 \text{ và } 18\}$
 $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ là một ước của } 6\}$

Lời giải.

- a) Tất cả các hình chữ nhật đều là hình bình hành nên $A \subset B$.

b) $A = \{1; 2; 3; 6\}$. $B = \{1; 2; 3; 6\}$

Rõ ràng ta thấy $A \subset B$ và $B \subset A$ nên $A = B$.

□

Ví dụ 11. Cho $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ là ước của } 2\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 1)(x - 2)(x - 4) = 0\}$. Tìm tất cả các tập hợp X sao cho $A \subset X \subset B$.

Lời giải.

Liệt kê các phần tử của tập hợp A và B ta được :

$$A = \{1; 2\}; B = \{-1; 1; 2; 4\}.$$

Muốn tìm tập X thỏa điều kiện $A \subset X \subset B$ đầu tiên ta lấy $X = A$, sau đó ghép thêm các phần tử thuộc B mà không thuộc A . Với cách thực hiện như trên, ta có các tập hợp X thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $X = A = \{1; 2\}$, rồi ghép thêm vào một phần tử ta được: $\{-1; 1; 2\}; \{4; 1; 2\}$

Ghép thêm vào A hai trong bốn phần tử còn lại của B ta được : $X = B = \{-1; 1; 2; 4\}$

□

Ví dụ 12. Cho $A = \{8k + 3 \mid k \in \mathbb{Z}\}$; $B = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Chứng minh rằng $A \subset B$.

Lời giải.

Ta cần chứng minh mọi phần tử của A đều thuộc B .

Giả sử $x \in A, x = 8k + 3$.

Khi đó ta có thể viết $x = 8k + 2 + 1 = 2(4k + 1) + 1$.

Đặt $l = 4k + 1$, x được viết thành $x = 2l + 1$. Vậy $x \in B$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm tất cả các tập con của mỗi tập hợp sau:

a) $A = \{1; 2\}$.

b) $B = \{a; b; c\}$.

Lời giải.

a) Các tập hợp con của tập hợp $A = \{1; 2\}$ là: $\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{1; 2\}$.

b) Các tập hợp con của tập hợp $B = \{a; b; c\}$ là: $\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{c\}; \{a; b\}; \{a; c\}; \{b; c\}$; và $\{a; b; c\}$.

□

Bài 2. Cho các tập hợp

$$A = \{2; 3; 5\};$$

$$B = \{-4; 0; 2; 3; 5; 6; 8\};$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 7x + 10 = 0\}$$

Hãy xác định xem tập nào là tập con của tập còn lại.

Lời giải.

$$\text{Ta có } x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases} \Rightarrow C = \{2; 5\}. \text{ Vậy } C \subset A \subset B.$$

□

Bài 3. Cho hai tập hợp

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x - 1)(x - 2)(x - 4) = 0\};$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ là một ước của } 4\}.$$

Hai tập hợp A và B , tập hợp nào là tập con của tập còn lại? Hai tập hợp A và B có bằng nhau không?

Lời giải.

Ta có $A = \{1; 2; 4\}$; $B = \{1; 2; 4\}$. Ta thấy $A \subset B$; $B \subset A$, nên $A = B$ □

Bài 4. Cho các tập hợp:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 6 = 0 \text{ hoặc } 3x^2 - 10x + 8 = 0\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 2 = 0 \text{ và } 2x^2 - 7x + 6 = 0\}.$$

a) Viết tập hợp A, B bằng cách liệt kê các phần tử của nó.

b) Tìm tất cả các tập X sao cho $B \subset X$ và $X \subset A$.

Lời giải.

Ta giải các phương trình:

$$x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$3x^2 - 10x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$2x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

a) $A = \left\{2; -3; \frac{4}{3}\right\}$; $B = \{2\}$.

b) X là những tập hợp sau: $\{2\}$; $\{2; -3\}$; $\left\{2; \frac{4}{3}\right\}$; $\left\{2; -3; \frac{4}{3}\right\}$. □

Bài 5. Tìm tập hợp

a) có đúng một tập con.

b) có đúng hai tập con.

Lời giải.

a) Tập hợp có đúng một tập con là $\emptyset$.

b) Tập $A = \{a\}$. A có đúng hai tập con là A và $\emptyset$. □

Bài 6. Cho hai tập hợp

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ là bội của } 3 \text{ và } 4\}, \quad B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ là bội của } 12\}.$$

Chứng minh rằng $A = B$.

Lời giải.

Giả sử $x \in B$, khi đó x chia hết cho 12, suy ra x chia hết cho 3 và x chia hết cho 4, suy ra $x \in A$, do đó $B \subset A$.

Giả sử $x \in A$, khi đó x chia hết cho 3 và x chia hết cho 4, mà 3 và 4 nguyên tố cùng nhau nên suy ra x chia hết cho 3.4, hay x chia hết cho 12, suy ra $x \in B$, do đó $A \subset B$.

Vậy $A = B$. □

Bài 7. Gọi A là tập hợp các tam giác đều, B là tập hợp các tam giác có góc 60° , C là tập hợp các tam giác cân, D là tập hợp các tam giác vuông có góc 30° . Hãy nêu mối quan hệ giữa các tập hợp trên.

Lời giải.

Vì tam giác đều là tam giác có ba góc bằng 60° nên $A \subset B$. Tam giác đều cũng là tam giác cân nên $A \subset C$. Tam giác vuông có góc 30° thì góc còn lại là 60° nên $D \subset B$. □

Bài 8. Cho $A = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$; $B = \{6k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

- Chứng minh rằng $2 \in A, 7 \notin B$. Số 18 có thuộc tập A không?
- Chứng minh rằng $B \subset A$.

Lời giải.

- Ta có $2 = 2 + 3 \cdot 0 \Rightarrow 2 \in A$. Ta thấy $x \in B$ thì x có dạng $x = 6k + 2$ chia hết cho 2 nên $-7 \notin B$.
Giả sử số $18 \in A \Rightarrow 18 = 3k + 2 \Rightarrow k = \frac{16}{3}$ (vô lý) vì $k \in \mathbb{Z}$. Vậy $18 \notin A$.

- Xét $x \in B$. Ta có $x = 2 + 6k$ với $k \in \mathbb{Z}$. Suy ra $x = 2 + 3(2k)$. Do $2k \in \mathbb{Z}$ nên $x \in A$. Vậy $B \subset A$. □

Bài 9. Tìm tất cả các tập con của tập hợp $B = \{a, b, 2, 5\}$.

Lời giải.

Vì tập hợp B có 4 phần tử nên tập B có $2^4 = 16$ tập con.

- 0 phần tử: $\emptyset$.
 - 1 phần tử: $\{a\}, \{b\}, \{2\}, \{5\}$.
 - 2 phần tử: $\{a, b\}, \{a, 2\}, \{a, 5\}, \{b, 2\}, \{b, 5\}, \{2, 5\}$.
 - 3 phần tử: $\{a, b, 2\}, \{a, b, 5\}, \{a, 5, 2\}, \{5, b, 2\}$.
 - 4 phần tử: $\{a, b, 2, 5\}$
-

Bài 10. Tìm tất cả các tập con có 3 phần tử của tập hợp $D = \{2, 3, 4, 6, 7\}$.

Lời giải.

$\{2, 3, 4\}, \{2, 3, 6\}, \{2, 3, 7\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 4, 7\}, \{2, 6, 7\}, \{3, 4, 6\}, \{3, 4, 7\}, \{3, 6, 7\}, \{4, 6, 7\}$. □

Bài 11. Xác định tập hợp X biết $\{a\} \subset X \subset \{a, 3, 4\}$.

Lời giải.

Tập hợp X có thể là $\{a\}, \{a, 3\}, \{a, 4\}, \{a, 3, 4\}$. □

Bài 12. Xác định tập hợp X biết $\{a, 9\} \subset X \subset \{a, b, 7, 8, 9\}$ và tập hợp X có 3 phần tử.

Lời giải.

Tập hợp X có thể là $\{a, 9, b\}, \{a, 7, 9\}, \{a, 8, 9\}$. □

Bài 13. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ chia hết cho 2 và 5}\}$ và $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ có chữ số tận cùng bằng 0}\}$. Chứng minh rằng $A = B$.

Lời giải.

Trước hết, ta cần chứng minh $A \subset B$. Thật vậy, với $x \in A$ bất kì, ta luôn có x chia hết cho 2 và x chia hết cho 5. Vì 2, 5 là hai số nguyên tố cùng nhau nên x chia hết cho 10. Suy ra, $x \in B$.

Mặt khác, với phần tử $x \in B$ bất kì, vì x có chữ số tận cùng là 0 nên x chia hết cho 2 và 5. Suy ra, $x \in A$. Do đó, $B \subset A$. $\square$

Bài 14. Tìm giá trị các tham số m và n sao cho $\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - mx^2 + nx - 1 = 0\} = \{1; 2\}$.

Lời giải.

Đặt $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - mx^2 + nx - 1 = 0\}$ và $B = \{1; 2\}$.

Vì $1 \in A$ nên $-m + n = 0$.

Vì $2 \in A$ nên $-4m + 2n = -7$.

Từ đây, ta có hệ phương trình $m = n = \frac{7}{2}$.

Ngược lại, với $m = n = \frac{7}{2}$, ta có $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 1 = 0\} = \{1; 2\} = B$. $\square$

Bài 15. Cho A là tập hợp tất cả các tứ giác lồi, B là tập hợp tất cả các hình thang, C là tập hợp tất cả các hình bình hành, D là tập hợp tất cả các hình chữ nhật. Xác định mối quan hệ giữa các tập hợp đã cho.

Lời giải.

$D \subset C \subset B \subset A$. $\square$

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. Cho các tập hợp

$$A = \{1; 2\}; \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}; \quad C = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 3\}.$$

Hãy xác định mối quan hệ giữa các tập hợp trên.

Lời giải.

Ta có $B = \{1; 2\}$; $C = \{0; 1; 2\}$ Vậy $A \subset C$; $B \subset C$; $A = B$. $\square$

Bài 2. Cho A là tập hợp các số nguyên chia cho 3 dư 2, B là tập hợp các số nguyên chia cho 6 dư 2 hoặc dư 5. Chứng minh rằng $A = B$.

Lời giải.

Ta chứng minh mọi phần tử của A đều là phần tử của B và ngược lại.

Trước hết ta thấy rằng một số chia hết cho 3 thì chia cho 6 dư 0 hoặc dư 3 nên một số chia cho 3 dư 2 thì chia cho 6 dư 2 hoặc dư 5. Tức là nếu $x \in A$, $x = 3k + 2$ thì x có thể viết thành $x = 6l + 2$ hoặc $x = 6l + 5$ hay $x \in B$. Ngược lại, $x \in B$ xét hai trường hợp:

- Nếu $x = 6k + 2 = 3(2k) + 2$. Đặt $l = 2k \Rightarrow x = 3l + 2 \Rightarrow x \in A$
- Nếu $x = 6k + 5 = 3(2k + 1) + 2$. Đặt $l = 2k + 1 \Rightarrow x = 3l + 2 \Rightarrow x \in A$

Vậy $A \subset B$ và $B \subset A$ nên $A = B$ (điều phải chứng minh). $\square$

C CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Kí hiệu nào sau đây dùng để viết đúng mệnh đề “7 là số tự nhiên”?

- A. $7 \subset \mathbb{N}$. B. $7 \in \mathbb{N}$. C. $7 < \mathbb{N}$. D. $7 \leq \mathbb{N}$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 2. Kí hiệu nào sau đây dùng để viết đúng mệnh đề “ $\sqrt{2}$ không phải là số hữu tỉ”?

- A. $\sqrt{2} \neq \mathbb{Q}$. B. $\sqrt{2} \not\subset \mathbb{Q}$. C. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. D. $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 3. Cho A là một tập hợp. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

- A. $A \in A$. B. $\emptyset \in A$. C. $A \subset A$. D. $A \in \{A\}$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 4. Cho x là một phần tử của tập hợp A . Xét các mệnh đề sau:

- (I) $x \in A$ (II) $\{x\} \in A$ (III) $x \subset A$ (IV) $\{x\} \subset A$

Trong các mệnh đề trên, mệnh đề nào đúng?

- A. I và II. B. I và III. C. I và IV. D. II và IV.

Lời giải.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 5. Mệnh đề nào sau đây tương đương với mệnh đề $A \neq \emptyset$?

- A. $\forall x, x \in A$. B. $\exists x, x \in A$. C. $\exists x, x \notin A$. D. $\forall x, x \subset A$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 6. Hãy liệt kê các phần tử của tập $X = \{x \in \mathbb{R} | 2x^2 - 5x + 3 = 0\}$

- A. $X = \{0\}$. B. $X = \{1\}$. C. $X = \left\{\frac{3}{2}\right\}$. D. $X = \left\{1; \frac{3}{2}\right\}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } 2x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in \mathbb{R} \\ x = \frac{3}{2} \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ nên } X = \left\{1; \frac{3}{2}\right\}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 7. Cho tập $X = \{x \in \mathbb{N} | (x^2 - 4)(x - 1)(2x^2 - 7x + 3) = 0\}$. Tính tổng S các phần tử của tập X .

- A. $S = 4$. B. $S = \frac{9}{2}$. C. $S = 5$. D. $S = 6$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } (x^2 - 4)(x - 1)(2x^2 - 7x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ x - 1 = 0 \\ 2x^2 - 7x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \notin \mathbb{N} \\ x = 2 \in \mathbb{N} \\ x = 1 \in \mathbb{N} \\ x = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N} \\ x = 3 \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Suy ra $S = 2 + 1 + 3 = 6$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 8. Cho tập $X = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x^2 - 9) \cdot [x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}] = 0\}$. Hỏi tập X có bao nhiêu phần tử?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải.

$$\text{Ta có } (x^2 - 9) \cdot [x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 9 = 0 \\ x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \in \mathbb{Z} \\ x = -3 \in \mathbb{Z} \\ x = 1 \in \mathbb{Z} \\ x = \sqrt{2} \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Suy ra tập X có ba phần tử là $-3; 1; 3$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 9. Hãy liệt kê các phần tử của tập $X = \{x \in \mathbb{Q} \mid (x^2 - x - 6)(x^2 - 5) = 0\}$.

A. $X = \{\sqrt{5}; 3\}$.

B. $X = \{-\sqrt{5}; -2; \sqrt{5}; 3\}$.

C. $X = \{-2; 3\}$.

D. $X = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } (x^2 - x - 6)(x^2 - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 6 = 0 \\ x^2 - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \in \mathbb{Q} \\ x = -2 \in \mathbb{Q} \\ x = \sqrt{5} \notin \mathbb{Q} \\ x = -\sqrt{5} \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Do đó $X = \{-2; 3\}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 10. Hãy liệt kê các phần tử của tập $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 = 0\}$

A. $X = 0$.

B. $X = \{0\}$.

C. $X = \emptyset$.

D. $X = \{\emptyset\}$.

Lời giải.

Vì phương trình $x^2 + x + 1 = 0$ vô nghiệm nên $X = \emptyset$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 11. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là ước chung của } 36 \text{ và } 120\}$. Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp A .

A. $A = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$.

B. $A = \{1; 2; 4; 6; 8; 12\}$.

C. $A = \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$.

D. $A = \{1; 36; 120\}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} 36 = 2^2 \cdot 3^2 \\ 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \end{cases}$. Do đó $A = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 12. Hỏi tập hợp $A = \{k^2 + 1 \mid k \in \mathbb{Z}, |k| \leq 2\}$ có bao nhiêu phần tử?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 5.

Lời giải.

Vì $k \in \mathbb{Z}$ và $|k| \leq 2$ nên $k \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ do đó $(k^2 + 1) \in \{1; 2; 5\}$. Vậy A có 3 phần tử

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 13. Tập hợp nào sau đây là tập rỗng?

A. $A = \{\emptyset\}$.

B. $B = \{x \in \mathbb{N} \mid (3x - 2)(3x^2 + 4x + 1) = 0\}$.

C. $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid (3x - 2)(3x^2 + 4x + 1) = 0\}$.

D. $D = \{x \in \mathbb{Q} \mid (3x - 2)(3x^2 + 4x + 1) = 0\}$.

Lời giải.

Ta có $A = \{\emptyset\}$. Tập hợp này có 1 phần tử $\emptyset$ do đó không phải là tập rỗng.

Ta có $(3x - 2)(3x^2 + 4x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ x = -1 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$.

Do đó $\begin{cases} C = \{x \in \mathbb{Z} \mid (3x - 2)(3x^2 + 4x + 1) = 0\} = \{-1\} \\ D = \{x \in \mathbb{Q} \mid (3x - 2)(3x^2 + 4x + 1) = 0\} = \left\{\frac{2}{3}; -1; -\frac{1}{3}\right\} \\ B = \{x \in \mathbb{N} \mid (3x - 2)(3x^2 + 4x + 1) = 0\} = \emptyset. \end{cases}$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 14. Cho tập $M = \{(x; y) \mid x, y \in \mathbb{N} \text{ và } x + y = 1\}$. Hỏi tập M có bao nhiêu phần tử?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải.

Ta có $x, y \in \mathbb{N}$ và $x + y = 1$ nên $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, y = 1 \\ x = 1, y = 0. \end{cases}$

Do đó ta suy ra $M = \{(0; 1), (1; 0)\}$ nên M có 2 phần tử.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 15. Cho tập $M = \{(x; y) \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ và } x^2 + y^2 \leq 0\}$. Hỏi tập M có bao nhiêu phần tử?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. Vô số.

Lời giải.

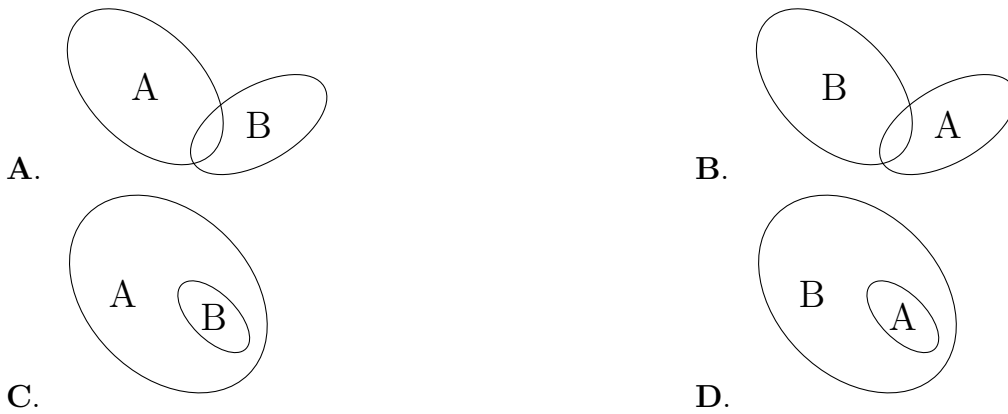
Ta có $\begin{cases} x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ y^2 \geq 0, \forall y \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 0$

Mà $x^2 + y^2 \leq 0$ nên chỉ xảy ra khi $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$

Do đó ta suy ra $M = \{0; 0\}$ nên M có 1 phần tử.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 16. Hình nào sau đây minh họa tập A là con của tập B ?



Lời giải.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 17. Cho tập $X = \{2; 3; 4\}$ Hỏi tập X có bao nhiêu tập hợp con?

- A. 3. B. 6. C. 8. D. 9.

Lời giải.

Các tập hợp con của X là: $\emptyset; \{2\}; \{3\}; \{4\}; \{2; 3\}; \{3; 4\}; \{2; 4\}; \{2; 3; 4\}$.

Cách trắc nghiệm: Tập X có 3 phần tử nên có số tập con là $2^3 = 8$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 18. Cho tập $X = \{1; 2; 3; 4\}$ Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Số tập con của X là 16. B. Số tập con của X có hai phần tử là 8.
C. Số tập con của X chứa số 1 là 6. D. Số tập con của X chứa 4 phần tử là 0.

Lời giải.

Số tập con của X là $2^4 = 16$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 19. Tập $A = \{0; 2; 4; 6\}$ có bao nhiêu tập hợp con có đúng hai phần tử?

- A. 4. B. 6. C. 7. D. 8.

Lời giải.

Các tập con có hai phần tử của tập A là: $A_1 = \{0; 2\}; A_2 = \{0; 4\}; A_3 = \{0; 6\}; A_4 = \{2; 4\}; A_5 = \{2; 6\}; A_6 = \{4; 6\}$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 20. Tập $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ có bao nhiêu tập hợp con có đúng hai phần tử?

- A. 30. B. 15. C. 10. D. 3.

Lời giải.

Các tập con có hai phần tử của tập A là

$A_1 = \{1; 2\}; A_2 = \{1; 3\}; A_3 = \{1; 4\}; A_4 = \{1; 5\}; A_5 = \{1; 6\}; A_6 = \{2; 3\};$

$A_7 = \{2; 4\}; A_8 = \{2; 5\}; A_9 = \{2; 6\}; A_{10} = \{3; 4\}; A_{11} = \{3; 5\}; A_{12} = \{3; 6\};$

$A_{13} = \{4; 5\}; A_{14} = \{4; 6\}; A_{15} = \{5; 6\}$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 21. Cho tập $X = \{\alpha; \pi; \xi; \psi; \rho; \eta; \gamma; \sigma; \omega; \tau\}$. Số các tập con có ba phần tử trong đó có chứa α, π của X là

A. 8.

B. 10.

C. 12.

D. 14.

Lời giải.

Tập X có 10 phần tử. Gọi $Y = \{\alpha; \pi; x\}$ là tập con của X trong đó $x \in X$.

Có 8 cách chọn x từ các phần tử còn lại trong C . Do đó, có 8 tập con thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 22. Cho hai tập hợp $X = \{n \in \mathbb{N} | n \text{ là bội của } 4 \text{ và } 6\}$, $Y = \{n \in \mathbb{N} | n \text{ là bội của } 12\}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $Y \subset X$.B. $X \subset Y$.C. $\exists n : n \in X \text{ và } n \notin Y$.D. $X = Y$.**Lời giải.**

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 23. Trong các tập hợp sau, tập nào có đúng một tập hợp con?

A. $\emptyset$.B. $\{1\}$.C. $\{\emptyset\}$.D. $\{\emptyset; 1\}$.**Lời giải.**

Tập $\emptyset$ có một tập con là $\emptyset$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 24. Trong các tập hợp sau, tập nào có đúng hai tập hợp con?

A. $\emptyset$.B. $\{1\}$.C. $\{\emptyset\}$.D. $\{\emptyset; 1\}$.**Lời giải.**

Tập $\{1\}$ có đúng hai tập con là $\emptyset$ và $\{1\}$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 25. Trong các tập hợp sau, tập nào có đúng hai tập hợp con?

A. $\{x; y\}$.B. $\{x\}$.C. $\{\emptyset; x\}$.D. $\{\emptyset; x; y\}$.**Lời giải.**

Tập $\{x\}$ có hai tập con là $\emptyset$ và $\{x\}$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 26. Cho hai tập hợp $A = \{1; 2; 3\}$ và $B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ Có tất cả bao nhiêu tập X thỏa $A \subset X \subset B$?

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 8.

Lời giải.

Ta có $A \subset X$ nên X có ít nhất 3 phần tử $\{1; 2; 3\}$

Ta có $X \subset B$ nên X phải có nhiều nhất 5 phần tử và các phần tử thuộc X cũng thuộc B

Do đó các tập X thỏa mãn là $\{1; 2; 3\}, \{1; 2; 3; 4\}, \{1; 2; 3; 5\}, \{1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow$ có 4 tập thỏa mãn.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 27. Cho hai tập hợp $A = \{1; 2; 5; 7\}$ và $B = \{1; 2; 3\}$ Có tất cả bao nhiêu tập X thỏa $X \subset A$ và $X \subset B$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải.

Các tập X thỏa mãn là $\{\emptyset\}, \{1\}, \{2\}, \{1; 2\} \Rightarrow$ có 4 tập X thỏa mãn.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 28. Cho các tập hợp sau

$$M = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ là bội số của } 2\},$$

$$N = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ là bội số của } 6\},$$

$$P = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ là ước số của } 2\},$$

$$Q = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ là ước số của } 6\}.$$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $M \subset N$.

B. $N \subset M$.

C. $P = Q$.

D. $Q \subset P$.

Lời giải.

Ta có $M = \{0; 2; 4; 6; \dots\}$, $N = \{0; 6; 12; \dots\}$, $P = \{1; 2\}$, $Q = \{1; 2; 3; 6\}$. Suy ra $N \subset M$ và $P \subset Q$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 29. Cho ba tập hợp E, F và G Biết $E \subset F$, $F \subset G$ và $G \subset E$. Khẳng định nào sau đây đúng.

A. $E \neq F$.

B. $F \neq G$.

C. $E \neq G$.

D. $E = F = G$.

Lời giải.

Lấy x bất kì thuộc F , vì $F \subset G$ nên $x \in G$ mà $G \subset E$ nên $x \in E$ do đó $F \subset E$. Lại do $E \subset F$ nên $E = F$. Lấy x bất kì thuộc G , vì $G \subset E$ nên $x \in E$ mà $E \subset F$ nên $x \in F$.

Do đó $G \subset F$. Lại do $F \subset G$ nên $F = G$. Vậy $E = F = G$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 30. Tìm x, y để ba tập hợp $A = \{2; 5\}$, $B = \{5; x\}$ và $C = \{x; y; 5\}$ bằng nhau.

A. $x = y = 2$.

B. $x = y = 2$ hoặc $x = 2, y = 5$.

C. $x = 2, y = 5$.

D. $x = 5, y = 2$ hoặc $x = y = 5$.

Lời giải.

Vì $A = B$ nên $x = 2$ Lại do $B = C$ nên $y = x = 2$ hoặc $y = 5$. Vậy $x = y = 2$ hoặc $x = 2, y = 5$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 31. Cho tập $A = \{0; 2; 4; 6; 8\}$; $B = \{3; 4; 5; 6; 7\}$. Tập $A \setminus B$ là

A. $\{0; 6; 8\}$.

B. $\{0; 2; 8\}$.

C. $\{3; 6; 7\}$.

D. $\{0; 2\}$.

Lời giải.

Ta có $A \setminus B = \{0; 2; 8\}$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 32. Trong các tập hợp sau đây, tập hợp nào là tập hợp rỗng?

A. $\{x \in \mathbb{R} | -x^2 + 5x - 2 = 0\}$.

B. $\{x \in \mathbb{Z} | |x| < 1\}$.

C. $\{x \in (0; +\infty) | x^2 - 4x = 0\}$.

D. $\{x \in (-\infty; -1) | x^2 - 2x - 3 = 0\}$.

Lời giải.

Xét tập hợp $\{x \in (-\infty; -1) | x^2 - 2x - 3 = 0\}$, ta có $x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3. \end{cases}$

Mà $x \in (-\infty; -1)$ nên loại cả hai giá trị. Vậy nên $\{x \in (-\infty; -1) | x^2 - 2x - 3 = 0\} = \emptyset$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 33. Cho tập hợp $B = \{n \in \mathbb{N}^* | 3 < n^2 < 100\}$. Số phần tử của B là

A. 6.

B. 7.

C. 8.

D. 5.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} n \in \mathbb{N}^* \\ 3 < n^2 < 100 \end{cases} \Leftrightarrow n \in \{2; 3; \dots; 9\}.$

Vậy số phần tử của B là 8.

Chọn đáp án **C** □

Câu 34. Cho tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$. Số tập con của A có hai phần tử là

- A. 6. B. 7. C. 8. D. 5.

Lời giải.

Các tập con có hai phần tử của A là $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 35. Cho tập hợp $A = \{3k | k \in \mathbb{Z}, -2 < k \leq 3\}$. Khi đó tập A được viết dưới dạng liệt kê các phần tử là

- A. $\{-1; 0; 1; 2; 3\}.$ B. $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}.$
C. $\{-3; 0; 3; 6; 9\}.$ D. $\{-6; -3; 0; 3; 6; 9\}.$

Lời giải.

Ta có $A = \{-3; 0; 3; 6; 9\}.$

Chọn đáp án **C** □

Câu 36. Cho tập A có 3 phần tử. Số tập con của tập A bằng

- A. 6. B. 3. C. 8. D. 4.

Lời giải.

Gọi $A = \{a; b; c\}.$

Khi đó các tập con của A là $\emptyset, A, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a; b\}, \{a; c\}, \{b; c\}.$

Vậy số tập con của A bằng 8.

Chọn đáp án **C** □

Câu 37. Cho tập hợp $M = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Số các tập con của M luôn chứa cả ba phần tử 1, 3, 5 là

- A. 4. B. 8. C. 2. D. 3.

Lời giải.

Các tập con của M luôn chứa cả ba phần tử 1, 3, 5 là $\{1; 3; 5\}, \{1; 3; 5; 2\}, \{1; 3; 5; 4\}, \{1; 3; 5; 2; 4\}.$

Chọn đáp án **A** □

Câu 38. Trên mặt phẳng tọa độ $(O; \vec{i}, \vec{j})$, cho các véc-tơ $\vec{a} = \vec{i} + 4\vec{j}$ và $\vec{b} = -2\vec{j} + 3\vec{i}$. Tọa độ véc-tơ $\vec{a} + \vec{b}$ là

- A. $\vec{a} + \vec{b} = (-3; -1).$ B. $\vec{a} + \vec{b} = (4; 2).$ C. $\vec{a} + \vec{b} = (-1; 7).$ D. $\vec{a} + \vec{b} = (3; 1).$

Lời giải.

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{j} + 3\vec{i} = 4\vec{i} + 2\vec{j}.$

Chọn đáp án **B** □

Câu 39. Hãy liệt kê tất cả các phần tử của tập hợp $X = \{x \in \mathbb{N} | x^2 + 2x - 3 = 0\}.$

- A. $X = \{1; -3\}.$ B. $X = \mathbb{R}.$ C. $X = \{0\}.$ D. $X = \{1\}.$

Lời giải.

Giải phương trình $x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in \mathbb{N} \\ x = -3 \notin \mathbb{N}. \end{cases}$

Vậy $X = \{1\}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 40. Cho tập $A = \{a; b; 5\}$. Số tập con của tập A là

- A. 5. B. 8. C. 7. D. 4.

Lời giải.

Tập con của A là $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{5\}, \{a; b\}, \{a; 5\}, \{b; 5\}, \{a; b; 5\}$. Vậy số tập con của A là 8.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 41. Cho hai số thực a và b thỏa mãn $a < b$, cách viết nào sau đây là đúng?

- A. $\{a\} \in [a; b]$. B. $a \in (a; b]$. C. $a \subset [a; b]$. D. $\{a\} \subset [a; b]$.

Lời giải.

Tập $\{a\}$ là tập hợp chứa phần tử a nên nó con của tập $[a; b]$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 42. Cho các tập hợp sau $M = \{1; 2; 3\}$, $N = \{x \in \mathbb{N} / x < 4\}$, $P = (0; +\infty)$, $Q = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 7x + 3 = 0\}$. Khẳng định nào sau đây đúng nhất?

- A. $M \subset N$; $M \subset P$; $Q \subset P$. B. $N \subset P$; $Q \subset P$.
C. $M \subset N$. D. $M \subset N$; $M \subset P$.

Lời giải.

Tập N và Q được viết dưới dạng liệt kê là $N = \{0; 1; 2; 3\}$, $Q = \left\{ \frac{7 + \sqrt{37}}{2}; \frac{7 - \sqrt{37}}{2} \right\}$.

Dễ thấy các phần tử của tập M đều nằm trong tập N và tập P ; Tập Q có hai số thực dương đều thuộc P . Suy ra $M \subset N$; $M \subset P$; $Q \subset P$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 43. Liệt kê tất cả các phần tử của tập $M = \{x \in \mathbb{N}^* | x < 4\}$.

- A. $M = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. B. $M = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.
C. $M = \{1; 2; 3; 4\}$. D. $M = \{1; 2; 3\}$.

Lời giải.

Ta có $M = \{x \in \mathbb{N}^* | x < 4\} = \{1; 2; 3\}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 44. Liệt kê các phần tử của tập hợp $H = \{x \in \mathbb{Z} | -2 \leq x < 3\}$.

- A. $H = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$. B. $H = \{-1; 0; 1; 2\}$.
C. $H = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$. D. $H = \{0; 1; 2; 3\}$.

Lời giải.

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $H = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 45. Hãy liệt kê các phần tử của tập $M = \{x : x \text{ là ước nguyên dương của } 6\}$?

A. $\{1; 2; 3; 6\}$.B. $\{1; 2\}$.C. $\{1; 6\}$.D. $\{1; 3; 4\}$.**Lời giải.**

Các ước nguyên dương của 6 là 1; 2; 3; 6.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 46. Tập hợp nào sau đây có đúng một tập con?A. $\{0\}$.B. $\{0; 1\}$.C. $\emptyset$.D. $\{1\}$.**Lời giải.**

Tập rỗng chỉ có đúng một tập con là chính nó. Các tập có một phần tử luôn có ít nhất hai tập con là rỗng và chính nó.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 47. Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3\}$, số tập con của A là

A. 3.

B. 5.

C. 8.

D. 6.

Lời giải.Tập A có 3 phần tử nên số tập con của A là $2^3 = 8$. Có thể liệt kê như sau:

- Tập con có 0 phần tử $\emptyset$,
- Tập con có 1 phần tử $\{1\}, \{2\}, \{3\}$,
- Tập con có 2 phần tử $\{1; 2\}, \{1; 3\}, \{2; 3\}$,
- Tập con có 3 phần tử A .

Chọn đáp án **C**

□

Câu 48. Trong các tập hợp sau, tập hợp nào rỗng?A. $\{x \in \mathbb{R} | x^2 + 5x - 6 = 0\}$.B. $\{x \in \mathbb{Q} | 3x^2 - 5x + 2 = 0\}$.C. $\{x \in \mathbb{Z} | x^2 + x - 1 = 0\}$.D. $\{x \in \mathbb{R} | x^2 + 5x - 1 = 0\}$.**Lời giải.**

$$\{x \in \mathbb{R} | x^2 + 5x - 6 = 0\} = \{1; -6\}.$$

$$\{x \in \mathbb{Q} | 3x^2 - 5x + 2 = 0\} = \{1; \frac{2}{3}\}.$$

$$\{x \in \mathbb{Z} | x^2 + x - 1 = 0\} = \emptyset.$$

$$\{x \in \mathbb{R} | x^2 + 5x - 1 = 0\} = \left\{ \frac{-5 \pm \sqrt{29}}{2} \right\}.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 49. Hai tập hợp P và Q nào bằng nhau?A. $P = \{x \in \mathbb{R} | 2x^2 - x + 2 = 0\}, Q = \{x \in \mathbb{N} | x^4 - x^2 - 2 = 0\}$.B. $P = \{-1; 2\}, Q = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 3x + 2 = 0\}$.C. $P = \{1\}, Q = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - x = 0\}$.D. $P = \{x \in \mathbb{R} | x(x+2) = 0\}, Q = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 2x = 0\}$.**Lời giải.**Xét đáp án A, ta có phương trình $2x^2 - x + 2 = 0$ vô nghiệm $\Rightarrow P = \emptyset$.

$$\text{Lại có, } x^4 - x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -1 \text{ (vô nghiệm)} \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \notin \mathbb{N} \\ x = -\sqrt{2} \notin \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow Q = \emptyset.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 50. Cho tập hợp $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 + n - 6 = 0\}$, khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A. Tập hợp A có hai phần tử. B. Tập hợp $A = \emptyset$.
C. Tập hợp A có một phần tử. D. Tập hợp A có ba phần tử.

Lời giải.

$$\text{Xét } n^2 + n - 6 = 0 \Leftrightarrow (n + 3)(n - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = -3 & (\text{loại}) \\ n = 2 \end{cases}.$$

Do đó $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 + n - 6 = 0\} = \{2\}$. Vậy tập hợp A có một phần tử.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 51. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x + 4)(x^2 - 3x + 2) = 0\}$. Viết tập hợp A bằng cách liệt kê các phần tử.

- A. $A = \{1; 2; 4\}$. B. $A = \{-1; 2; 3\}$. C. $A = \{1; 2; -4\}$. D. $A = \{1; 2; 3\}$.

Lời giải.

Ta có

$$(x + 4)(x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 1 \\ x = 2. \end{cases}$$

Vậy $A = \{1; 2; -4\}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 52. Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3\}$. Số tập con gồm 2 của A là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải.

Số tập con của A gồm 2 phần tử là 3, đó là $\{1; 2\}$, $\{2; 3\}$, $\{1; 3\}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 53. Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$. Hãy chọn mệnh đề **sai**.

- A. $\emptyset \subset A$. B. $\{1; 2; 4\} \subset A$. C. $\{-1; 0; 1\} \subset A$. D. $0 \in A$.

Lời giải.

Mệnh đề $\{-1; 0; 1\} \subset A$ sai vì với $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ ta có $-1 \notin A$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 54. Tập hợp nào sau đây là tập hợp rỗng?

- A. $\{0\}$. B. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + 3 = 0\}$.
C. $\{x \in \mathbb{R} \mid x - 1 = 0\}$. D. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$.

Lời giải.

Do phương trình $x^2 - 2x + 3 = 0$ có $\Delta' = -2 < 0$ nên vô nghiệm, từ đó

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + 3 = 0\} = \emptyset.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 55. Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3\}$. Số tập con của tập A là

- A. 5. B. 6. C. 7. D. 8.

Lời giải.

Số tập con của tập có n phần tử là 2^n .

Tập A có 3 phần tử nên có số tập con là $2^3 = 8$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 56. Tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ có bao nhiêu tập hợp con gồm 2 phần tử?

- A. 30. B. 15. C. 10. D. 3.

Lời giải.

Các tập con gồm 2 phần tử của tập hợp A là: $\{1; 2\}, \{1; 3\}, \{1; 4\}, \{1; 5\}, \{1; 6\}, \{2; 3\}, \{2; 4\}, \{2; 5\}, \{2; 6\}, \{3; 4\}, \{3; 5\}, \{3; 6\}, \{4; 5\}, \{4; 6\}, \{5; 6\}$.

Vậy có tất cả 15 tập con.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 57. Số tập con gồm 3 phần tử có chứa e, f của tập hợp $M = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ là

- A. 8. B. 10. C. 14. D. 12.

Lời giải.

Tập con gồm 3 phần tử có chứa e, f của tập hợp $M = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ là

$\{a; e; f\}, \{b; e; f\}, \{c; e; f\}, \{d; e; f\}, \{g; e; f\}, \{h; e; f\}, \{i; e; f\}, \{j; e; f\}$.

Vậy có tất cả 8 tập hợp.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 58. Tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 2\}$ bằng với tập hợp nào sau đây?

- A. $A = \{-1; 0; 1; 2\}$. B. $A = (-1; 2]$. C. $A = \{0; 1; 2\}$. D. $A = [-1; 2]$.

Lời giải.

Ta có: $x \in A \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ -1 < x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-1; 2]$.

Do đó, $A = (-1; 2]$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 59. Cho $A = \{1; 2; 3\}$. Tập hợp A có bao nhiêu tập con?

- A. 6. B. 5. C. 8. D. 7.

Lời giải.

Các tập con của A lần lượt là $\emptyset, A, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1; 2\}, \{1; 3\}, \{2; 3\}$. Tập hợp A có tất cả 8 tập con.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 60. Ký hiệu nào sau đây để chỉ 6 là số tự nhiên?

- A. $6 \notin \mathbb{N}$. B. $6 \subset \mathbb{N}$. C. $6 \in \mathbb{N}$. D. $6 = \mathbb{N}$.

Lời giải.

Ta viết $a \in A$ để chỉ a là một phần tử của tập hợp A .

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 61. Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3\}$. Số tập con khác rỗng của A là

- A. 8. B. 9. C. 7. D. 6.

Lời giải.

Tập hợp A gồm n phần tử sẽ có 2^n tập con. Do đó, số tập con khác rỗng của tập $A = \{1; 2; 3\}$ là $2^3 - 1 = 7$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 62. Cho tập hợp $A = (0; +\infty)$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \mid mx^2 - 4x + m - 3 = 0\}$, m là tham số. Tìm m để B có đúng hai tập con và $B \subset A$.

- A. $m \neq 0$. B. $m = 4$. C. $m = -1, m = 4$. D. $m > 0$.

Lời giải.

B có đúng 2 tập con và $B \subset A$ khi và chỉ khi phương trình $mx^2 - 4x + m - 3 = 0$ (1) có đúng một nghiệm dương.

- **Trường hợp 1.** $m = 0$, phương trình (1) trở thành $-4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}$.

Do đó, $m = 0$ không thỏa đề bài.

- **Trường hợp 2.** $m \neq 0$, khi đó phương trình (1) có đúng một nghiệm dương khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta' = 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m(m - 3) = 0 \\ \frac{4}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4.$$

Vậy $m = 4$ là giá trị duy nhất thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 63. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}$. Tập A được viết dưới dạng liệt kê là

- A. $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. B. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. C. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. D. $A = [0; 5]$.

Lời giải.

Tập hợp A gồm các phần tử là số tự nhiên không lớn hơn 5 được viết dưới dạng liệt kê là $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 64. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\mathbb{R} \subset \mathbb{Q}$. B. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$. C. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Z}$. D. $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 65. Tập $X = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x^4 - 2x^2 = 0\}$ có bao nhiêu phần tử?

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.

Lời giải.

$$\text{Ta có } x^4 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin \mathbb{N}^* \\ x = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Vậy $X = \emptyset$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 66. Cho hai tập khác rỗng $A = [m - 3; 1)$, $B = (-3; 4m + 5)$ với $m \in \mathbb{R}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để tập A là tập con của tập B .

- A. $m \geq 0$. B. $0 < m < 4$. C. $m \geq -1$. D. $m > 0$.

Lời giải.

Vì A, B khác rỗng và $A \subset B$ nên

$$\begin{cases} m - 3 < 1 \\ -3 < 4m + 5 \\ -3 < m - 3 \\ 1 \leq 4m + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m > -2 \\ m > 0 \\ m \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 4.$$

Vậy giá trị m cần tìm là $0 < m < 4$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 67. Trong các tập hợp sau, tập hợp nào có đúng một tập hợp con?

- A. $\{a, b\}$. B. $\emptyset$. C. $\{a, b, c\}$. D. $\{a\}$.

Lời giải.

Ta có $\emptyset \subset \emptyset$. Do đó tập $\emptyset$ có đúng một tập con.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 68. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 + x + 3 = 0\}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $A = \{0\}$. B. $A = 0$. C. $A = \emptyset$. D. $A = \{1, 2, 3\}$.

Lời giải.

Phương trình $2x^2 + x + 3 = 0$ có biệt thức $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = -23 < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

Vậy $A = \emptyset$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 69. Cho $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ là các tập hợp số. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. B. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. C. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. D. $\mathbb{R} \subset \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Theo mối quan hệ giữa các tập hợp số, ta có $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 70. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 1)(x^2 + 2) = 0\}$. Tập hợp A là tập hợp nào sau đây?

- A. $\{-1\}$. B. $\{1\}$. C. $\{-\sqrt{2}; -1; 1; \sqrt{2}\}$. D. $\{-1; 1\}$.

Lời giải.

Ta có $(x^2 - 1)(x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Vậy $A = \{-1; 1\}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 71. Cho tập hợp $A = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y = \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}, \text{ với } a, b, c \text{ là các số thực dương}\right\}$. Tìm số lớn nhất của tập hợp A .

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải.

Ta có $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2) \Leftrightarrow \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} \leq 3$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Vậy số lớn nhất là 3.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 72. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} \mid (x^3 - 8x^2 + 15x)^2 + (3x^2 - 10x + 3)^2 = 0\}$. Tổng các phần tử của tập A bằng bao nhiêu?

A. 3.

B. 8.

C. 13.

D. $\frac{25}{3}$.

Lời giải.

Ta có $(x^3 - 8x^2 + 15x)^2 + (3x^2 - 10x + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 8x^2 + 15x = 0 \\ 3x^2 - 10x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$. Từ đó suy ra $A = \{3\}$, nên tổng các phần tử của tập A bằng 3.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 73. Gọi A là tập hợp tất cả các ước số nguyên dương lớn hơn 1 của số 20170. Biết rằng 2017 là số nguyên tố, hỏi A có bao nhiêu phần tử?

A. 2017.

B. 3.

C. 7.

D. 8.

Lời giải.

Dùng máy tính Casio phân tích số 20170 thành tích của các thừa số nguyên tố là $2017 = 2 \cdot 5 \cdot 2017$. Từ đó suy ra $A = \{2, 5, 2017, 2 \cdot 5, 2 \cdot 2017, 5 \cdot 2017, 2 \cdot 5 \cdot 2017\}$ có 7 phần tử.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 74. Số phần tử của tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x^2 - x)(x^4 - 6x^2 + 5) = 0\}$ là

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải.

Ta có $(x^2 - x)(x^4 - 6x^2 + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = 0 \\ x^4 - 6x^2 + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{5} \end{cases}$. Từ đó ta có $A = \{0, -1, 1\}$ chứa

3 phần tử.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 75. Cho tập hợp $X = \{n \in \mathbb{N} \mid -3 < 3n + 2 < 302\}$. Tính tổng tất cả các số thuộc tập hợp X .

A. 5049.

B. 4949.

C. 5050.

D. 4950.

Lời giải.

$-3 < 3n + 2 < 302 \Leftrightarrow -\frac{5}{3} < n < 100 \leq n \leq 99$ (vì $n \in \mathbb{N}$).

Vậy tổng tất cả các số là $\frac{99(1+99)}{2} = 4950$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 76. Cho ba tập hợp: $X = (-4; 3)$, $Y = \{x \in \mathbb{R} : 2x + 4 > 0, x < 5\}$,

$Z = \{x \in \mathbb{R} : (x + 3)(x - 4) = 0\}$. Chọn câu đúng nhất?

A. $X \subset Y$.B. $Z \subset X$.C. $Z \subset X \cup Y$.D. $Z \subset Y$.

Lời giải.

Ta có:

$Y = \{x \in \mathbb{R} : 2x + 4 > 0, x < 5\} = (-2; 5)$; $Z = \{-3; 4\}$.

- $\begin{cases} -3 \in X \\ -3 \notin Y \end{cases} \Rightarrow X \not\subset Y$.

$$\begin{aligned} & - \begin{cases} 4 \in Z \\ 4 \notin X \end{cases} \Rightarrow Z \not\subset X. \\ & - \begin{cases} -3 \in Z \\ -3 \notin Y \end{cases} \Rightarrow Z \not\subset Y. \end{aligned}$$

$$X \cup Y = (-4; 5) \Rightarrow \{-3; 4\} \subset (-4; 5).$$

Vậy $Z \subset X \cup Y$.

Vậy $Z \subset X \cup Y$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 77. Tìm tất cả các giá trị của m để tập hợp $(1; m)$ (với $m > 1$) chứa đúng 2 số nguyên dương.

A. $m \in (3; 4)$.

B. $m > 2$.

C. $m \in [3; 4]$.

D. $m \in (3; 4]$.

Lời giải.

Với $x \in (1; m) \Rightarrow 1 < x < m$. Mà các số nguyên lớn hơn 1 là 2, 3, 4, ...

Do đó để tập hợp $(1; m)$ chứa đúng hai số nguyên thì $m \in (3; 4]$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 78. Cho tập hợp $X = \{n \in \mathbb{Z} \mid -101 < 2n + 1 < 53 \text{ và } n:5\}$. Tập hợp X có bao nhiêu phần tử?

A. 25.

B. 26.

C. 27.

D. 31.

Lời giải.

$$-101 < 2n + 1 < 53 \Leftrightarrow -51 < n < 26 \Leftrightarrow -50 \leq n \leq 25. \text{ Vậy số các phần tử là } \frac{25 + 50}{5} + 1 = 26.$$

Chọn đáp án **B** □

Câu 79. Tìm số phần tử của tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x - 1)(x + 2)(x^3 - 4x) = 0\}$.

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 5.

Lời giải.

$$(x - 1)(x + 2)(x^3 - 4x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \\ x = 0 \\ x = 2. \end{cases}$$

Vậy A có 4 phần tử.

Chọn đáp án **C** □

Câu 80. Trong các tập hợp sau, tập nào là tập rỗng?

A. $T_1 = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 + 3x - 4 = 0\}$.

B. $T_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3 = 0\}$.

C. $T_1 = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 2\}$.

D. $T_1 = \{x \in \mathbb{Q} \mid (x^2 + 1)(2x - 5) = 0\}$.

Lời giải.

$$\text{Vì } x^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \notin \mathbb{N} \\ x = -\sqrt{2} \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 81. Cho tập hợp $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$. Tập hợp nào trong các tập hợp sau đây **không** chứa tập hợp X ?

- A. $A = [-3; 7)$. B. $\mathbb{R}$. C. $B = [-3; +\infty)$. D. $C = [-1; +\infty)$.

Lời giải.

$X = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\} = (-1; +\infty) \not\subset A$ nên tập A không chứa tập X .

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 82. Cho các tập hợp A là tập hợp các tam giác, B là tập hợp các tam giác đều, C là tập hợp các tam giác cân. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $A = B$. B. $A \subset B$. C. $A \subset C$. D. $B \subset A$.

Lời giải.

Tam giác đều là trường hợp đặc biệt của các tam giác thường nên $B \subset A$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 83. Cho hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$ có cùng tập xác định và ba tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}$ và $C = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \cdot g(x) = 0\}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $A \subset B$. B. $A \subset C$. C. $C \subset A$. D. $C \subset B$.

Lời giải.

$$f(x) \cdot g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0. \end{cases}$$

Suy ra $A \subset C$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 84. Tập hợp $Y = \{2; 3; 4\}$ có bao nhiêu tập hợp con?

- A. 8. B. 5. C. 3. D. 1.

Lời giải.

- Số tập con của Y gồm 0 phần tử là 1.
- Số tập con của Y gồm 1 phần tử là 3.
- Số tập con của Y gồm 2 phần tử là 3.
- Số tập con của Y gồm 3 phần tử là 1.

Vậy có tất cả 8 tập con của Y .

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 85. Tập hợp $A = \{1; 2; 3\}$ có bao nhiêu tập con gồm hai phần tử?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải.

Số tập con của A gồm 2 phần tử là 3, đó là $\{1; 2\}$, $\{2; 3\}$, $\{1; 3\}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 86. Tập hợp $Y = \{1; 2; 3\}$ có bao nhiêu tập con?

- A. 3. B. 6. C. 7. D. 8.

Lời giải.

- Số tập con của Y gồm 0 phần tử là 1.
- Số tập con của Y gồm 1 phần tử là 3.

- Số tập con của Y gồm 2 phần tử là 3.
- Số tập con của Y gồm 3 phần tử là 1.

Vậy có tất cả 8 tập con của Y .

Chọn đáp án **D**

□

Câu 87. Cho hai đa thức $P(x)$ và $Q(x)$. Xét các tập hợp sau $A = \{x \in \mathbb{R} | P(x) = 0\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} | Q(x) = 0\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} | P^2(x) + Q^2(x) = 0\}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. $A \subset C$. B. $B \subset C$. C. $C \subset A$. D. $A \subset B$.

Lời giải.

Ta có $P^2(x) + Q^2(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = 0 \\ Q(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow C$ gồm những phần tử để $P(x) = 0$ và $Q(x) = 0$

$\Rightarrow C \subset A$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 88. Có bao nhiêu tập hợp X thỏa mãn điều kiện $\{a, b\} \subset X \subset \{a, b, c, d, e\}$?

- A. 2. B. 4. C. 8. D. 10.

Lời giải.

Từ điều kiện $\{a, b\} \subset X \subset \{a, b, c, d, e\}$ ta suy ra X phải chứa các phần tử a, b và chỉ có thể thêm các phần tử c, d, e nên chọn X là một trong các tập hợp sau: $\{a, b\}$, $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, b, e\}$, $\{a, b, c, d\}$, $\{a, b, d, e\}$, $\{a, b, e, c\}$, $\{a, b, c, d, e\}$. Vậy có 8 tập hợp X thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 89. Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Số tập hợp con có đúng 2 phần tử của A là

- A. 5. B. 9. C. 45. D. 90.

Lời giải.

Cách 1: Số tập con của tập A gồm 2 phần tử là số cách lấy ra bộ 2 số từ A .

Do đó có số tập con là $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ (Bộ hai số lấy ra a, b trùng với b, a).

Cách 2: Số tập hợp con có đúng 2 phần tử của A bằng số các số tự nhiên có hai chữ số $\overline{ab}$, với $a > b$ (*).

Số các số tự nhiên có hai chữ số là $100 - 10 = 90$ số. Trong đó, có 9 số $10; 20; \dots; 90$ thỏa mãn (*); có 9 số $11; 22; \dots; 99$ không thỏa mãn (*); và số các số còn lại thỏa mãn (*) là $\frac{90 - 9 - 9}{2} = 36$. Vậy tổng số các số thỏa mãn (*) là $9 + 36 = 45$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 90. Cho hàm số bậc nhất $y = f(x)$ có $f(-1) = 2$ và $f(2) = -3$. Hàm số đó là

- A. $y = -2x + 3$. B. $y = \frac{-5x - 1}{3}$. C. $y = \frac{-5x + 1}{3}$. D. $y = 2x - 3$.

Lời giải.

Đặt $y = f(x) = ax + b$. Ta có hệ phương trình $\begin{cases} -a + b = 2 \\ 2a + b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{5}{3} \\ b = \frac{1}{3} \end{cases}$.

Vậy hàm số đó là $y = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 91. Cho tập hợp $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, số các tập con của P chứa cả ba phần tử 3, 4, 5 là

- A. 3. B. 5. C. 6. D. 8.

Lời giải.

Ta thấy $P = \{3, 4, 5\} \cup \{1, 2, 6\}$ suy ra số tập con của P chứa cả ba phần tử 3, 4, 5 cũng bằng số tập con của tập hợp $\{1, 2, 6\}$. Bằng cách liệt kê các tập con ta thấy tập hợp $\{1, 2, 6\}$ có tất cả 8 tập con. Vậy có 8 tập hợp theo yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 92. Cho tập X có $n + 1$ phần tử ($n \in \mathbb{N}$). Số tập con của X có hai phần tử là

- A. $n(n + 1)$. B. $\frac{n(n - 1)}{2}$. C. $n + 1$. D. $\frac{n(n + 1)}{2}$.

Lời giải.

Lấy một phần tử của X , ghép với n phần tử còn lại được n tập con có hai phần tử.

Vậy có $(n + 1)n$ tập.

Nhưng mỗi tập con đó được tính hai lần nên số tập con của X có hai phần tử là $\frac{n(n + 1)}{2}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 93. Cho hai tập hợp $A = [1; 3]$ và $B = [m; m + 1]$. Tìm tất cả giá trị của tham số m để $B \subset A$.

- A. $m = 1$. B. $1 < m < 2$. C. $1 \leq m \leq 2$. D. $m = 2$.

Lời giải.

Ta có: $B \subset A \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m + 1 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq 2 \end{cases}$. Vậy $1 \leq m \leq 2$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 94. Cho ba tập hợp

E : “Tập hợp các tứ giác”

F : “Tập hợp các hình thang”

G : “Tập hợp các hình thoi”

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $F \subset E$. B. $E \subset G$. C. $E \subset F$. D. $F \subset G$.

Lời giải.

Căn cứ vào khái niệm tập con.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 95. Có bao nhiêu tập A để $\{m; n\} \subset A \subset \{m; n; x; y\}$?

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.

Lời giải.

Các tập A thỏa mãn là $\{m; n\}$, $\{m; n; x\}$, $\{m; n; y\}$ và $\{m; n; x; y\}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 96. Cho tập hợp P . Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

- A. $P \subset P$. B. $\emptyset \subset P$. C. $P \in \{P\}$. D. $P \in P$.

Lời giải.

- Với mọi tập hợp P ta luôn có $\emptyset \subset P$ và $P \subset P$.

- Với tập hợp $\{P\}$ thì P là một phần tử của $\{P\}$ nên ta viết $P \in \{P\}$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 97. Cho tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$. Tập A có mấy tập con?

A. 15.

B. 12.

C. 16.

D. 10.

Lời giải.

Số tập hợp con của tập hợp có 4 phần tử là $2^4 = 16$ tập hợp con.

Chọn đáp án **C**

□

ĐÁP ÁN

1. B	2. C	3. C	4. C	5. B	6. D	7. D	8. C	9. C	10. C
11. A	12. D	13. B	14. C	15. B	16. D	17. C	18. A	19. B	20. B
21. A	22. C	23. A	24. B	25. B	26. A	27. D	28. B	29. D	30. B
31. B	32. D	33. C	34. A	35. C	36. C	37. A	38. B	39. D	40. B
41. D	42. A	43. D	44. A	45. A	46. C	47. C	48. C	49. A	50. C
51. C	52. C	53. C	54. B	55. D	56. B	57. A	58. B	59. C	60. C
61. C	62. B	63. B	64. D	65. D	66. B	67. B	68. C	69. D	70. D
71. C	72. A	73. C	74. A	75. D	76. C	77. D	78. B	79. C	80. C
81. A	82. D	83. B	84. A	85. C	86. D	87. C	88. C	89. C	90. C
91. D	92. D	93. C	94. A	95. D	96. D	97. C			

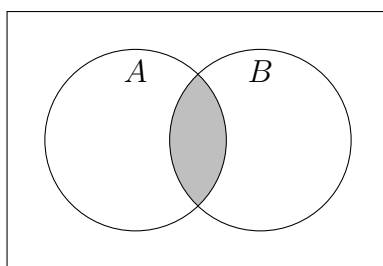
§3 CÁC PHÉP TOÁN TẬP HỢP

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 GIAO CỦA HAI TẬP HỢP

Định nghĩa. Tập hợp C gồm các phần tử vừa thuộc tập hợp A , vừa thuộc tập hợp B được gọi là giao của A và B . Kí hiệu $C = A \cap B$.

Vậy $A \cap B = \{x | x \in A \text{ và } x \in B\}$.

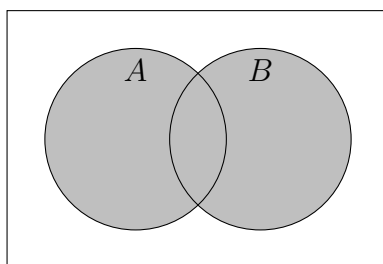


! $x \in A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B. \end{cases}$

2 HỢP CỦA HAI TẬP HỢP

Định nghĩa. Tập hợp C gồm các phần tử thuộc tập hợp A hoặc thuộc tập hợp B được gọi là hợp của A và B . Kí hiệu $C = A \cup B$.

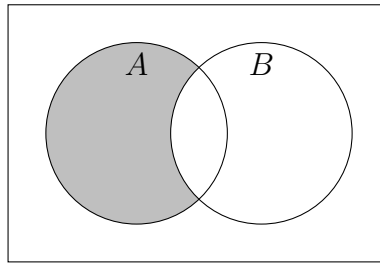
$A \cup B = \{x | x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$.



! $x \in A \cup B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B. \end{cases}$

3 HIỆU VÀ PHẦN BÙ CỦA HAI TẬP HỢP

$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ và } x \notin B\}$.



- Phép lấy phần bù: Cho $A \subset E$. Phần bù của A trong E là $\mathcal{C}_E A = E \setminus A$.

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tìm giao và hợp của các tập hợp

Dựa vào định nghĩa giao và hợp của hai tập hợp để tìm kết quả.

🔗🔗🔗 BÀI TẬP DẠNG 1 🔗🔗🔗

Ví dụ 1. Cho hai tập hợp $A = \{1; 2; 3; 5; 7\}$ và $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ là ước số của } 12\}$. Tìm $A \cap B$ và $A \cup B$.

Lời giải.

Ta có: $B = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$. Vậy: $A \cap B = \{1; 2; 3\}$ và $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 12\}$. □

Ví dụ 2. Cho tập hợp $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 < x \leq 4\}$ và $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq a\}$. Tìm số nguyên a để tập hợp $B \cap C = \emptyset$.

Lời giải.

Ta có $B = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$, $C = \{\dots, a-1, a\}$.

Để $B \cap C = \emptyset$ thì $a \leq -4$. □

Ví dụ 3. Chứng minh rằng nếu $A \subset B$ thì $A \cap B = A$.

Lời giải.

- $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$, suy ra $A \cap B \subset A$.
 - $x \in A \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \text{ (do } A \subset B) \end{cases} \Rightarrow x \in A \cap B$, suy ra $A \subset A \cap B$.
- Vậy $A \cap B = A$. □

Ví dụ 4. Cho A là tập hợp học sinh lớp 12 của trường Buôn Ma Thuột và B là tập hợp học sinh của trường Buôn Ma Thuột dự kiến sẽ lựa chọn thi khối A vào các trường đại học. Hãy mô tả các học sinh thuộc tập hợp sau

a) $A \cap B$.

b) $A \cup B$.

Lời giải.

- a) $A \cap B$ là tập hợp các học sinh lớp 12 thi khối A của trường Buôn Ma Thuột.
 b) $A \cup B$ là tập hợp các học sinh hoặc lớp 12 hoặc chọn thi khối A của trường Buôn Ma Thuột.

□

Ví dụ 5. Cho hai tập hợp A, B biết : $A = \{a; b\}, B = \{a; b; c; d\}$. Tìm tập hợp X sao cho $A \cup X = B$.

Lời giải.

$$X = \{c; d\}; \{b; c; d\}; \{a; c; d\}; \{a; b; c; d\}.$$

□

Ví dụ 6. Xác định tập hợp $A \cap B$ biết

$$A = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ là bội của } 3\}, B = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ là bội của } 7\}.$$

Lời giải.

$$\text{Ta có } A \cap B = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ là bội của } 3 \text{ và bội của } 7\} = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ là bội của } 21\}.$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hai tập hợp A và B . Tìm $A \cap B, A \cup B$ biết

- a) $A = \{x | x \text{ là ước nguyên dương của } 12\}$ và $B = \{x | x \text{ là ước nguyên dương của } 18\}$.
 b) $A = \{x | x \text{ là ước nguyên dương của } 27\}$ và $B = \{x | x \text{ là ước nguyên dương của } 15\}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \{1; 2; 4; 6; 12\}, B = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\} \Rightarrow \begin{cases} A \cap B = \{1; 2; 6\} \\ A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18\} \end{cases} \\ \text{b) } A &= \{1; 3; 9; 27\}, B = \{1; 3; 5; 15\} \Rightarrow \begin{cases} A \cap B = \{1; 3\} \\ A \cup B = \{1; 3; 5; 9; 15; 27\} \end{cases} \end{aligned}$$

□

Bài 2. Cho A là tập hợp các số tự nhiên chẵn không lớn hơn 10, $B = \{n \in \mathbb{N} | n \leq 6\}$ và $C = \{n \in \mathbb{N} | 4 \leq n \leq 10\}$. Hãy tìm $A \cap (B \cup C)$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= \{0; 2; 4; 6; 8; 10\}; B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\} \text{ và } C = \{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\} \\ B \cup C &= \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\} \text{ nên } A \cap (B \cup C) = \{0; 2; 4; 6; 8; 10\} \end{aligned}$$

□

Bài 3. Cho hai tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ và $B = \{0; 2; 4\}$. Xác định $A \cap B, A \cup B$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } A \cap B = \{2; 4\} \text{ và } A \cup B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}.$$

□

Bài 4. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | (2x - x^2)(2x^2 - 3x - 2) = 0\}$ và $B = \{n \in \mathbb{N} | 3 < n^2 < 30\}$. Tìm $A \cap B$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } A = \left\{0; 2; -\frac{1}{2}\right\}, B = \{2; 3; 4; 5\} \text{ nên } A \cap B = \{2\}.$$

□

Bài 5. Cho a là số nguyên. Tìm a để giao của hai tập hợp

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq a\}, B = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid x > \frac{3a-4}{2}\right\}$$

bằng rỗng.

Lời giải.

$$\text{Ta có } A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow a \leq \frac{3a-4}{2} \Leftrightarrow a \geq 4. \quad \square$$

Bài 6. Cho hai tập hợp bất kì A, B . Chứng minh rằng $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$.

Lời giải.

- Nếu $A = B$ thì $A \cap B = A, A \cup B = A$ nên $A \cup B = A \cap B$.
- Ngược lại, giả sử $A \cup B = A \cap B$. Lấy một phần tử bất kì $x \in A$ ta suy ra $x \in A \cup B$. Vì $A \cup B = A \cap B$ nên $x \in A \cap B$. Từ đó suy ra $x \in B$ nên $A \subset B$. Tương tự ta cũng có $B \subset A$. Vậy $A = B$. □

Bài 7. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 8\}$ và $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x \leq 5\}$. Tìm $A \cap B; A \cup B$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}; B = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}.$$

$$\text{Vậy } A \cap B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\} \text{ và } A \cup B = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}. \quad \square$$

Bài 8. Tìm điều kiện cần và đủ để hợp của hai tập hợp $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n < a\}$ và $B = \{m \in \mathbb{Z} \mid m > 2a + 1\}$ bằng $\mathbb{Z}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } A \cup B = \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2a + 1 < a \Leftrightarrow a < -1. \quad \square$$

Bài 9. Cho tập $A = \{0; 1; 2\}$ và tập $B = \{0; 1; 2; 3; 4\}$. Tìm tập C sao cho $A \cup C = B$.

Lời giải.

Đầu tiên ta tìm tập C có số phần tử ít nhất thỏa yêu cầu bài toán đó là tập $C_0 = B \setminus A = \{3; 4\}$. Kế tiếp ta ghép các phần tử của tập A vào. Vậy các tập cần tìm là

$$C_1 = \{3; 4; 0\}, C_2 = \{3; 4; 1\}, C_3 = \{3; 4; 2\},$$

$$C_4 = \{3; 4; 0; 1\}, C_5 = \{3; 4; 0; 2\}, C_6 = \{3; 4; 1; 2\}, C_7 = \{3; 4; 0; 1; 2\}.$$

Tổng cộng có 8 tập thỏa yêu cầu bài toán. □

Bài 10. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x - 1| < 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x - 1| > 2\}$. Tìm $A \cap B$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } |x - 1| < 4 \Leftrightarrow -4 < x - 1 < 4 \Leftrightarrow -3 < x < 5, A = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}.$$

$$\text{Lại có } |x - 1| > 2 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 3, B = \{\dots; -3; -2; 4; 5; 6; \dots\} \text{ nên } A \cap B = \{-2; 4\}. \quad \square$$

Bài 11. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2m - 1 < x < 2m + 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 2\}$. Tìm m để $A \cap B = \emptyset$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x < 2\} = \{-1; 0; 1\} \text{ và } A = \{2m, \dots, 2m + 2\}.$$

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 2 \leq -2 \\ 2m \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -2 \\ m \geq 1 \end{cases} \quad \square$$

Bài 12. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} | x < 4\}$ và tập hợp $B = \{n \in \mathbb{N}^* | n \text{ là số nguyên tố } n \leq 5\}$. Xác định tập hợp $A \cap B$ và $A \cup B$.

Lời giải.

$A = \{0; 1; 2; 3\}$ và $B = \{2; 3; 5\}$. Khi đó $A \cap B = \{2; 3\}$ và $A \cup B = \{0; 1; 2; 3; 5\}$. $\square$

Bài 13. Cho tập $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Tìm các tập con A, B của tập S sao cho $A \cup B = \{1; 2; 3; 4\}$ và $A \cap B = \{1; 2\}$.

Lời giải.

- A có hai phần tử $A = \{1; 2\} \Rightarrow B = \{1; 2; 3; 4\}$.
- A có ba phần tử $A = \{1; 2; 3\} \Rightarrow B = \{1; 2; 4\}$.
- A có ba phần tử $A = \{1; 2; 4\} \Rightarrow B = \{1; 2; 3\}$.
- A có bốn phần tử $A = \{1; 2; 3; 4\} \Rightarrow B = \{1; 2\}$.

Vậy ta có 4 cặp tập A, B thỏa mãn yêu cầu bài toán. $\square$

Bài 14. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 4x + m + 2 = 0\}$ và tập hợp $B = \{1; 2\}$. Tìm m để $A \cap B = \emptyset$.

Lời giải.

- TH1: $A = \emptyset$ tương đương pt: $x^2 - 4x + m + 2 = 0$ vô nghiệm, tức là $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m > 2$.
- TH2: $A \neq \emptyset$ tương đương pt: $x^2 - 4x + m + 2 = 0$ có 2 nghiệm khác 1, 2 $\Leftrightarrow m \neq 1; m \neq 2; m \leq 2$.
- Vậy kết hợp lại ta có $m \neq 1; m \neq 2$.

$\square$

Dạng 2. Hiệu và phần bù của hai tập hợp

Dựa vào định nghĩa hiệu và phần bù của hai tập hợp để tìm kết quả.

BÀI TẬP DẠNG 2

Chú ý

- Nếu $A \subset B$ thì $B \setminus A = C_B A$.
- Nếu $A = \emptyset$ thì $A \setminus B = \emptyset$ với mọi tập hợp B .

Ví dụ 1. Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Tìm các tập hợp $A \setminus B, B \setminus A$.

Lời giải.

Các phần tử 2, 4 thuộc tập hợp A nhưng không thuộc tập hợp B nên $A \setminus B = \{2, 4\}$.

Chỉ có phần tử 7 thuộc tập hợp B nhưng không thuộc tập hợp A nên $B \setminus A = \{7\}$ $\square$

Ví dụ 2. Cho A là tập hợp các tự nhiên lẻ. Tìm phần bù của A trong tập $\mathbb{N}$ các số tự nhiên.

Lời giải.

Các số tự nhiên chẵn thuộc tập hợp $\mathbb{N}$ nhưng không thuộc tập hợp A nên phần bù của A trong $\mathbb{N}$ là tập hợp các số tự nhiên chẵn. Do đó $C_{\mathbb{N}} A = \{2k/k \in \mathbb{N}\}$. $\square$

Ví dụ 3. Chứng minh rằng $A \setminus B = \emptyset$ thì $A \subset B$.

Lời giải.

Lấy $x \in A$. Nếu $x \notin B$ thì $x \in A \setminus B$ (mâu thuẫn). Do đó $x \in B$. Vậy $A \subset B$. □

Ví dụ 4. Cho các tập hợp $A = \{4, 5\}$ và $B = \{n \in \mathbb{N} | n \leq a\}$ với a là số tự nhiên. Tìm a sao cho $A \setminus B = A$.

Lời giải.

Ta có $B = \{0, 1, \dots, a\}$. Để $A \setminus B = A$ thì các phần tử của A không thuộc B . Suy ra $a \leq 3$. Vậy $a \in \{0, 1, 2, 3\}$. □

Ví dụ 5. Cho hai tập hợp A, B . Biết $A \setminus B = \{1, 2\}$, $B \setminus A = \{3\}$ và $B = \{3, 4, 5\}$. Tìm tập hợp A .

Lời giải.

Ta có $A \setminus B = \{1, 2\}$ nên $1, 2 \in A$.

Mà $B \setminus A = \{3\}$ nên $3 \notin A$ và $4, 5 \in A$.

Suy ra $A = \{1, 2, 4, 5\}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho A là tập hợp các học sinh của một lớp và B là tập hợp các học sinh giỏi Toán của lớp. Hãy mô tả tập hợp $C_A B$.

Lời giải.

$C_A B$ là tập hợp các học sinh không giỏi Toán của lớp. □

Bài 2. Cho A là tập hợp các ước nguyên dương của 12 và B là tập hợp các ước nguyên dương của 18. Tìm các tập hợp $A \setminus B$ và $B \setminus A$.

Lời giải.

Ta có $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ và $B = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ nên $A \setminus B = \{4, 12\}$, $B \setminus A = \{9, 18\}$. □

Bài 3. Chứng minh rằng $A \setminus B = B \setminus A$ thì $A = B$.

Lời giải.

Lấy $x \in A \setminus B = B \setminus A$ thì $x \in A, x \notin B$ và $x \in B, x \notin A$. Suy ra $A \setminus B = B \setminus A = \emptyset$.

Suy ra $A \subset B$ và $B \subset A$. Vậy $A = B$. □

Bài 4. Cho hai tập hợp A, B . Biết $A \setminus B = \{a, b, c\}$, $B \setminus A = \{d, e\}$ và $B = \{d, e, f\}$. Tìm tập hợp A .

Lời giải.

$A = \{a, b, c, f\}$. □

Bài 5. Cho các tập hợp $A = \{n \in \mathbb{N} | 2 < n \leq 7\}$ và $B = \{n \in \mathbb{N} | n \leq a\}$ với a là số tự nhiên. Tìm a sao cho:

a) $A \setminus B = A$.

b) $A \setminus B = \emptyset$.

Lời giải.

$A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{0, 1, 2, \dots, a\}$.

a) Ta có $A \setminus B = A$ khi mọi phần tử của A đều không thuộc B . Suy ra $a \leq 2$. Vậy $a \in \{0, 1, 2\}$.

b) Ta có $A \setminus B = \emptyset$ khi $A \subset B$. Suy ra $a \geq 7$.

□

Bài 6. Cho hai tập hợp $A = \{2k + 1 | k \in \mathbb{N}\}$ và $B = \{3k | k \in \mathbb{N}\}$. Tìm tập hợp $B \setminus A$.

Lời giải.

$$B \setminus A = \{6k | k \in \mathbb{N}\}.$$

□

Dạng 3. Sử dụng biểu đồ Ven và công thức tính số phần tử của tập hợp $A \cup B$ để giải toán

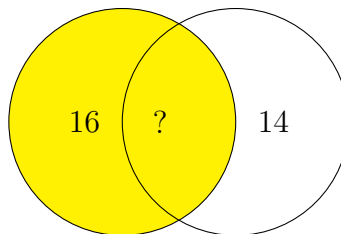
- Phương pháp biểu đồ Ven:
 - ⊕ Sử dụng các hình tròn giao nhau để mô tả các đại lượng và mối quan hệ giữa chúng.
 - ⊕ Biểu đồ Ven cho ta cách nhìn trực quan và mối quan hệ giữa các đại lượng từ đó tìm ra các yếu tố chưa biết.
- Công thức số phần tử $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

BÀI TẬP DẠNG 3

Ví dụ 1. Trong năm vừa qua, trường THPT A có 25 bạn thi học sinh giỏi 2 môn Văn và Toán. Trong đó có 14 bạn thi Toán và 16 bạn thi Văn. Hỏi trường có bao nhiêu bạn thi cả 2 môn Văn và Toán.

Lời giải.

Cách 1: Sử dụng sơ đồ Ven như hình vẽ



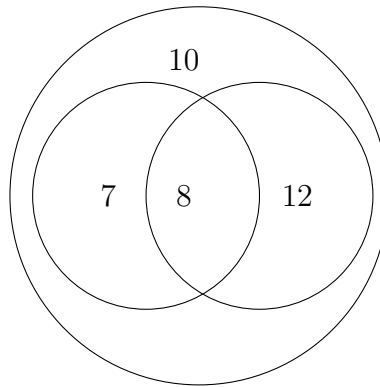
- Ta thấy Số bạn thi toán mà không thi văn là $25 - 16 = 9$ (bạn).
- Số bạn thi cả 2 môn (phần giao nhau) là $14 - 9 = 5$ (bạn).

Cách 2: Gọi A, B lần lượt là tập hợp các bạn thi học sinh giỏi Toán và Văn. Ta có $|A| = 14$, $|B| = 16$, $|A \cup B| = 25$. Theo công thức ta có $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 14 + 16 - 25 = 5$ (bạn). □

Ví dụ 2. Lớp 10A có 15 bạn thích môn Văn, 20 bạn thích môn Toán. Trong số các bạn thích văn hoặc toán có 8 bạn thích cả 2 môn. Trong lớp vẫn còn 10 bạn không thích môn nào trong 2 môn Văn và Toán. Hỏi lớp 10A có bao nhiêu bạn.

Lời giải.

Ta sử dụng sơ đồ Ven để giải bài toán.



- Hình tròn to thể hiện số học sinh cả lớp.

Như vậy, ta có:

- Số bạn chỉ thích Văn là $15 - 8 = 7$ (bạn).

- Số bạn chỉ thích Toán là $20 - 8 = 12$ (bạn).

- Số học sinh cả lớp là tổng các phần không giao nhau: $7 + 8 + 12 + 10 = 37$. □

Ví dụ 3. Mỗi học sinh của lớp 10A đều chơi bóng đá hoặc bóng chuyền. Biết rằng có 25 bạn chơi bóng đá, 20 bạn chơi bóng chuyền và 10 bạn chơi cả 2 môn thể thao. Hỏi lớp 10A có bao nhiêu học sinh.

Lời giải.

Ngoài sơ đồ Ven ta có thể dùng công thức số phần tử. Gọi A là tập hợp các học sinh chơi bóng đá, B là tập các học sinh chơi bóng chuyền. Do đó $A \cap B$ là tập các học sinh chơi cả hai môn. Ta có

$$|A| = 25, |B| = 20, |A \cap B| = 10.$$

Số học sinh cả lớp là số phần tử của tập $A \cup B$. Theo công thức ta có $|A \cup B| = 25 + 20 - 10 = 35$ (học sinh). □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

Bài 1. Một lớp có 40 học sinh, mỗi học sinh đều đăng ký chơi ít nhất 1 trong 2 môn thể thao là bóng đá hoặc cầu lông. Có 30 học sinh có đăng ký môn bóng đá, 25 học sinh có đăng ký môn cầu lông. Hỏi có bao nhiêu em đăng ký cả 2 môn.

Lời giải.

Số học sinh đăng ký cả hai môn là $30 + 25 - 40 = 15$ (học sinh). □

Bài 2. Ở xứ sở của thần Thoại ngoài các vị thần thì còn có các sinh vật gồm 27 con người, 311 con yêu quái một mắt, 205 con yêu quái tóc răn và yêu quái vừa một mắt vừa tóc răn. Tìm số yêu quái vừa một mắt vừa tóc răn biết có tổng số sinh vật là 500 con.

Lời giải.

- Số sinh vật không phải con người là $500 - 27 = 473$ (con).
- Gọi A, B lần lượt là tập hợp yêu quái một mắt và yêu quái tóc răn. Khi đó $|A| = 311, |B| = 205, |A \cup B| = 473$.
- Vậy số yêu quái vừa một mắt vừa tóc răn là $|A \cap B| = 311 + 205 - 473 = 43$ (con).

□

Bài 3. Trong 45 học sinh lớp 10A có 20 bạn xếp học lực giỏi, 15 bạn đạt hạnh kiểm tốt, trong đó có 7 bạn vừa đạt hạnh kiểm tốt vừa có học lực giỏi. Hỏi

- Lớp 10A có bao nhiêu bạn được khen thưởng, biết muốn được khen thưởng thì hoặc học sinh giỏi hoặc có hạnh kiểm tốt.
- Lớp 10A có bao nhiêu bạn chưa được xét học lực giỏi và hạnh kiểm tốt.

Bài 4. Một lớp có 25 học sinh khá các môn tự nhiên, 24 học sinh khá các môn xã hội, 10 học sinh khá cả 2 và 3 học sinh không khá môn nào. Hỏi:

- Lớp có bao nhiêu học sinh chỉ khá tự nhiên.
- Lớp có bao nhiêu học sinh chỉ khá xã hội.
- Lớp có bao nhiêu hoặc khá tự nhiên hoặc khá xã hội.
- Lớp có bao nhiêu em học sinh.

Bài 5. Lớp 10A có 35 bạn học sinh làm kiểm tra toán. Đề bài gồm 3 bài toán. Sau khi kiểm tra, cô giáo tổng hợp kết quả như sau: có 20 em giải được bài toán thứ nhất; 14 em giải được bài toán 2; 10 em giải được bài toán 3; 5 em giải được bài toán 2 và bài toán 3; 2 em giải được bài toán 1 và bài toán 2; 6 em giải được bài toán 1 và bài toán 3, chỉ có 1 học sinh đạt được điểm 10 vì giải được cả 3 bài. Hỏi lớp đó có bao nhiêu học sinh không giải được bài nào.

Lời giải.

Đáp số: 3 bạn.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 6. Cho tập hợp $F = \{n \in \mathbb{N} \mid -2 < n < 3\}$ và tập hợp $\mathbb{Z}$ các số nguyên. Xác định tập hợp $F \cap \mathbb{Z}$.

Lời giải.

$$F \cap \mathbb{Z} = \{0; 1; 2\}$$

□

Bài 7. Cho $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ biết tập $A \subset X$, $A \cap \{2; 4; 6\} = \{2\}$ và $A \cup \{2; 4; 6\} = \{2; 3; 4; 5; 6\}$. Tìm tập A .

Lời giải.

Ta thấy $2 \in A$ và $\{3; 5\} \subset A$ và các số $1 \notin A; 4 \notin A; 6 \notin A$. Vậy tập $A = \{2; 3; 5\}$.

□

Bài 8. Cho hai tập hợp $A = \{-3; -2; 0; 1; 2; 5; 9\}$, $B = \{-2; 0; 3; 8; 15\}$. Hãy xác định các tập hợp $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Lời giải.

Ta có:

$$A \cup B = \{-3; -2; 0; 1; 2; 3; 5; 8; 9; 15\}, A \cap B = \{-2; 0\}$$

$$A \setminus B = \{-3; 1; 2; 5; 9\}, B \setminus A = \{3; 8; 15\}.$$

□

Bài 9. Kí hiệu H là tập hợp các học sinh của lớp 10A; T là tập hợp các học sinh nam và G là tập hợp các học sinh nữ của lớp 10A. Hãy xác định các tập hợp sau:

$$a) T \cup G; \quad b) T \cap G; \quad c) H \setminus T; \quad d) G \setminus T; \quad e) \mathbb{C}_H G.$$

Lời giải.

a) $T \cup G$ là tập hợp các học sinh trong lớp 10A, $T \cup G = H$.

b) $T \cap G = \emptyset$.

c) $H \setminus T = G$.

d) $G \setminus T = G$.

e) $\mathbb{C}_H G = H \setminus G = T$.

□

Bài 10. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x+2| < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x^2}{x+2} \in \mathbb{Z}\}$. Tìm $A \cup B$.

Lời giải.

Ta có $|x+2| < 3 \Leftrightarrow -5 < x < 1$ nên $A = \{-4; -3; -2; -1; 0\}$.

Lại có $\frac{x^2}{x+2} = x - 2 + \frac{4}{x+2}$ nên $\frac{x^2}{x+2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{4}{x+2} \in \mathbb{Z}$.

Từ đó suy ra $x+2 \in \{-4; -2; -1; 1; 2; 4\}$ nên $B = \{-6; -4; -3; -1; 0; 2\}$.

Vì vậy $A \cup B = \{-6; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$

□

Bài 11. Cho A là tập hợp các số tự nhiên chẵn và không lớn hơn 10, $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 6\}$ và $C = \{n \in \mathbb{N} \mid 4 \leq n \leq 10\}$. Hãy tìm

$$a) A \cap (B \cup C); \quad b) (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Lời giải.

$A = \{0; 2; 4; 6; 8; 10\}$, $B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $C = \{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

a) $B \cup C = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\} \Rightarrow A \cap (B \cup C) = \{0; 2; 4; 6; 8; 10\}$.

b) Ta có: $A \setminus B = \{8; 10\}$, $A \setminus C = \{0; 2\}$, $B \setminus C = \{0; 1; 2; 3\}$. Vậy:

$$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cup (B \setminus C) = \{0; 1; 2; 3; 8; 10\}.$$

□

Bài 12. Cho A, B, C là ba tập hợp rời nhau đôi một. X là tập hợp sao cho các tập $X \cap A$, $X \cap B$, $X \cap C$ có đúng 1 phần tử. Hỏi tập X có ít nhất là bao nhiêu phần tử?

Lời giải.

Giả sử $X \cap A = \{a\}$, $X \cap B = \{b\}$, $X \cap C = \{c\}$. Khi đó $a, b, c \in X$. Do A, B, C rời nhau đôi một nên a, b, c phải khác nhau đôi một. Vậy tập X có ít nhất là 3 phần tử.

□

Bài 13. Cho $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

a) Xác định tập hợp $B \setminus A$.

b) Tìm tất cả các tập hợp X sao cho $A \subset X$ và $X \subset B$.

Lời giải.

a) Ta có $B \setminus A = \{4; 5; 6\}$.

b) Vì $A \subset X$ nên $1, 2, 3$ thuộc X , do đó, để $X \subset B$ thì các tập hợp X thỏa mãn đầu bài là:

$$X = \{1; 2; 3\}, X = \{1; 2; 3; 4\}, X = \{1; 2; 3; 5\}, X = \{1; 2; 3; 6\},$$

$$X = \{1; 2; 3; 4; 5\}, X = \{1; 2; 3; 4; 6\}, X = \{1; 2; 3; 5; 6\}, X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

□

Bài 14. Cho tập hợp A thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau đây:

$$A \cup \{1; 2; 3\} = \{1; 2; 3; 4\}, \quad (1)$$

$$A \cap \{1; 2; 3\} = \{1; 2\}. \quad (2)$$

Hãy xác định tập hợp A .

Lời giải.

Từ (1) suy ra $A \subset \{1; 2; 3; 4\}$. Từ (2) suy ra $\{1; 2\} \subset A$ và $3 \notin A$.

Điều kiện (1) cho ta $4 \in A$. Vậy ta có: $A = \{1; 2; 4\}$.

□

Bài 15. Hãy xác định tập hợp X biết rằng:

$$\{1; 3; 5; 7\} \subset X, \{3; 5; 9\} \subset X, X \subset \{1; 3; 5; 7; 9\}.$$

Lời giải.

Từ giả thiết $\{1; 3; 5; 7\} \subset X, \{3; 5; 9\} \subset X$, ta có:

$$\{1; 3; 5; 7\} \cup \{3; 5; 9\} \subset X \Rightarrow \{1; 3; 5; 7; 9\} \subset X. \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác, theo giả thiết ta có: } X \subset \{1; 3; 5; 7; 9\}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $X = \{1; 3; 5; 7; 9\}$.

□

Bài 16. Cho tập hợp $X = \{a; b; c; d; e; g\}$.

a) Hãy xác định tập hợp Y sao cho $Y \subset X$ và $X \setminus Y = \{b; c; e\}$.

b) Hãy xác định hai tập hợp A và B sao cho:

$$A \cup B = X, B \setminus A = \{d; e\} \text{ và } A \setminus B = \{a; b; c\}.$$

Lời giải.

a) $X \setminus Y = \{b; c; e\}$ nên b, c, e không thuộc tập Y . Hơn nữa do $Y \subset X$ nên $Y = \{a; d; g\}$.

b) Từ $A \setminus B = \{a; b; c\}$ ta suy ra A chứa a, b, c và B không chứa a, b, c . Từ $B \setminus A = \{d; e\}$ ta suy ra B chứa d, e và A không chứa d, e . Lại có $A \cup B = X$ nên phần tử g thuộc A hoặc thuộc B . Ngoài ra $g \notin A \setminus B$ và $g \notin B \setminus A$ nên $g \in A$ và $g \in B$. Do đó: $A = \{a; b; c; g\}, B = \{d; e; g\}$.

□

Bài 17. Cho hai tập hợp $A = \left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{2x-1}{x+3} \in \mathbb{Z}\right\}, B = \{4; 6; 8; 10\}$. Tìm $A \cap B$ và $A \cup B$.

Giải. Ta có $\frac{2x-1}{x+3} = 2 - \frac{7}{x+3}$. Do đó với $x \in \mathbb{Z}$ và $x \neq -3$ thì $\frac{2x-1}{x+3} \in \mathbb{Z}$ khi và chỉ khi $x+3$ là ước của 7, tức là

$$\begin{cases} x+3=1 \\ x+3=-1 \\ x+3=7 \\ x+3=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-4 \\ x=4 \\ x=-10. \end{cases}$$

Vậy $A = \{-2; -4; 4; -10\}$, suy ra: $A \cup B = \{-2; -4; -10; 4, 6, 8, 10\}$, $A \cap B = \{4\}$.

Bài 18. Cho tập hợp $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

a) Tìm các tập hợp con A, B của S sao cho:

$$A \cup B = \{1; 2; 3; 4\}, A \cap B = \{1; 2\}.$$

b) Tìm các tập C sao cho: $C \cup (A \cap B) = A \cup B$.

Lời giải.

a) Từ $A \cap B = \{1; 2\}$ ta có A và B phải có chung đúng hai phần tử 1 và 2. Từ $A \cup B = \{1; 2; 3; 4\}$ suy ra hai phần tử 3 và 4 phải thuộc một và chỉ một trong hai tập A và B . Do đó có bốn kết quả sau đây:

$$\begin{cases} A = \{1; 2; 3\} \\ B = \{1; 2; 4\}, \end{cases} \begin{cases} A = \{1; 2; 4\} \\ B = \{1; 2; 3\}, \end{cases} \begin{cases} A = \{1; 2; 3; 4\} \\ B = \{1; 2\}, \end{cases} \begin{cases} A = \{1; 2\} \\ B = \{1; 2; 3; 4\}. \end{cases}$$

b) Vì $C \cup (A \cap B) = A \cup B$ mà $A \cup B = \{1; 2; 3; 4\}$, $A \cap B = \{1; 2\}$ nên $3, 4 \in C$. Do đó các tập C thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

$$\{3; 4\}, \{1; 3; 4\}, \{2; 3; 4\}, \{1; 2; 3; 4\}.$$

□

Bài 19. Xét X và Y là hai tập hợp con của tập hợp $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ và thỏa mãn ba điều kiện:

- (1) $X \cap Y = \{4; 6; 9\}$.
- (2) $X \cup \{3; 4; 5\} = \{1; 3; 4; 5; 6; 8; 9\}$.
- (3) $Y \cup \{4; 8\} = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

a) Hãy chỉ ra rằng từ điều kiện (1) và (2) ta suy ra $1 \in X$ và $1 \notin Y$, $8 \in X$ và $8 \notin Y$, $7 \notin X$.

b) Xác định các tập hợp X và Y mà thỏa mãn các điều kiện (1), (2) và (3).

Lời giải.

a) Vì $1 \in X \cup \{3; 4; 5\}$ nên $1 \in X$ và vì $1 \notin X \cap Y$ nên $1 \notin Y$. Tương tự ta có $8 \in X$ và $8 \notin Y$. Từ (3) suy ra $7 \in Y$, do đó $7 \notin X$ vì nếu $7 \in X$ thì mâu thuẫn với (1).

b) Ta có:

- $1 \in X$ và $1 \notin Y$;
- $2 \notin X$ (do (2)) và $2 \in Y$ (do (3));
- $3 \in Y$ (do (3)) và $3 \notin X$ (do (1));
- $4 \in X$ và $4 \in Y$ (do (1));

- $5 \in Y$ (do (3)) và $5 \notin X$ (do (1));
- $6 \in X$ và $6 \in Y$ (do (1));
- $7 \in Y$ (do (3)) và $7 \notin X$ (do (1));
- $8 \in X$ và $8 \notin Y$ (do câu a));
- $6 \in X$ và $6 \in Y$ (do (1)).

Từ các điều kiện trên, ta đi tới:

$$X = \{1; 4; 6; 8; 9\}, Y = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 9\}.$$

□

Bài 20. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + x - m = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - mx + 1 = 0\}$ (m là tham số thực). Tìm tất cả các giá trị của m để $A \cap B \neq \emptyset$

Lời giải.

Vì $A \cap B \neq \emptyset$ nên tồn tại $a \in A \cap B$. Khi đó

$$\begin{cases} a^2 + a - m = 0 \\ a^2 - ma + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow (1+m)a - (1+m) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

- Nếu $m = -1$ thử lại thấy $B = \emptyset$ nên không thỏa.
- Nếu $a = 1$ thay vào tập A tìm được $m = 2$. Thử lại khi $m = 2$ thấy $A \cap B = \{1\}$.

Vậy $m = 2$.

□

Bài 21. Cho 3 tập hợp:

$$A = \{x | x = 3n - 2, n \in \mathbb{N}^*\}$$

$$B = \{x | x = 1003 - 2m, m \in \mathbb{N}^*\}$$

$$C = \{x | x = 6p + 1, p \in \mathbb{Z}, 0 \leq p \leq 166\}.$$

Chứng minh rằng $A \cap B = C$.

Giải. Cần chứng minh $A \cap B \subset C$ và $C \subset A \cap B$.

- Giả sử $x \in A \cap B$, cần chỉ ra $x \in C$. Thực vậy, nếu $x \in A \cap B$ thì $x \in A$ và $x \in B$, tức là tồn tại các số nguyên dương m, n sao cho:

$$x = 3n - 2 = 1003 - 2m.$$

Khi đó: $m = \frac{1005 - 3n}{2} \Leftrightarrow m = 502 - n - \frac{n-1}{2}$. Vì m, n là những số nguyên dương nên suy ra $\frac{n-1}{2} = p \in \mathbb{Z}$. Từ đó $n = 2p + 1$ và

$$m = 502 - (2p + 1) - p = 501 - 3p.$$

Vì m, n là những số nguyên dương nên

$$\begin{cases} 2p + 1 \geq 1 \\ 501 - 3p \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \geq 0 \\ p \leq \frac{500}{3} \end{cases} \Rightarrow 0 \leq p \leq 166.$$

Nhưng $x = 3n - 2 = 3(2p + 1) - 2 = 6p + 1$, suy ra

$$x \in C \Rightarrow A \cap B \subset C. \quad (1)$$

- Chứng minh $C \subset A \cap B$. Giả sử $x \in C$, cần chứng minh $x \in A \cap B$. Thực vậy, nếu $x \in C$ thì tồn tại $p \in \mathbb{Z}$, $0 \leq p \leq 166$, sao cho $x = 6p + 1$. Ta sẽ chỉ ra rằng x có thể được viết dưới dạng $x = 3n - 2$, $n \in \mathbb{N}^*$. Ta có

$$x = 6p + 1 = (6p + 3) - 2 = 3(2p + 1) - 2 = 3n - 2,$$

với $n = 2p + 1 \in \mathbb{N}^*$, suy ra $x \in A$. Ta còn phải chứng minh $x \in B$.

$$x = 6p + 1 = 1003 - (1002 - 6p) = 1003 - 2(501 - 3p) = 1003 - 2m,$$

với $m = 501 - 3p$. Ta có:

$$0 \leq p \leq 166 \Rightarrow 0 \leq 3p \leq 498 \Rightarrow 501 - 3p \geq 3 \Rightarrow m = 501 - 3p \in \mathbb{N}^*.$$

Như vậy $x \in B$. Từ $x \in A$ và $x \in B$ suy ra

$$x \in A \cap B \Leftarrow C \subset A \cap B. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $A \cap B = C$, điều phải chứng minh.

C CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hai tập hợp $A = \{1; 5\}$ và $B = \{1; 3; 5\}$ Tìm $A \cap B$.

- A. $A \cap B = \{1\}$. B. $A \cap B = \{1; 3\}$. C. $A \cap B = \{1; 3; 5\}$. D. $A \cap B = \{1; 5\}$.

Lời giải.

Tập hợp $A \cap B$ gồm những phần tử vừa thuộc A vừa thuộc $B \Rightarrow A \cap B = \{1; 5\}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 2. Cho hai tập hợp $A = \{a; b; c; d; m\}$, $B = \{c; d; m; k; l\}$. Tìm $A \cap B$.

- A. $A \cap B = \{a; b\}$. B. $A \cap B = \{c; d; m\}$.
C. $A \cap B = \{c; d\}$. D. $A \cap B = \{a; b; c; d; m; k; l\}$.

Lời giải.

Tập hợp A và tập hợp B có chung các phần tử c, d, m . Do đó $A \cap B = \{c; d; m\}$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 3. Cho hai tập $A = \{x \in \mathbb{R} | (2x - x^2)(2x^2 - 3x - 2) = 0\}$ và $B = \{n \in \mathbb{N}^* | 3 < n^2 < 30\}$. Tìm $A \cap B$

- A. $A \cap B = \{2; 4\}$. B. $A \cap B = \{2\}$. C. $A \cap B = \{4; 5\}$. D. $A \cap B = \{3\}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } (2x - x^2)(2x^2 - 3x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow A = \left\{-\frac{1}{2}; 0; 2\right\}.$$

$$\text{Và } \begin{cases} n \in \mathbb{N}^* \\ 3 < n^2 < 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{N}^* \\ \sqrt{3} < n < \sqrt{30} \end{cases} \Rightarrow B = \{2; 3; 4; 5\}. \text{ Suy ra } A \cap B = \{2\}$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 4. Cho các tập hợp $M = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ là bội của } 2\}$, $N = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ là bội của } 6\}$,
 $P = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ là ước của } 2\}$, $Q = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ là ước của } 6\}$

Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. $M \subset N$. B. $Q \subset P$. C. $M \cap N = N$. D. $P \cap Q = Q$.

Lời giải.

$$\text{Ta có các tập hợp } \begin{cases} M = \{x | x = 2k, k \in \mathbb{N}^*\} = \{2; 4; 6; 8; 10; \dots\} \\ N = \{x | x = 6k, k \in \mathbb{N}^*\} = \{6; 12; 18; 24; \dots\} \\ P = \{1; 2\} \\ Q = \{1; 2; 3; 6\} \end{cases}.$$

Do đó $P \cap Q = Q$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 5. Gọi B_n là tập hợp các bội số của n trong $\mathbb{N}$. Xác định tập hợp $B_2 \cap B_4$?

- A. B_2 . B. B_4 . C. $\emptyset$. D. B_3 .

Lời giải.

Ta có các tập hợp $\begin{cases} B_2 = \{x | x = 2k, k \in \mathbb{N}^*\} = \{2; 4; 6; 8; 10; \dots\} \\ B_4 = \{x | x = 4k, k \in \mathbb{N}^*\} = \{4; 8; 12; 16; \dots\} \end{cases}$.

Do đó $B_2 \cap B_4 = B_4$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 6. Cho hai tập hợp $A = \{1; 3; 5; 8\}$, $B = \{3; 5; 7; 9\}$. Xác định tập hợp $A \cup B$.

A. $A \cup B = \{3; 5\}$.

B. $A \cup B = \{1; 3; 5; 7; 8; 9\}$.

C. $A \cup B = \{1; 7; 9\}$.

D. $A \cup B = \{1; 3; 5\}$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 7. Cho các tập hợp $A = \{a; b; c\}$, $B = \{b; c; d\}$, $C = \{b; c; e\}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.

B. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

C. $(A \cup B) \cap C = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

D. $(A \cap B) \cup C = (A \cup B) \cap C$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} A \cup (B \cap C) = \{a, b, c\} \\ (A \cup B) \cap (A \cup C) = \{a, b, c, d\} \cap \{a, b, c, e\} = \{a, b, c\} \end{cases}$
 $\Rightarrow A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 8. Gọi B_n là tập hợp các bội số của n trong $\mathbb{N}$. Xác định tập hợp $B_3 \cup B_6$.

A. $B_3 \cup B_6 = \emptyset$.

B. $B_3 \cup B_6 = B_3$.

C. $B_3 \cup B_6 = B_6$.

D. $B_3 \cup B_6 = B_{12}$.

Lời giải.

Ta có các tập hợp $\begin{cases} B_3 = \{x | x = 3k, k \in \mathbb{N}\} = \{3; 6; 9; 12; 15; \dots\} \\ B_6 = \{x | x = 6k, k \in \mathbb{N}^*\} = \{6; 12; 18; \dots\} \end{cases}$
 $\Rightarrow B_3 \cup B_6 = B_3$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 9. Cho hai tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$, $B = \{2; 3; 4; 5; 6\}$. Xác định tập hợp $A \setminus B$.

A. $A \setminus B = \{0\}$.

B. $A \setminus B = \{0; 1\}$.

C. $A \setminus B = \{1; 2\}$.

D. $A \setminus B = \{1; 5\}$.

Lời giải.

Tập hợp $A \setminus B$ gồm những phần tử thuộc A nhưng không thuộc $B \Rightarrow A \setminus B = \{0\}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 10. Cho hai tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$, $B = \{2; 3; 4; 5; 6\}$. Xác định tập hợp $B \setminus A$.

A. $B \setminus A = \{5\}$.

B. $B \setminus A = \{0; 1\}$.

C. $B \setminus A = \{2; 3; 4\}$.

D. $B \setminus A = \{5; 6\}$.

Lời giải.

Tập hợp $B \setminus A$ gồm những phần tử thuộc B nhưng không thuộc $A \Rightarrow B \setminus A = \{5; 6\}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 11. Cho hai tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$, $B = \{2; 3; 4; 5; 6\}$. Tìm $X = (A \setminus B) \cap (B \setminus A)$.

A. $X = \{0; 1; 5; 6\}$.

B. $X = \{1; 2\}$.

C. $X = \{5\}$.

D. $X = \emptyset$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} A \setminus B = \{0; 1\} \\ B \setminus A = \{5; 6\} \end{cases} \Rightarrow (A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 12. Cho hai tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$, $B = \{2; 3; 4; 5; 6\}$. Xác định tập hợp $X = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

- A. $X = \{0; 1; 5; 6\}$. B. $X = \{1; 2\}$. C. $X = \{2; 3; 4\}$. D. $X = \{5; 6\}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} A \setminus B = \{0; 1\} \\ B \setminus A = \{5; 6\} \end{cases} \Rightarrow (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{0; 1; 5; 6\}.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 13. Cho hai tập hợp $A = \{1; 2; 3; 7\}$, $B = \{2; 4; 6; 7; 8\}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. $A \cap B = \{2; 7\}$ và $A \cup B = \{4; 6; 8\}$. B. $A \cap B = \{2; 7\}$ và $A \setminus B = \{1; 3\}$.
C. $A \setminus B = \{1; 3\}$ và $B \setminus A = \{2; 7\}$. D. $A \setminus B = \{1; 3\}$ và $A \cup B = \{1; 3; 4; 6; 8\}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} A \cap B = \{2; 7\} \\ A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 6; 7; 8\} \\ A \setminus B = \{1; 3\} \\ B \setminus A = \{4; 6; 8\} \end{cases}$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 14. Cho A là tập hợp tất cả các nghiệm của phương trình $x^2 - 4x + 3 = 0$; B là tập hợp các số có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 4. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. $A \cup B = A$. B. $A \cap B = A \cup B$. C. $A \setminus B = \emptyset$. D. $B \setminus A = \emptyset$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow A = \{1; 3\} \quad B = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}.$$

Do đó $A \setminus B = \emptyset$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 15. Cho hai tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$, $B = \{1; 3; 4; 6; 8\}$ Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. $A \cap B = B$. B. $A \cup B = A$. C. $A \setminus B = \{0; 2\}$. D. $B \setminus A = \{0; 4\}$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 16. Cho hai tập hợp $A = \{0; 2\}$ và $B = \{0; 1; 2; 3; 4\}$. Có bao nhiêu tập hợp X thỏa mãn $A \cup X = B$

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Lời giải.

Vì $A \cup X = B$ nên X chắc chắn có chứa các phần tử 1; 3; 4

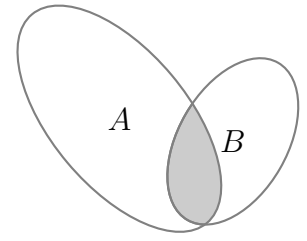
Các tập X có thể là $\{1; 3; 4\}$, $\{1; 3; 4; 0\}$, $\{1; 3; 4; 2\}$, $\{1; 3; 4; 0; 2\}$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 17.

Cho A, B là hai tập hợp được minh họa như hình vẽ. Phần tô đen trong hình vẽ là tập hợp nào sau đây?

- A. $A \cap B$. B. $A \cup B$. C. $A \setminus B$. D. $B \setminus A$.



Lời giải.

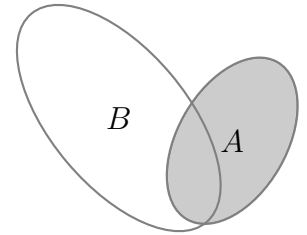
Chọn đáp án **A**

□

Câu 18.

Cho A, B là hai tập hợp được minh họa như hình vẽ. Phần không bị tô đen trong hình vẽ là tập hợp nào sau đây?

- A. $A \cap B$. B. $A \cup B$. C. $A \setminus B$. D. $B \setminus A$.



Lời giải.

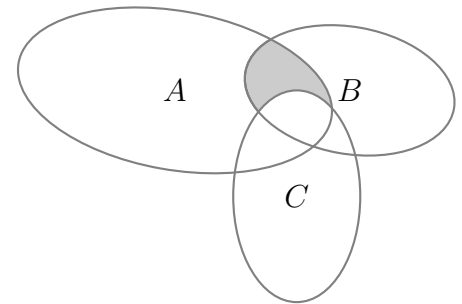
Chọn đáp án **D**

□

Câu 19.

Cho A, B, C là ba tập hợp được minh họa như hình vẽ bên. Phần tô đen trong hình vẽ là tập hợp nào sau đây?

- A. $(A \cup B) \setminus C$. B. $(A \cap B) \setminus C$.
C. $(A \setminus C) \cup (A \setminus B)$. D. $A \cap B \cap C$.



Lời giải.

Chọn đáp án **B**

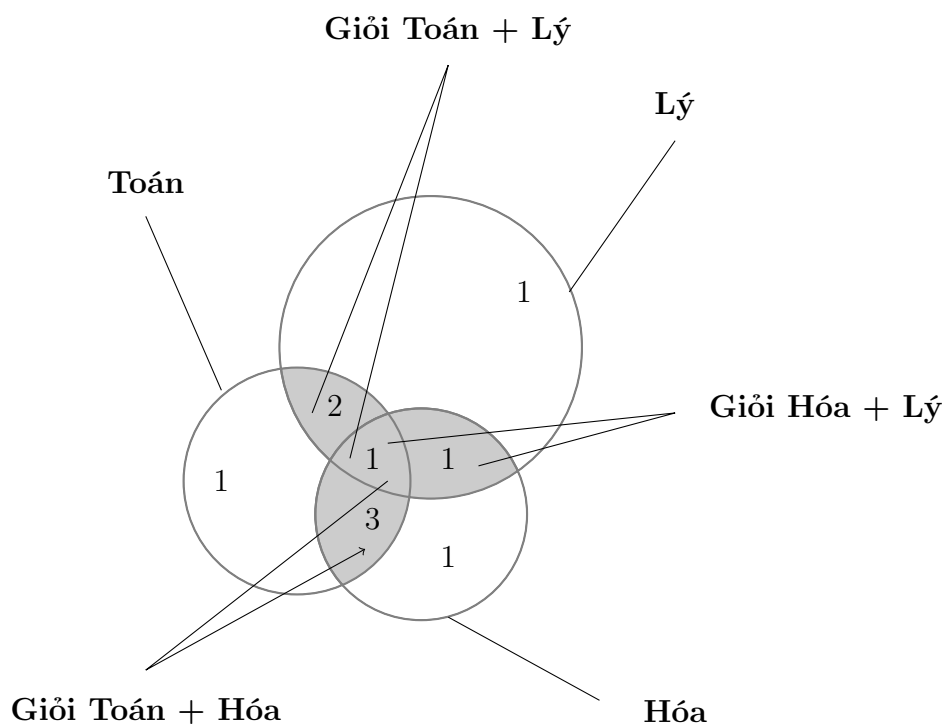
□

Câu 20. Lớp $10B_1$ có 7 học sinh giỏi Toán, 5 học sinh giỏi Lý, 6 học sinh giỏi Hóa, 3 học sinh giỏi cả Toán và Lý, 4 học sinh giỏi cả Toán và Hóa, 2 học sinh giỏi cả Lý và Hóa, 1 học sinh giỏi cả 3 môn Toán, Lý, Hóa. Số học sinh giỏi ít nhất một môn (Toán, Lý, Hóa) của lớp $10B_1$ là

- A. 9. B. 10. C. 18. D. 28.

Lời giải.

Ta dùng biểu đồ Ven để giải:



Nhìn vào biểu đồ, số học sinh giỏi ít nhất 1 trong 3 môn là: $1 + 2 + 1 + 3 + 1 + 1 + 1 = 10$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 21. Lớp 10A₁ có 7 học sinh giỏi Toán, 5 học sinh giỏi Lý, 6 học sinh giỏi Hóa, 3 học sinh giỏi cả Toán và Lý, 4 học sinh giỏi cả Toán và Hóa, 2 học sinh giỏi cả Lý và Hóa, 1 học sinh giỏi cả 3 môn Toán, Lý, Hóa. Số học sinh giỏi đúng hai môn học của lớp 10A₁ là

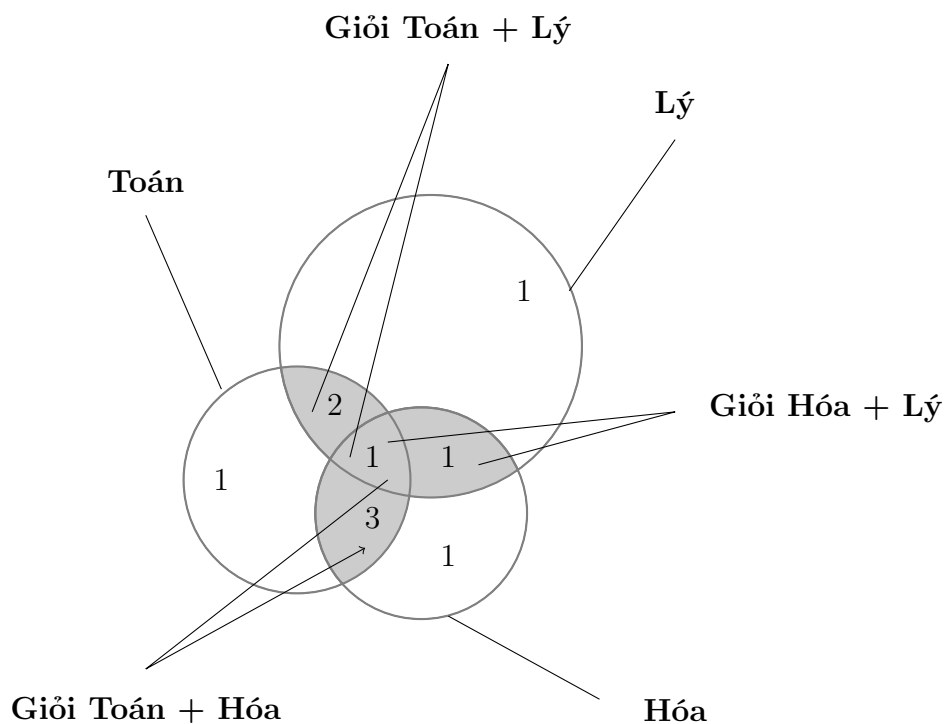
A. 6.

B. 7.

C. 9.

D. 10.

Lời giải.



Dựa vào biểu đồ ven trên, ta có số học sinh giỏi đúng hai môn học là $2 + 1 + 3 = 6$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 22. Cho hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$. Xét các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | f(x) = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | g(x) = 0\}$, $C = \left\{x \in \mathbb{R} \left| \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \right.\right\}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. $C = A \cup B$. B. $C = A \cap B$. C. $C = A \setminus B$. D. $C = B \setminus A$.

Lời giải.

Ta có: $\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$ hay $C = \{x \in \mathbb{R} | f(x) = 0, g(x) \neq 0\}$ nên $C = A \setminus B$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 23. Cho hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$. Xét các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | f(x) = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | g(x) = 0\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} | f^2(x) + g^2(x) = 0\}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. $C = A \cup B$. B. $C = A \cap B$. C. $C = A \setminus B$. D. $C = B \setminus A$.

Lời giải.

Ta có $f^2(x) + g^2(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$ nên $C = \{x \in \mathbb{R} | f(x) = 0, g(x) = 0\}$ nên $C = A \cap B$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 24. Cho các tập hợp $E = \{x \in \mathbb{R} | f(x) = 0\}$, $F = \{x \in \mathbb{R} | g(x) = 0\}$ và $H = \{x \in \mathbb{R} | f(x) \cdot g(x) = 0\}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. $H = E \cap F$. B. $H = E \cup F$. C. $H = E \setminus F$. D. $H = F \setminus E$.

Lời giải.

Ta có $f(x)g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$.

Vì $H = \{x \in \mathbb{R} | f(x) = 0 \vee g(x) = 0\}$ nên $H = E \cup F$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 25. Cho tập hợp $A \neq \emptyset$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. $A \setminus \emptyset = \emptyset$. B. $\emptyset \setminus A = A$. C. $\emptyset \setminus \emptyset = A$. D. $A \setminus A = \emptyset$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 26. Cho tập hợp $A \neq \emptyset$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $A \cup \emptyset = \emptyset$. B. $\emptyset \cup A = A$. C. $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$. D. $A \cup A = A$.

Lời giải.

Ta có $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 27. Cho tập hợp $A \neq \emptyset$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $A \cap \emptyset = A$. B. $\emptyset \cap A = \emptyset$. C. $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$. D. $A \cap A = A$.

Lời giải.

Ta có $A \cap \emptyset = \emptyset$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 28. Cho M, N là hai tập hợp khác rỗng. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. $M \setminus N \subset N$. B. $M \setminus N \subset M$. C. $(M \setminus N) \cap N \neq \emptyset$. D. $M \setminus N \subset M \cap N$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } x \in (M \setminus N) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in M \\ x \notin N. \end{cases}$$

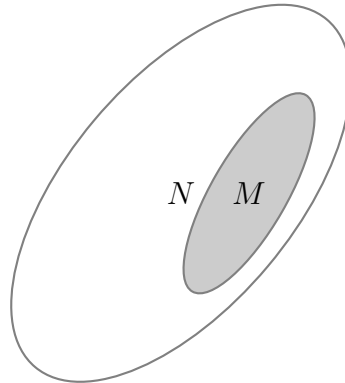
Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 29. Cho hai tập hợp M, N thỏa mãn $M \subset N$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. $M \cap N = N$. B. $M \setminus N = N$. C. $M \cap N = M$. D. $M \setminus N = M$.

Lời giải.



Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 30. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$. B. $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$.
C. $A \setminus B = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$. D. $A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 31. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau.

- A. $\mathbb{N} \cup \mathbb{N}^* = \mathbb{N}^*$. B. $\mathbb{N}^* \cap \mathbb{R} = \mathbb{N}^*$. C. $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$. D. $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}$.

Lời giải.

Do $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$ nên $\mathbb{N} \cup \mathbb{N}^* = \mathbb{N}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 32. Cho hai tập hợp $A = [-1; 5)$ và $B = [2; 10]$. Khi đó tập hợp $A \cap B$ bằng

- A. $[2; 5)$. B. $[-1; 10]$. C. $(2; 5)$. D. $[-1; 10)$.

Lời giải.

Biểu diễn hai tập A và B trên trục số ta được $A \cap B = [2; 5)$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 33. Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau.

- A. $\mathbb{N} \cup \mathbb{N}^* = \mathbb{N}^*$. B. $\mathbb{N}^* \cap \mathbb{R} = \mathbb{N}^*$. C. $\mathbb{R}^* \cup \mathbb{N} = \mathbb{R}^*$. D. $\mathbb{N} \cap \mathbb{R}^* = \mathbb{N}$.

Lời giải.

Vì $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$ nên $\mathbb{N} \cup \mathbb{N}^* = \mathbb{N}$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 34. Cho 2 tập hợp $M = (2; 11]$ và $N = [2; 11)$. Khi đó $M \cap N$ là

- A. $(2; 11)$. B. $[2; 11]$. C. 2. D. 11.

Lời giải.

Ta có: $M \cap N = (2; 11)$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 35. Cho $A = \{a; b; c\}$ và $B = \{a; c; d; e\}$. Hãy chọn khẳng định đúng.

- A. $A \cap B = \{a; b; c; d; e\}$. B. $A \cap B = \{a\}$.
C. $A \cap B = \{a; c\}$. D. $A \cap B = \{d; e\}$.

Lời giải.

Ta có $A = \{a; b; c\}$ và $B = \{a; c; d; e\}$ nên $A \cap B = \{a; c\}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 36. Số phần tử của tập hợp $\{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\} \setminus \mathbb{N}^*$ bằng

- A. 4. B. 6. C. 5. D. 0.

Lời giải.

$\{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\} \setminus \mathbb{N}^* = \{-4; -3; -2; -1; 0\}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 37. Tập hợp $A = (-2; 3] \cup (1; 6]$ là tập

- A. $(-2; 1]$. B. $(-2; 6)$. C. $(-2; 6]$. D. $(1; 3]$.

Lời giải.

$A = (-2; 3] \cup (1; 6] = (-2; 6]$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 38. Cho X là tập hợp các số nguyên tố nhỏ hơn 9, Y là tập hợp các số nguyên dương chẵn nhỏ hơn 10, K là tập hợp các ước nguyên dương của 12. Tập hợp $X \cup (Y \cap K)$ được viết dưới dạng liệt kê phần tử là

- A. $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. B. $\{2; 3; 4; 6\}$. C. $\{2; 3; 5; 7\}$. D. $\{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

Lời giải.

$X = \{2; 3; 5; 7\}$, $Y = \{2; 4; 6; 8\}$, $K = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$.

Khi đó $Y \cap K = \{2; 4; 6\}$, $X \cup (Y \cap K) = \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 39. Cho hai tập hợp $E = (-\infty; 6]$ và $F = [-2; 7]$. Khi đó $E \cap F$ là

- A. $E \cap F = [-2; 6]$. B. $E \cap F = (-\infty; 7]$.
C. $E \cap F = [6; 7]$. D. $E \cap F = (-\infty; -2)$.

Lời giải.

Ta có $E \cap F = [-2; 6]$.



Chọn đáp án **A** □

Câu 40. Cho $A = (-\infty; -2]$, $B = [3; +\infty)$, $C = (0; 4)$. Tìm tập $(A \cup B) \cap C$.

- A. $[3; 4)$. B. $[3; 4]$.
C. $(-\infty; -2] \cup (3; +\infty)$. D. $(-\infty; -2) \cup [3; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $A \cup B = (-\infty; -2] \cup [3; +\infty) \Rightarrow (A \cup B) \cap C = [3; 4)$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 41. Cho hai tập hợp $A = (-3; 3)$ và $B = (0; +\infty)$. Tìm $A \cup B$.

A. $A \cup B = (-3; +\infty)$.

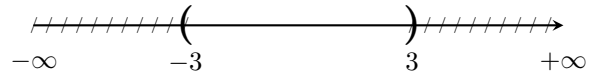
B. $A \cup B = [-3; +\infty)$.

C. $A \cup B = [-3; 0)$.

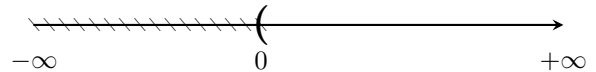
D. $A \cup B = (0; 3)$.

Lời giải.

Tập hợp $A = (-3; 3)$ có biểu diễn là



Tập hợp $B = (0; +\infty)$ có biểu diễn là



Do đó $A \cup B = (-3; +\infty)$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 42. Cho hai tập hợp $A = [-2; 3]$ và $B = (1; +\infty)$. Tìm $A \cap B$.

A. $A \cap B = [-2; +\infty)$.

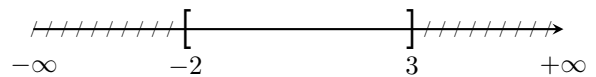
B. $A \cap B = (1; 3]$.

C. $A \cap B = [1; 3]$.

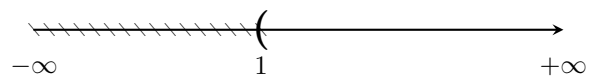
D. $A \cap B = (1; 3)$.

Lời giải.

Tập hợp $A = [-2; 3]$ có biểu diễn là



Tập hợp $B = (1; +\infty)$ có biểu diễn là



Do đó $A \cap B = (1; 3]$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 43. Cho hai tập hợp $A = (-\infty; 2]$ và $B = (0; +\infty)$. Tìm $A \setminus B$.

A. $A \setminus B = (-\infty; 0]$.

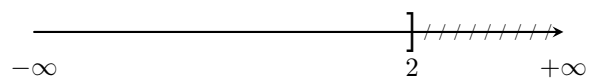
B. $A \setminus B = (2; +\infty)$.

C. $A \setminus B = (0; 2]$.

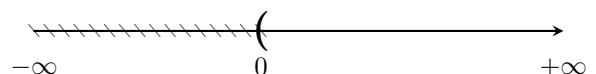
D. $A \setminus B = (-\infty; 0)$.

Lời giải.

Tập hợp $A = (-\infty; 2]$ có biểu diễn là



Tập hợp $B = (0; +\infty)$ có biểu diễn là



Do đó $A \setminus B = (-\infty; 0]$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 44. Cho $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |mx - 3| = mx - 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 = 0\}$. Tìm m để $B \setminus A = B$.

A. $-\frac{3}{2} \leq m \leq \frac{3}{2}$.

B. $m < \frac{3}{2}$.

C. $-\frac{3}{2} < m < \frac{3}{2}$.

D. $m \geq -\frac{3}{2}$.

Lời giải.

• Ta có $|mx - 3| = mx - 3 \Leftrightarrow mx - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0, x \geq \frac{3}{m} \\ m < 0, x \leq \frac{3}{m} \end{cases}$

Do đó, nếu $m < 0$ thì $A = \left(-\infty; \frac{3}{m}\right]$; nếu $m > 0$ thì $A = \left[\frac{3}{m}; +\infty\right)$.

• Ta có $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2 \in \mathbb{R}$. Do đó $B = \{-2; 2\}$.

• Ta có $B \setminus A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A = \emptyset & (1) \\ \begin{cases} -2 \notin A \\ 2 \notin A. \end{cases} & (2) \end{cases}$

TH1. $(1) \Leftrightarrow m = 0$.

TH2. Nếu $m < 0$ thì $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} -2 > \frac{3}{m} \\ 2 > \frac{3}{m} \end{cases} \Rightarrow -2 > \frac{3}{m} \Leftrightarrow m > -\frac{3}{2}$.

Tóm lại, $-\frac{3}{2} < m < 0$ thì thỏa mãn yêu cầu bài toán.

TH3. Nếu $m > 0$ thì $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < \frac{3}{m} \\ 2 < \frac{3}{m} \end{cases} \Rightarrow 2 < \frac{3}{m} \Leftrightarrow m < \frac{3}{2}$.

Tóm lại, $0 < m < \frac{3}{2}$ thì thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Kết hợp ba trường hợp, vậy $-\frac{3}{2} < m < \frac{3}{2}$ thì thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 45. Cho $A = \{2; 5\}$, $B = \{2; 3; 5\}$ tập hợp $A \cup B$ bằng tập hợp nào sau đây?

A. $\{2; 3; 5\}$. B. $\{2; 5\}$. C. $\{2; 3\}$. D. $\{5\}$.

Lời giải.

Có $A \cup B = \{2; 3; 5\}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 46. Tập hợp $D = [0; 5] \cap (2; 7)$ là tập hợp nào sau đây?

A. $(2; 5]$. B. $(-4; 9]$. C. $(-6; 2]$. D. $[-6; 2]$.

Lời giải.

Ta có $D = [0; 5] \cap (2; 7) = (2; 5]$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 47. Cho hai tập hợp $X = \{7; 8; 9\}$ và $Y = \{1; 3; 7; 4\}$. Tập hợp $X \cup Y$ bằng tập hợp nào sau đây?

A. $\{1; 2; 3; 4; 8; 9; 7\}$. B. $\{1; 3; 4; 7; 8; 9\}$. C. $\{1; 3\}$. D. $\{2; 8; 9; 12\}$.

Lời giải.

Ta có $X \cup Y = \{7; 8; 9\} \cup \{1; 3; 7; 4\} = \{1; 3; 4; 7; 8; 9\}$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 48. Cho hai tập hợp $A = \{-1; 0; 2; 5\}$ và $B = \{1; 2; 3; 5\}$. Xác định tập hợp $A \setminus B$.

A. $A \setminus B = \{-1; 0\}$. B. $A \setminus B = \{1; 3\}$.
C. $A \setminus B = \{-1; 0; 1; 2; 3; 5\}$. D. $A \setminus B = \{2; 5\}$.

Lời giải.

Ta có $A \setminus B = \{-1; 0\}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 49. Cho $A = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$ và $B = \{1; 2; 3; 6; 9\}$. Tập $A \cap B$ là tập nào?

- A. $\{1; 3; 6\}$. B. $\{4; 9; 12\}$. C. $\{1; 2; 3; 4; 6\}$. D. $\{1; 2; 3; 6\}$.

Lời giải.

Ta có: $A \cap B = \{x | x \in A \text{ và } x \in B\} \Rightarrow A \cap B = \{1; 2; 3; 6\}$

Chọn đáp án **D**

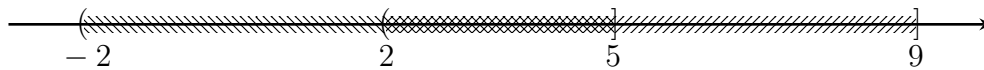
□

Câu 50. Cho tập hợp số sau $A = (-2; 5]$, $B = (2; 9]$. Tập hợp $A \cap B$ là

- A. $(-2; 2]$. B. $(-2; 9]$. C. $(-2; 2)$. D. $(2; 5]$.

Lời giải.

Biểu diễn hai tập hợp A, B trên trục số



Từ đó, ta có $A \cap B = (2; 5]$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 51. Cho tập hợp $A = (2; 5]$, $B = (3; 8)$. Tập hợp $A \setminus B$ là

- A. $(3; 5)$. B. $(2; 8]$. C. $(2; 3]$. D. $[3; 5]$.

Lời giải.

Ta có: $A \setminus B = \{x \in A | x \notin B\} \Rightarrow A \setminus B = (2; 3]$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 52. Cho tập hợp $A = [-2; 1]$ và $B = (0; +\infty)$. Tập $A \cup B$ là tập nào?

- A. $[-2; +\infty)$. B. $[1; +\infty)$. C. $[-2; 0)$. D. $(0; 1]$.

Lời giải.

Ta có: $A \cup B = \{x | x \in A \text{ hoặc } x \in B\} \Rightarrow A \cup B = [-2; +\infty)$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 53. Cho $A = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 3\}$, $B = \{0; 1; 2; 3\}$. Tập $A \cap B$ bằng

- A. $\{1; 2; 3\}$. B. $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.
C. $\{0; 1; 2\}$. D. $\{0; 1; 2; 3\}$.

Lời giải.

Ta có $A = \{0; 1; 2; 3\}$. Do đó $A \cap B = \{0; 1; 2; 3\}$.

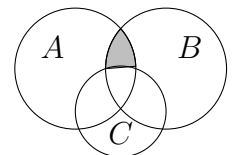
Chọn đáp án **D**

□

Câu 54.

Cho các tập hợp A, B, C được minh họa bằng biểu đồ Ven như hình bên. Phần tô màu xám trong hình là biểu diễn của tập hợp nào sau đây?

- A. $A \cap B \cap C$. B. $(A \setminus C) \cup (A \setminus B)$.
C. $(A \cup B) \setminus C$. D. $(A \cap B) \setminus C$.



Lời giải.

Phần tô màu xám trong hình là biểu diễn của tập hợp gồm các phần tử vừa thuộc tập hợp A , vừa thuộc tập hợp B và không thuộc tập hợp C , tức là tập hợp $(A \cap B) \setminus C$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 55. Cho $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$; $B = \{2; 3; 4; 5; 6\}$. Tập hợp $A \setminus B$ bằng

- A. $\{1; 5\}$. B. $\{0\}$. C. $\{1; 2\}$. D. $\{0; 1\}$.

Lời giải.

Ta có $A \setminus B = \{0; 1\}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 56. Cho hai tập hợp $A = \left\{-\frac{1}{2}; 1; 2\right\}$ và $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x^2 - x - 1 = 0\}$. Khi đó $A \cap B$ là

- A. $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$. B. $\left\{-\frac{1}{2}; 1\right\}$. C. $\{1\}$. D. $\{1; 2\}$.

Lời giải.

Xét phương trình $2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$. Suy ra $B = \left\{1; -\frac{1}{2}\right\}$.

Do đó $A \cap B = \left\{-\frac{1}{2}; 1\right\}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 57. Một lớp học có 50 học sinh trong đó có 30 em biết chơi bóng chuyền, 25 em biết chơi bóng đá, 10 em biết chơi cả bóng đá và bóng chuyền. Hỏi có bao nhiêu em không biết chơi môn nào trong hai môn ở trên?

- A. 15. B. 5. C. 20. D. 45.

Lời giải.

Gọi tập A là tập học sinh biết chơi bóng chuyền.

Tập B là tập học sinh biết chơi bóng đá.

Khi đó số học sinh biết chơi ít nhất một trong hai môn bóng chuyền hoặc bóng đá là

$$|A \cup B| = 30 + 25 - 10 = 45.$$

Vậy số học sinh không biết chơi môn nào là $50 - 45 = 5$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 58. Cho tập hợp $A = \{1; 2; 4; 5\}$, $B = \{2; 4; 6\}$. Xác định tập hợp $A \cup B$.

- A. $\{1; 2; 4; 5; 6\}$. B. $\{1; 5\}$. C. $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. D. $\{2; 4\}$.

Lời giải.

$A \cup B = \{1; 2; 4; 5; 6\}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 59. Cho hai tập hợp $A = (-\infty; 1 - m]$; $B = [1; +\infty)$. Tìm tất cả các giá trị của m để $A \cap B = \emptyset$.

- A. $m > 0$. B. $m \geq 0$. C. $m \neq 0$. D. $m < 0$.

Lời giải.

$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow 1 - m < 1 \Leftrightarrow m > 0$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 60. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 15\}$; $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 2\}$. Tập hợp $A \setminus B$ có bao nhiêu phần tử?

A. 1.

B. 3.

C. 4.

D. 2.

Lời giải.Ta có: $x^2 < 15 \Leftrightarrow -\sqrt{15} < x < \sqrt{15}$.Mà $x \in \mathbb{N}$ nên $x \in \{0; 1; 2; 3\}$. $\Rightarrow A = \{0; 1; 2; 3\}$.Ta có: $\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ -2 \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$. $\Rightarrow B = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.Vậy $A \setminus B = \{3\}$. $\Rightarrow$ Số phần tử của $A \setminus B$ là 1.Chọn đáp án **A**

□

Câu 61. Cho $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 1 \geq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 - x \geq 0\}$. Khi đó $A \setminus B$ làA. $[-1; 4]$.B. $[4; +\infty)$.C. $(4; +\infty)$.D. $(-\infty; -1)$.**Lời giải.** $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 1 \geq 0\} = [-1; +\infty)$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 - x \geq 0\} = (-\infty; 4]$ Nên $A \setminus B = (4; +\infty)$.Chọn đáp án **C**

□

Câu 62. Cho hai tập hợp $A = [-1; \sqrt{3})$ và $B = [\sqrt{2}; 3]$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?A. $A \cap B = (\sqrt{2}; \sqrt{3})$.B. $A \setminus B = [-1; \sqrt{2}]$.C. $B \setminus A = [\sqrt{3}; 3]$.D. $A \cup B = \mathbb{R} \setminus (-1; 3)$.**Lời giải.**

Ta có

- $A \cap B = [\sqrt{2}; \sqrt{3})$.
- $A \setminus B = [-1; \sqrt{2})$.
- $A \cup B = [-1; 3]$.
- $B \setminus A = [\sqrt{3}; 3]$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 63. Cho tập $X = \{-2; -1; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$, $Y = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 9; 10\}$. Tập hợp $X \setminus Y$ là tập hợp nào sau đây?A. $\{-2\}$.B. $\{-2; 6; 7; 8\}$.C. $\{6; 7; 8\}$.D. $\{9; 10\}$.**Lời giải.**Ta có $X \setminus Y = \{-2; 6; 7; 8\}$.Chọn đáp án **B**

□

Câu 64. Cho tập hợp $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 10\}$ và tập hợp $Y = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\}$. Trong các tập hợp sau đây, tập hợp nào bằng $X \cap Y$?A. $(5; 10)$.B. $(-\infty; 5]$.C. $[10; +\infty)$.D. $[5; 10]$.**Lời giải.**Ta có $X = (-\infty; 10]$, $Y = [5; +\infty)$. Suy ra $X \cap Y = [5; 10]$.Chọn đáp án **D**

□

Câu 65. Cho $X = \{2; 4; 6; 8; 10\}$ và $Y = \{1; 2; 3; 4\}$. Tìm $X \cap Y$.

A. $X \cap Y = \{2; 4\}$.

B. $X \cap Y = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 10\}$.

C. $X \cap Y = \{1; 3\}$.

D. $X \cap Y = \{6; 8; 10\}$.

Lời giải.

$$X \cap Y = \{2; 4\}.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 66. Cho hai tập hợp $A = \{3; 5; 7\}$ và $B = \{2; 4; 6\}$. Tìm $A \cup B$.

A. $A \cup B = \{3; 5; 7\}$.

B. $A \cup B = \{2; 4; 6\}$.

C. $A \cup B = \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

D. $A \cup B = \emptyset$.

Lời giải.

$$A \cup B = \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 67. Cho tập $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}; B = \{3; 4; 5; 6; 7\}$. Tìm $A \setminus B$.

A. $A \setminus B = \{6; 7\}$.

B. $A \setminus B = \{3; 4; 5\}$.

C. $A \setminus B = \{1; 2\}$.

D. $A \setminus B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Lời giải.

$$A \setminus B = \{1; 2\}.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 68. Cho các tập hợp $A = (-\infty; m)$ và $B = [3m - 1; 3m + 3]$. Tìm m để $A \cap B = \emptyset$.

A. $m > \frac{1}{2}$.

B. $m \geq \frac{1}{2}$.

C. $m < \frac{1}{2}$.

D. $m \leq \frac{1}{2}$.

Lời giải.

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow m \leq 3m - 1 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 69. Cho hai tập hợp $A = \{-1; 0; 2; 4; 6; 10\}$, $B = \{-1; 0; 3; 4; 6; 8\}$. Tìm khẳng định **sai**.

A. $A \cap B = \{-1; 0; 4; 6\}$.

B. $A \cap B = \{2; 4; 6; 10\}$.

C. $A \setminus B = \{2; 10\}$.

D. $A \cup B = \{-1; 0; 2; 3; 4; 6; 8; 10\}$.

Lời giải.

Dễ thấy phần chung của A và B là tập hợp các phần tử $\{-1; 0; 4; 6\}$ nên khẳng định

$A \cap B = \{2; 4; 6; 10\}$ là sai.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 70. Cho tập hợp $A = (-\infty; 3]$ và $B = (1; +\infty)$. Tập hợp $A \cup B$ là

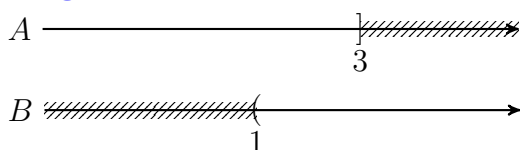
A. $(-\infty; 1]$.

B. $(-\infty; 3]$.

C. $(-\infty; 1) \cup (1; 3]$.

D. $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải.



$A \cup B$ —————→

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 71. Cho tập hợp $A = (-\infty; 4]$ và $B = (1; +\infty)$. Tập hợp $B \setminus A$ là

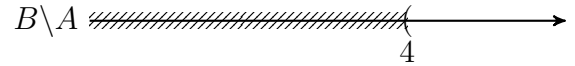
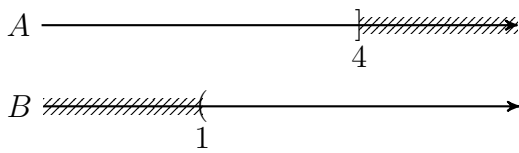
A. $(4; +\infty)$.

B. $(-\infty; 1)$.

C. $[1; +\infty)$.

D. $[4; +\infty)$.

Lời giải.



Chọn đáp án **A**

□

Câu 72. Cho hai tập hợp $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ và $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Tìm tập hợp $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

A. $\{0, 1, 5, 6\}$.

B. $\{1, 2\}$.

C. $\{2, 3, 4\}$.

D. $\{5, 6\}$.

Lời giải.

Ta có $A \setminus B = \{0, 1\}$, $B \setminus A = \{5, 6\}$.

Suy ra $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{0, 1, 5, 6\}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 73. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 2 \geq 0\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 - x \geq 0\}$. Tìm tập hợp $A \setminus B$.

A. $[-2; 5]$.

B. $[-2; 6]$.

C. $(5; +\infty)$.

D. $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $A = [-2; +\infty)$, $B = (-\infty; 5]$.

Suy ra $A \setminus B = (5; +\infty)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 74. Cho ba tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 9\}$, $B = \{0; 2; 4; 6; 8; 9\}$, $C = \{3; 4; 5; 6; 7\}$. Tính tích các phần tử của tập hợp $A \cap (B \setminus C)$.

A. 18.

B. 11.

C. 2.

D. 7.

Lời giải.

Ta có $B \setminus C = \{0; 2; 8; 9\}$. Khi đó $A \cap (B \setminus C) = \{2; 9\}$.

Vậy tích các phần tử là $2 \cdot 9 = 18$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 75. Cho $A = \{2; 4; 6; 9\}$ và $B = \{1; 2; 3; 4\}$. Khi đó tập hợp $A \setminus B$ là tập nào sau đây?

A. $\emptyset$.

B. $\{6; 9; 1; 3\}$.

C. $\{1; 2; 3; 5\}$.

D. $\{6; 9\}$.

Lời giải.

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$.

Từ giả thiết ta có $A \setminus B = \{6; 9\}$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 76. Nếu $(-3; 5) \setminus (-\infty; b) = \emptyset$ thì b phải thỏa điều kiện nào sau đây.

A. $b \leq -3$.

B. $b > 5$.

C. $b \leq 5$.

D. $-3 < b < 5$.

Lời giải.

Để $(-3; 5) \setminus (-\infty; b) = \emptyset$ thì $b \leq -3$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 77. Cho tập $A = \{0; 2; 4; 6; 8\}$; $B = \{3; 4; 5; 6; 7\}$. Tập $A \setminus B$ là

A. $\{0; 6; 8\}$.

B. $\{0; 2; 8\}$.

C. $\{3; 6; 7\}$.

D. $\{0; 2\}$.

Lời giải.

Ta có $A \setminus B = \{0; 2; 8\}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 78. Tập hợp nào sau đây chỉ gồm các số vô tỷ?

A. $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}^*$.

B. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

C. $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

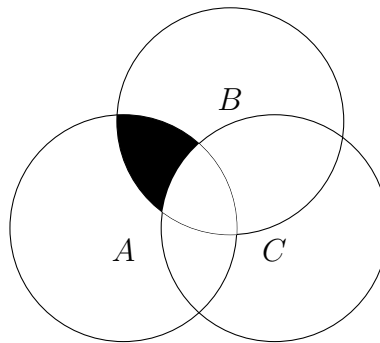
D. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Lời giải.

Tập hợp chỉ gồm các số vô tỷ là $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 79. Cho các tập hợp A, B, C được minh họa bằng biểu đồ Ven như hình bên. Phần tô màu trong hình là biểu diễn của tập hợp nào sau đây?



A. $A \cap B \cap C$.

B. $(A \setminus C) \cup (A \setminus B)$.

C. $(A \cup B) \setminus C$.

D. $(A \cap B) \setminus C$.

Lời giải.

Sử dụng phép toán giao hai tập hợp để tìm $A \cap B$, từ đó suy ra đáp án $(A \cap B) \setminus C$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 80. Cho A, B là các tập khác rỗng và $A \subset B$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $A \cap B = A$.

B. $A \cup B = A$.

C. $B \setminus A \neq \emptyset$.

D. $A \setminus B = \emptyset$.

Lời giải.

Vì $A \subset B$ nên $A \cup B = B$. Vậy mệnh đề $A \cup B = A$ sai.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 81. Cho $A = (-\infty; -2]$, $B = [3; +\infty)$, $C = (0; 4)$. Khi đó tập $(A \cup B) \cap C$ là

A. $(-\infty; -2] \cup (3; +\infty)$.

B. $(-\infty; -2) \cup [3; +\infty)$.

C. $[3; 4)$.

D. $[3; 4]$.

Lời giải.

Ta có $A \cup B = (-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$. Suy ra $(A \cup B) \cap C = [3; 4)$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 82. Trong lớp 10A có 35 học sinh, trong đó có 15 em thích môn Văn, 17 em thích môn Toán, 7 em không thích môn nào. Số học sinh thích cả hai môn là

A. 13 học sinh.

B. 11 học sinh.

C. 3 học sinh.

D. 4 học sinh.

Lời giải.

Số học sinh thích ít nhất một trong hai môn Văn và Toán là $35 - 7 = 28$ học sinh.

Số học sinh thích cả hai môn là $15 + 17 - 28 = 4$ học sinh.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 83. Cho các tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ và $C = \{3, 4, 5, 6\}$. Tìm tập hợp $(A \cup B) \cap C$.

- A. $(A \cup B) \cap C = \{3, 4, 5, 6\}$. B. $(A \cup B) \cap C = \{4, 5, 6\}$.
C. $(A \cup B) \cap C = \{3, 5, 6\}$. D. $(A \cup B) \cap C = \{3, 4, 6\}$.

Lời giải.

Ta có $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\} \Rightarrow (A \cup B) \cap C = \{3, 4, 6\}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 84. Tìm tất cả các giá trị thực âm của tham số m để hai khoảng $(-\infty; 2m)$ và $\left(\frac{2}{m}; +\infty\right)$ có giao khác rỗng.

- A. $-1 < m < 0$. B. $-1 < m < 1$. C. $m < 0$. D. $m < -1$.

Lời giải.

Với $m < 0$ thì $\frac{2}{m}$ luôn có nghĩa.

Giao của hai tập đã cho khác rỗng khi hai tập hợp này có phần tử chung

$$\Leftrightarrow 2m > \frac{2}{m} \Leftrightarrow 2m^2 < 2 \text{ (vì } m < 0) \Leftrightarrow 2(m-1)(m+1) < 0.$$

Vì $m < 0$ nên ta xét các trường hợp sau

- Nếu $m < -1$ thì $m+1 < 0$, $m-1 < 0$, suy ra $2(m-1)(m+1) > 0$.
Vậy $m < -1$ không thỏa yêu cầu bài toán.
- Nếu $-1 < m < 0$ thì $m+1 > 0$, $m-1 < 0$, suy ra $2(m-1)(m+1) < 0$.

Vậy giá trị cần tìm của m là $-1 < m < 0$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 85. Cho ba tập hợp A, B, C khác rỗng. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $(A \cap C) \cup (B \cap C) = A$. B. $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset A$.
C. $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset B$. D. $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset C$.

Lời giải.

Ta có $(A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \subset C$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 86. Cho tập $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ và hai tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$. Tìm $C_E(A \cup B)$.

- A. $C_E(A \cup B) = \{5, 6, 7\}$. B. $C_E(A \cup B) = \{5, 7, 9\}$.
C. $C_E(A \cup B) = \{6, 7, 8\}$. D. $C_E(A \cup B) = \{7, 8, 9\}$.

Lời giải.

Ta có $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\} \Rightarrow C_E(A \cup B) = \{5, 7, 9\}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 87. Cho tập $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ và hai tập $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$. Tìm $C_E A \cap C_E B$.

- A. $C_E A \cap C_E B = \{5, 6, 7\}$. B. $C_E A \cap C_E B = \{5, 7, 8\}$.
C. $C_E A \cap C_E B = \{5, 7, 9\}$. D. $C_E A \cap C_E B = \{7, 8, 9\}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} C_E A = \{5, 6, 7, 8, 9\} \\ C_E B = \{1, 3, 5, 7, 9\} \end{cases} \Rightarrow C_E A \cap C_E B = \{5, 7, 9\}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 88. Xét các tập hợp X, Y có cùng số phần tử. Biết rằng số phần tử của tập hợp $X \cup Y$ và $X \setminus Y$ lần lượt là 35 và 15. Tìm số phần tử của tập hợp X .

A. 35.

B. 20.

C. 50.

D. 15.

Lời giải.

Có 15 phần tử của tập X không phải là phần tử của tập Y nên số phần tử của tập hợp $X \cup Y$ bằng số phần tử sẵn có của Y cộng thêm số phần tử thuộc tập $X \setminus Y$.

Do đó, tập X và tập Y cùng có 20 phần tử.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 89. Cho hai tập hợp A và B thỏa $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $A \cap B = \{2\}$ và $A \setminus B = \{4; 5\}$. Khi đó tập hợp B là

A. $\{3\}$.B. $\{1; 2; 3\}$.C. $\{2; 3\}$.D. $\{2; 5\}$.

Lời giải.

Ta có $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B) = \{2; 4; 5\}$.

Mặt khác $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ và $A \cap B = \{2\} \Rightarrow B = \{1; 2; 3\}$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 90. Cho $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |mx - 3| = mx - 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 = 0\}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $B \setminus A = B$.

A. $-\frac{3}{2} \leq m \leq \frac{3}{2}$.B. $m < \frac{3}{2}$.C. $-\frac{3}{2} < m < \frac{3}{2}$.D. $m \geq -\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $x \in A \Leftrightarrow mx - 3 \geq 0$. Và $x \in B \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$.

$$\text{Ta có } B \setminus A = B \Leftrightarrow B \cap A = \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ \begin{cases} m > 0 \\ \frac{3}{m} > 2 \end{cases} \\ \begin{cases} m < 0 \\ \frac{3}{m} < -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ 0 < m < \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} < m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < m < \frac{3}{2}.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 91. Trong kì thi học sinh giỏi cấp trường, lớp 10A có 45 học sinh trong đó có 17 bạn được công nhận học sinh giỏi Văn, 25 bạn học sinh giỏi Toán và 13 bạn học sinh không đạt học sinh giỏi. Tìm số học sinh giỏi cả Văn và Toán của lớp 10A.

A. 42 .

B. 32.

C. 17.

D. 10.

Lời giải.

Số bạn học sinh công nhận học sinh giỏi: $45 - 13 = 32$ (học sinh).

Số học sinh giỏi cả Văn và Toán là: $25 + 17 - 32 = 10$ (học sinh).

Chọn đáp án **D**

□

Câu 92. Lớp 10A có 10 học sinh giỏi Toán, 15 học sinh giỏi Văn, 5 học sinh giỏi cả 2 môn Toán Văn và 2 học sinh không giỏi môn nào. Hỏi lớp 10A có bao nhiêu học sinh?

- A. 20. B. 22. C. 25. D. 28.

Lời giải.

Số học sinh giỏi một môn Toán: $10 - 5 = 5$ (học sinh).

Số học sinh giỏi một môn Văn: $15 - 5 = 10$ (học sinh).

Số học sinh lớp 10A: $2 + 5 + 10 + 5 = 22$ (học sinh).

Chọn đáp án (B)

□

Câu 93. Để phục vụ cho hội nghị quốc tế, ban tổ chức đã huy động 30 cán bộ phiên dịch tiếng Anh, 25 cán bộ phiên dịch tiếng Pháp. Trong đó có 12 cán bộ phiên dịch được cả 2 thứ tiếng Anh và Pháp. Hỏi ban tổ chức đã huy động tất cả bao nhiêu cán bộ phiên dịch cho hội nghị đó?

- A. 42. B. 31. C. 55. D. 43.

Lời giải.

Số cán bộ được huy động là: $30 + 25 - 12 = 43$ cán bộ.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 94. Cho hai tập $A = [0; 5]$; $B = (2a; 3a + 1]$, với $a > -1$. Tìm tất cả các giá trị của a để $A \cap B \neq \emptyset$.

- A. $\begin{cases} a < \frac{5}{2} \\ a \geq -\frac{1}{3} \end{cases}$ B. $\begin{cases} a \geq \frac{5}{2} \\ a < -\frac{1}{3} \end{cases}$ C. $-\frac{1}{3} \leq a < \frac{5}{2}$ D. $-\frac{1}{3} \leq a \leq \frac{5}{2}$.

Lời giải.

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \leq 2a \\ 3a + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty\right).$$

Suy ra $A \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow a \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{5}{2}\right)$ thỏa mãn điều kiện $a > -1$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 95. Lớp 10A có 7 học sinh giỏi Toán, 5 học sinh giỏi Lý, 6 học sinh giỏi Hoá, 3 học sinh giỏi cả Toán và Lý, 4 học sinh giỏi cả Toán và Hoá, 2 học sinh giỏi cả Lý và Hoá, 1 học sinh giỏi cả ba môn Toán, Lý, Hoá. Số học sinh giỏi ít nhất một môn (Toán hoặc Lý hoặc Hoá) của lớp 10A là

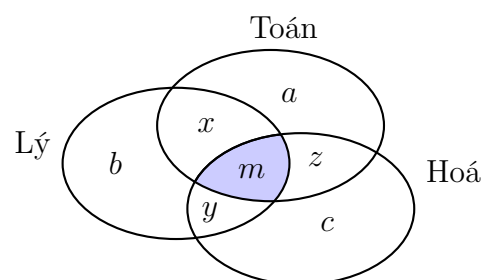
- A. 9. B. 18. C. 10. D. 28.

Lời giải.

Vẽ biểu đồ Ven biểu diễn cho mối liên hệ giữa các tập hợp học sinh giỏi Toán, Lý, Hoá.

Và gọi a, b, c, x, y, z, m là số phần tử của mỗi tập hợp thành phần (như trên hình vẽ).

$$\text{Theo giả thiết } \begin{cases} x + m = 3 \\ y + m = 2 \\ z + m = 4 \\ m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 3 \\ m = 1. \end{cases}$$



Cũng theo giả thiết
$$\begin{cases} a + x + z + m = 7 \\ b + x + y + m = 5 \\ c + y + z + m = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1. \end{cases}$$

Vậy số học sinh giỏi ít nhất một trong ba môn Toán, Lý, Hoá là $a + b + c + x + y + z + m = 10$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 96. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 1)(x^2 - 3x + 4) = 0\}$ và $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 2\}$. Tìm tập hợp $A \cup B$.

A. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

B. $\{-2, -1, 0, 1, 2, -4\}$.

C. $\{-1, 1\}$.

D. $\{-2, 0, 2\}$.

Lời giải.

Ta có $A = \{-1, 1\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Suy ra $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 97. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0\}$ và tập hợp $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 2\}$. Khi đó, tập $A \cup B$ là

A. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

B. $\{-4, -2, -1, 0, 1, 2, 4\}$.

C. $\{-2, -1, 1, 2\}$.

D. $\{-2, 0, 2\}$.

Lời giải.

$A = \{-2, -1, 1, 2\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Nên $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 98. Cho tập hợp $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x \leq 4\}$ và tập hợp A gồm những số tự nhiên lẻ không lớn hơn 8. Tìm tập hợp $A \cap B$.

A. $\{1, 3\}$.

B. $\{1, 2, 3, 4\}$.

C. $\{0, 1, 3, 5\}$.

D. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7\}$.

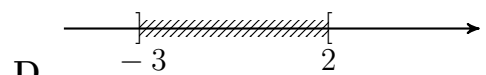
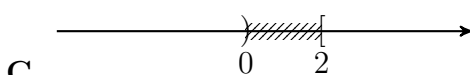
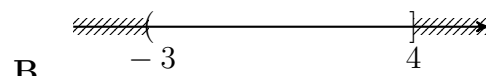
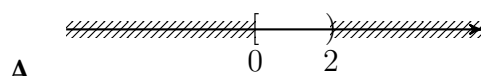
Lời giải.

$A = \{1, 3, 5, 7\}$; $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Nên $A \cap B = \{1, 3\}$.

Chọn đáp án **A**

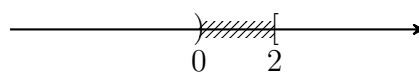
□

Câu 99. Biểu diễn trên trục số của tập hợp $\mathbb{R} \setminus ((-3; 4) \cap [0; 2))$ là hình nào?



Lời giải.

Ta có $(-3; 4) \cap [0; 2) = [0; 2) \Rightarrow \mathbb{R} \setminus ((-3; 4) \cap [0; 2)) = (-\infty; 0) \cup [2; +\infty)$ nên được biểu diễn trên trục số là



Chọn đáp án **C**

□

Câu 100. Cho A là tập các số nguyên dương và chia hết cho 6, B là tập hợp các số nguyên chia hết cho 2, C là tập hợp các số nguyên chia hết cho 3. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $A \cap B = \emptyset$. B. $A \cup B = C$. C. $A \cap C = B$. D. $B \cap C = A$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \forall x \in B \cap C \Leftrightarrow \begin{cases} x \in B \\ x \in C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x : 2 \\ x : 3 \end{cases} \Leftrightarrow x : 6 \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow A = B \cap C.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 101. Cho các tập hợp $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{b, c\}$ và $D = \{2, 3, 4\}$, trong đó $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $a, b, c \notin B, D$ là các phần tử khác nhau từng đôi một. Tìm tập hợp $E = (A \cup B) \cap (C \cup D)$.

- A. $E = \{a, 2, 3\}$. B. $E = \{b, 2, 3\}$. C. $E = \{2, 3, 4\}$. D. $E = \{a, b, c\}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} A \cup B = \{a, b, 1, 2, 3\} \\ C \cup D = \{b, c, 2, 3, 4\} \end{cases} \Rightarrow E = (A \cup B) \cap (C \cup D) = \{b, 2, 3\}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 102. Cho các tập hợp $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{b, c\}$ và $D = \{2, 3, 4\}$, trong đó $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $a, b, c \notin B, D$ là các phần tử khác nhau từng đôi một. Tìm tập hợp $E = (A \cap B) \cup (C \cap D)$.

- A. $E = \{a, c\}$. B. $E = \{b, 2\}$. C. $E = \emptyset$. D. $E = \{b, 2, 3\}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} A \cap B = \emptyset \\ C \cap D = \emptyset \end{cases} \Rightarrow E = (A \cap B) \cup (C \cap D) = \emptyset.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 103. Với giả thiết nào dưới đây thì có thể kết luận $A \cap B = A \cup B$?

- A. $A \setminus B = \emptyset$. B. $B \subset A$. C. $A \subset B$. D. $A = B$.

Lời giải.

Khi $A = B$ thì $A \cap B = A \cap A = A$ và $A \cup B = A \cup A = A$. Do đó $A \cap B = A \cup B$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 104. Để phục vụ cho hội nghị quốc tế, ban tổ chức cần huy động các phiên dịch viên tiếng Anh và tiếng Pháp. Biết rằng trong những người này có 25 người phiên dịch được tiếng Anh, 12 người phiên dịch được tiếng Pháp, trong đó có 8 người phiên dịch được cả hai thứ tiếng. Hỏi ban tổ chức đã huy động tất cả bao nhiêu phiên dịch viên?

- A. 45. B. 37. C. 33. D. 29.

Lời giải.

- Số người chỉ phiên dịch được tiếng Anh là $S_1 = 25 - 8 = 17$ người.
- Số người chỉ phiên dịch được tiếng Pháp là $S_2 = 12 - 8 = 4$ người.
- Số người phiên dịch được cả tiếng Anh và tiếng Pháp là $S_3 = 8$ người.

Vậy ban tổ chức đã huy động tất cả $S = S_1 + S_2 + S_3 = 17 + 4 + 8 = 29$ người.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 105. Cho 2 tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (2x - x^2)(2x^2 - 3x - 2) = 0\}$,
 $B = \{n \in \mathbb{N} \mid 3 < n^2 < 30\}$, chọn mệnh đề đúng?

- A. $A \cap B = \{2\}$. B. $A \cap B = \{5; 4\}$. C. $A \cap B = \{2; 4\}$. D. $A \cap B = \{3\}$.

Lời giải.

Xét tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (2x - x^2)(2x^2 - 3x - 2) = 0\}$ ta có

$$(2x - x^2)(2x^2 - 3x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - x^2 = 0 \\ 2x^2 - 3x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow A = \left\{0; 2; -\frac{1}{2}\right\}.$$

Xét tập hợp $B = \{n \in \mathbb{N} \mid 3 < n^2 < 30\} = \{2; 3; 4; 5\}$.

Vậy $A \cap B = \{2\}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 106. Cho $A = (-\infty; m + 1]$; $B = (-1; +\infty)$. Điều kiện để $A \cup B = \mathbb{R}$ là

- A. $m > -1$. B. $m \geq -2$. C. $m \geq 0$. D. $m > -2$.

Lời giải.

Ta có: $(A \cup B) = \mathbb{R} \Leftrightarrow -1 \leq m + 1 \Leftrightarrow m \geq -2$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 107. Tập hợp nào dưới đây là giao của hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 2\}$?

- A. $(-1; 2)$. B. $[0; 2)$. C. $(-2; 3)$. D. $[-1; 2)$.

Lời giải.

Ta viết lại hai tập hợp như sau: $A = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 3\} = [-1; 3)$.

$$B = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 2\} = (-2; 2).$$

Suy ra $A \cap B = [-1; 2)$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 108. Cho hai tập hợp $A = [1 - 2m; m + 3]$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 8 - 5m\}$ với m là một tham số thực. Tìm tất cả các giá trị m để $A \cap B = \emptyset$.

- A. $m \geq \frac{5}{6}$. B. $m < -\frac{2}{3}$. C. $m \leq \frac{5}{6}$. D. $-\frac{2}{3} \leq m < \frac{5}{6}$.

Lời giải.

Ta có $A = [1 - 2m; m + 3]$, $B = [8 - 5m; +\infty)$.

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} m + 3 < 8 - 5m \\ 1 - 2m \leq m + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6m < 5 \\ 3m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{5}{6} \\ m \geq -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq m < \frac{5}{6}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 109. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. $A \cup A = A$. B. $A \cup \emptyset = A$.
C. Nếu $A \subset B$ thì $A \cup B = B$. D. Nếu $A \subset B$ thì $A \cup B = A$.

Câu 110. Một lớp 10 có 35 học sinh giỏi môn Anh Văn hoặc Văn. Trong đó có 20 học sinh giỏi Anh Văn, 24 học sinh giỏi Văn. Số học sinh giỏi cả hai môn là

- A. 9. B. 8. C. 6. D. 7.

Lời giải.

Gọi A, B lần lượt là tập hợp học sinh giỏi Anh Văn, Văn.

Ta có $A \cup B$ là tập hợp học sinh giỏi Anh Văn hoặc Văn. Suy ra: $A \cup B = A + B - (A \cap B)$. Vậy $(A \cap B) = A + B - (A \cup B)$. Số học sinh giỏi cả hai môn là 9.

Chọn đáp án **A** □

Câu 111. Cho $(P) : y = 2x^2 + bx + c$. Xác định b, c biết (P) nhận đường thẳng $x = 1$ làm trục đối xứng và đi qua điểm $A(-2; 5)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có hệ: } \begin{cases} \frac{-b}{4} = 1 \\ 8 - 2b + c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4 \\ c = -11 \end{cases}$$

Vậy $(P) : y = 2x^2 - 4x - 11$. □

Câu 112. Cho $P \Leftrightarrow Q$ là mệnh đề đúng. Khẳng định nào sau đây là sai?

- A. $\overline{P} \Leftrightarrow \overline{Q}$ sai. B. $\overline{P} \Leftrightarrow \overline{Q}$ đúng. C. $\overline{P} \Leftrightarrow Q$ sai. D. $\overline{Q} \Leftrightarrow P$.

Lời giải.

Ta có: $P \Leftrightarrow Q$ là mệnh đề đúng thì $P \Rightarrow Q$ đúng và $Q \Rightarrow P$ đúng.

Khi đó: $\overline{P} \Rightarrow \overline{Q}$ đúng và $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ đúng. Suy ra $\overline{P} \Leftrightarrow \overline{Q}$ đúng.

Vậy đáp án A sai.

Chọn đáp án **A** □

Câu 113. Cho $A = \{1; 2; 3; 4; 6; 8\}$, B là tập các ước nguyên dương của 18. Số phần tử của $A \cup B$ là

- A. 6. B. 4. C. 8. D. 5.

Lời giải.

Ta có $B = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$. Vậy $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 18\}$.

Số phần tử của $A \cup B$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 114. Lớp 10A7 có 10 học sinh giỏi Toán, 15 học sinh giỏi Tiếng Anh, 5 học sinh giỏi cả hai môn và 17 học sinh không giỏi môn nào. Tính số học sinh lớp 10A7.

- A. 37. B. 42. C. 47. D. 32.

Câu 115. Kết quả nào sau đây là sai?

- A. $(-2; 5] \cup (1; 9) = (-2; 9)$. B. $\mathbb{R} \setminus (1; +\infty) = (-\infty; 1)$.
C. $(-2; 5] \cap (1; 9) = (1; 5]$. D. $(-2; 5] \cap (-9; -2) = \emptyset$.

Lời giải.

Ta có $\mathbb{R} \setminus (1; +\infty) = (-\infty; 1]$

Chọn đáp án **B** □

Câu 116. Tất cả các học sinh lớp 10A đều tham gia tập luyện bóng rổ hoặc cầu lông. Trong đó có 18 học sinh tập bóng rổ, 12 học sinh tập cầu lông và 3 học sinh tập cả hai môn. Lớp 10A có bao nhiêu học sinh?

- A. 27. B. 30. C. 33. D. 24.

Câu 117. Cho $A \setminus B = \{0; 2; 5; 9\}$, $B \setminus A = \{1; 3; 4; 7; 8\}$ và $A \cup B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$ thì

- A. $A = \{0; 2; 5; 6; 9\}$ và $B = \{1; 3; 4; 7; 8; 10\}$.
 B. $A = \{0; 2; 5; 6; 9; 10\}$ và $B = \{1; 3; 4; 6; 7; 8; 10\}$.
 C. $A = \{0; 2; 5; 6; 9; 10\}$ và $B = \{1; 3; 4; 7; 8\}$.
 D. $A = \{0; 2; 5; 9; 10\}$ và $B = \{1; 3; 4; 6; 7; 8\}$.

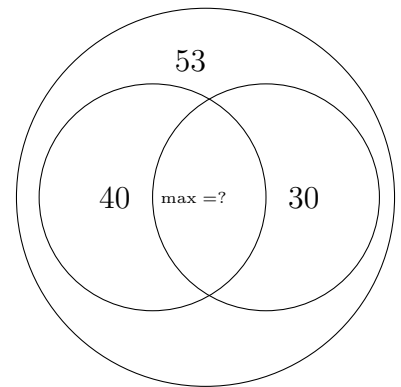
Câu 118. Gọi A là tập hợp các học sinh của một lớp học có 53 học sinh, B và C lần lượt là tập hợp các học sinh thích môn Toán, tập hợp các học sinh thích môn Văn của lớp này. Biết rằng có 40 học sinh thích môn Toán và 30 học sinh thích môn Văn. Tìm số phần tử lớn nhất có thể có của tập hợp $B \cap C$.

- A. 31. B. 29. C. 30. D. 32.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} n(B \cap C) \leq n(B) \\ n(B \cap C) \leq n(C). \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \max n(B \cap C) = \min\{n(B), n(C)\} = 30.$$



Chọn đáp án **C**

□

Câu 119. Lớp 10A có 10 học sinh giỏi Toán, 15 học sinh giỏi Văn, 5 học sinh giỏi cả hai môn và 17 học sinh không giỏi môn nào. Tính số học sinh lớp 10A.

- A. 37. B. 42. C. 47. D. 32.

Lời giải.

- Số học sinh giỏi môn Toán hoặc môn Văn là $10 + 15 - 5 = 20$.
- Học sinh lớp 10A gồm học sinh giỏi Toán hoặc giỏi Văn và học sinh không giỏi môn nào. Vậy số học sinh của lớp là $20 + 17 = 37$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 120. Trong số 42 học sinh của lớp 10A có 13 bạn được xếp loại học lực giỏi, 22 bạn được xếp loại hạnh kiểm tốt, trong đó 7 bạn vừa học lực giỏi, vừa có hạnh kiểm tốt. Hỏi lớp 10A có bao nhiêu bạn được khen thưởng? Biết rằng muốn được khen thưởng thì bạn đó phải có học lực giỏi hoặc có hạnh kiểm tốt.

- A. 35. B. 20. C. 28. D. 7.

Lời giải.

Gọi tập hợp các học sinh học lực giỏi là G , tập hợp các bạn học sinh hạnh kiểm tốt là T . Khi đó tập hợp các bạn học sinh vừa có học lực giỏi là, vừa có hạnh kiểm tốt là $G \cap T$, tập hợp các bạn học sinh đạt học lực giỏi hoặc hạnh kiểm tốt là $G \cup T$.

Ta có $|G| = 13$, $|T| = 22$, $|G \cap T| = 7$. Do đó

$$|G \cup T| = |G| + |T| - |G \cap T| = 13 + 22 - 7 = 28.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 121. Cho số thực $a < 0$. Điều kiện cần và đủ để $(-\infty; 9a) \cap \left(\frac{4}{a}; +\infty\right) \neq \emptyset$ là

- A. $-\frac{2}{3} < a < 0$. B. $-\frac{3}{4} < a < 0$. C. $-\frac{2}{3} \leq a < 0$. D. $-\frac{3}{4} \leq a < 0$.

Lời giải.

$$(-\infty; 9a) \cap \left(\frac{4}{a}; +\infty\right) \neq \emptyset \Leftrightarrow 9a > \frac{4}{a} \Leftrightarrow \begin{cases} a > \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} < a < 0. \end{cases}$$

Vì $a < 0$ nên giá trị của a cần tìm là $-\frac{2}{3} < a < 0$.

Chọn đáp án **A**

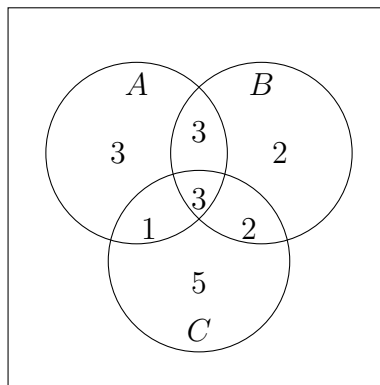
□

Câu 122. Lớp 10A có 10 học sinh giỏi Toán, 10 học sinh giỏi Lý, 11 học sinh giỏi Hóa, 6 học sinh giỏi cả Toán và Lý, 5 học sinh giỏi cả Hóa và Lý, 4 học sinh giỏi cả Toán và Hóa, 3 học sinh giỏi cả ba môn Toán, Lý, Hóa. Số học sinh giỏi ít nhất một trong ba môn (Toán, Lý, Hóa) của lớp 10A là

- A. 19. B. 18. C. 31. D. 49.

Lời giải.

Theo giả thiết đề bài cho, ta có biểu đồ Ven



Dựa vào biểu đồ Ven, ta có học sinh giỏi ít nhất một trong ba môn (Toán, Lý, Hóa) lớp 10A là

$$3 + 3 + 3 + 1 + 2 + 2 + 5 = 19.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 123. Cho tập hợp $A \neq \emptyset$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề **đúng**?

- A. $A \cup \emptyset = A$. B. $A \cup \emptyset = \emptyset$. C. $A \cup A = \emptyset$. D. $\emptyset \cup A = \emptyset$.

Lời giải.

- $A \cup \emptyset = A$ (đúng).
- $A \cup \emptyset = A$ nên $A \cup \emptyset = \emptyset$ (sai).
- $A \cup A = A$ nên $A \cup A = \emptyset$ (sai).
- $\emptyset \cup A = A$ nên $\emptyset \cup A = \emptyset$ (sai).

Chọn đáp án **A**

□

Câu 124. Cho hai tập hợp $X = \{7, 2, 8, 4, 9, 12\}$ và $Y = \{1, 3, 7, 4\}$. Tìm tập hợp $X \cap Y$.

- A. $\{1, 2, 3, 4, 8, 9, 7, 12\}$. B. $\{2, 8, 9, 12\}$.
C. $\{4, 7\}$. D. $\{1, 3\}$.

Lời giải.

Ta có $X \cap Y = \{4, 7\}$.

Chọn đáp án **C** ☐

Câu 125. Cho hai tập hợp $X = \{2, 4, 6, 9\}$ và $Y = \{1, 2, 3, 4\}$. Tìm tập hợp $X \cup Y$.

- A. $\{1, 3\}$. B. $\{6, 9\}$. C. $\{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$. D. $\{2, 4\}$.

Lời giải.

Ta có $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$.

Chọn đáp án **C** ☐

Câu 126. Cho hai tập hợp $A = \{-2, 0, 1, 4, 6, 8\}$ và $B = \{-2, 1, 4, 5, 6, 7\}$. Tìm tập hợp $A \cap B$.

- A. $\{-2, 1, 4, 6\}$. B. $\{-2, 0, 1, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
C. $\{0, 1, 8\}$. D. $\{1, 4, 7\}$.

Lời giải.

Ta có $A \cap B = \{-2, 1, 4, 6\}$.

Chọn đáp án **A** ☐

Câu 127. Cho hai tập hợp $M = \left\{\frac{1}{2}, 1, 5, 7, 9\right\}$ và $N = \{-2, 0, 5, 7, 8\}$. Tìm tập hợp $M \cup N$.

- A. $\{-2, 0, 5, 9\}$. B. $\left\{-2, 0, \frac{1}{2}, 9\right\}$.
C. $\left\{-2, 0, \frac{1}{2}, 1, 5, 7, 8, 9\right\}$. D. $\left\{\frac{1}{2}, 1, 9\right\}$.

Lời giải.

Ta có $M \cup N = \left\{-2, 0, \frac{1}{2}, 1, 5, 7, 8, 9\right\}$.

Chọn đáp án **C** ☐

Câu 128. Cho hai tập hợp $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ và $B = \{-2, 0, 3, 4, 6\}$. Tìm tập hợp $A \cap B$.

- A. $\{0, 3, 4\}$. B. $\{-2, 0, 3\}$. C. $\{0, 3, 6\}$. D. $\{0, 3, 4, 6\}$.

Lời giải.

Ta có $A \cap B = \{0, 3, 4\}$.

Chọn đáp án **A** ☐

Câu 129. Cho hai tập hợp $A = \{-1, 0, 5\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Tìm tập hợp $A \cup B$.

- A. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. B. $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. C. $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. D. $\{-1, 0, 5\}$.

Lời giải.

Ta có $A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Chọn đáp án **C** ☐

Câu 130. Cho các tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{2; 4; 5; 8\}$. Tìm tập hợp $A \cup B$.

- A. $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 8\}$. B. $A \cup B = \{1; 2; 3; 5; 8\}$.
C. $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8\}$. D. $A \cup B = \{1; 3; 4; 5; 8\}$.

Lời giải.

Theo định nghĩa của hợp hai tập hợp $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 8\}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 131. Chọn phát biểu đúng trong các phát biểu sau về tập hợp $A \cap B$.

- A. Tập hợp $A \cap B$ gồm các phần tử thuộc A mà không thuộc B .
- B. Tập hợp $A \cap B$ gồm các phần tử thuộc A hoặc thuộc B .
- C. Tập hợp $A \cap B$ gồm các phần tử vừa thuộc A vừa thuộc B .
- D. Tập hợp $A \cap B$ gồm các phần tử thuộc B mà không thuộc A .

Lời giải.

- Tập hợp $A \cap B$ gồm các phần tử thuộc A mà không thuộc B . Sai vì các phần tử thuộc A mà không thuộc B là tập hợp $A \setminus B$.
- Tập hợp $A \cap B$ gồm các phần tử thuộc A hoặc thuộc B . Sai vì các phần tử thuộc A hoặc thuộc B là tập hợp $A \cup B$.
- Tập hợp $A \cap B$ gồm các phần tử vừa thuộc A vừa thuộc B . Đúng
- Tập hợp $A \cap B$ gồm các phần tử thuộc B mà không thuộc A . Sai vì các phần tử thuộc B mà không thuộc A là tập hợp $B \setminus A$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 132. Cho hai tập hợp $A = \{5; 7; 9\}$ và $B = \{2; 3; 5; 8; 9\}$. Tìm tập hợp $A \cap B$.

- A. $A \cap B = \{5; 9\}$.
- B. $A \cap B = \{5; 7; 9\}$.
- C. $A \cap B = \{7\}$.
- D. $A \cap B = \{2; 3; 8\}$.

Lời giải.

Ta có $A \cap B = \{5; 9\}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 133. Cho tập hợp $A = (-10; 2)$, $B = [-5; 4)$. Tập $A \cap B$ là tập nào sau đây?

- A. $(2; 4)$.
- B. $(-10; 4)$.
- C. $[-5; 2)$.
- D. $(-5; 2)$.

Lời giải.

Ta có $A \cap B = [-5; 2)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 134. Cho hai tập hợp $X = \{1; 2; 4; 7; 9\}$ và $Y = \{-1; 0; 7; 10\}$. Tập hợp $X \cup Y$ có bao nhiêu phần tử?

- A. 9.
- B. 7.
- C. 8.
- D. 10.

Lời giải.

Ta có $X \cup Y = \{-1; 0; 1; 2; 4; 7; 9; 10\}$. Do đó $X \cup Y$ có 8 phần tử.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 135. Cho các tập hợp $A = \{-2; 0; 2; 3; 4\}$, $B = \{-1; 0; 1; 2\}$ và $C = \{n = 3^k / k \in \mathbb{N} \wedge n < 82\}$.

- a) Xác định các tập hợp $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ và $B \setminus A$.
- b) Liệt kê các phần tử của tập hợp C .

Lời giải.

- a) $A \cup B = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$, $A \cap B = \{0; 2\}$, $A \setminus B = \{-2; 3; 4\}$ và $B \setminus A = \{-1; 1\}$.
- b) $C = \{1; 3; 9; 27; 81\}$.

□

Câu 136. Số lượng tập con của tập $A = \{a; b; c; d\}$ có hai phần tử là

- A. 6. B. 8. C. 12. D. 4.

Câu 137. Cho $A = \{x \in \mathbb{Z} : |x| < 5\}$ và $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Tập hợp $A \cap B$ có số phần tử là

- A. 6. B. 4. C. 5. D. 9.

Lời giải.

Ta có $A = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$, suy ra $A \cap B = \{1; 2; 3; 4\}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 138. Cho các tập hợp: $A = \{1; 2; 5; 8\}$, $B = \{2; 4; 5; 6; 7; 9\}$. Hãy tìm $A \cup B$, $A \cap B$.

Lời giải.

+ $A \cup B = \{1; 2; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

+ $A \cap B = \{2; 5\}$.

□

Câu 139. Cho hai tập hợp $A = \{a; b; c\}$ và $B = \{a; d; e\}$. Tìm $A \cup B$.

- A. $A \cup B = \{a; b; e\}$. B. $A \cup B = \{a; b; d; e\}$.
C. $A \cup B = \{a; b; c; d; e\}$. D. $A \cup B = \{a; b; d\}$.

Lời giải.

Ta có $A \cup B = \{a; b; c; d; e\}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 140. Cho hai tập hợp $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ và $Y = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Tìm tập hợp $X \setminus Y$.

- A. $\{0\}$. B. $\{0, 1\}$. C. $\{1, 2\}$. D. $\{1, 5\}$.

Lời giải.

Ta có $X \setminus Y = \{0, 1\}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 141. Cho hai tập hợp $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ và $B = \{-2, 1, 4, 6\}$. Tìm tập hợp $A \setminus B$.

- A. $\{0, 2, 3, 5\}$. B. $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.
C. $\{1, 4\}$. D. $\{-2, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Lời giải.

Ta có $A \setminus B = \{0, 2, 3, 5\}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 142. Cho hai tập hợp $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ và $B = \{0, 2, 4\}$. Tìm tập hợp $C_A B$.

- A. $\{0, 2, 4, 6\}$. B. $\{0, 2, 4, 8\}$. C. $\{2, 4\}$. D. $\{6, 8\}$.

Lời giải.

Ta có $B \subset A$ và $A \setminus B = \{6, 8\} \Rightarrow C_A B = \{6, 8\}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 143. Cho hai tập hợp $X = \{1, 5\}$ và $Y = \{1, 3, 5\}$. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau?

- A. $C_Y X = \{3\}$. B. $C_Y X = \{1\}$. C. $C_Y X = \{1, 3, 5\}$. D. $C_Y X = \{1, 3, 5\}$.

Lời giải.

Ta có $X \subset Y$ và $Y \setminus X = \{3\} \Rightarrow C_Y X = \{3\}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 144. Cho hai tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4\}$ và $B = \{2, 4, 6, 8\}$. Tìm tập hợp $A \setminus B$.

- A. $\{1, 2, 3\}$. B. $\{1, 3\}$. C. $\{6, 8\}$. D. $\{2, 4, 6\}$.

Lời giải.

Ta có $A \setminus B = \{1, 3\}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 145. Cho hai tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ và $B = \{2, 4, 6\}$. Tìm tập hợp $C_A B$.

- A. $\{2, 4, 6\}$. B. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. C. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. D. $\{1, 3, 5, 7\}$.

Lời giải.

Ta có $C_A B = A \setminus B = \{1, 3, 5, 7\}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 146. Cho hai tập hợp $A = \{-3, 20, 2, 0, 5\}$, $B = \{-3, 2, 0\}$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A. $A \setminus B = \{20, 5\}$. B. $A \cap B = \{-3, 20\}$.
C. $A \cup B = \{-3, 20, 0, 5\}$. D. $A \cup B = \{-3, 2, 0\}$.

Lời giải.

Ta có $A \setminus B = \{x \mid x \in A, x \notin B\} = \{20, 5\}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 147. Kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân của $\sqrt[3]{7} = 1,912931183$ là

- A. 1,91. B. 1,92. C. 1,913. D. 1,912.

Lời giải.

Do làm tròn đến hai chữ số thập phân nên ta có $\sqrt[3]{7} \approx 1,91$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 148. Kết quả làm tròn đến chữ số hàng nghìn của $x = 268342534$ là

- A. 268340000. B. 2683432000. C. 268343000. D. 268342500.

Lời giải.

Làm tròn đến chữ số hàng nghìn ta được $x \approx 268343000$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 149. Kết quả làm tròn đến ba chữ số thập phân của $\sqrt[3]{100} \approx 4,641588834$ là

- A. 4,641. B. 4,642. C. 4,6416. D. 4,64.

Lời giải.

Làm tròn đến ba chữ số thập phân ta được $x \approx 4,642$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 150. Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của số 284,85472 là

- A. 284,86. B. 284,85. C. 284,855. D. 284,8547.

Lời giải.

Làm tròn đến hàng phần trăm của 284,85472 là 284,85.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 151. Theo thống kê dân số thế giới tính đến ngày 16/01/2017, dân số Việt Nam có 94970587 người. Kết quả làm tròn đến chữ số hàng nghìn của dân số nước ta là

A. 94970600.

B. 94971000.

C. 94970500.

D. 94970000.

Lời giải.

Làm tròn đến chữ số hàng nghìn của 94970587 là 94971000.

Chọn đáp án **(B)**☐**Câu 152.** Cho $\bar{a} = 1,7059 \pm 0,001$, kết quả làm tròn số $a = 1,7059$ là

A. 1,71.

B. 1,706.

C. 1,7.

D. 1,705.

Lời giải.Do $d = 0,001$ nên ta làm tròn đến hàng phần trăm, do đó $a \approx 1,71$.Chọn đáp án **(A)**☐**Câu 153.** Cho $\bar{a} = 123564 \pm 100$. Kết quả làm tròn số $x = 123564$ là

A. 12360.

B. 123000.

C. 123570.

D. 124000.

Lời giải.Do $d = 100$ nên ta làm tròn đến chữ số hàng nghìn.Chọn đáp án **(D)**☐**Câu 154.** Cho $\bar{a} = 472539 \pm 200$, kết quả quy tròn của số $a = 472539$ là

A. 472000.

B. 472500.

C. 472600.

D. 473000.

Lời giải.Do $d = 200$ nên ta làm tròn đến chữ số hàng nghìn.Chọn đáp án **(D)**☐**Câu 155.** Cho $\bar{a} = 4,72539 \pm 0,001$. Kết quả quy tròn của số 472539 là

A. 4,73.

B. 4,725.

C. 4,72.

D. 4,726.

Lời giải.Do $d = 0,001$ nên ta làm tròn đến chữ số hàng phần trăm.Chọn đáp án **(A)**☐**Câu 156.** Cho số gần đúng $x = 6341275$ với độ chính xác $d = 300$. Kết quả quy tròn của x là

A. 6341300.

B. 6341280.

C. 6341000.

D. 6342000.

Lời giải.Vì độ chính xác đến hàng trăm ($d = 300$) nên ta quy tròn a đến hàng nghìn theo quy tắc làm tròn.Chọn đáp án **(C)**☐

ĐÁP ÁN

1. D	2. B	3. B	4. D	5. B	6. B	7. B	8. B	9. A	10. D
11. D	12. A	13. B	14. C	15. C	16. C	17. A	18. D	19. B	20. B
21. A	22. C	23. B	24. B	25. D	26. A	27. A	28. B	29. C	30. D
31. A	32. A	33. A	34. A	35. C	36. C	37. C	38. D	39. A	40. A
41. A	42. B	43. A	44. C	45. A	46. A	47. B	48. A	49. D	50. D
51. C	52. A	53. D	54. D	55. D	56. B	57. B	58. A	59. A	60. A
61. C	62. C	63. B	64. D	65. A	66. C	67. C	68. B	69. B	70. D
71. A	72. A	73. C	74. A	75. D	76. A	77. B	78. B	79. D	80. B
81. C	82. D	83. D	84. A	85. D	86. B	87. C	88. B	89. B	90. C
91. D	92. B	93. D	94. C	95. C	96. A	97. A	98. A	99. C	100. D
101. B	102. C	103. D	104. D	105. A	106. B	107. D	108. D	109. D	110. A
112. A	113. C	114. A	115. B	116. A	117. B	118. C	119. A	120. C	121. A
122. A	123. A	124. C	125. C	126. A	127. C	128. A	129. C	130. A	131. C
132. A	133. C	134. C	136. A	137. B	139. C	140. B	141. A	142. D	143. A
144. B	145. D	146. A	147. A	148. C	149. B	150. B	151. B	152. A	153. D
154. D	155. A	156. C							

§4 CÁC TẬP HỢP SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 CÁC TẬP HỢP SỐ ĐÃ HỌC

Định nghĩa. Tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ và $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Định nghĩa. Tập hợp các số nguyên $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Định nghĩa. Tập hợp các số hữu tỉ kí hiệu $\mathbb{Q}$, là số viết được dưới dạng phân số $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$.

Định nghĩa. Tập hợp các số thực kí hiệu $\mathbb{R}$, gồm các số thập phân hữu hạn, vô hạn tuần hoàn và vô hạn không tuần hoàn. Các số thập phân vô hạn không tuần hoàn gọi là số vô tỉ.

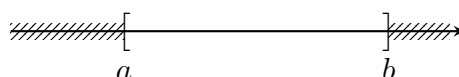
2 CÁC TẬP CON THƯỜNG DÙNG CỦA $\mathbb{R}$

Trong toán học ta thường gặp các tập hợp con sau đây của tập hợp các số thực $\mathbb{R}$

a. Khoảng

$(a; b) = \{x \in \mathbb{R} a < x < b\}$	
$(a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} a < x\}$	
$(-\infty; b) = \{x \in \mathbb{R} x < b\}$	

b. Đoạn $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$



c. Nửa khoảng

$[a; b) = \{x \in \mathbb{R} a \leq x < b\}$	
$(a; b] = \{x \in \mathbb{R} a < x \leq b\}$	
$[a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} a \leq x\}$	
$(-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} x \leq b\}$	

! Kí hiệu $+\infty$ đọc là *dương vô cực* (hoặc dương vô cùng), kí hiệu $-\infty$ đọc là *âm vô cực* (hoặc âm vô cùng).

B CÁC DẠNG TOÁN**Dạng 1. Xác định giao - hợp của hai tập hợp**

- a) Xác định giao của hai tập hợp ta làm như sau
- Biểu diễn các tập hợp lên trục số.
 - Dùng định nghĩa giao để xác định các phần tử của tập hợp.
- b) Cho hai tập con của tập số thực A và B . Tìm $A \cup B$ ta làm như sau
- Biểu diễn tập A trên trục số, gạch chéo phần không thuộc A .
 - Làm tương tự đối với tập B .
 - Phần không gạch chéo trên hình là $A \cup B$.

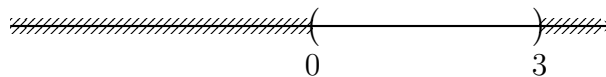
- c) Đối với hai tập A và B khác để tìm $A \cup B$ ta nhớ rằng $x \in A \cup B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}$

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 1 ❖❖❖

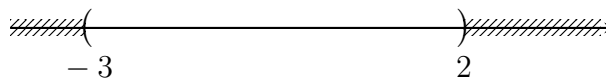
Ví dụ 1. Xác định tập hợp $(0; 3) \cup (-3; 2)$ và biểu diễn trên trục số

Lời giải.

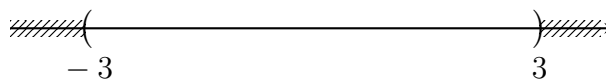
- Biểu diễn tập hợp A trên trục số



- Biểu diễn tập B trên trục số



- Kết hợp hai trục số trên ta được tập $A \cup B = (-3; 3)$.



□

Ví dụ 2. Cho $m > 5$. Xác định tập hợp $[-2; m) \cup [0; 4)$.

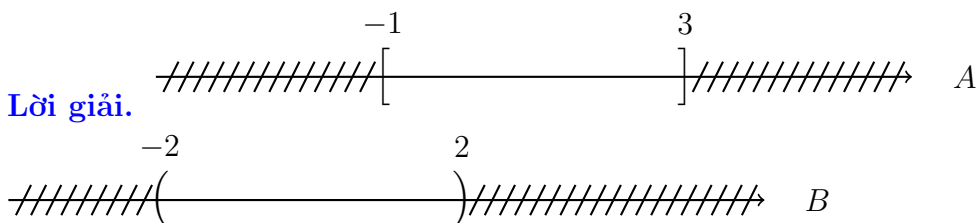
Lời giải.

Vì $m > 5$ nên $m > 4 \Rightarrow [0; 4) \subset [-2; m) \Rightarrow [-2; m) \cup [0; 4) = [-2; m)$.

□

Ví dụ 3. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$. Tìm $A \cap B$.

Lời giải.



$\Rightarrow A \cap B = [-1; 2)$.

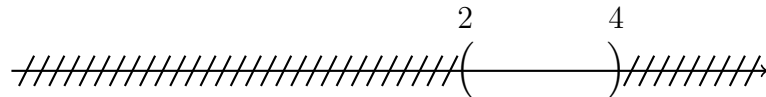
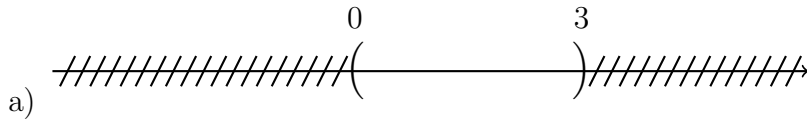
□

Ví dụ 4. Xác định các tập hợp sau đây và biểu diễn chúng trên trục số.

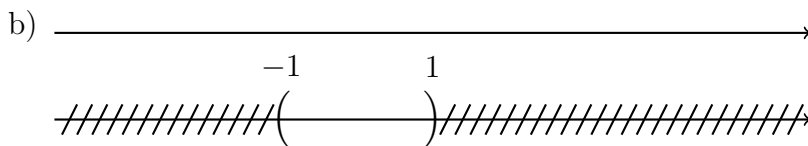
a) $(0; 3) \cap (2; 4)$.

b) $\mathbb{R} \cap (-1; 1)$.

Lời giải.



$\Rightarrow (0; 3) \cap (2; 4) = (2; 3)$.



$\Rightarrow \mathbb{R} \cap (-1; 1) = (-1; 1)$.

□

Ví dụ 5. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | |x + 2| < 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | |x + 4| \geq 3\}$, $C = [-5; 3)$. Tìm các tập hợp

a) $A \cap B$.

b) $B \cap C$.

c) $A \cap B \cap C$.

d) $A \cup B$.

e) $A \cap B \cup C$.

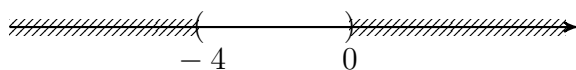
f) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$.

Lời giải.

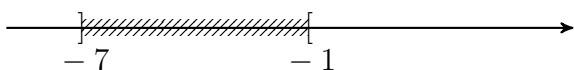
$|x + 2| < 2 \Leftrightarrow -2 < x + 2 < 2 \Leftrightarrow -4 < x < 0$. Do đó $A = (-4; 0)$.

$|x + 4| \geq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 \leq -3 \\ x + 4 \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -7 \\ x \geq -1 \end{cases}$. Do đó $B = (-\infty; -7] \cup [-1; +\infty)$.

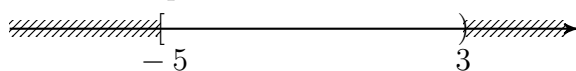
Biểu diễn tập A trên trục số:



Biểu diễn tập B trên trục số:



Biểu diễn tập C trên trục số:



a) $A \cap B = [-1; 0)$.

b) $B \cap C = (-\infty; -7] \cup [-5; +\infty)$.

- c) $A \cap B \cap C = [-1; 0)$.
 d) $A \cup B = (-\infty; -7] \cup (-4; +\infty)$.
 e) $A \cap B \cup C = [-5; 3)$.
 f) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$.
 $(A \cup B) = (-\infty; -7] \cup (-4; +\infty)$.
 $(B \cup C) = (-\infty; -7] \cup [-5; +\infty)$.
 Do đó $(A \cup B) \cap (B \cup C) = (-\infty; -7] \cup (-4; +\infty)$.

□

Ví dụ 6. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x+1}{x-1} \geq 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 9 - x^2 \leq 0\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} \mid \left| \frac{x+1}{x+3} \right| \leq 1\}$. Tìm các tập hợp

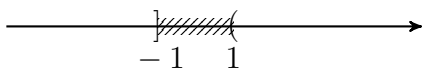
a) $A \cap B \cap C$.
 b) $(A \cup B) \cap C$.
 c) $(A \cup C) \cap B$.
 d) $A \cap (B \cup C)$.

Lời giải.

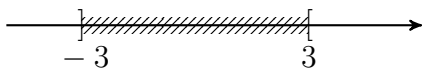
- $\frac{x+1}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x > 1 \end{cases}$. Do đó $A = (-\infty; -1] \cup (1; +\infty)$.
- $9 - x^2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ x \geq 3 \end{cases}$. Do đó $B = (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.
- $\left| \frac{x+1}{x+3} \right| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{x+1}{x+3} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{x+3} \geq -1 \\ \frac{x+1}{x+3} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x+4}{x+3} \geq 0 \\ \frac{-2}{x+3} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -3] \cup [-2; +\infty) \\ x \in (-3; -\infty) \end{cases}$.

Do đó $C = [-2; +\infty)$.

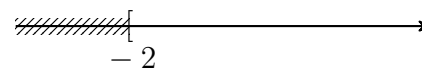
Biểu diễn tập A trên trục số:



Biểu diễn tập B trên trục số:



Biểu diễn tập C trên trục số:



- a) $A \cap B \cap C = [3; +\infty)$.
 b) $(A \cup B) = (-\infty; -1] \cup (1; +\infty)$.
 $(A \cup B) \cap C = [-2; -1] \cup (1; +\infty)$.
 c) $(A \cup C) = \mathbb{R}$.
 $(A \cup C) \cap B = B = (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.
 d) $(B \cup C) = (-\infty; -3] \cup [-2; +\infty)$.
 $A \cap (B \cup C) = (-\infty; -3] \cup (1; +\infty)$.

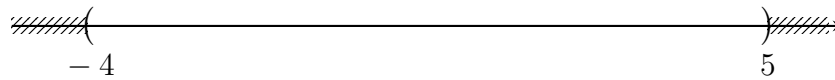
□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Xác định tập hợp $[0; 5) \cup (-4; 2)$ và biểu diễn trên trục số.

Lời giải.

Lần lượt biểu diễn hai tập hợp $[0; 5)$ và $(-4; 2)$ từ đó thu được tập hợp $[0; 5) \cup (-4; 2) = (-4; 5)$. được biểu diễn trên trục số sau



□

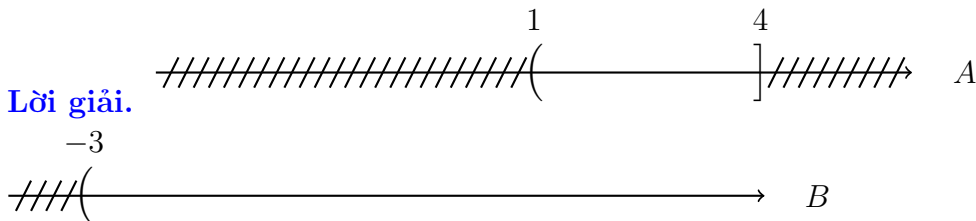
Bài 2. Cho hai tập hợp $A = [m + 1; 10)$ với $m < 0$ và tập hợp $B = (5; 8)$. Hãy xác định tập hợp $A \cup B$.

Lời giải.

Vì $m < 0 \Rightarrow m + 1 < 1 < 5 \Rightarrow A \cup B = [m + 1; 10) \cup (5; 8) = [m + 1; 10)$.

□

Bài 3. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | 1 < x \leq 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | -3 < x\}$. Tìm $A \cap B$.



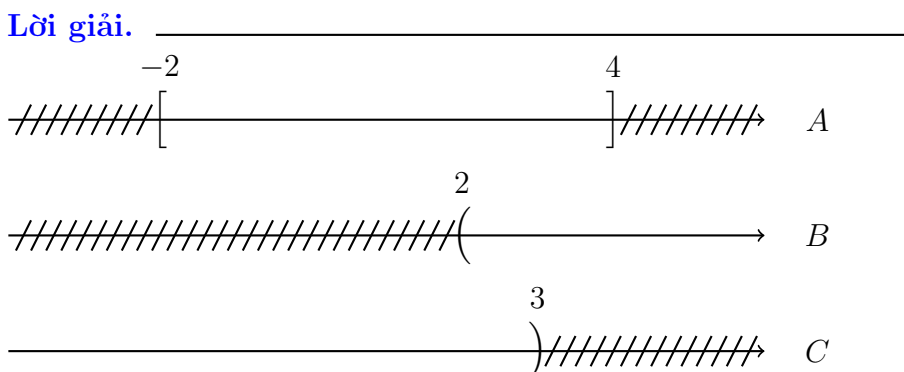
$\Rightarrow A \cap B = (1; 4]$.

□

Bài 4. Cho $A = [-2; 4]$, $B = (2; +\infty)$, $C = (-\infty; 3)$. Xác định các tập hợp sau đây và biểu diễn chúng trên trục số.

a) $A \cap B$, $B \cap C$.

b) $\mathbb{R} \cap A$, $\mathbb{R} \cap B$.



a) $A \cap B = (2; 4]$, $B \cap C = (2; 3)$.

b) $\mathbb{R} \cap A = [-2; 4]$, $\mathbb{R} \cap B = (2; +\infty)$.

□

Bài 5. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 1| \leq 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |3x - 6| > 3\}$, $C = [1; 2]$. Tìm các tập hợp

- $A \cap B \cap C$.
- $A \cup B \cup C$.
- $(A \cap B) \cup C$.
- $A \cup (B \cap C)$.

Lời giải.

- $A \cap B \cap C = \emptyset$.
- $A \cup B \cup C = (-\infty; 2] \cup (3; +\infty)$.
- $(A \cap B) \cup C = [0; 2]$.
- $A \cup (B \cap C) = [0; 1]$.

□

Bài 6. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x^2 - 4}{1 + x^2} > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \left| \frac{1 - 3x}{x + 2} \right| \geq 2\}$, $C = [0; 3]$. Tìm các tập hợp

- $A \cap B \cap C$.
- $A \cup B \cup C$.
- $(A \cap B) \cup C$.
- $A \cup (B \cap C)$.
- $B \cap (A \cup C)$.
- $(A \cup B) \cap C$.

Lời giải.

- $A \cap B \cap C = \emptyset$.
- $A \cup B \cup C = (-\infty; -2) \cup (-2; -\frac{3}{5}) \cup [0; +\infty)$.
- $(A \cap B) \cup C = (-\infty; -2) \cup [5; +\infty) \cup [0; 3]$.
- $A \cup (B \cap C) = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.
- $B \cap (A \cup C) = (-\infty; -2) \cup [5; +\infty)$.
- $(A \cup B) \cap C = (2; 3]$.

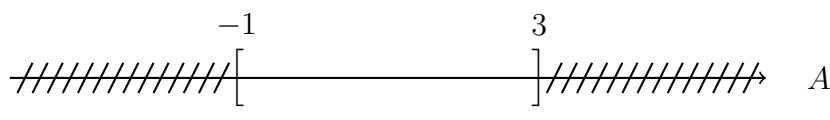
□

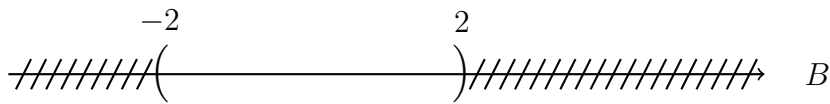
Dạng 2. Xác định hiệu và phần bù của hai tập hợp

- Biểu diễn các tập hợp lên trục số.
- Dùng định nghĩa các phép toán hiệu, phần bù để xác định các phần tử của tập hợp.

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 2 ❖❖❖

Ví dụ 1. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$. Tìm $A \setminus B, B \setminus A$.

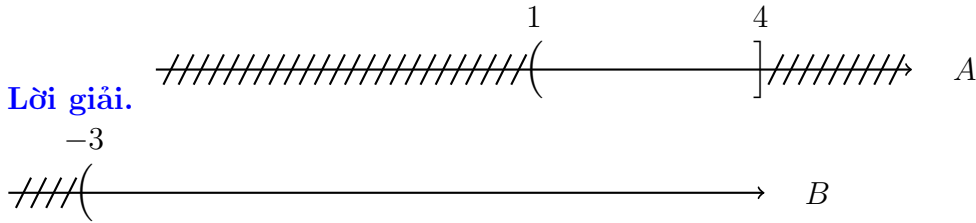
Lời giải. 



$$\Rightarrow A \setminus B = [2; 3], B \setminus A = (-2; -1).$$

□

Ví dụ 2. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | 1 < x \leq 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | -3 < x\}$. Tìm $C_B A$.



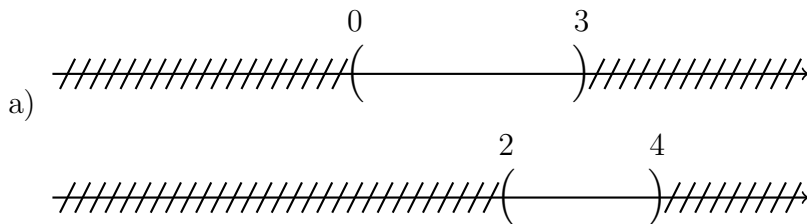
$$\Rightarrow C_B A = (-3; 1] \cup (4; +\infty).$$

□

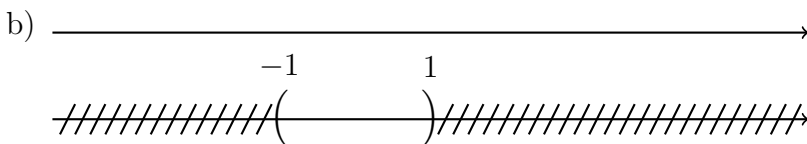
Ví dụ 3. Xác định các tập hợp sau đây và biểu diễn chúng trên trục số.

- a) $(0; 3) \setminus (2; 4)$.
b) $\mathbb{R} \setminus (-1; 1)$.

Lời giải.



$$\Rightarrow (0; 3) \setminus (2; 4) = (0; 2] \cup (3; 4).$$



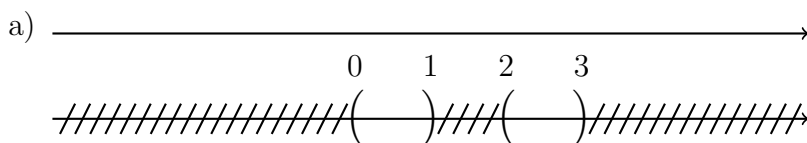
$$\Rightarrow \mathbb{R} \setminus (-1; 1) = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty).$$

□

Ví dụ 4. Xác định các tập hợp sau đây và biểu diễn chúng trên trục số.

- a) $\mathbb{R} \setminus ((0; 1) \cup (2; 3))$.
b) $\mathbb{R} \setminus ((3; 5) \cap (4; 6))$.

Lời giải.



$$\Rightarrow \mathbb{R} \setminus ((0; 1) \cup (2; 3)) = (-\infty; 0] \cup [1; 2] \cup [3; +\infty).$$

- b) Ta có $((3; 5) \cap (4; 6)) = (4; 5)$.



$$\begin{array}{c} 4 \quad 5 \\ \text{////////////////////(-----)\\\\} \end{array}$$

$$\Rightarrow \mathbb{R} \setminus ((3; 5) \cap (4; 6)) = (-\infty; 4] \cup [5; +\infty).$$

□

Ví dụ 5. Cho hai nửa khoảng $A = (-1; 0]$, $B = [0; 1)$. Tìm $A \setminus B$ và $C_{\mathbb{R}}A$.

Lời giải. $\xrightarrow{\hspace{10cm}}$

$$\begin{array}{c} -1 \quad 0 \\ \text{////////////////(-----]\\\\} \quad A \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 0 \quad 1 \\ \text{////////////////[-----)\\\\} \quad B \end{array}$$

$$\Rightarrow A \setminus B = (-1; 0) \text{ và } C_{\mathbb{R}}A = (-\infty; -1] \cup (0; +\infty).$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | -2 < x\}$. Tìm $A \setminus B$, $B \setminus A$.

$$\begin{array}{c} 2 \\ \text{-----]\\\\} \quad A \end{array}$$

Lời giải.

$$\begin{array}{c} -2 \\ \text{\\\\(-----} \rightarrow \quad B \end{array}$$

$$\Rightarrow A \setminus B = (-\infty; -2], B \setminus A = (2; +\infty).$$

□

Bài 2. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | -2 < x < 0 \text{ và } 2 < x \leq 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | -3 < x\}$. Tìm $C_B A$.

$$\begin{array}{c} -2 \quad 0 \quad 2 \quad 4 \\ \text{\\\\\\\\(-----)\\\\\\\\(-----]\\\\\\\\} \quad A \end{array}$$

Lời giải.

$$\begin{array}{c} -3 \\ \text{\\\\(-----} \rightarrow \quad B \end{array}$$

$$\Rightarrow C_B A = (-3; -2] \cup [0; 2] \cup (4; +\infty).$$

□

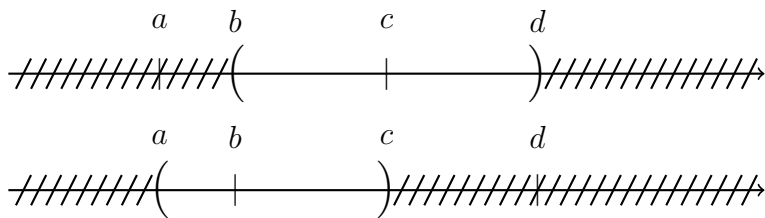
Bài 3. Cho a, b, c, d là những số thực và $a < b < c < d$. Tìm $(a; d) \setminus (b; c)$ và $(b; d) \setminus (a; c)$.

$$\begin{array}{c} a \quad b \quad c \quad d \\ \text{\\\\\\\\(-----|-----|-----)\\\\\\\\} \end{array}$$

Lời giải.

$$\begin{array}{c} a \quad b \quad c \quad d \\ \text{\\\\\\\\(-----)\\\\\\\\} \end{array}$$

$$\Rightarrow (a; d) \setminus (b; c) = (a; b] \cup [c; d).$$



$$\Rightarrow (b; d) \setminus (a; c) = [c; d).$$

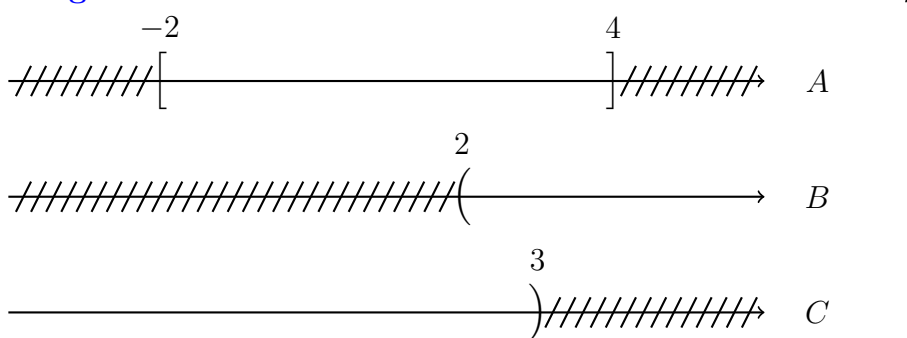
□

Bài 4. Cho $A = [-2; 4]$, $B = (2; +\infty)$, $C = (-\infty; 3)$. Xác định các tập hợp sau đây và biểu diễn chúng trên trục số.

a) $A \setminus B, B \setminus A$.

b) $\mathbb{R} \setminus A, \mathbb{R} \setminus B, \mathbb{R} \setminus C$.

Lời giải.



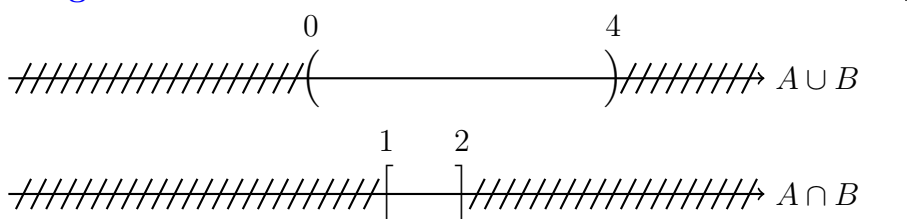
a) $A \setminus B = [-2; 2], B \setminus A = (4; +\infty)$.

b) $\mathbb{R} \setminus A = (\infty; -2) \cup (4; +\infty), \mathbb{R} \setminus B = (-\infty; 2], \mathbb{R} \setminus C = [3; +\infty)$.

□

Bài 5. Cho hai nửa khoảng $A = (0; 2], B = [1; 4)$. Tìm $C_{\mathbb{R}}(A \cup B)$ và $C_{\mathbb{R}}(A \cap B)$.

Lời giải.



$$\Rightarrow C_{\mathbb{R}}(A \cup B) = (-\infty; 0] \cup [4; +\infty) \text{ và } C_{\mathbb{R}}(A \cap B) = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty).$$

□

Dạng 3. Tìm m thỏa điều kiện cho trước

BÀI TẬP DẠNG 3

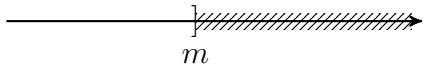
Ví dụ 1. Cho $A = (-\infty; m], B = [6; +\infty)$. Tìm m để

a) $A \cap B \neq \emptyset$.

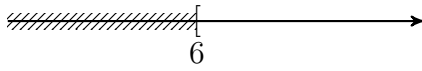
b) $(A \cap B) \subset [1; 8]$.

Lời giải.

a) Biểu diễn tập hợp $A = (-\infty; m]$ trên trục số:



Biểu diễn tập hợp $B = [6; +\infty)$ trên trục số:



$$A \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow m \geq 6.$$

b) Với $m \geq 6$: $A \cap B = [6; m]$.

$$(A \cap B) \subset [1; 8] \Leftrightarrow m \leq 8.$$

Vậy $6 \leq m \leq 8$ thỏa yêu cầu bài toán.

□

Ví dụ 2. Tìm m biết

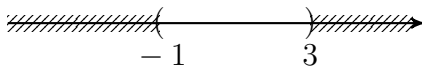
a) $(-1; 3) \cap (m; +\infty) = \emptyset$.

b) $(5; m) \cup (3; 9) = (3; 9)$.

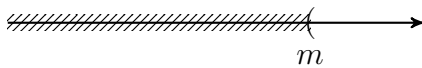
c) $(4; 12) \setminus (-\infty; m) = \emptyset$.

Lời giải.

a) Biểu diễn tập hợp $(-1; 3)$ trên trục số:

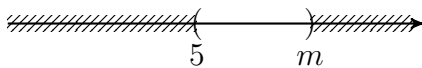


Biểu diễn tập hợp $(m; +\infty)$ trên trục số:

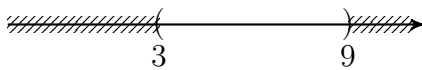


$$(-1; 3) \cap (m; +\infty) = \emptyset \Leftrightarrow m \geq 3.$$

b) Biểu diễn tập hợp $(5; m)$ trên trục số:

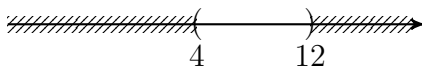


Biểu diễn tập hợp $(3; 9)$ trên trục số:

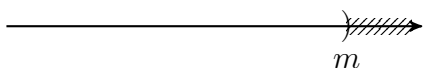


$$(5; m) \cup (3; 9) = (3; 9) \Leftrightarrow 5 \leq m \leq 9.$$

c) Biểu diễn tập hợp $(4; 12)$ trên trục số:



Biểu diễn tập hợp $(-\infty; m)$ trên trục số:



$$(4; 12) \setminus (-\infty; m) = \emptyset \Leftrightarrow m \geq 12.$$

□

Ví dụ 3. Cho 2 tập khác rỗng: $A = (m - 1; 5]$ và $B = (-3; 2m + 3)$; $m \in \mathbb{R}$. Tìm m để

- $A \cap B \neq \emptyset$.
- $A \subset B$.
- $B \subset A$.
- $(A \cap B) \subset (-2; 4)$.

Lời giải.

Đầu tiên ta cần xét điều kiện để 2 tập A, B khác $\emptyset$ là:

$$\begin{cases} m - 1 < 5 \\ 2m + 3 > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 6 \\ m > -3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < 6 (*).$$

Với điều kiện (*) ta có:

$$a) A \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow 2m + 3 > m - 1 \Leftrightarrow m > -4.$$

Đối chiếu với điều kiện (*), các giá trị m thỏa yêu cầu bài toán là $-3 < m < 6$.

$$b) A \subset B \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \geq -3 \\ 2m + 3 > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -2 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1.$$

Đối chiếu với điều kiện (*), các giá trị m thỏa yêu cầu bài toán là $1 < m < 6$.

$$c) B \subset A \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \leq -3 \\ 2m + 3 \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -2 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -2.$$

Đối chiếu với điều kiện (*), các giá trị m thỏa yêu cầu bài toán là $-3 < m \leq -2$.

$$d) (A \cap B) \subset (-2; 4) \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \geq -2 \\ 2m + 3 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq \frac{1}{2} \text{ (thỏa yêu cầu điều kiện (*))}.$$

□

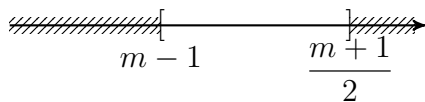
Ví dụ 4. Cho tập $A = \left[m - 1; \frac{m + 1}{2} \right]$, $B = (-\infty; -3) \cup [3; +\infty)$. Tìm m để

- $A \subset B$.
- $(A \cap B) = \emptyset$.

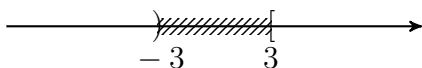
Lời giải.

Trước tiên ta cần tìm điều kiện để tồn tại tập A là: $m - 1 \leq \frac{m + 1}{2} \Leftrightarrow m \leq 3 (*)$

Biểu diễn tập hợp A trên trục số:



Biểu diễn tập hợp B trên trục số:



$$a) A \subset B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset (-\infty; -3) \\ A \subset [3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m + 1}{2} < -3 \\ m - 1 \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -7 \\ m \geq 4 \end{cases}.$$

Đối chiếu điều kiện (*), ta có $m < -7$ thỏa yêu cầu bài toán.

$$b) A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \geq -3 \\ \frac{m+1}{2} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -2 \\ m < 5 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m < 5.$$

Đổi chiều điều kiện (*), ta có $-2 \leq m \leq 3$ thỏa yêu cầu bài toán.

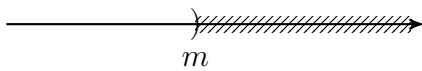
□

Ví dụ 5. Cho $A = (-\infty; m)$, $B = [2m-1; 2m+2)$. Tìm m để

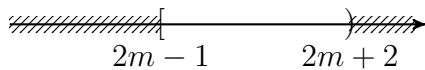
- a) $A \cap B = \emptyset$.
- b) $B \subset A$.
- c) $A \subset C_{\mathbb{R}}B$.
- d) $C_{\mathbb{R}}A \cap B \neq \emptyset$.

Lời giải.

Biểu diễn tập hợp A trên trục số:



Biểu diễn tập hợp B trên trục số:



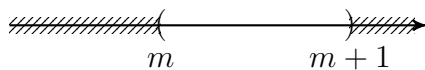
- a) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow m \leq 2m-1 \Leftrightarrow m \geq 1$.
- b) $B \subset A \Leftrightarrow 2m+2 < m \Leftrightarrow m < -2$.
- c) $C_{\mathbb{R}}B = (-\infty; 2m-1) \cup (2m+2; +\infty)$.
 $A \subset C_{\mathbb{R}}B \Leftrightarrow m \leq 2m-1 \Leftrightarrow m \geq 1$.
- d) $C_{\mathbb{R}}A = [m; +\infty)$.
 $C_{\mathbb{R}}A \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow m \leq 2m+2 \Leftrightarrow m \geq -2$.

□

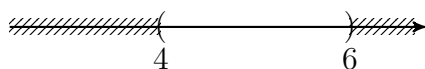
Ví dụ 6. Cho $A = (m; m+1)$, $B = (4; 6)$. Tìm m để $A \cup B$ là 1 khoảng. Hãy xác định khoảng đó.

Lời giải.

Biểu diễn tập hợp A trên trục số:



Biểu diễn tập hợp B trên trục số:



$$A \cup B \text{ là 1 khoảng} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 < m+1 \\ m < 6 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m < 6.$$

TH1: Nếu $3 < m \leq 4$ thì $A \cup B = (m; m+1) \cup (4; 6) = (m; 6)$.

TH2: Nếu $4 < m \leq 5$ thì $A \cup B = (4; 6)$.

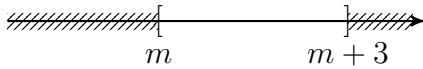
TH3: Nếu $5 < m < 6$ thì $A \cup B = (4; m+1)$.

□

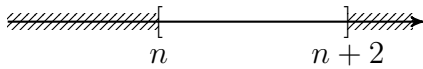
Ví dụ 7. Cho $A = [m; m + 3]$, $B = [n; n + 2]$. Tìm điều kiện m, n để $A \cap B = \emptyset$.

Lời giải.

Biểu diễn tập hợp A trên trục số:



Biểu diễn tập hợp B trên trục số:



Đầu tiên ta tìm điều kiện của m và n để $A \cap B = \emptyset$.

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} m + 3 < n \\ n + 2 < m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < n - 3 \\ m > 2 + n \end{cases}.$$

Từ trên ta suy ra: $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow n - 3 \leq m \leq 2 + n$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm m để

- $(1; m] \cap (3; +\infty) \neq \emptyset$.
- $(-\infty; -2) \cup [2m + 1; +\infty) = \mathbb{R}$.
- $(m - 2; 3) \subset [-1; 5]$.

Lời giải.

- $1 < m < 2$.
 - $m < -\frac{3}{2}$.
 - $1 \leq m < 5$.
-

Bài 2. Cho $A = (-\infty; m)$, $B = [5m - 2; 5m + 5]$. Tìm m để

- $A \cap B = \emptyset$.
- $B \subset A$.
- $A \subset (\mathbb{R} \setminus B)$.
- $(\mathbb{R} \setminus A) \cap B \neq \emptyset$.

Lời giải.

- $m \geq \frac{1}{2}$.
 - $m < -\frac{5}{4}$.
 - $m \geq \frac{1}{2}$.
 - $m \geq -\frac{5}{4}$.
-

Bài 3. Cho $A = \left[m - 3; \frac{m + 3}{2} \right]$, $B = (-\infty; -4) \cup [4; +\infty)$. Tìm m để

- $A \subset B$.
- $A \cap B = \emptyset$.

Lời giải.

- a) $\begin{cases} m < -11 \\ 7 \leq m < 9 \end{cases}$.
 b) $-1 \leq m < 5$.

□

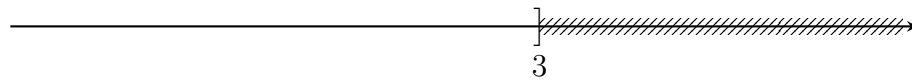
BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 4. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 3\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} | -3 \leq x \leq 7\}$; $C = \{x \in \mathbb{N}^* | x \leq 3\}$ và $D = \{x \in \mathbb{Z} | -4 \leq x \leq 4\}$. Biểu diễn các tập A, B, C, D trên trục số và xác định tập hợp $(A \cap B) \setminus (C \cap D)$.

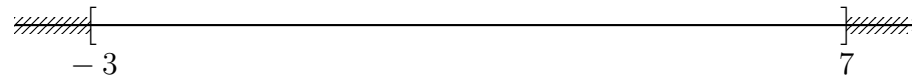
Lời giải.

Biểu diễn các tập trên trục số như sau

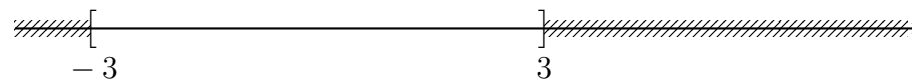
- Tập $A = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 3\} = (-\infty; 3]$



- Tập $B = \{x \in \mathbb{R} | -3 \leq x \leq 7\} = [-3; 7]$



- Tập $A \cap B = [-3; 3]$



- Tập $C = \{x \in \mathbb{N}^* | x \leq 3\} = \{1, 2, 3\}$
- Tập $D = \{x \in \mathbb{Z} | -4 \leq x \leq 4\} = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.
 $\Rightarrow C \cap D = \{1, 2, 3\}$

Từ đó ta có tập $(A \cap B) \setminus (C \cap D) = [-3; 3] \setminus \{1, 2, 3\} = \{x \in \mathbb{R} | -3 \leq x \leq 3, x \neq 1, 2, 3\}$.

□

Bài 5. Cho $a > 0$. Hãy xác định tập hợp $\left((0; a] \cap \left(\frac{a}{2}; 2a\right)\right) \setminus \{a\}$.

Lời giải.

Ta lần lượt biểu diễn từng tập $(0; a]$, $\left(\frac{a}{2}; 2a\right)$ trên trục số và nhớ rằng $a > 0$ thu được

$$(0; a] \cap \left(\frac{a}{2}; 2a\right) \setminus \{a\} = \left(\frac{a}{2}; a\right] \setminus \{a\} = \left(\frac{a}{2}; a\right).$$

□

Bài 6. Cho $a > 0$. Hãy xác định tập hợp $\left(\left[\frac{a}{3}; 5a\right]\right) \cup (0; a) \cap (3a; 6a)$.

Lời giải.

Lần lượt biểu diễn các tập hợp $\left[\frac{a}{3}; 5a\right]$, $(0; a)$, $(3a; 6a)$ trên trục số và nhớ rằng $a > 0$ thu được

$$\left(\left[\frac{a}{3}; 5a\right] \cup (0; a)\right) \cap (3a; 6a) = (0; 5a] \cap (3a; 6a) = (3a; 5a].$$

□

C CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho tập hợp $X = (-\infty; 2] \cap (-6; +\infty)$ Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. $X = (-\infty; 2]$. B. $X = (-6; +\infty)$. C. $X = (-\infty; +\infty)$. D. $X = (-6; 2]$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 2. Cho tập hợp $X = \{2011\} \cap [2011; +\infty)$ Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. $X = \{2011\}$. B. $X = [2011; +\infty)$. C. $X = \emptyset$. D. $X = (-\infty; 2011]$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 3. Cho tập hợp $A = \{-1; 0; 1; 2\}$ Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. $A = [-1; 3) \cap \mathbb{N}$. B. $A = [-1; 3) \cap \mathbb{Z}$. C. $A = [-1; 3) \cap \mathbb{N}^*$. D. $A = [-1; 3) \cap \mathbb{Q}$.

Lời giải.

Ta có

- $[-1; 3) \cap \mathbb{N} = \{0; 1; 2\}$.
- $[-1; 3) \cap \mathbb{Z} = \{-1; 0; 1; 2\}$.
- $[-1; 3) \cap \mathbb{N}^* = \{1; 2\}$.
- $[-1; 3) \cap \mathbb{Q}$ là tập hợp các số hữu tỉ trong nửa khoảng $[-1; 3)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 4. Cho $A = [1; 4]$, $B = (2; 6)$ và $C = (1; 2)$. Xác định $X = A \cap B \cap C$.

- A. $X = [1; 6)$. B. $X = (2; 4]$. C. $X = (1; 2]$. D. $X = \emptyset$.

Lời giải.

Ta có $A \cap B = (2; 4] \Rightarrow A \cap B \cap C = \emptyset$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 5. Cho $A = (-2; 2)$, $B = (-1; -\infty)$ và $C = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$. Gọi $X = A \cap B \cap C$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. $X = \left\{x \in \mathbb{R} \left| -1 \leq x \leq \frac{1}{2} \right.\right\}$. B. $X = \left\{x \in \mathbb{R} \left| -2 < x < \frac{1}{2} \right.\right\}$.
- C. $X = \left\{x \in \mathbb{R} \left| -1 < x \leq \frac{1}{2} \right.\right\}$. D. $X = \left\{x \in \mathbb{R} \left| -1 < x < \frac{1}{2} \right.\right\}$.

Lời giải.

Ta có $A \cap B = (-1; 2) \Rightarrow A \cap B \cap C = \left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 6. Cho các số thực a, b, c, d thỏa $a < b < c < d$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. $(a; c) \cap (b; d) = (b; c)$. B. $(a; c) \cap (b; d) = [b; c]$.
- C. $(a; c) \cap (b; d] = [b; c]$. D. $(a; c) \cup (b; d) = (b; d)$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 7. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R}, x + 3 < 4 + 2x\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R}, 5x - 3 < 4x - 1\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên thuộc tập $A \cap B$?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải.

Ta có: $x + 3 < 4 + 2x \Leftrightarrow x > -1 \Rightarrow A = (-1; +\infty)$. $5x - 3 < 4x - 1 \Leftrightarrow x < 2 \Rightarrow B = (-\infty; 2)$. Suy ra $A \cap B = (-1; 2) \Rightarrow$ có hai số tự nhiên là 0 và 1.

Chọn đáp án **C** □

Câu 8. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $\mathbb{Q} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}$. B. $\mathbb{N}^* \cap \mathbb{R} = \mathbb{N}^*$. C. $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$. D. $\mathbb{N} \cup \mathbb{N}^* = \mathbb{N}^*$.

Lời giải.

Chọn đáp án **D** □

Câu 9. Cho tập hợp $A = [-4; 4] \cup [7; 9] \cup [1; 7)$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. $A = [-4; 7)$. B. $A = [-4; 9]$. C. $A = (1; 8)$. D. $A = (-6; 2]$.

Lời giải.

Chọn đáp án **B** □

Câu 10. Cho $A = [1; 5)$, $B = (2; 7)$ và $C = (7; 10)$. Xác định $X = A \cup B \cup C$.

- A. $X = [1; 10)$. B. $X = \{7\}$.
C. $X = [1; 7) \cup (7; 10)$. D. $X = [1; 10]$.

Lời giải.

Chọn đáp án **C** □

Câu 11. Cho $A = (-\infty; -2]$, $B = [3; +\infty)$ và $C = (0; 4)$. Xác định $X = (A \cup B) \cap C$.

- A. $X = [3; 4]$. B. $X = [3; 4)$. C. $X = (-\infty; 4)$. D. $X = [-2; 4)$.

Lời giải.

Ta có $A \cup B = (-\infty; -2] \cup [3; +\infty) \Rightarrow (A \cup B) \cap C = [3; 4)$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 12. Cho hai tập hợp $A = [-4; 7]$ và $B = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$. Xác định $X = A \cap B$.

- A. $X = [-4; +\infty)$. B. $X = [-4; -2) \cup (3; 7]$.
C. $X = (-\infty; +\infty)$. D. $X = [-4; 7]$.

Lời giải.

Ta có $A \cap B = [-4; 7] \cap (-\infty; -2) \cup (3; +\infty) = [-4; -2) \cup (3; 7]$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 13. Cho $A = (-5; 1]$, $B = [3; +\infty)$ và $C = (-\infty; -2)$ Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. $A \cup B = (-5; +\infty)$. B. $B \cup C = (-\infty; +\infty)$.
C. $B \cap C = \emptyset$. D. $A \cap C = [-5; -2]$.

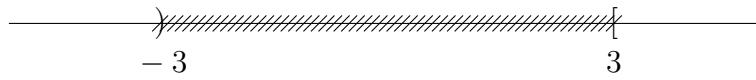
Lời giải.

- $A \cup B = (-5; 1] \cup [3; +\infty) = (-5; +\infty) \setminus (1; 3)$.
- $B \cup C = [3; +\infty) \cup (-\infty; -2) = (-\infty; +\infty) \setminus [-2; 3)$.
- $B \cap C = [3; +\infty) \cap (-\infty; -2) = \emptyset$.
- $A \cap C = (-5; 1] \cap (-\infty; -2) = (-5; -2)$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 14. Hình vẽ nào sau đây (phần không bị gạch) minh họa cho một tập con của tập số thực. Hỏi tập đó là tập nào?



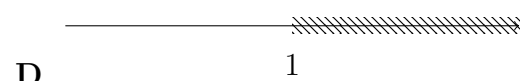
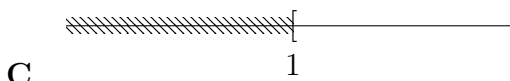
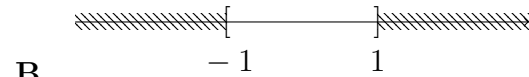
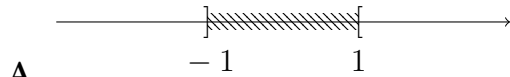
- A. $\mathbb{R} \setminus [-3; +\infty)$. B. $\mathbb{R} \setminus [-3; 3)$. C. $\mathbb{R} \setminus (-\infty; 3)$. D. $\mathbb{R} \setminus (-3; 3)$.

Lời giải.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 15. Hình vẽ nào sau đây (phần không bị gạch) minh họa cho tập $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1\}$?



Lời giải.

Ta có $|x| \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \end{cases}$ nên hình minh họa cho tập A đáp án A.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 16. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 7x + 6 = 0\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 4\}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. $A \cup B = A$. B. $A \cap B = A \cup B$. C. $(A \setminus B) \subset A$. D. $B \setminus A = \emptyset$.

Lời giải.

$$\bullet x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases} \Rightarrow A = \{1; 6\}$$

$$\bullet |x| < 4 \Rightarrow -4 < x < 4 \Rightarrow B = (-4; 4).$$

Do đó, $A \setminus B = \{6\} \subset A$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 17. Cho $A = [0; 3]$, $B = (1; 5)$ và $C = (0; 1)$ Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $A \cap B \cap C = \emptyset$. B. $A \cup B \cup C = [0; 5]$.
C. $(A \cup C) \setminus C = (1; 5)$. D. $(A \cap B) \setminus C = (1; 3]$.

Lời giải.

- $A \cap B = [0; 3] \cap (1; 5) = (1; 3] \rightarrow A \cap B \cap C = (1; 3] \cap (0; 1) = \emptyset$.
- $A \cup B = [0; 3] \cup (1; 5) = [0; 5] \rightarrow A \cup B \cup C = [0; 5] \cup (0; 1) = [0; 5]$.
- $A \cup C = [0; 3] \cup (0; 1) = [0; 3] \rightarrow (A \cup C) \setminus C = [0; 3] \setminus (0; 1) = \{0\} \cup [1; 3]$.
- $A \cap B = (1; 3] \Rightarrow (A \cap B) \setminus C = (1; 3] \setminus (0; 1) = (1; 3]$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 18. Cho tập $X = [-3; 2)$. Phần bù của X trong $\mathbb{R}$ là tập nào trong các tập sau?

- A. $A = (-3; 2]$. B. $B = (2; +\infty)$.
C. $C = (-\infty; -3] \cup (2; +\infty)$. D. $D = (-\infty; -3) \cup [2; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $C_{\mathbb{R}}A = \mathbb{R} \setminus A = (-\infty; -3) \cup [2; +\infty)$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 19. Cho tập $A = \{\forall x \in \mathbb{R} | |x| \geq 5\}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. $C_{\mathbb{R}}A = (-\infty; 5)$. B. $C_{\mathbb{R}}A = (-\infty; 5]$. C. $C_{\mathbb{R}}A = (-5; 5)$. D. $C_{\mathbb{R}}A = [-5; 5]$.

Lời giải.

Ta có $A = \{\forall x \in \mathbb{R} | |x| \geq 5\} = (-\infty; -5] \cup [5; +\infty) \Rightarrow A = (-5; 5)$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 20. Cho $C_{\mathbb{R}}A = (-\infty; 3) \cup [5; +\infty)$ và $C_{\mathbb{R}}B = [4; 7)$. Xác định tập $X = A \cap B$.

- A. $X = [5; 7)$. B. $X = (5; 7)$. C. $X = (3; 4)$. D. $X = [3; 4)$.

Lời giải.

- $C_{\mathbb{R}}A = (-\infty; 3) \cup [5; +\infty) \Rightarrow A = [3; 5)$.
- $C_{\mathbb{R}}B = [4; 7) \Rightarrow B = (-\infty; 4) \cup [7; +\infty)$.

Suy ra $X = A \cap B = [3; 4)$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 21. Cho hai tập hợp $A = [-2; 3]$ và $B = (1; +\infty)$. Xác định $C_{\mathbb{R}}(A \cup B)$

- A. $C_{\mathbb{R}}(A \cup B) = (-\infty; -2]$. B. $C_{\mathbb{R}}(A \cup B) = (-\infty; -2)$.
C. $C_{\mathbb{R}}(A \cup B) = (-\infty; -2] \cup (1; 3]$. D. $C_{\mathbb{R}}(A \cup B) = (-\infty; -2) \cup [1; 3)$.

Lời giải.

Ta có $A \cup B = [-2; +\infty) \Rightarrow C_{\mathbb{R}}(A \cup B) = (-\infty; -2)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 22. Cho hai tập hợp $A = [-3; 7)$ và $B = (-2; 4]$. Xác định phần bù của B trong A

- A. $C_A B = [-3; 2) \cup [4; 7)$. B. $C_A B = (-3; 2) \cup [4; 7]$.
C. $C_A B = (-3; 2] \cup (4; 7]$. D. $C_A B = [-3; 2] \cup (4; 7)$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 23. Cho hai tập hợp $A = (-4; 3)$ và $B = (m - 7; m)$. Tìm giá trị thực của tham số m để $B \subset A$.

- A. $m \leq 3$. B. $m \geq 3$. C. $m = 3$. D. $m > 3$.

Lời giải.

Điều kiện: $m \in \mathbb{R}$. Để $B \subset A$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m - 7 \geq -4 \\ m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 24. Cho số thực $a < 0$ và hai tập hợp $A = (-\infty; 9a)$, $B = (\frac{4}{a}; +\infty)$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a để $A \cap B \neq \emptyset$.

- A. $a = -\frac{2}{3}$. B. $-\frac{2}{3} \leq a < 0$. C. $-\frac{2}{3} < a < 0$. D. $a < -\frac{2}{3}$.

Lời giải.

Để hai tập hợp A và B giao nhau khác rỗng khi và chỉ khi $9a > \frac{4}{a} \Leftrightarrow 9a^2 < 4$ (do $a < 0$) $\Leftrightarrow a^2 < \frac{4}{9} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < a < 0$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 25. Cho hai tập hợp $A = [-2; 3)$ và $B = [m; m + 5)$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $A \cap B \neq \emptyset$

- A. $-7 < m \leq -2$. B. $-2 < m \leq 3$. C. $-2 \leq m < 3$. D. $-7 < m < 3$.

Lời giải.

Nếu giải trực tiếp thì hơi khó một chút. Nhưng ta đi giải mệnh đề phủ định thì đơn giản hơn, tức là đi tìm m để $A \cap B = \emptyset$.

Ta có $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m + 5 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m \leq -7 \end{cases}$ thì $A \cap B = \emptyset$.

Suy ra để $A \cap B \neq \emptyset$ thì $-7 < m < 3$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 26. Cho hai tập hợp $A = [-4; 1]$ và $B = [-3; m]$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $A \cup B = A$.

- A. $m \leq 1$. B. $m = 1$. C. $-3 \leq m \leq 1$. D. $-3 < m \leq 1$.

Lời giải.

Điều kiện: $m > -3$.

Để $A \cup B = A$ khi và chỉ khi $B \subset A$, tức là $m \leq 1$. Đối chiếu điều kiện, ta được $-3 < m \leq 1$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 27. Cho hai tập hợp $A = (-\infty; m]$ và $B = (2; +\infty)$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $A \cup B = \mathbb{R}$.

- A. $m > 0$. B. $m \geq 2$. C. $m \geq 0$. D. $m > 2$.

Lời giải.

Chọn đáp án **B** □

Câu 28. Cho hai tập hợp $A = (m - 1; 5)$ và $B = (3; +\infty)$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $A \setminus B = \emptyset$.

- A. $m \geq 4$. B. $m = 4$. C. $4 \leq m < 6$. D. $4 \leq m \leq 6$.

Lời giải.

Điều kiện: $m - 1 < 5 \Leftrightarrow m < 6$.

Để $A \setminus B = \emptyset$ khi và chỉ khi $A \subset B$, tức là $3 \leq m - 1 \Leftrightarrow m \geq 4$.

Đối chiếu điều kiện, ta được $4 \leq m < 6$

Chọn đáp án **C** □

Câu 29. Cho hai tập hợp $A = (-\infty; m)$ và $B = [3m - 1; 3m + 3]$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $A \subset C_{\mathbb{R}}B$.

- A. $m = -\frac{1}{2}$. B. $m \geq \frac{1}{2}$. C. $m = \frac{1}{2}$. D. $m \geq -\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $C_{\mathbb{R}}B = (-\infty; 3m - 1) \cup (3m + 3; +\infty)$.

Do đó, để $A \subset C_{\mathbb{R}}B \Leftrightarrow m \leq 3m - 1 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 30. Cho hai tập hợp $A = [-1; 5)$ và $B = [2; 10]$. Khi đó tập hợp $A \cap B$ bằng

- A. $[2; 5)$. B. $[-1; 10]$. C. $(2; 5)$. D. $[-1; 10)$.

Lời giải.

Ta có $A \cap B = [2; 5)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 31. Cho hai tập hợp $A = [-1; 5)$ và $B = [2; 10]$. Khi đó tập hợp $A \cap B$ bằng

- A. $[2; 5)$. B. $[-1; 10]$. C. $(2; 5)$. D. $[-1; 10)$.

Lời giải.

Biểu diễn hai tập A và B trên trục số ta được $A \cap B = [2; 5)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 32. Cho hai tập hợp $C_{\mathbb{R}}A = (0; +\infty)$ và $C_{\mathbb{R}}B = (-\infty; -5) \cup (-2; +\infty)$. Xác định tập $A \cup B$.

- A. $A \cap B = (-2; 0)$. B. $A \cap B = (-5; -2)$. C. $A \cap B = (-5; 0]$. D. $A \cap B = [-5; -2]$.

Lời giải.

Ta có $C_{\mathbb{R}}A \cup C_{\mathbb{R}}B = C_{\mathbb{R}}(A \cap B) = (-\infty; -5) \cup (-2; +\infty)$, suy ra $A \cap B = [-5; -2]$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 33. Cho $A = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 5\}$. Tập A là tập nào trong các tập hợp sau

- A. $(-\infty; 5)$. B. $(5; +\infty)$. C. $(-\infty; 5]$. D. $[-\infty; 5)$.

Lời giải.

Theo định nghĩa về nửa khoảng ta có $A = (-\infty; 5]$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 34. Cho hai tập hợp $A = (-\infty; 2m - 7)$ và $B = (13m + 1; +\infty)$. Số nguyên m nhỏ nhất thỏa mãn $A \cap B = \emptyset$ là

- A. 2. B. -1. C. 0. D. 1.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} A \cap B = \emptyset &\Leftrightarrow 2m - 7 \leq 13m + 1 \\ &\Leftrightarrow 11m \geq -8 \\ &\Leftrightarrow m \geq -\frac{8}{11}. \end{aligned}$$

Do đó số nguyên nhỏ nhất thỏa mãn $A \cap B = \emptyset$ là $m = 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 35. Cho hai tập hợp khác rỗng $A = (m - 1; 4]$ và $B = (-2; 2m + 2)$, với $m \in \mathbb{R}$. Tìm m để $A \cap B \neq \emptyset$.

- A. $m < 5$. B. $-3 < m < 5$. C. $-3 < m$. D. $-2 < m < 5$.

Lời giải.

$$\text{Hai tập } A, B \text{ khác rỗng} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 < 4 \\ 2m+2 > -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 5. \quad (1)$$

$$\text{Ta có } A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow 2m+2 \leq m-1 \Leftrightarrow m \leq -3. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $A \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow -2 < m < 5$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 36. Cho tập hợp $M = [-3; 6]$ và $N = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$. Khi đó $M \cap N$ là

- A. $(-\infty; -2) \cup [3; 6]$. B. $[-3; -2) \cup (3; 6]$.
C. $(-\infty; -2) \cup [3; +\infty)$. D. $(-3; -2) \cup (3; 6)$.

Lời giải.

$$M \cap N = [-3; -2) \cup (3; 6].$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 37. Cho tập $A = \left[-\sqrt{3}; \frac{3}{2}\right)$ và $B = \left[-\frac{3}{2}; \sqrt{5}\right)$. Tập $A \cup B$ là

- A. $\left[\frac{3}{2}; \sqrt{5}\right)$. B. $\left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$. C. $[-\sqrt{3}; \sqrt{5})$. D. $[-\sqrt{3}; -\frac{3}{2}]$.

Lời giải.

$$A \cup B = \left[-\sqrt{3}; \sqrt{5}\right).$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 38. Cho hai tập hợp $I = (-10; 1)$ và $J = (-1; 10]$. Hãy xác định $I \cup J$.

- A. $I \cup J = (-10; -1]$. B. $I \cup J = [1; 10]$. C. $I \cup J = (-1; 1)$. D. $I \cup J = (-10; 10]$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } I \cup J = (-10; 10].$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 39. Xác định kết quả của $(-\infty; 1] \cap [-2; 3]$.

- A. $(-\infty; 3]$. B. $(1; 3]$. C. $(-\infty; -2)$. D. $[-2; 1]$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } (-\infty; 1] \cap [-2; 3] = [-2; 1].$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 40. Cho hai tập hợp $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\}$ và $N = [m+1; 10)$, với m là tham số. Tìm giá trị của m để $M \cap N$ là một đoạn có độ dài bằng 10.

- A. $m = 5$. B. $m > 3$. C. $m = -7$. D. $m \leq 3$.

Lời giải.

+ Nếu $m+1 > 4 \Leftrightarrow m > 3$ thì $M \cap N = \emptyset$, suy ra loại.

+ Nếu $m+1 \leq 4 \Leftrightarrow m \leq 3$ thì $M \cap N = [m+1; 4]$.

Để $M \cap N$ là một đoạn có độ dài bằng 10 khi và chỉ khi $4 - (m+1) = 10 \Leftrightarrow m = -7$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 41. Cho $A = (-1; 3)$, $B = [0; +\infty)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $A \cap B = [0; 3]$. B. $A \cup B = (3; +\infty)$. C. $A \setminus B = (-1; 0)$. D. $B \setminus A = [3; +\infty)$.

Lời giải.

Khẳng định đúng là $B \setminus A = [3; +\infty)$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 42. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} | 1 < x \leq 2\}$, cách viết nào sau đây đúng?

- A. $A = [1; 2]$. B. $A = (1; 2]$. C. $A = \{1; 2\}$. D. $A = \{2\}$.

Lời giải.

Ta có tập $A = \{2\}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 43. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} | -3 < x < 2\}$. Tập hợp A là

- A. $A = [-3; 2]$. B. $A = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2\}$.
C. $A = \{-2; -1; 0; 1\}$. D. $A = (-3; 2)$.

Lời giải.

Tập $A = \{-2; -1; 0; 1\}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 44. Cho hai tập hợp $A = (-3; 2]$ và $B = (-1; +\infty)$. Các tập hợp $A \cap B$, $A \setminus B$ lần lượt là

- A. $(-1; 2]$ và $(-3; -1)$. B. $(-1; 2)$ và $(-3; -1)$.
C. $(-1; 2]$ và $(-3; -1]$. D. $(-1; 2)$ và $(-3; -1]$.

Lời giải.

Ta có

- $A \cap B = (-1; 2]$.
- $A \setminus B = (-3; -1]$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 45. Cho hai tập hợp $A = (-3; 2]$ và $B = [m; m+1]$. Tìm tất cả các giá trị của m để $A \cap B = \emptyset$

- A. $m \in (-\infty; -4] \cup (2; +\infty)$. B. $m \in [-4; 2]$.
C. $m \in (-4; 2)$. D. $m \in (-4; 2]$.

Lời giải.

Ta có

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m+1 \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m \leq -4 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; -4] \cup (2; +\infty).$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 46. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | -3 < x \leq 2\}$, $B = (-1; 3)$. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau.

- A. $A \cap B = (-1; 2]$. B. $A \setminus B = (-3; -1)$.
C. $C_{\mathbb{R}}B = (-\infty; -1) \cup [3; +\infty)$. D. $A \cup B = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Lời giải.

$A = \{x \in \mathbb{R} | -3 < x \leq 2\} = (-3; 2]$. Do đó $A \cap B = (-1; 2]$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 47. Cho hai tập hợp $A = [1; 3]$ và $B = [m; m+1]$. Tìm tất cả giá trị của tham số m để $B \subset A$.

- A. $m = 1$. B. $1 < m < 2$. C. $1 \leq m \leq 2$. D. $m = 2$.

Lời giải.

Để $B \subset A$ thì $1 \leq m < m+1 \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 2$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 48. Kết quả của phép toán $(-\infty; 1) \cap [-1; 2)$ là

- A. $(1; 2)$. B. $(-\infty; 2)$. C. $[-1; 1)$. D. $(-1; 1)$.

Lời giải.

Ta có $(-\infty; 1) \cap [-1; 2) = [-1; 1)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 49. Cho m là tham số thực và hai tập hợp $A = [m - 1; m + 3]$, $B = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 8 - 5m\}$. Tìm tất cả các giá trị m để $A \cap B = \emptyset$.

- A. $m < \frac{5}{6}$. B. $m \leq \frac{5}{6}$. C. $m \leq \frac{3}{2}$. D. $m < \frac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $B = [8 - 5m; +\infty)$. Khi đó

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow m + 3 < 8 - 5m \Leftrightarrow m < \frac{5}{6}.$$

Vậy $m < \frac{5}{6}$ thỏa mãn.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 50. Cho hai tập $A = \{x \in \mathbb{R} | x + 3 < 4 + 2x\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} | 5x - 3 < 4x - 1\}$. Tất cả các số tự nhiên thuộc cả hai tập A và B là

- A. không có số nào. B. 0. C. 0 và 1. D. 1.

Lời giải.

Ta có

- $A = \{x \in \mathbb{R} | x + 3 < 4 + 2x\} = \{x \in \mathbb{R} | x > -1\}$.
- $B = \{x \in \mathbb{R} | 5x - 3 < 4x - 1\} = \{x \in \mathbb{R} | x < 2\}$.

Do đó $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 2\}$. Bởi vậy, có hai số tự nhiên thuộc cả hai tập A và B là 0 và 1.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 51. Cho tập hợp $X = \{-1; 0; 1; 2\}$. Hãy chọn khẳng định **đúng**.

- A. $X = \mathbb{N}^* \cap [-1; 3)$. B. $X = \mathbb{Z} \cap [-1; 3)$. C. $X = \mathbb{Q} \cap [-1; 3)$. D. $X = \mathbb{N} \cap [-1; 3)$.

Lời giải.

$$\forall x \in X \text{ ta có } \begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ x \in [-1; 3). \end{cases}$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 52. Cho tập hợp $M = [-4; 7]$ và $N = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$. Tìm $M \cap N$.

- A. $[-4; +\infty)$. B. $(-\infty; +\infty)$. C. $[-4; 2) \cup (3; 7)$. D. $[-4; -2) \cup (3; 7]$.

Lời giải.

Có $[-4; 7] \cap [(-\infty; -2) \cup (3; +\infty)] = [-4; -2) \cup (3; 7]$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 53. Với a là số thực âm, cho tập hợp $A = (-\infty; 9a)$ và $B = \left(\frac{4}{a}; +\infty\right)$. Tìm điều kiện cần và đủ để $A \cap B \neq \emptyset$.

A. $-\frac{2}{3} \leq a < 0$.

B. $-\frac{2}{3} < a < 0$.

C. $-\frac{3}{4} \leq a < 0$.

D. $-\frac{3}{4} < a < 0$.

Lời giải.

$$A \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ 9a > \frac{4}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ 9a^2 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ -\frac{2}{3} < a < \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < a < 0.$$

Chọn đáp án **(B)** □**Câu 54.** Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2\}$, cách viết nào sau đây là đúng?

A. $A = [1; 2)$.

B. $A = [1; 2]$.

C. $A = (1; 2]$.

D. $A = (1; 2)$.

Lời giải.

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2\} = (1; 2].$$

Chọn đáp án **(C)** □**Câu 55.** Cho hai tập hợp $A = (-1; 3)$ và $B = (1; 4]$. Khi đó $A \cup B$ là

A. $(-1; 4)$.

B. $(-1; 4]$.

C. $[-1; 4)$.

D. $[-1; 4]$.

Lời giải.

Ta có: $A \cup B = (-1; 4]$.

Chọn đáp án **(B)** □**Câu 56.** Cho tập hợp $A = [-2; 5)$; $B = (2; 10)$. Xác định tập hợp $A \cap B$.

A. $[-2; 2)$.

B. $(2; 5)$.

C. $(5; 10)$.

D. $[-2; 10)$.

Lời giải.

Ta có

Chọn đáp án **(B)** □**Câu 57.** Cho hai tập hợp $A = (2; +\infty)$ và $B = [-7; 4]$. Kết quả $A \cap B$ là

A. $(2; 4]$.

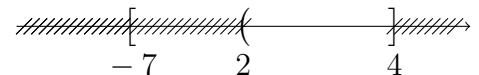
B. $(-7; +\infty)$.

C. $\mathbb{R}$.

D. $(4; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $A \cap B = (2; 4]$.

Chọn đáp án **(A)** □**Câu 58.** Cho hai tập hợp $A = (2; +\infty)$ và $B = [-7; 4]$. Kết quả $A \cup B$ là

A. $(2; 4]$.

B. $[-7; +\infty)$.

C. $(2; 4)$.

D. $(-\infty; 2)$.

Lời giải.

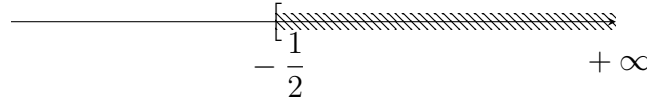
Ta có $A \cup B = [-7; +\infty)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 59. Cho tập hợp $A = \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Khi đó tập hợp $C_{\mathbb{R}}A$ là

- A. $\mathbb{R}$. B. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$. C. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$. D. $\emptyset$.

Lời giải.



Ta có $C_{\mathbb{R}}A = \mathbb{R} \setminus \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right) = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$.

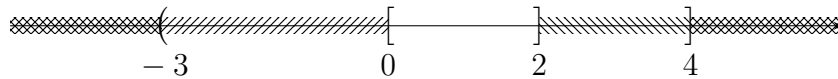
Chọn đáp án **C**

□

Câu 60. Cho hai tập hợp $A = (-3; 2]$ và $B = [0; 4)$. Khi đó tập hợp $A \cap B$ là

- A. $[0; 2]$. B. $(-3; 4)$. C. $[2; 0]$. D. $(0; 2]$.

Lời giải.



Với $A = (-3; 2]$ và $B = [0; 4)$ ta có $A \cap B = [0; 2]$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 61. Cho 2 tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | (2x - x^2)(2x^2 - 3x - 2) = 0\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} | 3 < n^2 < 30\}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $A \cap B = \{2; 4\}$. B. $A \cap B = \{2\}$. C. $A \cap B = \{5; 4\}$. D. $A \cap B = \{3\}$.

Lời giải.

Ta có $(2x - x^2)(2x^2 - 3x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$ nên $A = \left\{-\frac{1}{2}; 0; 2\right\}$.

Lại có $3 < n^2 < 30 \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{30} < n < -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} < n < \sqrt{30} \end{cases}$ nên $B = \{2; 3; 4; 5\}$.

Suy ra $A \cap B = \{2\}$.

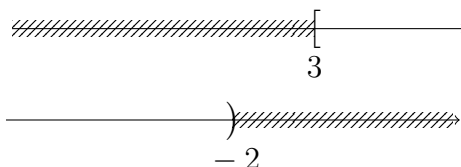
Chọn đáp án **B**

□

Câu 62. Cho $A = (-5; 1]$, $B = [3; +\infty)$, $C = (-\infty; -2)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $A \cap C = [-5; -2]$. B. $A \cup B = (-5; +\infty)$.
C. $B \cup C = (-\infty; +\infty)$. D. $B \cap C = \emptyset$.

Lời giải.



Từ biểu diễn tập nghiệm của B và C ta thấy $B \cap C = \emptyset$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 63. Cho $A = (-\infty; 2]$, $B = [2; +\infty)$, $C = (0; 3)$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. $B \cap C = [2; 3)$. B. $A \cap C = (0; 2]$. C. $A \cup B = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. D. $B \cup C = (0; +\infty)$.

Lời giải.

Khẳng định “ $A \cup B = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ ” là sai vì phần tử 2 thuộc cả A và B tức là $A \cup B = +\infty$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 64. Tập hợp $D = (-\infty; 2] \cap (-6; -\infty)$ là tập nào sau đây?

- A. $(-6; 2]$. B. $(4; 9]$. C. $(-\infty; +\infty)$. D. $[-6; 2]$.

Lời giải.

Ta có $D = (-6; 2]$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 65. Cho $A = (-\infty; -3]$, $B = (2; +\infty)$, $C = (0; 4)$. Khi đó $(A \cup B) \cap C$ là

- A. $\{x \in \mathbb{R} | 2 < x < 4\}$. B. $\{x \in \mathbb{R} | 2 \leq x < 4\}$. C. $\{x \in \mathbb{R} | 2 < x \leq 4\}$. D. $\{x \in \mathbb{R} | 2 \leq x \leq 4\}$.

Lời giải.

Ta có $(A \cup B) \cap C = (2; 4)$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 66. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | 1 < x \leq 2\}$. Cách viết nào sau đây đúng?

- A. $A = [1; 2)$. B. $A = [1; 2]$. C. $A = (1; 2)$. D. $A = (1; 2]$.

Lời giải.

Ta có $A = \{x \in \mathbb{R} | 1 < x \leq 2\} = (1; 2]$.

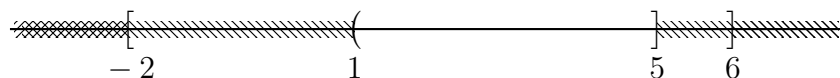
Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 67. Cho hai tập hợp $A = [-2; 5]$, $B = (1; 6]$. Tìm tập hợp $A \cap B$.

- A. $(1; 5]$. B. $(-\infty; 6]$. C. $[-2; 6]$. D. $[-2; +\infty)$.

Lời giải.



Ta có $A \cap B = (1; 5]$.

Chọn đáp án **(A)**

□

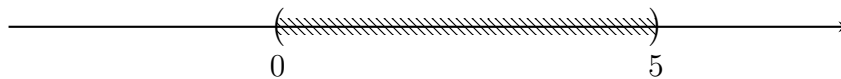
Câu 68. Cho $A = (0; 3]$, $B = [2; 5)$. Khi đó $C_{\mathbb{R}}(A \cup B)$ là

- A. $(-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$. B. $(\infty; 0] \cup [5; +\infty)$.
C. $(\infty; 0) \cup (5; +\infty)$. D. $(2; 3)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} C_{\mathbb{R}}(A \cup B) &= \mathbb{R} \setminus (A \cup B) = \mathbb{R} \setminus (0; 5) \\ &= (-\infty; 0] \cup [5; +\infty). \end{aligned}$$



Chọn đáp án **(B)** □

Câu 69. Cho hai số thực a, b với $a < b$. Điều kiện của a, b để $(a; b) \cap (-2; 5) = \emptyset$ là

- A. $a < -2 < 5 < b$. B. $\begin{cases} a < 5 \\ b > -2 \end{cases}$. C. $\begin{cases} a \geq 5 \\ b \leq -2 \end{cases}$. D. $a < b \leq -2$.

Lời giải.

Ta có

$$(a; b) \cap (-2; 5) = \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 5 \\ b \leq -2 \end{cases}$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 70. Cho hai tập hợp $A = (-3; 2]$, $B = [0; 5]$. Tìm $A \cup B$.

- A. $A \cup B = [-3; 5)$. B. $A \cup B = [-3; 5]$. C. $A \cup B = (-3; 5)$. D. $A \cup B = (-3; 5]$.

Lời giải.

$$A \cup B = (-3; 5].$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 71. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề dưới đây.

- A. $x \in [-4; 1) \Leftrightarrow -4 < x < 1$. B. $x \in [-4; 1) \Leftrightarrow -4 \leq x < 1$.
C. $x \in [-4; 1) \Leftrightarrow -4 < x \leq 1$. D. $x \in [-4; 1) \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 1$.

Lời giải.

Áp dụng định nghĩa tập con của tập số thực $\mathbb{R}$. Ta có $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 72. Tìm hai tập hợp A và B sao cho $A \cap B = (1; 2)$, $A \setminus B = (-3; 1]$, $B \setminus A = [2; 4)$.

- A. $A = (-3; 2]$, $B = [1; 4)$. B. $A = (-3; 2)$, $B = (1; 4)$.
C. $A = (1; 4)$, $B = (-3; 2)$. D. $A = [1; 4)$, $B = (-3; 2]$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} A \cap B = \{x \in A \text{ và } x \in B\} \\ A \setminus B = \{x \in A \text{ và } x \notin B\} \end{cases}$. Ta có thể chứng minh được $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$. Do đó

$$A = (-3; 2) \text{ và } B = (1; 4).$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 73. Cho hai tập khác rỗng $A = (m - 1; 4)$, $B = (-2; 2m + 2)$, $m \in \mathbb{R}$. Tìm tất cả các giá trị của m để $A \cap B \neq \emptyset$.

- A. $m > -3$. B. $-2 < m < 5$. C. $\begin{cases} m \leq -2 \\ m > 5 \end{cases}$. D. $m \leq -3$.

Lời giải.

$$A \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 < 4 \\ 2m + 2 > -2 \\ 2m + 2 > m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ m > -2 \\ m > -3 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 5.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 74. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 1 < 2x\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x - 1 < 2x + 1\}$. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên thuộc cả hai tập A và B . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $S = \{0; 1\}$. B. $S = \{1\}$. C. $S = \{0\}$. D. $S = \emptyset$.

Lời giải.

- $x - 1 < 2x \Leftrightarrow x > -1$. Do đó, $A = (-1; +\infty)$.
- $3x - 1 < 2x + 1 \Leftrightarrow x < 2$. Do đó, $B = (-\infty; 2)$.

Suy ra $A \cap B = (-1; 2)$, suy ra $S = \{0; 1\}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 75. Cho số thực $m < 0$. Điều kiện cần và đủ để hai khoảng $(-\infty; 2m)$ và $\left(\frac{8}{m}; +\infty\right)$ có giao khác tập rỗng là

- A. $m > -2$. B. $-2 < m < 0$. C. $m < 0$. D. $m < -2$.

Lời giải.

Với $m < 0$ ta có

$$(-\infty; 2m) \cap \left(\frac{8}{m}; +\infty\right) \neq \emptyset \Leftrightarrow 2m > \frac{8}{m} \Leftrightarrow m^2 < 4 \Rightarrow -2 < m < 0.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 76. Cho tập hợp $A = [m; m + 1]$, $B = [1; 3]$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để $A \subset B$ là

- A. $m \leq 1$ hoặc $m \geq 2$. B. $1 \leq m \leq 2$. C. $1 < m < 2$. D. $0 \leq m \leq 2$.

Lời giải.

$$\text{Để } A \subset B \text{ thì } \begin{cases} m \geq 1 \\ m + 1 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 2.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 77. Cho tập $A = [-3; 8)$ và tập $B = (1; 11)$. Hãy chọn đáp án đúng.

- A. $A \cup B = [-3; 1)$. B. $A \setminus B = [-3; 11)$. C. $A \cap B = (1; 8)$. D. $B \setminus A = (0; 11)$.

Lời giải.

Ta có $A \cup B = [-3; 11)$, $A \setminus B = [-3; 1]$, $A \cap B = (1; 8)$, $B \setminus A = [8; 11)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 78. Tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2\}$ bằng tập hợp nào sau đây?

- A. $[1; 2]$. B. $(1; 2)$. C. $[1; 2)$. D. $(1; 2]$.

Lời giải.

Ta có $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2\} = (1; 2]$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 79. Cho $A = [0; 4]$, $B = (1; 5)$, $C = (-3; 1)$. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

- A. $B \cap C = \{1\}$. B. $A \cup B = [0; 5)$. C. $B \cup C = (-3; 5)$. D. $A \cap C = [0; 1]$.

Lời giải.

Ta có $A \cup B = [0; 4] \cup (1; 5) = [0; 5)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 80. Cho hai tập hợp $A = [10; 2016)$ và $B = (15; 2020)$. Tập hợp $A \cap B$ bằng tập hợp nào sau đây?

- A. $[15; 2016)$. B. $(10; 15)$. C. $[10; 2020)$. D. $(15; 2016)$.

Lời giải.

$$A \cap B = [10; 2016) \cap (15; 2020) = (15; 2016).$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 81. Tập hợp $(-2; 3) \setminus [1; 5]$ bằng tập hợp nào sau đây?

- A. $(-2; 1]$. B. $(-3; -2)$. C. $(-2; 1)$. D. $(-2; 5)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } (-2; 3) \setminus [1; 5] = (-2; 1).$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 82. Cho hai tập hợp $A = [2; 6]$, $B = [4; +\infty)$. Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau.

- A. $A \cap B = [4; 6]$. B. $A \setminus B = [2; 4)$. C. $A \cup B = [2; 4]$. D. $\mathbb{R} \setminus B = (-\infty; 4)$.

Lời giải.

Ta có

$$A \cap B = [4; 6], A \setminus B = [2; 4), \mathbb{R} \setminus B = (-\infty; 4), A \cup B = [2; +\infty).$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 83. Cho tập hợp $A = (2; +\infty)$. Tìm phần bù của tập hợp A trong tập hợp các số thực $\mathbb{R}$.

- A. $[2; +\infty)$. B. $(2; +\infty)$. C. $(-\infty; 2]$. D. $(-\infty; -2]$.

Lời giải.

Phần bù của tập hợp A trong tập số thực là $(-\infty; 2]$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 84. Cho hai tập hợp $A = \{x | x \in \mathbb{R}\}$ và $B = (0; +\infty)$. Tìm tập hợp $A \setminus B$.

- A. $(-\infty; 0]$. B. $[0; +\infty)$. C. $(0; +\infty)$. D. $(-\infty; 0)$.

Lời giải.

Ta có $A = \mathbb{R}$, suy ra $A \setminus B = (-\infty; 0]$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 85. Hãy xác định tập hợp $[-2; 2] \setminus [1; 2]$.

- A. $[-2; 1]$. B. $[-2; 1)$. C. $(-2; 1]$. D. $(-2; 1)$.

Lời giải.

$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ và } x \notin B\}. \text{ Vậy } [-2; 2] \setminus [1; 2] = [-2; 1).$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 86. Cho các tập hợp $A = (-2; 3)$ và $B = (1; 5)$. Khi đó $A \setminus B$ là tập hợp nào sau đây?

- A. $(-2; 5)$. B. $[3; 5)$. C. $(-2; 1]$. D. $(1; 3)$.

Lời giải.

$$A \setminus B = (-2; 3) \setminus (1; 5) = (-2; 1].$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 87. Cho tập hợp $A = (-1; +\infty)$. Khi đó $C_{\mathbb{R}}A$ là tập hợp nào sau đây?

- A. $(-\infty; 0]$. B. $(-\infty; 0)$. C. $(-\infty; -1]$. D. $(-\infty; -1)$.

Lời giải.

Vì $A \subset \mathbb{R}$ nên ta có:

$$C_{\mathbb{R}}A = \mathbb{R} \setminus A = \mathbb{R} \setminus (-1; +\infty) = (-\infty; -1].$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 88. Tập hợp $A = (-2; 3] \setminus (1; 6]$ là tập hợp nào sau đây?

- A. $(-2; 6]$. B. $(1; 3]$. C. $(-2; 1]$. D. $(-2; 1)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } A = (-2; 3] \setminus (1; 6] = (-2; 1].$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 89. Cho hai tập hợp $A = (-1; +\infty)$, $B = (-\infty; 3]$. Hãy chọn khẳng định đúng.

- A. $A \setminus B = (3; +\infty)$. B. $A \setminus B = (-1; 3)$. C. $A \setminus B = [3; +\infty)$. D. $A \setminus B = (-\infty; 1]$.

Lời giải.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}.$$

$$\text{Vậy } A \setminus B = (3; +\infty).$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 90. Cho hai tập hợp $A = [0; 2018)$ và $B = (-\infty; 2016]$. Xác định tập hợp $K = A \setminus B$.

- A. $K = [2016; 2018)$. B. $K = [2016; 2018]$. C. $K = [0; 2016)$. D. $K = [0; 2016]$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } K = A \setminus B = [2016; 2018).$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 91. Cho a, b, c, d là các số thực và $a < b < c < d$. Tập $(b; d) \setminus (a; c)$ là tập hợp nào?

- A. $[c; d)$. B. $(b; c)$. C. $(a; d)$. D. $(c; d)$.

Lời giải.

$$\text{Tập } (b; d) \setminus (a; c) \text{ là tập hợp } [c; d).$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 92. Cho các tập $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$. Tập $\mathbb{R} \setminus (A \cap B)$ là

- A. $(-\infty; -1) \cup [3; +\infty)$. B. $(-1; 3]$.
C. $[-1; 3)$. D. $(-\infty; -1] \cup (3; +\infty)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } A = [-1; +\infty), B = (-\infty; 3).$$



$$\text{Suy ra } A \cap B = [-1; 3).$$



Từ đó $\mathbb{R} \setminus (A \cap B) = \mathbb{R} \setminus [-1; 3) = (-\infty; -1) \cup [3; +\infty)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 93. Phần bù của tập hợp $[-2; 1)$ trong $\mathbb{R}$ là

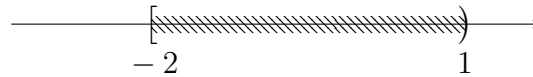
A. $(-\infty; 1]$.

B. $(-\infty; -2) \cup [1; +\infty)$.

C. $(-\infty; -2)$.

D. $2; +\infty$.

Lời giải.



Phần bù của $[-2; 1)$ trong $\mathbb{R}$ là $\mathbb{R} \setminus [-2; 1) = (-\infty; -2) \cup [1; +\infty)$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 94. Cho tập hợp $A = [-\sqrt{3}; \sqrt{5})$. Tập hợp $C_{\mathbb{R}}A$ bằng

A. $(-\infty; -\sqrt{3}] \cup (\sqrt{5}; +\infty)$.

B. $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$.

C. $(-\infty; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{5}; +\infty)$.

D. $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup [\sqrt{5}; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $C_{\mathbb{R}}A = \mathbb{R} \setminus A = (-\infty; -\sqrt{3}) \cup [\sqrt{5}; +\infty)$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 95. Phần bù của $[-2; 1)$ trong $\mathbb{R}$ là

A. $(-\infty; 1]$.

B. $(-\infty; -2) \cup [1; +\infty)$.

C. $(-\infty; -2)$.

D. $(2; +\infty)$.

Lời giải.

$C_{\mathbb{R}}B = \mathbb{R} \setminus B = (-\infty; -2) \cup [1; +\infty)$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 96. Cho $A = [-1; 3]$; $B = (2; 5)$. Tìm mệnh đề **sai**.

A. $B \setminus A = (3; 5)$.

B. $A \cap B = (2; 3]$.

C. $A \setminus B = [-1; 2]$.

D. $A \cup B = [-1; 5]$.

Lời giải.

Mệnh đề đúng là $A \cup B = [-1; 5]$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 97. Cho các tập $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$. Tập $\mathbb{R} \setminus (A \cap B)$ là

A. $(-\infty; -1) \cup [3; +\infty)$.

B. $(-1; 3]$.

C. $[-1; 3)$.

D. $(-\infty; -1] \cup (3; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $A = [-1; +\infty)$; $B = (-\infty; 3)$.

Khi đó $A \cap B = [-1; 3) \Rightarrow \mathbb{R} \setminus (A \cap B) = (-\infty; -1) \cup [3; +\infty)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 98. Cho hai tập hợp $A = (\sqrt{2}; +\infty)$ và $B = \left(-\infty; \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$. Khi đó $(A \cap B) \cup (B \setminus A)$ là

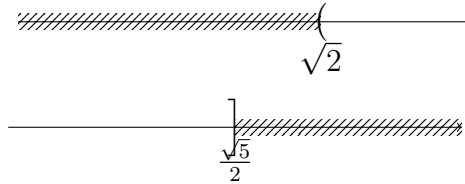
A. $\left[\frac{\sqrt{5}}{2}; \sqrt{2}\right]$.

B. $(\sqrt{2}; +\infty)$.

C. $\left(-\infty; \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$.

D. $\left(-\infty; \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

Lời giải.



Ta có $A \cap B = \emptyset$, $B \setminus A = \left(-\infty; \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$.
 Do đó $(A \cap B) \cup (B \setminus A) = \left(-\infty; \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 99. Cho $A = (-1; 3)$ và $B = [0; 5]$. Khi đó $(A \cap B) \cup (A \setminus B)$ là

- A. $(-1; 3)$. B. $[-1; 3]$. C. $(-1; 3) \setminus \{0\}$. D. $(-1; 3]$.

Lời giải.

Cách 1: Ta có $A \cap B = [0; 3)$ và $A \setminus B = (-1; 0)$.

Do đó $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = [0; 3) \cup (-1; 0) = (-1; 3)$.

Cách 2: Ta có $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A$ nên $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = (-1; 3)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 100. Xác định phần bù của tập hợp $(-\infty; -2)$ trong $(-\infty; 4)$.

- A. $(-2; 4)$. B. $(-2; 4]$. C. $[-2; 4)$. D. $[-2; 4]$.

Lời giải.

Ta có $C_{(-\infty; 4)}(-\infty; -2) = (-\infty; 4) \setminus (-\infty; -2) = [-2; 4)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 101. Xác định phần bù của tập hợp $(-\infty; -10) \cup (10; +\infty) \cup \{0\}$ trong $\mathbb{R}$.

- A. $[-10; 10)$. B. $[-10; 10] \setminus \{0\}$. C. $[-10; 0) \cup [0; 10)$. D. $[-10; 0) \cup (0; 10)$.

Lời giải.

Ta có $\mathbb{R} \setminus ((-\infty; -10) \cup (10; +\infty) \cup \{0\}) = [-10; 10] \setminus \{0\}$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 102. Cho hai tập hợp X, Y thỏa mãn $X \setminus Y = \{7; 15\}$ và $X \cap Y = (-1; 2)$. Xác định số phần tử là số nguyên của X .

- A. 2. B. 5. C. 3. D. 4.

Lời giải.

Do $X \setminus Y = \{7; 15\} \Rightarrow \{7; 15\} \subset X$.

Mà $X \cap Y = (-1; 2) \Rightarrow (-1; 2) \subset X$.

Suy ra $X = (-1; 2) \cup \{7; 15\}$.

Vậy số phần tử nguyên của tập X là 4.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 103. Cho $A = (-\infty; 2]$ và $B = (0; +\infty)$. Tìm $A \setminus B$.

- A. $A \setminus B = (-\infty; 0]$. B. $A \setminus B = (2; +\infty)$. C. $A \setminus B = (0; 2]$. D. $A \setminus B = (-\infty; 0)$.

Lời giải.

Biểu diễn hai tập hợp A và B lên trục số ta có kết quả $A \setminus B = (-\infty; 0]$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 104. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 2\}$, $B = (-1; 3)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $A \cap B = (-1; 2]$.

B. $A \setminus B = (-3; -1)$.

C. $C_{\mathbb{R}}B = (-\infty; -1) \cup [3; +\infty)$.

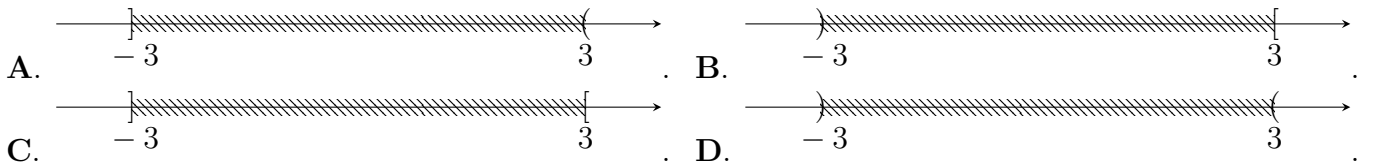
D. $A \cup B = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Lời giải.

Ta có $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 2\} = (-3; 2] \Rightarrow (-3; 2] \cap (-1; 3) = (-1; 2]$.

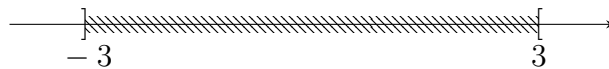
Chọn đáp án **A** □

Câu 105. Cho tập hợp $X = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 3\}$. Biểu diễn tập hợp X trên trục số ta được (phần không bị gạch chéo).



Lời giải.

Ta có $|x| \leq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq -3 \end{cases} \Rightarrow$ tập hợp X được biểu diễn như sau (phần không bị gạch chéo)



Chọn đáp án **C** □

Câu 106. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho $(m - 7; m) \subset (-4; 3)$.

A. $m > 3$.

B. $m < 3$.

C. $m = 3$.

D. Không tồn tại m .

Lời giải.

Ta có $(m - 7; m) \subset (-4; 3) \Leftrightarrow \begin{cases} m - 7 \geq -4 \\ m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 107. Cho số thực $a < 0$. Điều kiện cần và đủ để $(-\infty; 9a) \cap \left(\frac{4}{a}; +\infty\right) \neq \emptyset$ là

A. $-\frac{2}{3} < a < 0$.

B. $-\frac{2}{3} \leq a < 0$.

C. $-\frac{3}{4} < a < 0$.

D. $-\frac{3}{4} \leq a < 0$.

Lời giải.

Điều kiện thỏa đề bài $9a > \frac{4}{a} \Leftrightarrow a^2 < \frac{4}{9} \Leftrightarrow |a| < \frac{2}{3} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < a < 0$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 108. Cho hai tập hợp $A = [m; m + 2]$; $B = [-1; 2]$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $A \subset B$.

A. $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 0 \end{cases}$.

B. $-1 \leq m \leq 0$.

C. $1 \leq m \leq 2$.

D. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \end{cases}$.

Lời giải.

$$\text{Để } A \subset B \text{ thì } \begin{cases} m \geq -1 \\ m + 2 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m \leq 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 109. Cho hai tập hợp $A = (-\infty; m - 1]$, $B = [1; +\infty)$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $A \cap B = \emptyset$.

- A. $m > -1$. B. $m \geq -1$. C. $m \leq 2$. D. $m < 2$.

Lời giải.

Để $A \cap B = \emptyset$ thì $m - 1 < 1 \Rightarrow m < 2$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 110. Cho các tập $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x \leq 5\}$; $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$, và $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq b\}$. Xác định a, b biết $C \cap B$ và $D \cap B$ là các đoạn có độ dài lần lượt bằng 5 và 9.

- A. $a = 0; b = -4$. B. $a = 5; b = 9$. C. $a = -4; b = 0$. D. $a = -5; b = 5$.

Lời giải.

Ta có $B = [-5; 5]$; $C = (-\infty; a]$; $D = [b; +\infty)$.

Do $C \cap B$ và $D \cap B$ là các đoạn có độ dài lần lượt bằng 5 và 9 nên $C \cap B = [-5; a]$ và $D \cap B = [b; 5]$

$$\text{Theo yêu cầu đề bài: } \begin{cases} a + 5 = 5 \\ 5 - b = 9 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} a = 0 \\ b = -4 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 111. Với giá trị nào của m thì $(m - 7; m) \cap (-4; 3) = (m - 7; m)$?

- A. $m \in \emptyset$. B. $m < 3$. C. $m = 3$. D. $m > 3$.

Lời giải.

$$(m - 7; m) \cap (-4; 3) = (m - 7; m) \Leftrightarrow (m - 7; m) \subset (-4; 3) \Leftrightarrow \begin{cases} m - 7 \geq -4 \\ m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 112. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x \in [1; 2]$, $y \in [5; 7]$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất m và lớn nhất M của biểu thức $P = |2x - y|$.

- A. $m = 1, M = 5$. B. $m = 1, M = 6$. C. $m = 2, M = 6$. D. $m = 3, M = 5$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $2x \in [2; 4]$ và $y \in [5; 7]$, P chính là khoảng cách giữa 2 số $2x$ và y trên trục số. P nhỏ nhất khi $2x = 4$ và $y = 5$; P lớn nhất khi $2x = 2$ và $y = 7$. Vậy ta có $m = 1$ và $M = 5$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 113. Cho hai tập hợp $A = (2m + 3; 1 - m)$ và $B = (m - 3; -3 - 2m)$ với $m < -\frac{2}{3}$. Tìm m để $A \cup B$ là một khoảng.

- A. $-6 \leq m \leq -4$. B. $m \leq -6$. C. $-4 \leq m < -\frac{3}{2}$. D. $m < -\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Vì $m < -\frac{2}{3}$ nên $2m + 3 < 1 - m$ và $m - 3 < -3 - 2m$, tức là A và B luôn là các khoảng.

Xét các trường hợp sau:

- Nếu $m - 3 \leq 2m + 3 < 1 - m \leq -3 - 2m$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 3 \geq m - 3 \\ 1 - m \leq -3 - 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -6 \\ m \leq -4 \end{cases} \Leftrightarrow -6 \leq m \leq -4.$

Khi đó $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$, đương nhiên là một khoảng.

- Nếu $2m + 3 \leq m - 3 < -3 - 2m \leq 1 - m$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 3 \leq m - 3 \\ 1 - m \geq -3 - 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -6 \\ m \geq -4 \end{cases}$ (vô lý)

- Nếu $2m + 3 \leq m - 3 < 1 - m \leq -3 - 2m$
 $\begin{cases} 2m + 3 \leq m - 3 \\ m - 3 < 1 - m \\ 1 - m \leq -3 - 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -6 \\ m < 2 \\ m \leq -4 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -6.$

Khi đó $A \cup B = (2m + 3; -3 - 2m)$ là một khoảng.

- Nếu $m - 3 \leq 2m + 3 < -3 - 2m \leq 1 - m$
 $\begin{cases} m - 3 \leq 2m + 3 \\ 2m + 3 < -3 - 2m \\ -3 - 2m \leq 1 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -6 \\ m < -\frac{3}{2} \\ m \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq m < -\frac{3}{2}.$

Khi đó $A \cup B = (m - 3; 1 - m)$ là một khoảng.

Vậy các giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán là $m < -\frac{3}{2}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 114. Cho hai tập hợp $A = [-1; +\infty)$; $B = [a; a + 3]$. Tập hợp tất cả các giá trị của a để $B \subset A$ là

- A. $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. B. $[-1; +\infty]$. C. $(1; +\infty)$. D. $(-1; +\infty)$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 115. Cho số thực $a \neq 0$. Điều kiện cần và đủ để giao của hai tập hợp $A = (-\infty; a)$ và $B = \left(\frac{3a - 4}{2}; +\infty\right)$ khác tập $\emptyset$ là

- A. $0 \leq a < 4$. B. $0 < a < 4$. C. $a < 4$. D. $a \leq 4$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 116. Cho hai tập hợp $A = (-2; 2)$, $B = [a; 3]$. Tìm a để $A \cap B = \emptyset$.

- A. $a \geq 2$. B. $a > 2$. C. $2 < a < 3$. D. $2 \leq a \leq 3$.

Lời giải.

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow 2 \leq a.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 117. Cho các tập hợp $C_{\mathbb{R}}A = [-3; \sqrt{8}]$ và $C_{\mathbb{R}}B = (-2; \sqrt{11})$. Tìm tập hợp $C_{\mathbb{R}}(A \cap B)$.

- A. $[-2; \sqrt{8}]$. B. $(-2; \sqrt{8})$. C. $(-3; \sqrt{11})$. D. $[-3; \sqrt{11})$.

Lời giải.

Tập hợp $C_{\mathbb{R}}A = [-3; \sqrt{8}) \Rightarrow A = (-\infty; -3) \cup [\sqrt{8}; +\infty)$.

Tập hợp $C_{\mathbb{R}}B = (-2; \sqrt{11}) \Rightarrow B = (-\infty; -2] \cup [\sqrt{11}; +\infty)$.

Tập hợp $A \cap B = (-\infty; -3) \cup [\sqrt{11}; +\infty) \Rightarrow C_{\mathbb{R}}(A \cap B) = [-3; \sqrt{11})$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 118. Biết rằng $C_{\mathbb{R}}A = [-4; \sqrt{7})$ và $C_{\mathbb{R}}B = (-6; 2) \cup (\sqrt{3}; \sqrt{13})$. Tìm tập hợp $C_{\mathbb{R}}(A \cap B)$.

A. $C_{\mathbb{R}}(A \cap B) = (-4; \sqrt{3})$.

B. $C_{\mathbb{R}}(A \cap B) = (-6; \sqrt{13})$.

C. $C_{\mathbb{R}}(A \cap B) = (-4; 2) \cup (\sqrt{3}; \sqrt{7})$.

D. $C_{\mathbb{R}}(A \cap B) = (-4; \sqrt{13})$.

Lời giải.

Ta có $C_{\mathbb{R}}A = [-4; \sqrt{7}) \Rightarrow A = (-\infty; -4) \cup [\sqrt{7}; +\infty)$.

$C_{\mathbb{R}}B = (-6; 2) \cup (\sqrt{3}; \sqrt{13}) \Rightarrow B = (-\infty; -6] \cup [\sqrt{13}; +\infty)$.

Suy ra $A \cap B = (-\infty; -6] \cup [\sqrt{13}; +\infty)$.

Vậy $C_{\mathbb{R}}(A \cap B) = \mathbb{R} \setminus (A \cap B) = (-6; \sqrt{13})$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 119. Tìm tập hợp X , biết $C_{\mathbb{R}}X = Y \cup [-1; 0)$ và $\mathbb{R} \setminus Y = (-\infty; 0)$.

A. $X = (0; +\infty)$.

B. $X = (-\infty; 0)$.

C. $X = (-\infty; -1)$.

D. $X = (-1; +\infty)$.

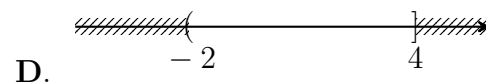
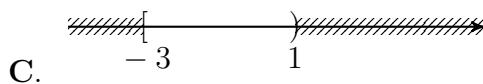
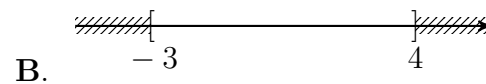
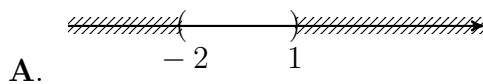
Lời giải.

Từ giả thiết ta có $Y = [0; +\infty)$ nên $C_{\mathbb{R}}X = Y \cup [-1; 0) = [0; +\infty) \cup [-1; 0) = [-1; +\infty)$.

Lại có $C_{\mathbb{R}}X = \mathbb{R} \setminus X = [-1; +\infty) \Rightarrow X = \mathbb{R} \setminus [-1; +\infty) = (-\infty; -1)$.

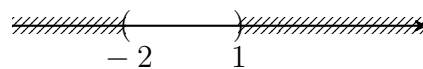
Chọn đáp án **(C)** □

Câu 120. Biểu diễn trên trục số của tập hợp $[-3; 1) \cap (-2; 4]$ là hình nào?



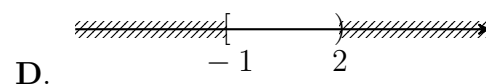
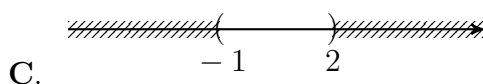
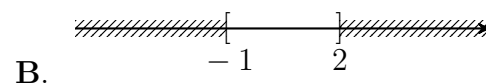
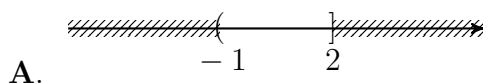
Lời giải.

Ta có $[-3; 1) \cap (-2; 4] = (-2; 1)$ do đó được biểu diễn trên trục số là



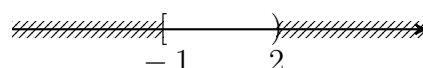
Chọn đáp án **(A)** □

Câu 121. Biểu diễn trên trục số của tập hợp $(0; 2) \cup [-1; 1)$ là hình nào?



Lời giải.

Ta có $(0; 2) \cup [-1; 1) = [-1; 2)$ do đó được biểu diễn trên trục số là



Chọn đáp án **(D)** □

Câu 122. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | x + 2 \geq 0\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} | 5 - x \geq 0\}$. Tìm tập hợp $A \cap B$.

- A. $[-2; 5]$. B. $[-2; 6]$. C. $[-5; 2]$. D. $(-2; +\infty)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} A = \{x \in \mathbb{R} | x + 2 \geq 0\} = [-2; +\infty) \\ B = \{x \in \mathbb{R} | 5 - x \geq 0\} = (-\infty; 5]. \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } A \cap B = [-2; +\infty) \cap (-\infty; 5] = [-2; 5].$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 123. Cho các tập hợp $M = [1; 4]$, $N = (2; 6)$ và $P = (1; 2)$. Tìm tập hợp $(M \cap N) \cap P$.

- A. $[0; 4]$. B. $[5; +\infty)$. C. $(-\infty; 1)$. D. $\emptyset$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } M \cap N = (2; 4] \Rightarrow M \cap N \cap P = (2; 4] \cap (1; 2) = \emptyset.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 124. Cho hai tập hợp $X = [-4; 7]$ và $Y = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$. Tìm tập hợp $X \cap Y$.

- A. $[-4; -2) \cup (3; 7]$. B. $[-4; -2) \cup (3; 7)$.
C. $(-\infty; 2] \cup (3; +\infty)$. D. $(-\infty; -2) \cup [3; +\infty)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } X \cap Y = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty) \cap [-4; 7] = [-4; -2) \cup (3; 7].$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 125. Cho các tập hợp $M = (-\infty; -2]$, $N = [3; +\infty)$ và $P = (0; 4)$. Tìm tập hợp $(M \cup N) \cap P$.

- A. $[3; 4]$. B. $(-\infty; -2] \cup (3; +\infty)$.
C. $[3; 4)$. D. $(-\infty; -2) \cup [3; +\infty)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } (M \cup N) \cap P = ((-\infty; -2] \cap (0; 4)) \cup ([3; +\infty) \cap (0; 4)) = [3; 4).$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 126. Cho ba tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -3 \text{ hoặc } x > 6\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | -5 \leq x \leq 5\}$ và $C = (2; 10)$. Tìm tập hợp $(A \cap B) \cup C$.

- A. $[-5; -3]$. B. $(2; 10)$. C. $[-5; 10)$. D. $[-5; -3] \cup (2; 10)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } A = (-\infty; -3] \cup (6; +\infty) \text{ và } B = [-5; 5]$$

$$\text{Do đó } A \cap B = [-5; -3]. \text{ Vậy } (A \cap B) \cup C = [-5; -3] \cup (2; 10)$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 127. Cho các số thực a, b, c, d và $a < b < c < d$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $(a; c) \cap (b; d) = (b; c)$. B. $(a; c) \cap [b; d] = [b; c]$.
C. $(a; c) \cap [b; d) = [b; c]$. D. $(a; c) \cup (b; d) = (b; c)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } (a; c) \cap (b; d) = (b; c).$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 128. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 3 < 4 + 2x\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 5x - 3 < 4x - 1\}$. Có tất cả bao nhiêu số tự nhiên thuộc cả hai tập A và B ?

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. Không có số nào.

Lời giải.

$$\text{Ta có } x \in A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 < 4 + 2x \\ 5x - 3 < 4x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x < 2. \end{cases}$$

Do đó có hai số tự nhiên thỏa mãn là 0; 1.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 129. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 4\}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 4\}$.

B. $B \subset A$.

C. $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4\}$.

D. $A \setminus B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 3\}$.

Lời giải.

Ta có $A = (2; 4)$ và $B = (3; 4)$. Do đó $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 4\}$ nên $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 4\}$ sai.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 130. Cho các số thực a, b, c, d và $a < b < c < d$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

A. $(a; c) \cap (b; d) = (b; c)$.

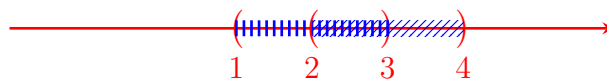
B. $(a; c) \cap [b; d] = [b; c]$.

C. $(a; c) \cup [b; d] = [b; c]$.

D. $(a; c) \cup (b; d) = (b; c)$.

Lời giải.

Giả sử miền được chọn là miền gạch (gạch chéo, gạch đứng). Không làm mất tính tổng quát giả sử chọn $a = 1 < b = 2 < c = 3 < d = 4$. Khi đó



Do đó $(a; c) \cap (b; d) = (b; c)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 131. Cho số thực $a < 0$. Điều kiện cần và đủ để hai khoảng $(-\infty; 9a)$ và $\left(\frac{4}{a}; +\infty\right)$ có giao khác tập rỗng là

A. $-\frac{2}{3} < a < 0$.

B. $-\frac{2}{3} \leq a < 0$.

C. $-\frac{3}{4} < a < 0$.

D. $-\frac{3}{4} \leq a < 0$.

Lời giải.

Điều kiện cần và đủ để hai tập giao khác rỗng là

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \frac{4}{a} < 9a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \frac{4 - 9a^2}{a} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ -\frac{2}{3} < a < \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < a < 0.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 132. Cho các số thực a, b, c, d và $a < b < c < d$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(a; c) \cap (b; d) = (b; c)$.

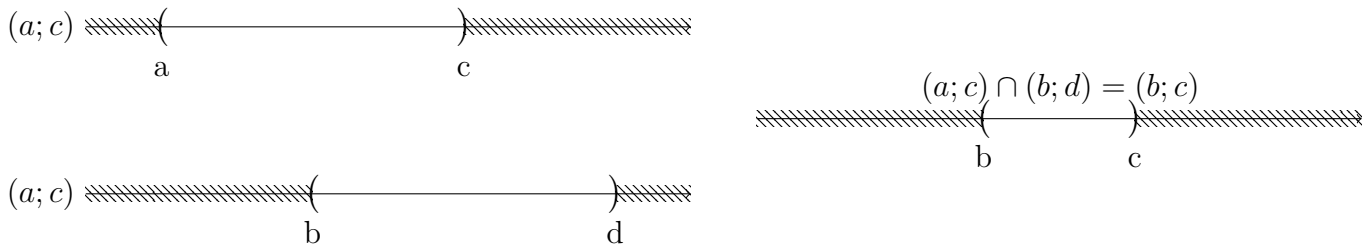
B. $(a; c) \cap (b; d) = [b; c]$.

C. $(a; c) \cap [b; d] = [b; c]$.

D. $(a; c) \cup (b; d) = (b; d)$.

Lời giải.

Biểu diễn các tập hợp $(a; c)$ và $(b; d)$ trên trục số rồi lấy các phần tử chung của hai tập hợp đó ta được $(a; c) \cap (b; d) = (b; c)$.



Chọn đáp án **A**

□

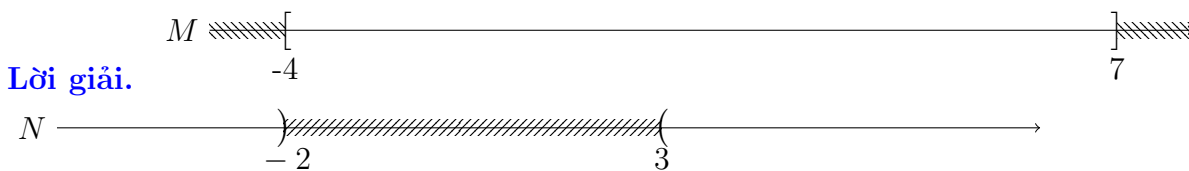
Câu 133. Cho hai tập hợp $M = [-4; 7]$ và $N = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$. Hãy xác định tập hợp $M \cap N$.

A. $M \cap N = [-4; 2) \cup (3; 7]$.

B. $M \cap N = (-\infty; 2] \cup (3; +\infty)$.

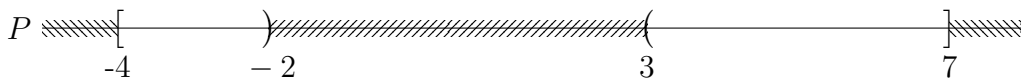
C. $M \cap N = (-\infty; -2) \cup [3; +\infty)$.

D. $M \cap N = [-4; -2) \cup (3; 7]$.



Lời giải.

$P = M \cap N = [-4; -2) \cup (3; 7]$



Chọn đáp án **D**

□

Câu 134. Cho 3 tập hợp $A = (-\infty; 1]$, $B = [-2; 2]$ và $C = (0; 5)$. Tìm tập hợp $P = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

A. $P = [1; 2]$.

B. $P = (-2; 5)$.

C. $P = (0; 1]$.

D. $P = [-2; 1]$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} A \cap B = [-2; 1] \\ A \cap C = (0; 1] \end{cases} \Rightarrow P = (A \cap B) \cup (A \cap C) = [-2; 1]$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 135. Cho hai tập hợp $M = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 3\}$ và $N = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 1\}$. Tìm tập hợp $P = M \cap N$.

A. $P = (-3; -1] \cup [1; 3)$.

B. $P = (-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$.

C. $P = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

D. $P = [-3; 3]$.

Lời giải.

• $|x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3 \Rightarrow M = (-3; 3)$.

• $x^2 \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow N = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

Vậy $P = M \cap N = (-3; -1] \cup [1; 3)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 136. Cho $A = \{-1; 0; 1; 2\}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $A = [-1; 3) \cap \mathbb{N}^*$. B. $A = [-1; 3) \cap \mathbb{N}$. C. $A = [-1; 3) \cap \mathbb{Z}$. D. $A = (-1; 3) \cap \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

- $[-1; 3) \cap \mathbb{N}^* = \{1; 2\}$.
- $[-1; 3) \cap \mathbb{N} = \{0; 1; 2\}$.
- $[-1; 3) \cap \mathbb{Z} = \{-1; 0; 1; 2\}$.
- $(-1; 3) \cap \mathbb{Z} = \{0; 1; 2\}$.

Vậy $A = [-1; 3) \cap \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 137. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 3 < 4 + 2x\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 5x - 3 < 4x - 1\}$. Tất cả các số tự nhiên thuộc cả hai tập hợp A và B là

- A. -1 và 1. B. -3 và -2. C. -2 và 2. D. 0 và 1.

Lời giải.

Ta có $x + 3 < 4 + 2x \Leftrightarrow x > -1$; $5x - 3 < 4x - 1 \Leftrightarrow x < 2$ suy ra $A \cap B = \{x \in \mathbb{N} \mid -1 < x < 2\}$.

Vậy 0 và 1 là hai số tự nhiên thuộc cả hai tập hợp A và B .

Chọn đáp án **D** □

Câu 138. Cho các tập hợp $A = [-4; 9]$ và $B = (-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$. Khi đó tập hợp $A \cap B$ là

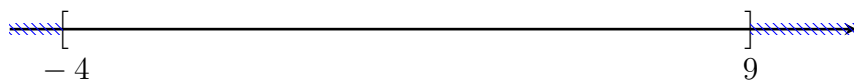
- A. $[-4; -2) \cup (4; 9]$. B. $[-4; -2) \cup (4; 9]$.
C. $[-\infty; 2) \cup (4; +\infty]$. D. $[-\infty; -2) \cup (4; +\infty]$.

Lời giải.

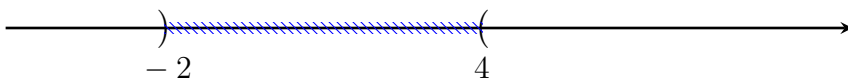
Ta có $A \cap B = (A \cap (-\infty; -2)) \cup (A \cap (4; +\infty)) = [-4; -2) \cup (4; 9]$.

Biểu diễn trên trục số như sau

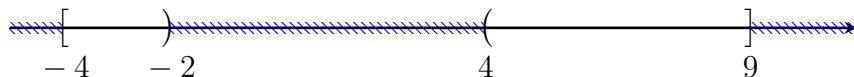
Tập hợp A



Tập hợp B



Tập hợp $A \cap B$



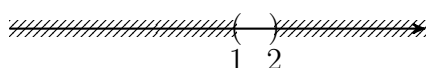
Chọn đáp án **B** □

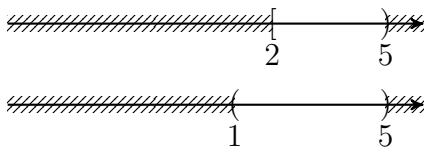
Câu 139. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $(1; 2) \cup [2; 5) = (1; 5)$. B. $[-3; 0) \cap (0; 5) = \{0\}$.
C. $(1; 2) \setminus (2; 3) = (1; 3)$. D. $(1; 2) \cup (2; 3) = (1; 3)$.

Lời giải.

Biểu diễn các tập hợp trên trục số như sau ta được $(1; 2) \cup [2; 5) = (1; 5)$.





Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 140. Cho các tập hợp $A = (-3; 3)$, $B = (-2; +\infty)$ và $C = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$. Khi đó tập hợp $A \cap B \cap C$ là

A. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < \frac{1}{2}\right\}$.

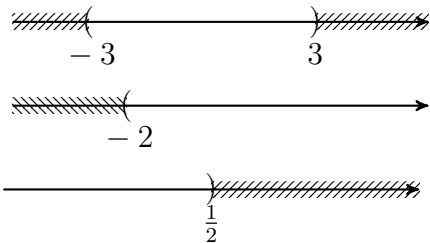
B. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < \frac{1}{2}\right\}$.

C. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq \frac{1}{2}\right\}$.

D. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq \frac{1}{2}\right\}$.

Lời giải.

Biểu diễn các tập hợp A , B , C trên trục số, từ đó suy ra $A \cap B \cap C = \left(-2; \frac{1}{2}\right)$.



Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 141. Cho các tập hợp $A = (-3; 1)$, $B = [-1; 5]$ và $C = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. Khi đó $(A \cup B) \cap C$ bằng tập hợp nào sau đây?

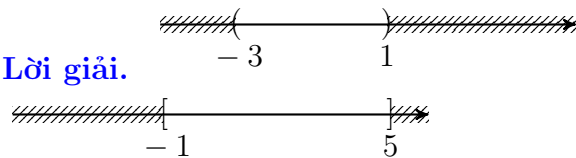
A. $(-3; 2) \cup (2; 5)$.

B. $(-3; -2] \cup [2; 5]$.

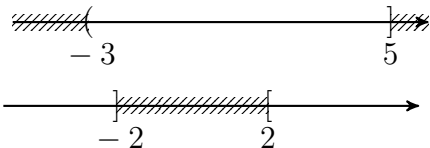
C. $(-3; 5)$.

D. $[-1; 1)$.

Lời giải.



Biểu diễn tập hợp A , B trên trục số, từ đó ta có $A \cup B = (-3; 5]$.



Biểu diễn các tập hợp $A \cup B$ và C lên trục số, ta có $(A \cup B) \cap C = (-3; -2] \cup [2; 5]$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 142. Giá trị của a để $(1; a) \cap (2; 5) = \left(2; \frac{10}{3}\right)$ là

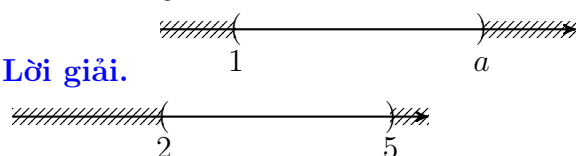
A. $a = \frac{10}{3}$.

B. $a = 5$.

C. $a = 2$.

D. $a = \frac{10}{6}$.

Lời giải.



$$(1; a) \cap (2; 5) = \left(2; \frac{10}{3}\right) \Leftrightarrow a = \frac{10}{3}.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 143. Tìm m để $(0; 2] \cap [m; m+1] = \emptyset$.

- A. $\begin{cases} m \leq -1 \\ m > 2 \end{cases}$. B. $m \in \emptyset$. C. $m > 2$. D. $m \leq -1$.

Lời giải.

Để giao của hai tập trên là rỗng, thì $\begin{cases} m > 2 \\ m+1 \leq 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} m \leq -1 \\ m > 2 \end{cases}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 144. Cho các tập hợp khác rỗng $\left[m-1; \frac{m+3}{2}\right]$ và $B = (-\infty; -3) \cup [3; +\infty)$. Tập hợp các giá trị thực của m để $A \cap B \neq \emptyset$ là

- A. $(-\infty; -2) \cup [3; +\infty)$. B. $(-2; 3)$.
C. $(-\infty; -2) \cup [3; 5)$. D. $(-\infty; -9) \cup (4; +\infty)$.

Lời giải.

$$\text{Để } A \cap B \neq \emptyset \text{ thì điều kiện là } \begin{cases} m-1 < \frac{m+3}{2} \\ \left[m-1 < -3 \text{ hoặc } \frac{m+3}{2} \geq 3\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ m < -2 \text{ hoặc } m \geq 3 \end{cases}$$

Vậy $m \in (-\infty; -2) \cup [3; 5)$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 145. Cho các tập hợp khác rỗng $A = (-\infty; m)$ và $B = [2m-2; 2m+2]$. Tìm $m \in \mathbb{R}$ để $C_{\mathbb{R}}A \cap B \neq \emptyset$.

- A. $m \geq 2$. B. $m < -2$. C. $m \geq -2$. D. $m < 2$.

Lời giải.

Ta có $C_{\mathbb{R}}A = [m; +\infty)$.

Để $C_{\mathbb{R}}A \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow 2m+2 \geq m \Leftrightarrow m \geq -2$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 146. Cho hai tập hợp $A = [1; 3]$ và $B = [m; m+1]$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $B \subset A$.

- A. $m = 1$. B. $m = 2$. C. $1 < m < 2$. D. $1 \leq m \leq 2$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } B \subset A \text{ khi và chỉ khi } \begin{cases} m \geq 1 \\ m+1 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 2.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 147. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{3x+1} + \sqrt{x-3}$.

- A. $\left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$. B. $[3; +\infty)$. C. $\left[-\frac{1}{3}; 3\right]$. D. $(-\infty; 3]$.

Câu 148. Cho hai tập hợp $A = (-2; 1) \cup [3; +\infty)$ và $B = \{x \in \mathbb{R} | 3x - 1 \geq 0\}$. Tìm $A \cap B$.

- A. $\left(-2; \frac{1}{3}\right]$. B. $\left[\frac{1}{3}; 1\right) \cup [3; +\infty)$. C. $\emptyset$. D. $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Ta có $B = \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$. Biểu diễn hai tập hợp A, B trên cùng một trục số ta được kết quả.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 149. Cho m là một tham số thực và hai tập hợp $A = [1 - 2m; m + 3], B = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 8 - 5m\}$.

Tất cả các giá trị m để $A \cap B = \emptyset$ là

- A. $m < -\frac{2}{3}$. B. $-\frac{2}{3} \leq m < \frac{5}{6}$. C. $m \geq \frac{5}{6}$. D. $m \leq \frac{5}{6}$.

Lời giải.

Ta có $A \cap B = \emptyset$ khi và chỉ khi
$$\begin{cases} 8 - 5m > m + 3 \\ m + 3 \geq 1 - 2m \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq m < \frac{5}{6}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 150. Cho $m < n$. Tìm m, n để $[5; 9) \cap [m; n]$ bằng tập có một phần tử

- A. $n = 5$. B. $m = 5$. C. $m = 9 \vee n = 5$. D. $m = 9$ và $n = 5$.

Lời giải.

Do $[5; 9) \cap [m; n]$ bằng tập có một phần tử nên tập này là 5, mà $m < n$ nên $n = 5$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 151. Cho tập $A = \{x \in \mathbb{R} | 2x + 7 > 0\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} | 4 - 3x \geq 0\}$. Tìm tập $A \cap B$.

- A. $\left(-\frac{7}{2}; \frac{4}{3}\right]$. B. $\left(-\frac{7}{2}; \frac{4}{3}\right)$. C. $\left(-\infty; -\frac{7}{2}\right)$. D. $\left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Ta có $A = \left(-\frac{7}{2}; +\infty\right)$, $B = \left(-\infty; \frac{4}{3}\right]$.

Do đó $A \cap B = \left(-\frac{7}{2}; \frac{4}{3}\right]$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 152. Cho các tập hợp $A = [-3; 2)$, $B = (1; 6)$. Tìm $C_{\mathbb{R}}(A \cup B)$.

- A. $[-3; +\infty)$. B. $(-\infty; -3] \cup [6; +\infty)$.
C. $(-\infty; -3) \cup [6; +\infty)$. D. $(-\infty; 6]$.

Lời giải.

Ta có: $A = [-3; 2)$, $B = (1; 6)$ nên $A \cup B = [-3; 6)$.

Suy ra $C_{\mathbb{R}}(A \cup B) = (-\infty; -3) \cup [6; +\infty)$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 153. Cho $A = (-1; 3)$, $B = [0; 2]$. Tìm tập hợp $C_{\mathbb{R}}A \cap C_{\mathbb{R}}B$.

- A. $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$. B. $[2; +\infty)$.
C. $(-\infty; -1]$. D. $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $C_{\mathbb{R}}A = \mathbb{R} \setminus (-1; 3) = (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$ và $C_{\mathbb{R}}B = (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ nên $C_{\mathbb{R}}A \cap C_{\mathbb{R}}B = (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 154. Cho tập hợp $A = \{-1; 0; 1\}$. Chọn phát biểu đúng.

- A. $A = [-2; 2] \cap \mathbb{Z}$. B. $A = (-1; 1) \cap \mathbb{Z}$. C. $A = [-2; 2] \cap \mathbb{R}$. D. $A = (-2; 2) \cap \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 155. Cho các tập hợp $A = [-2; 2]$, $B = (1; 5]$ và $C = [0; 1)$. Tìm tập hợp $(A \setminus B) \cap C$.

- A. $\{0; 1\}$. B. $[0; 1)$. C. $\{0\}$. D. $[-2; 5]$.

Lời giải.

Ta có $A \setminus B = [-2; 1] \Rightarrow (A \setminus B) \cap C = [-2; 1] \cap [0; 1) = [0; 1)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 156. Cho các tập hợp $A = [-2; 2]$, $B = (1; 5]$, $C = [0; 1)$. Tìm tập hợp $(A \setminus B) \cap C$ là

- A. $\{0; 1\}$. B. $[0; 1)$. C. $[-2; 1]$. D. $[-2; 5]$.

Lời giải.

Ta có $A \setminus B = [-2; 1] \Rightarrow (A \setminus B) \cap C = [-2; 1] \cap [0; 1) = [0; 1)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 157. Cho hai tập hợp $A = [-5; 3]$; $B = [0; 2)$. Tìm tập hợp $\mathbb{R} \setminus (B \cap A)$.

- A. $(-\infty; 0) \cup [2; +\infty)$. B. $[0; 2)$. C. $[2; +\infty)$. D. $(-\infty; 0)$.

Lời giải.

Do $A \cap B = [0; 2)$ nên $\mathbb{R} \setminus (A \cap B) = (-\infty; 0) \cup [2; +\infty)$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 158. Cho tập hợp $A = (0; 1)$. Hãy xác định tập hợp $C_{\mathbb{R}}A$.

- A. $C_{\mathbb{R}}A = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$. B. $C_{\mathbb{R}}A = (-\infty; 0] \cup (1; +\infty)$.
C. $C_{\mathbb{R}}A = (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$. D. $C_{\mathbb{R}}A = (-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$.

Lời giải.

$C_{\mathbb{R}}A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ và } x \notin A\} = (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 159. Cho hai tập hợp $A = (\sqrt{2}; +\infty)$ và $B = \left(-\infty; \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$. Kết quả của $(A \cap B) \cup (B \setminus A)$ là

- A. $\left[\frac{\sqrt{5}}{2}; \sqrt{2}\right]$. B. $(\sqrt{2}; +\infty)$. C. $\left(-\infty; \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$. D. $\left(-\infty; \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

Lời giải.

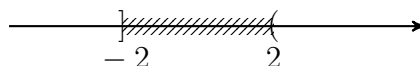
Ta có $A \cap B = \emptyset$ và $B \setminus A = \left(-\infty; \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$.

Vậy $(A \cap B) \cup (B \setminus A) = \left(-\infty; \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 160. Trục số sau đây (phần không bị gạch) biểu diễn tập hợp nào?



A. $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

B. $(-\infty; -2] \cup (2; +\infty)$.

C. $(-\infty; -2) \cup [2; +\infty)$.

D. $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Lời giải.Trục số trên biểu diễn hợp của hai tập hợp $(-\infty; -2]$ và $(2; +\infty)$.Chọn đáp án **(B)** □**Câu 161.** Cho hai tập hợp $X = (-\infty; 3]$ và $Y = (2; +\infty)$. Tìm tập hợp $X \cup Y$.

A. $[2; +\infty)$.

B. $(-3; 2]$.

C. $\mathbb{R}$.

D. $\emptyset$.

Lời giải.Ta có $X \cup Y = (-\infty; 3) \cup (2; +\infty) = \mathbb{R}$.Chọn đáp án **(C)** □**Câu 162.** Cho hai tập hợp $X = (-\infty; 1]$ và $Y = (1; +\infty)$. Tìm tập hợp $X \cap Y$.

A. $[3; +\infty)$.

B. $\mathbb{R}$.

C. $\emptyset$.

D. $\{3\}$.

Lời giải.Ta có $X \cap Y = (-\infty; 1] \cap (1; +\infty) = \emptyset$.Chọn đáp án **(C)** □**Câu 163.** Cho các tập hợp $A = [-2; 3]$; $B = (1; 5]$. Tìm tập hợp $A \cup B$.

A. $[-2; 5]$.

B. $(1; 3]$.

C. $[-2; 1]$.

D. $(3; 5]$.

Lời giải.Ta có $A \cup B = [-2; 3] \cup (1; 5] = [-2; 5]$.Chọn đáp án **(A)** □**Câu 164.** Cho các tập hợp $A = (-\infty; 3]$; $B = [3; +\infty)$. Tìm tập hợp $B \cap A$.

A. $\mathbb{R}$.

B. $\{3\}$.

C. $\emptyset$.

D. $[3; +\infty)$.

Lời giải.Ta có $B \cap A = (-\infty; 3] \cap [3; +\infty) = \{3\}$.Chọn đáp án **(B)** □**Câu 165.** Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\}$. Biểu diễn A dưới dạng tập con của tập số thực là

A. $A = (1; 5)$.

B. $A = [1; 5)$.

C. $A = [1; 5]$.

D. $A = (1; 5]$.

Lời giải.

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\} = (1; 5)$$

Chọn đáp án **(A)** □**Câu 166.** Xác định tập hợp $A = (-2; 5) \cap [2; 7]$

A. $A = (-2; 2)$.

B. $A = (2; 5)$.

C. $A = (2; 5]$.

D. $A = [2; 5)$.

Lời giải.

$$A = (-2; 5) \cap [2; 7] = [2; 5).$$

Chọn đáp án **(D)** □**Câu 167.** Cho hai tập hợp $A = (-3; 5)$, $B = [2; 7)$. Hãy chọn đáp án **đúng**.

A. $A \cap B = (5; 7)$.

B. $A \cap B = (2; 5)$.

C. $A \cap B = (-3; 2]$.

D. $A \cap B = [2; 5)$.

Lời giải.

Ta có $A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\} = [2; 5]$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 168. Cho hai tập hợp $A = (-10; 2)$, $B = [-5; 4)$. Tập $A \cup B$ là tập nào sau đây?

- A. $[-10; 4)$. B. $(-5; 2)$. C. $(2; 4)$. D. $(-10; 4)$.

Lời giải.

$A \cup B = (-10; 2) \cup [-5; 4) = (-10; 4)$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 169. Cho $A = [-1; 3)$ và $B = [2; 5)$. Tập hợp $A \cup B$ là

- A. $\{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}$. B. $[-1; 5]$. C. $[-1; 5)$. D. $[2; 3)$.

Lời giải.

$A \cup B = [-1; 5)$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 170. Cho tập hợp $M = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 5\}$. Hãy viết tập M dưới dạng khoảng, đoạn.

- A. $M = [2; 5)$. B. $M = (2; 5)$. C. $M = [2; 5]$. D. $M = (2; 5]$.

Lời giải.

Ta có $M = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 5\} = [2; 5)$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 171. Cho $A = [-1; 3]$, $B = (2; 5)$. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

- A. $B \setminus A = (3; 5)$. B. $A \cap B = (2; 3]$. C. $A \setminus B = [-1; 2]$. D. $A \cup B = [-1; 5]$.

Lời giải.

Ta có $A \cup B = [-1; 5)$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 172. Tập $(-\infty; -3) \cap [-5; 2)$ bằng

- A. $[-5; -3)$. B. $(-\infty; -5]$. C. $(-\infty; -2)$. D. $(-3; -2)$.

Lời giải.

Ta có $(-\infty; -3) \cap [-5; 2) = [-5; -3)$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 173. Kết quả của phép toán $(-\infty; 1) \cap [-1; 2)$ là

- A. $(1; 2)$. B. $(-\infty; 2)$. C. $(-1; 1)$. D. $[-1; 1)$.

Câu 174. Cho $A = [3; 8]$, $B = (-1; 5]$. Khi đó $A \cap B$ là

- A. $(5; 8]$. B. $(-1; 8]$. C. $[3; 5]$. D. $(-1; 3]$.

Lời giải.

Ta có $A \cap B = [3; 5]$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 175. Cho $A = (-10; 4)$, $B = [-6; 1)$. Khi đó C_A^B là

- A. $(-10; -6)$. B. $(1; 4)$. C. $(-6; 1)$. D. $(-10; -6) \cup [1; 4)$.

Lời giải.

$$C_A^B = A \setminus B = (-10; 4) \setminus [-6; 1) = (-10; -6) \cup [1; 4).$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 176. Cho $A = (-3; 8)$ và $B = [5; 14]$. Tìm $A \cup B, B \setminus A$.

Lời giải.

- $A \cup B = (-3; 14]$.
- $B \setminus A = [8; 14]$.

□

Câu 177. Cho hai tập hợp $X = [-2; 3]$ và $Y = (1; 5]$. Tìm tập hợp $X \setminus Y$.

- A. $[-2; 1]$. B. $(3; 5]$. C. $[-2; 1)$. D. $(-2; 1]$.

Lời giải.

Ta có $X \setminus Y = [-2; 3] \setminus (1; 5] = [-2; 1]$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 178. Cho tập hợp $A = (2; +\infty)$. Tìm tập hợp $C_{\mathbb{R}}A$.

- A. $[2; +\infty)$. B. $(2; +\infty)$. C. $(-\infty; 2]$. D. $(-\infty; -2]$.

Lời giải.

Ta có $C_{\mathbb{R}}A = \mathbb{R} \setminus A = (-\infty; 2]$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 179. Cho các tập hợp sau $A = (-1; 5]$, $B = (2; 7)$. Tìm tập hợp $A \setminus B$.

- A. $(-1; 2]$. B. $(2; 5]$. C. $(-1; 7)$. D. $(-1; 2)$.

Lời giải.

Ta có $A \setminus B = (-1; 5] \setminus (2; 7) = (-1; 2]$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 180. Cho các tập hợp $A = [-2; 3]$, $B = (1; 5]$. Tìm tập hợp $B \setminus A$.

- A. $(3; 5]$. B. $[-2; 5]$. C. $(1; 3]$. D. $[-2; 1]$.

Lời giải.

Ta có $B \setminus A = (1; 5] \setminus [-2; 3] = (3; 5]$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 181. Cho tập hợp $A = [-2; 3)$. Tập hợp $C_{\mathbb{R}}A$ bằng.

- A. $(-\infty; -2) \cup [3; +\infty)$. B. $[3; +\infty)$.
C. $(-\infty; -2)$. D. $(-\infty; -2] \cup (3; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $C_{\mathbb{R}}A = (-\infty; -2) \cup [3; +\infty)$.

Chọn đáp án **(A)**

□

ĐÁP ÁN

1. D	2. A	3. B	4. D	5. D	6. A	7. C	8. D	9. B	10. C
11. B	12. B	13. C	14. B	15. A	16. C	17. C	18. D	19. C	20. D
21. B	22. D	23. C	24. C	25. D	26. D	27. B	28. C	29. B	30. A
31. A	32. D	33. C	34. C	35. D	36. B	37. C	38. D	39. D	40. C
41. D	42. D	43. C	44. C	45. A	46. A	47. C	48. C	49. A	50. C
51. B	52. D	53. B	54. C	55. B	56. B	57. A	58. B	59. C	60. A
61. B	62. D	63. C	64. A	65. A	66. D	67. A	68. B	69. C	70. D
71. B	72. B	73. B	74. A	75. B	76. B	77. C	78. D	79. B	80. D
81. C	82. C	83. C	84. A	85. B	86. C	87. C	88. C	89. A	90. A
91. A	92. A	93. B	94. D	95. B	96. D	97. A	98. C	99. A	100. C
101. B	102. D	103. A	104. A	105. C	106. C	107. A	108. B	109. D	110. A
111. C	112. A	113. D	114. B	115. C	116. A	117. D	118. B	119. C	120. A
121. D	122. A	123. D	124. A	125. C	126. D	127. A	128. A	129. A	130. A
131. A	132. A	133. D	134. D	135. A	136. C	137. D	138. B	139. A	140. A
141. B	142. A	143. A	144. C	145. C	146. D	147. B	148. B	149. B	150. A
151. A	152. C	153. A	154. D	155. B	156. B	157. A	158. C	159. C	160. B
161. C	162. C	163. A	164. B	165. A	166. D	167. D	168. D	169. C	170. A
171. D	172. A	173. D	174. C	175. D	177. A	178. C	179. A	180. A	181. A

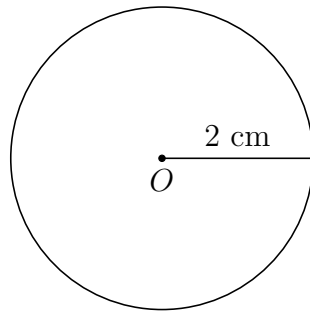
§5 SỐ GẦN ĐÚNG - SAI SỐ

A SỐ GẦN ĐÚNG

Ví dụ 1. Khi tính diện tích của hình tròn bán kính $r = 2 \text{ cm}$ theo công thức $S = \pi r^2$.

Nam lấy một giá trị gần đúng của π là 3,1 và được kết quả $S = 3,1 \cdot 4 = 12,4 \text{ cm}^2$

Minh lấy một giá trị gần đúng của π là 3,14 và được kết quả $S = 3,14 \cdot 4 = 12,56 \text{ cm}^2$.



Vì $\pi = 3,14592653 \dots$ là một số thập phân vô hạn không tuần hoàn, nên ta chỉ viết được gần đúng kết quả phép tính $\pi \cdot r^2$ bằng một số thập phân hữu hạn.

B QUY TRÒN SỐ GẦN ĐÚNG

- a) Ôn tập quy tắc làm tròn số Trong sách giáo khoa Toán 7 tập một ta đã biết quy tắc làm tròn đến một hàng nào đó (gọi là hàng quy tròn) như sau

Nếu chữ số sau hàng quy tròn nhỏ hơn 5 thì ta thay nó và các chữ số bên phải nó bởi chữ số 0.

Nếu chữ số sau hàng quy tròn lớn hơn hoặc bằng 5 thì ta cũng làm như trên, nhưng cộng thêm một đơn vị vào chữ số hàng quy tròn.

Chẳng hạn

Số quy tròn đến hàng nghìn của $x = 2\,841\,675$ là $x = 2\,842\,000$, của $y = 432\,415$ là $y \approx 432\,000$.

Số quy tròn đến hàng trăm của $x = 12,4253$ là $x \approx 12,43$, của $y = 4,1521$ là $y \approx 4,15$.

- b) Cách viết số quy tròn của số gần đúng căn cứ vào độ chính xác cho trước

Ví dụ 2. Cho số gần đúng $a = 2\,841\,275$ có độ chính xác $d = 300$. Hãy viết số quy tròn của số a .

Giải.

Vì độ chính xác đến hàng trăm ($d = 300$) nên ta quy tròn a đến hàng nghìn theo quy tắc làm tròn ở trên.

Vậy số quy tròn của a là 2 841 000.

Ví dụ 3. Hãy viết số quy tròn của số gần đúng $a = 3,1463$ biết: $\bar{a} = 3,1463 \pm 0,001$.

Giải.

Vì độ chính xác đến hàng phần nghìn (độ chính xác là 0,001) nên ta quy tròn số 3,1463 đến hàng trăm theo quy tắc làm tròn ở trên.

Vậy số quy tròn của a là 3,15.

C CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho số gần đúng $a = 23748023$ với độ chính xác $d = 101$. Hãy viết số quy tròn của số a .

- A. 23749000. B. 23748000. C. 23746000. D. 23747000.

Lời giải.

Độ chính xác $d = 101$ (hàng trăm), nên ta làm tròn số $a = 23748023$ đến hàng nghìn, được kết quả là $a = 23748000$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 2. Cho giá trị gần đúng của π là $a = 3,141592653589$ với độ chính xác 10^{-10} . Hãy viết số quy tròn của số a .

- A. $a = 3,141592654$. B. $a = 3,1415926536$. C. $a = 3,141592653$. D. $a = 3,1415926535$.

Lời giải.

Độ chính xác $d = 10^{-10}$ nên ta làm tròn số $a = 3,141592653589$ chính xác đến hàng của $d \cdot 10 = 10^{-9}$ (9 chữ số thập phân), kết quả là $a = 3,141592654000$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 3. Sử dụng máy tính bỏ túi, hãy viết giá trị gần đúng của $\sqrt{3}$ chính xác đến hàng phần nghìn.

- A. 1,7320. B. 1,732. C. 1,733. D. 1,731.

Lời giải.

$\sqrt{3} = 1,7320508076 \dots$ nên ta làm tròn đến hàng phần nghìn ta được kết quả: 1,732

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 4. Sử dụng máy tính bỏ túi, hãy viết giá trị gần đúng của π^2 chính xác đến hàng phần nghìn.

- A. 9,873. B. 9,870. C. 9,872. D. 9,871.

Lời giải.

$\pi^2 = 9,8696044011 \dots$ làm tròn đến hàng phần nghìn ta được kết quả: 9,870.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 5. Hãy viết số quy tròn của số gần đúng $a = 17658$ biết $\bar{a} = 17658 \pm 16$.

- A. 17700. B. 17800. C. 17500. D. 17600.

Lời giải.

$\bar{a} = 17658 \pm 16 \Rightarrow d = 16$ (hàng chục) do đó ta làm tròn số $a = 17658$ đến hàng trăm, kết quả là: 17700

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 6. Hãy viết số quy tròn của số gần đúng $a = 15,318$ biết $\bar{a} = 15,318 \pm 0,056$.

- A. 15,3. B. 15,31. C. 15,32. D. 15,4.

Lời giải.

$\bar{a} = 15,318 \pm 0,056 \Rightarrow d = 0,056 \Rightarrow$ làm tròn số $a = 15,318$ chính xác đến hàng của $d \cdot 10 = 0,56$ (hàng phần trăm), kết quả là: 15,32.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 7. Đo độ cao một ngọn cây là $h = 347,13\text{m} \pm 0,2\text{m}$. Hãy viết số quy tròn của số gần đúng 347,13.

- A. 345. B. 347. C. 348. D. 346.

Lời giải.

$h = 347,13\text{m} \pm 0,2\text{m} \Rightarrow d = 0,2 \Rightarrow$ nên ta làm tròn số $h = 347,13$ đến hàng $d.10 = 2$ (hàng đơn vị), kết quả là 347.

Chọn đáp án **(B)** ☐

Câu 8. Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh: $a = 12\text{cm} \pm 0,2\text{cm}$; $b = 10,2\text{cm} \pm 0,2\text{cm}$; $c = 8\text{cm} \pm 0,1\text{cm}$ Tính chu vi P của tam giác đã cho.

A. $P = 30,2\text{cm} \pm 0,2\text{cm}$.

B. $P = 30,2\text{cm} \pm 1\text{cm}$.

C. $P = 30,2\text{cm} \pm 0,5\text{cm}$.

D. $P = 30,2\text{cm} \pm 2\text{cm}$.

Lời giải.

Chu vi tam giác là: $P = a + b + c = (12 + 10,2 + 8) \pm (0,2 + 0,2 + 0,1) = 30,2 \pm 0,5$.

Chọn đáp án **(C)** ☐

Câu 9. Một miếng đất hình chữ nhật có chiều rộng $x = 43\text{m} \pm 0,5\text{m}$ và chiều dài $y = 63\text{m} \pm 0,5\text{m}$. Tính chu vi P của miếng đất đã cho.

A. $P = 212\text{m} \pm 4\text{m}$.

B. $P = 212\text{m} \pm 2\text{m}$.

C. $P = 212\text{m} \pm 0,5\text{m}$.

D. $P = 212\text{m} \pm 1\text{m}$.

Lời giải.

Chu vi của miếng đất là

$$P = 2[x + y] = 2.[(43 \pm 0,5) + (63 \pm 0,5)] = 2.[(43 + 63) \pm (0,5 + 0,5)] = 212 \pm 2.$$

Chọn đáp án **(B)** ☐

Câu 10. Một thửa ruộng hình chữ nhật có chiều dài là $x = 23\text{m} \pm 0,01\text{m}$ và chiều rộng là $y = 15\text{m} \pm 0,01\text{m}$. Tính diện tích S của thửa ruộng đã cho.

A. $S = 345\text{m} \pm 0,001\text{m}$.

B. $S = 345\text{m} \pm 0,38\text{m}$.

C. $S = 345\text{m} \pm 0,01\text{m}$.

D. $S = 345\text{m} \pm 0,3801\text{m}$.

Lời giải.

Diện tích của thửa ruộng là

$$S = xy = (23 \pm 0,01) \cdot (15 \pm 0,01) = 23.15 \pm (23.0,01 + 15.0,01 + 0,01^2) = 345 \pm 0,3801.$$

Chọn đáp án **(D)** ☐

Câu 11. Kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân của $\sqrt[3]{7} = 1,912931183$ là

A. 1,91.

B. 1,92.

C. 1,913.

D. 1,912.

Lời giải.

Do làm tròn đến hai chữ số thập phân nên ta có $\sqrt[3]{7} \approx 1,91$

Chọn đáp án **(A)** ☐

Câu 12. Kết quả làm tròn đến chữ số hàng nghìn của $x = 268342534$ là

A. 268340000.

B. 2683432000.

C. 268343000.

D. 268342500.

Lời giải.

Làm tròn đến chữ số hàng nghìn ta được $x \approx 268343000$.

Chọn đáp án **(C)** ☐

Câu 13. Kết quả làm tròn đến ba chữ số thập phân của $\sqrt[3]{100} \approx 4,641588834$ là

A. 4,641.

B. 4,642.

C. 4,6416.

D. 4,64.

Lời giải.

Làm tròn đến ba chữ số thập phân ta được $x \approx 4,642$.

Chọn đáp án **(B)**

☐

Câu 14. Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của số 284,85472 là

- A. 284,86. B. 284,85. C. 284,855. D. 284,8547.

Lời giải.

Làm tròn đến hàng phần trăm của 284,85472 là 284,85.

Chọn đáp án **(B)**

☐

Câu 15. Theo thống kê dân số thế giới tính đến ngày 16/01/2017, dân số Việt Nam có 94970587 người. Kết quả làm tròn đến chữ số hàng nghìn của dân số nước ta là

- A. 94970600. B. 94971000. C. 94970500. D. 94970000.

Lời giải.

Làm tròn đến chữ số hàng nghìn của 94970587 là 94971000.

Chọn đáp án **(B)**

☐

Câu 16. Cho $\bar{a} = 1,7059 \pm 0,001$, kết quả làm tròn số $a = 1,7059$ là

- A. 1,71. B. 1,706. C. 1,7. D. 1,705.

Lời giải.

Do $d = 0,001$ nên ta làm tròn đến hàng phần trăm, do đó $a \approx 1,71$.

Chọn đáp án **(A)**

☐

Câu 17. Cho $\bar{a} = 123564 \pm 100$. Kết quả làm tròn số $x = 123564$ là

- A. 12360. B. 123000. C. 123570. D. 124000.

Lời giải.

Do $d = 100$ nên ta làm tròn đến chữ số hàng nghìn.

Chọn đáp án **(D)**

☐

Câu 18. Cho $\bar{a} = 472539 \pm 200$, kết quả quy tròn của số $a = 472539$ là

- A. 472000. B. 472500. C. 472600. D. 473000.

Lời giải.

Do $d = 200$ nên ta làm tròn đến chữ số hàng nghìn.

Chọn đáp án **(D)**

☐

Câu 19. Cho $\bar{a} = 4,72539 \pm 0,001$. Kết quả quy tròn của số 472539 là

- A. 4,73. B. 4,725. C. 4,72. D. 4,726.

Lời giải.

Do $d = 0,001$ nên ta làm tròn đến chữ số hàng phần trăm.

Chọn đáp án **(A)**

☐

Câu 20. Cho số gần đúng $x = 6341275$ với độ chính xác $d = 300$. Kết quả quy tròn của x là

- A. 6341300. B. 6341280. C. 6341000. D. 6342000.

Lời giải.

Vì độ chính xác đến hàng trăm ($d = 300$) nên ta quy tròn a đến hàng nghìn theo quy tắc làm tròn.

Chọn đáp án **(C)**

☐

Câu 21. Cho số $\bar{a} = 97975463 \pm 150$. Số quy tròn của số 97975400 là

- A. 97975460. B. 97975500. C. 97975400. D. 97975000.

Lời giải.

Số $\bar{a}$ có độ chính xác đến hàng trăm nên ta quy tròn số 97975400 đến hàng nghìn. Vậy Số quy tròn của số 97975400 là 97975000.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 22. Khi sử dụng máy tính bỏ túi với 10 chữ số thập phân ta tính được $\sqrt{3} = 1,732050808$. Giá trị gần đúng của $\sqrt{3}$ quy tròn đến hàng phần trăm là

- A. 1,70. B. 1,72. C. 1,73. D. 1,71.

Lời giải.

Giá trị gần đúng của $\sqrt{3}$ quy tròn đến hàng phần trăm là 1,73.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 23. Cho giá trị gần đúng của $\frac{8}{17}$ là 0,47. Sai số tuyệt đối của số 0,47 là

- A. 0,001. B. 0,003. C. 0,002. D. 0,004.

Lời giải.

Ta có $0,470 < \frac{8}{17} < 0,471$ nên $\left| \frac{8}{17} - 0,47 \right| < |0,471 - 0,470| = 0,001$.

Vậy sai số tuyệt đối của số 0,47 là 0,001.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 24. Cho số $a = 367\,653\,964 \pm 213$. Số quy tròn của số gần đúng 367 653 964 là

- A. 367 653 960. B. 367 653 000. C. 367 654 000. D. 367 653 970.

Lời giải.

Vì độ chính xác đến hàng trăm nên ta quy tròn số gần đúng đến hàng nghìn. Do đó, số quy tròn của số gần đúng 367 653 964 là 367 654 000.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 25. Độ dài các cạnh của một đám vườn hình chữ nhật là $x = 7,8 \text{ m} \pm 2 \text{ cm}$ và $y = 25,6 \text{ m} \pm 4 \text{ cm}$. Cách viết chuẩn của diện tích (sau khi quy tròn) là

- A. $200 \text{ m}^2 \pm 0,9 \text{ m}^2$. B. $199 \text{ m}^2 \pm 0,8 \text{ m}^2$. C. $199 \text{ m}^2 \pm 1 \text{ m}^2$. D. $200 \text{ m}^2 \pm 1 \text{ cm}^2$.

Lời giải.

Diện tích đám vườn hình chữ nhật là $S = xy = 199,68 \text{ m}^2$.

Sai số tương đối của các cạnh là $\delta_x = \frac{2}{780} = \frac{1}{390}$; $\delta_y = \frac{4}{2560} = \frac{1}{640}$.

Sai số tương đối của diện tích S là $\delta_S = \delta_x + \delta_y = \frac{103}{24960}$.

Sai số tuyệt đối của diện tích S là $\Delta_S = S \cdot \delta_S = 0,824 \text{ m}^2 \Rightarrow 0,5 < \Delta_S < 0,9$.

Vậy cách viết chuẩn là $S = 200 \text{ m}^2 \pm 0,9 \text{ m}^2$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 26. Cho số $\bar{a} = 37975421 \pm 150$. Số quy tròn của số 37975421 là

- A. 37975000. B. 37976000. C. 37970000. D. 37975400.

Lời giải.

Vì độ chính xác $d = 150$ đến hàng trăm nên ta quy tròn $a = 37975421$ đến hàng nghìn. Do đó, số quy tròn của số 37975421 là 37975000.

Chọn đáp án **(A)** ☐

Câu 27. Chiều dài của một cái cầu là $l = 1745,25 \pm 0,01$ m. Hãy viết số quy tròn của số gần đúng 1725,25.

A. 1745,3.

B. 1745,25.

C. 1725,2.

D. Tất cả đều sai.

Lời giải.

Ta phải quy tròn số 1725,25. Ta thấy $0,01 < 0,1$ nên ta phải quy tròn số 1725,25 đến hàng đơn vị. Kết quả là 1725,3.

Chọn đáp án **(D)** ☐

Câu 28. Trong một cuộc điều tra dân số, người ta báo cáo số dân của tỉnh A là $1.279.425 \pm 300$ người. Hãy viết số quy tròn số dân của tỉnh A?

A. 1.270.000 người.

B. 1.279.000 người.

C. 1.279.400 người.

D. 1.280.000 người.

Lời giải.

Vì $\frac{100}{2} = 50 < 300 < 500 = \frac{1000}{2}$ nên chữ số hàng trăm (chữ số 4) không phải là chữ số chắc, còn chữ số hàng nghìn (chữ số 9) là chữ số chắc.

Vậy số quy tròn số dân của tỉnh A là 1.279.000.

Chọn đáp án **(B)** ☐

Câu 29. Ký hiệu khoa học của số 0,000567 là

A. $567 \cdot 10^{-6}$.

B. $56,7 \cdot 10^{-5}$.

C. $5,67 \cdot 10^{-4}$.

D. $5,7 \cdot 10^{-4}$.

Lời giải.

Kí hiệu khoa học của số 0,000567 là $5,67 \cdot 10^{-4}$.

Chọn đáp án **(C)** ☐

Câu 30. Một hình chữ nhật có diện tích $S = 108,57 \text{ cm}^2 \pm 0,06 \text{ cm}^2$. Số quy tròn của S có bao nhiêu chữ số ở phần thập phân?

A. 5.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải.

Số quy tròn của S là 108,6 có 1 chữ số thập phân.

Chọn đáp án **(B)** ☐

Câu 31. Các nhà thiên văn tính được thời gian để trái đất quanh một vòng quanh mặt trời là 365 ngày. Kết quả này có độ chính xác là $\frac{1}{4}$ ngày. Khẳng định nào sau đây đúng về sai số tuyệt đối của phép đo này ?

A. $\Delta < 1$.

B. $\Delta < \frac{1}{3}$.

C. $\Delta < \frac{1}{2}$.

D. $\Delta < \frac{1}{4}$.

Lời giải.

Độ chính xác là $\frac{1}{4}$ nên $\Delta < \frac{1}{4}$.

Chọn đáp án **(D)** ☐

Câu 32. Trong các số dưới đây, giá trị gần đúng của $\sqrt{30} - 5$ với sai số tuyệt đối bé nhất là

A. 0,476.

B. 0,477.

C. 0,478.

D. 0,479.

Lời giải.

Dùng máy tính cầm tay ta tính được giá trị gần đúng của $\sqrt{30} - 5$ là 0,477225 nên giá trị gần đúng của nó với sai số tuyệt đối bé nhất trong bốn đáp án trên là 0,477.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 33. Độ cao của một ngọn núi được ghi lại như sau $\bar{h} = 1372,5m \pm 0,2m$. Độ chính xác d của phép đo trên là

- A. $d = 0,1m$. B. $d = 1m$. C. $d = 0,2m$. D. $d = 2m$.

Lời giải.

Độ chính xác $d = 0,2m$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 34. Đo chiều dài của một cây thước, ta được kết quả $\bar{a} = 45 \pm 0,3(cm)$. Khi đó sai số tuyệt đối của phép đo được ước lượng là

- A. $\Delta_{45} = 0,3$. B. $\Delta_{45} \leq 0,3$. C. $\Delta_{45} \leq -0,3$. D. $\Delta_{45} = -0,3$.

Lời giải.

Ta có độ dài gần đúng của cây thước là $a = 45$ với độ chính xác $d = 0,3$

Nên sai số tuyệt đối $\Delta_{45} \leq d = 0,3$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 35. Chiều cao của một ngọn đồi là $\bar{h} = 347,13m \pm 0,2m$. Độ chính xác d của phép đo trên là:

- A. $d = 347,33m$. B. $d = 0,2m$. C. $d = 347,13m$. D. $d = 346,93m$.

Lời giải.

Ta có độ cao gần đúng của ngọn đồi là $a = 347,13m$ với độ chính xác $d = 0,2m$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 36. Cho giá trị gần đúng của $\frac{8}{17}$ là 0,47. Sai số tuyệt đối của số 0,47 là

- A. 0,001. B. 0,003. C. 0,002. D. 0,004.

Lời giải.

Ta có $\Delta_a = \left| \frac{8}{17} - 0,47 \right| = 0,00058 < 0,001$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 37. Theo thống kê, dân số Việt Nam năm 2002 là 79715675 người. Giả sử sai số tuyệt đối của số liệu thống kê này nhỏ hơn 10000 người. Hãy viết số quy tròn của số trên.

- A. 79710000 người. B. 79716000 người. C. 79720000 người. D. 79700000 người.

Lời giải.

Vì sai số tuyệt đối của số liệu thống kê này nhỏ hơn 10000 người nên độ chính xác đến hàng nghìn nên ta quy tròn đến hàng chục nghìn.

Vậy số quy tròn của số trên là 79720000 người.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 38. Cho $\bar{a} = \frac{1}{1+x}$ ($0 < x < 1$). Giả sử ta lấy $a = 1 - x$ làm giá trị gần đúng của $\bar{a}$. Khi đó, sai số tương đối của a theo x bằng

- A. $\frac{x^2}{1-x^2}$. B. $\frac{x}{1-x}$. C. $\frac{x^2}{1-x}$. D. $\frac{x}{1-x^2}$.

Lời giải.

Ta có $\Delta_{\bar{a}} = \left| \frac{1}{1+x} - (1-x) \right| = \frac{x^2}{1+x}$. Vậy sai số tương đối là $\delta_a = \frac{\Delta_{\bar{a}}}{|1-x|} = \frac{x^2}{1-x^2}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 39. Số $\bar{a}$ được cho bởi giá trị gần đúng $a = 5,7824$ với sai số tương đối không vượt quá 0,05%. Khi đó, sai số tuyệt đối của a không vượt quá

- A. 0,0028912. B. 0,0027912. C. 0,0026912. D. 0,0025912.

Lời giải.

Ta có $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} \leq 0,0005 \Rightarrow \Delta_a \leq 0,0005 \cdot 5,7824 = 0,0028912$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 40. Các nhà toán học cổ đại Trung Quốc đã dùng phân số $\frac{22}{7}$ để xấp xỉ số π . Hãy đánh giá sai số tuyệt đối Δ của giá trị gần đúng này, biết $3,1415 < \pi < 3,1416$.

- A. $\Delta < 0,0012$. B. $\Delta < 0,0014$. C. $\Delta < 0,0013$. D. $\Delta < 0,0011$.

Lời giải.

Ta có $\frac{22}{7} < 3,1429$ và $-\pi < -3,1415$ nên $\Delta = \left| \pi - \frac{22}{7} \right| = \frac{22}{7} - \pi < 3,1429 - 3,1415 = 0,0014$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 41. Cho giá trị gần đúng của $\frac{8}{17}$ là 0,47 thì sai số tuyệt đối không vượt quá

- A. 0,01. B. 0,02. C. 0,03. D. 0,04.

Lời giải.

Ta có $\frac{8}{17} = 0,4705882\dots$. Do $0,47 < \frac{8}{17} = 0,4705882\dots < 0,48$ nên

$$\Delta = \left| \frac{8}{17} - 0,47 \right| < |0,48 - 0,47| = 0,01.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 42. Cho giá trị gần đúng của $\frac{3}{7}$ là 0,429 thì sai số tuyệt đối không vượt quá

- A. 0,002. B. 0,001. C. 0,003. D. 0,004.

Lời giải.

Ta có $\frac{3}{7} = 0,428571\dots$

Do $0,428 < \frac{3}{7} = 0,428571\dots < 0,429$ nên $\Delta = \left| 0,429 - \frac{3}{7} \right| < |0,429 - 0,428| = 0,001$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 43. Nếu lấy 3,14 làm giá trị gần đúng cho số π thì sai số tuyệt đối không vượt quá

- A. 0,01. B. 0,02. C. 0,03. D. 0,04.

Lời giải.

Ta có $\pi = 3,141592654\dots$

Do $3,14 < \pi = 3,141592654\dots < 3,15$ nên ta có $\Delta = |\pi - 3,14| < |3,15 - 3,14| = 0,01$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 44. Nếu lấy 3,1416 làm giá trị gần đúng cho π thì sai số tuyệt đối không vượt quá
 A. 0,0002. B. 0,0003. C. 0,0001. D. 0,0004.

Lời giải.

Ta có $\pi = 3,141592654\dots$. Do $3,1415 < \pi = 3,141592654\dots < 3,1416$ nên ta có

$$\Delta = |3,1416 - \pi| < |3,1416 - 3,1415| = 0,0001.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 45. Một vật có thể tích $V = 180,37 \text{ cm}^3 \pm 0,05 \text{ cm}^3$. Nếu lấy $180,37 \text{ cm}^3$ làm giá trị gần đúng cho V thì sai số tương đối của giá trị gần đúng đó không vượt quá

A. 0,03%. B. 0,01%. C. 0,02%. D. 0,001%.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \delta = \frac{\Delta}{|V|} \leq \frac{d}{|V|} = \frac{0,05}{180,37} \approx 0,03\%.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 46. Một hình chữ nhật có các cạnh là $x = 4,2 \text{ m} \pm 1 \text{ cm}$ và $y = 7 \text{ m} \pm 2 \text{ cm}$. Tính chu vi của hình chữ nhật đó và độ chính xác của kết quả đó.

A. 22,4 m và 3 cm. B. 22,4 m và 6 cm. C. 22,4 m và 2 cm. D. 22,4 m và 1 cm.

Lời giải.

$$\text{Ta có } P = 2(x + y) = 22,4 \text{ m} \pm 6 \text{ cm}.$$

Chọn đáp án **B** □

Câu 47. Đường kính d của một đồng hồ cát là $8,52 \text{ m}$ với độ chính xác đến 1 cm . Dùng giá trị gần đúng của π là $3,14$ thì cách viết chuẩn của chu vi (sau khi quy tròn) là

A. 26,5. B. 26,9. C. 26,6. D. 26,8.

Lời giải.

$$\text{Ta có } d = 8,52 \text{ m} \pm 1 \text{ cm} \Rightarrow 8,51 \text{ m} \leq d \leq 8,53 \text{ m}.$$

$$\text{Khi đó, chu vi } C = \pi d \Rightarrow 26,7214 \text{ m} \leq C \leq 26,7842 \text{ m} \Rightarrow C = 26,7528 \text{ m} \pm 0,0314 \text{ m}. \text{ Do } 0,0314 < 0,05 = \frac{0,1}{2} \text{ nên dạng chuẩn của chu vi là } 26,8.$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 48. Cho phương trình $2x^2 + 5x - 8 = 0$. Gọi x_1 là nghiệm âm của phương trình. Số quy tròn nghiệm x_1 với độ chính xác $d = 0,002$ bằng

A. -3,61. B. -3,60. C. -3,608. D. -3,6085.

Lời giải.

$$\text{Phương trình } 2x^2 + 5x - 8 = 0 \text{ có nghiệm âm là } \frac{-5 - \sqrt{89}}{4} \approx -3,61 \text{ (với độ chính xác } d = 0,002).$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 49. Cho $a = 0,2253$, $b = 1,7739$. Kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân của $a + b$ bằng

A. 2,00. B. 1,99. C. 1,98. D. 2,01.

Lời giải.

$$\text{Ta có } 0,2253 + 1,7739 = 1,9992 \text{ nên làm tròn bằng } 2,00 \text{ (đến hai chữ số thập phân).}$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 50. Tính độ dài đường chéo hình vuông có cạnh bằng 3 cm, biết $\sqrt{2} \approx 1,41421$ (lấy kết quả 3 chữ số thập phân).

- A. 4,242 cm. B. 4,243 cm. C. 4,2426 cm. D. 4,24 cm.

Lời giải.

Ta có $a = 3 \times \sqrt{2} \approx 4,24263$. Vậy $a \approx 4,243$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 51. Biết rằng tốc độ ánh sáng trong chân không là 300000 km/s. Hỏi mỗi năm (365 ngày) ánh sáng đi được trong chân không là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng tỷ)?

- A. $9461 \cdot 10^9$ km. B. $9460 \cdot 10^9$ km. C. $9 \cdot 10^{12}$ km. D. $10 \cdot 10^{12}$ km.

Lời giải.

Ánh sáng đi được trong chân không trong thời gian 1 năm là :

$$365 \times 24 \times 60 \times 60 \times 300000 = 9,4608 \cdot 10^{12} \approx 9461 \cdot 10^9 \text{ km.}$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 52. Cho tam giác với ba cạnh $a = 6,3 \text{ cm} \pm 0,1 \text{ cm}$, $b = 10 \text{ cm} \pm 0,2 \text{ cm}$ và $c = 15 \text{ cm} \pm 0,2 \text{ cm}$. Kết quả quy tròn của chu vi tam giác trên là

- A. 31 cm. B. 30 cm. C. 32 cm. D. 31,3 cm.

Lời giải.

Chu vi tam giác là $P \approx 6,3 + 10 + 15 = 31,3 \text{ cm}$. Độ chính xác là $d = 0,1 + 2 \cdot 0,2 = 0,5 \text{ cm}$.

Vậy $P \approx 31 \text{ cm}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 53. Đo độ dài ba cạnh a, b, c của một tam giác, được kết quả $a = 6,3 \text{ cm} \pm 0,1 \text{ cm}$, $b = 10 \text{ cm} \pm 0,2 \text{ cm}$, $c = 15 \text{ cm} \pm 0,2 \text{ cm}$. Chu vi của tam giác có thể có số đo lớn nhất là bao nhiêu cm?

- A. 31,3 cm. B. 31,8 cm. C. 30,8 cm. D. 32 cm.

Lời giải.

Giá trị lớn nhất của chu vi tam giác có thể là $C = 6,3 \text{ cm} + 0,1 \text{ cm} + 10 \text{ cm} + 0,2 \text{ cm} + 15 \text{ cm} \pm 0,2 \text{ cm} = 31,8 \text{ cm}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 54. Cho a là số gần đúng của số đúng $\bar{a}$. Khi đó $\Delta_a = |\bar{a} - a|$ được gọi là

- A. số quy tròn của $\bar{a}$. B. sai số tương đối của số gần đúng a .
C. sai số tuyệt đối của số gần đúng a . D. số quy tròn của a .

Lời giải.

$\Delta_a = |\bar{a} - a|$ được gọi là sai số tuyệt đối của số gần đúng a .

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 55. Cho số a là số gần đúng của số $\bar{a}$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- A. $a > \bar{a}$. B. $a < \bar{a}$. C. $|\bar{a} - a| > 0$. D. $-a < \bar{a} < a$.

Lời giải.

Do a là số gần đúng của số $\bar{a}$ nên $a > \bar{a}$ hoặc $a < \bar{a}$.

Suy ra $|\bar{a} - a| > 0$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 56. Cho số a là số gần đúng của $\bar{a}$ với độ chính xác d . Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- A. $\bar{a} = a + d$. B. $\bar{a} = a - d$. C. $\bar{a} = a$. D. $\bar{a} = a \pm d$.

Lời giải.

Nếu a là số gần đúng của $\bar{a}$ với độ chính xác d thì $\bar{a} = a \pm d$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 57. Đo chiều dài của một cây thước, ta được kết quả $\bar{a} = 45 \text{ cm} \pm 0,3 \text{ cm}$. Khi đó sai số tuyệt đối của phép đo được ước lượng là

- A. $\Delta_{45} = 0,3$. B. $\Delta_{45} \leq 0,3$. C. $\Delta_{45} \leq -0,3$. D. $\Delta_{45} = -0,3$.

Lời giải.

Sai số tuyệt đối của phép đo được ước lượng là $\Delta_{45} \leq 0,3$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 58. Kết quả làm tròn số $a = 10\sqrt{13}$ đến hàng đơn vị là

- A. $a \approx 40$. B. $a \approx 36$. C. $a \approx 36,1$. D. $a \approx 36,06$.

Lời giải.

Có $a = 10\sqrt{13} \approx 36,0555$.

Vậy làm tròn đến hàng đơn vị ta được $a \approx 36$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 59. Kết quả làm tròn số $b = 500\sqrt{7}$ đến chữ số thập phân thứ hai là

- A. $b \approx 132,88$. B. $b \approx 1322,87$. C. $b \approx 1322,8$. D. $b \approx 1322,9$.

Lời giải.

Có $b = 500\sqrt{7} \approx 1322,875656$.

Do làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai nên ta có $b \approx 1322,88$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 60. Kết quả làm tròn của số $c = 76324753,3695$ đến hàng nghìn là

- A. $c \approx 76324000$. B. $c \approx 76325000$. C. $c \approx 76324753,369$. D. $c \approx 76324753,37$.

Lời giải.

Làm tròn đến hàng nghìn của $c = 76324753,3695$ ta được $c \approx 76325000$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 61. Kết quả làm tròn số $x = 76324,7533695$ đến hàng phần chục nghìn là

- A. $x \approx 76324,75336$. B. $x \approx 76324,75337$. C. $x \approx 76324,7533$. D. $x \approx 76324,7534$.

Lời giải.

Do làm tròn đến hàng chục nghìn nên ta lấy 4 số sau dấu ,.

Suy ra $x \approx 76324,7534$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 62. Viết số quy tròn của số gần đúng $a = 505360,996$ biết $\bar{a} = 505360,996 \pm 100$.

- A. $a \approx 505$. B. $a \approx 5054$. C. $a \approx 505400$. D. $a \approx 505000$.

Lời giải.

Do $\bar{a} = 505360,996 \pm 100$ nên ta làm tròn đến hàng nghìn.

Suy ra $a \approx 505000$.

Chọn đáp án **(D)** ☐

Câu 63. Viết số quy tròn số gần đúng $b = 3257,6254$ với độ chính xác $d = 0,01$.

- A. $b \approx 3257,63$. B. $b \approx 3257,62$. C. $b \approx 3257,6$. D. $b \approx 3257,7$.

Lời giải.

Do $d = 0,01$ nên ta làm tròn đến hàng phần đơn vị. Do đó $b \approx 3257,6$.

Chọn đáp án **(C)** ☐

Câu 64. Cho giá trị gần đúng của số π là $x = 3,141592653589$ với độ chính xác 10^{-10} . Hãy viết số quy tròn của x .

- A. $x \approx 3,141592654$. B. $x \approx 3,1415926535$. C. $x \approx 3,1415926536$. D. $x \approx 3,141592653$.

Lời giải.

Do độ chính xác là 10^{-10} nên ta làm tròn đến chữ số thứ 9 sau dấu ,.

Chọn đáp án **(A)** ☐

Câu 65. Viết số quy tròn của số gần đúng $y = 505360996$ biết $\bar{y} = 505360996 \pm 10^4$.

- A. $y \approx 505300000$. B. $y \approx 505400000$. C. $y \approx 505360000$. D. $y \approx 505370000$.

Lời giải.

Do $\bar{y} = 505360996 \pm 10^4$ nên ta làm tròn đến hàng phần trăm nghìn.

Chọn đáp án **(B)** ☐

Câu 66. Độ cao của một ngọn núi được ghi lại là $\bar{h} = 1372,5 \text{ m} \pm 0,2 \text{ m}$. Độ chính xác d của phép đo trên là bao nhiêu?

- A. $d = 0,1 \text{ m}$. B. $d = 1 \text{ m}$. C. $d = 0,2 \text{ m}$. D. $d = 2 \text{ m}$.

Lời giải.

Với $\bar{h} = 1372,5 \text{ m} \pm 0,2 \text{ m}$ thì độ chính xác $d = 0,2 \text{ m}$.

Chọn đáp án **(C)** ☐

Câu 67. Cho số gần đúng $a = 23748023$ với độ chính xác $d = 101$. Hãy viết số quy tròn của số a .

- A. 23749000. B. 23748000. C. 23746000. D. 23747000.

Lời giải.

Độ chính xác $d = 101$ (hàng trăm), nên ta làm tròn số $a = 23748023$ đến hàng nghìn, được kết quả là $a = 23748000$.

Chọn đáp án **(B)** ☐

Câu 68. Cho giá trị gần đúng của π là $a = 3,141592653589$ với độ chính xác 10^{-10} . Hãy viết số quy tròn của số a .

- A. $a = 3,141592654$. B. $a = 3,1415926536$. C. $a = 3,141592653$. D. $a = 3,1415926535$.

Lời giải.

Độ chính xác $d = 10^{-10}$ nên ta làm tròn số $a = 3,141592653589$ chính xác đến hàng của $d \cdot 10 = 10^{-9}$ (9 chữ số thập phân), kết quả là $a = 3,141592654000$.

Chọn đáp án **(A)** ☐

Câu 69. Sử dụng máy tính bỏ túi, hãy viết giá trị gần đúng của $\sqrt{3}$ chính xác đến hàng phần nghìn.

- A. 1,7320. B. 1,732. C. 1,733. D. 1,731.

Lời giải.

$\sqrt{3} = 1,7320508076 \dots$ nên ta làm tròn đến hàng phần nghìn ta được kết quả: 1,732

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 70. Sử dụng máy tính bỏ túi, hãy viết giá trị gần đúng của π^2 chính xác đến hàng phần nghìn.

- A. 9,873. B. 9,870. C. 9,872. D. 9,871.

Lời giải.

$\pi^2 = 9,8696044011 \dots$ làm tròn đến hàng phần nghìn ta được kết quả: 9,870.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 71. Hãy viết số quy tròn của số gần đúng $a = 17658$ biết $\bar{a} = 17658 \pm 16$.

- A. 17700. B. 17800. C. 17500. D. 17600.

Lời giải.

$\bar{a} = 17658 \pm 16 \Rightarrow d = 16$ (hàng chục) do đó ta làm tròn số $a = 17658$ đến hàng trăm, kết quả là: 17700

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 72. Hãy viết số quy tròn của số gần đúng $a = 15,318$ biết $\bar{a} = 15,318 \pm 0,056$.

- A. 15,3. B. 15,31. C. 15,32. D. 15,4.

Lời giải.

$\bar{a} = 15,318 \pm 0,056 \Rightarrow d = 0,056 \Rightarrow$ làm tròn số $a = 15,318$ chính xác đến hàng của $d.10 = 0,56$ (hàng phần trăm), kết quả là: 15,32.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 73. Đo độ cao một ngọn cây là $h = 347,13\text{m} \pm 0,2\text{m}$. Hãy viết số quy tròn của số gần đúng 347,13.

- A. 345. B. 347. C. 348. D. 346.

Lời giải.

$h = 347,13\text{m} \pm 0,2\text{m} \Rightarrow d = 0,2 \Rightarrow$ nên ta làm tròn số $h = 347,13$ đến hàng $d.10 = 2$ (hàng đơn vị), kết quả là 347.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 74. Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh: $a = 12\text{ cm} \pm 0,2\text{ cm}$; $b = 10,2\text{ cm} \pm 0,2\text{ cm}$; $c = 8\text{ cm} \pm 0,1\text{ cm}$ Tính chu vi P của tam giác đã cho.

- A. $P = 30,2\text{ cm} \pm 0,2\text{ cm}$. B. $P = 30,2\text{ cm} \pm 1\text{ cm}$.
C. $P = 30,2\text{ cm} \pm 0,5\text{ cm}$. D. $P = 30,2\text{ cm} \pm 2\text{ cm}$.

Lời giải.

Chu vi tam giác là: $P = a + b + c = (12 + 10,2 + 8) \pm (0,2 + 0,2 + 0,1) = 30,2 \pm 0,5$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 75. Một miếng đất hình chữ nhật có chiều rộng $x = 43\text{m} \pm 0,5\text{m}$ và chiều dài $y = 63\text{m} \pm 0,5\text{m}$. Tính chu vi P của miếng đất đã cho.

- A. $P = 212\text{m} \pm 4\text{m}$. B. $P = 212\text{m} \pm 2\text{m}$. C. $P = 212\text{m} \pm 0,5\text{m}$. D. $P = 212\text{m} \pm 1\text{m}$.

Lời giải.

Chu vi của miếng đất là

$$P = 2[x + y] = 2.[(43 \pm 0,5) + (63 \pm 0,5)] = 2.[(43 + 63) \pm (0,5 + 0,5)] = 212 \pm 2.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 76. Một thửa ruộng hình chữ nhật có chiều dài là $x = 23\text{m} \pm 0,01\text{m}$ và chiều rộng là $y = 15\text{m} \pm 0,01\text{m}$. Tính diện tích S của thửa ruộng đã cho.

A. $S = 345\text{m} \pm 0,001\text{m}$.

B. $S = 345\text{m} \pm 0,38\text{m}$.

C. $S = 345\text{m} \pm 0,01\text{m}$.

D. $S = 345\text{m} \pm 0,3801\text{m}$.

Lời giải.

Diện tích của thửa ruộng là

$$S = xy = (23 \pm 0,01) \cdot (15 \pm 0,01) = 23.15 \pm (23.0,01 + 15.0,01 + 0,01^2) = 345 \pm 0,3801.$$

Chọn đáp án **D**

□

ĐÁP ÁN

1. B	2. A	3. B	4. B	5. A	6. C	7. B	8. C	9. B	10. D
11. A	12. C	13. B	14. B	15. B	16. A	17. D	18. D	19. A	20. C
21. D	22. C	23. A	24. C	25. A	26. A	27. D	28. B	29. C	30. B
31. D	32. B	33. C	34. B	35. B	36. A	37. C	38. A	39. A	40. B
41. A	42. B	43. A	44. C	45. A	46. B	47. D	48. A	49. A	50. B
51. A	52. A	53. B	54. C	55. C	56. D	57. B	58. B	59. A	60. B
61. D	62. D	63. C	64. A	65. B	66. C	67. B	68. A	69. B	70. B
71. A	72. C	73. B	74. C	75. B	76. D				

Chương 2: HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI

§1 ĐẠI CƯƠNG VỀ HÀM SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 HÀM SỐ VÀ TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ

Định nghĩa. Nếu với mỗi giá trị của x thuộc tập $\mathcal{D}$ có một và chỉ một giá trị tương ứng của y thuộc tập số thực $\mathbb{R}$ thì ta có một **hàm số**. Ta gọi x là **biến số** và y là **hàm số** của x . Tập hợp $\mathcal{D}$ được gọi là **tập xác định** của hàm số.

2 CÁCH CHO HÀM SỐ

- a) Hàm số cho bằng bảng
- b) Hàm số cho bằng biểu đồ
- c) Hàm số cho bằng công thức

Khi cho hàm số bằng công thức mà không chỉ rõ tập xác định của nó thì ta quy ước:

! Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các số thực x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

3 ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Định nghĩa. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathcal{D}$ là tập hợp tất cả các điểm $M(x; f(x))$ trên mặt phẳng tọa độ với mọi x thuộc $\mathcal{D}$.

Ta thường gặp trường hợp đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là một đường (đường thẳng, đường cong,...). Khi đó, ta nói $y = f(x)$ là **phương trình** của đường đó.

4 SỰ BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ

Định nghĩa. Hàm số $y = f(x)$ gọi là **đồng biến (tăng)** trên khoảng $(a; b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a; b) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Hàm số $y = f(x)$ gọi là **nghịch biến (giảm)** trên khoảng $(a; b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a; b) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

! Xét chiều biến thiên của một hàm số là tìm các khoảng đồng biến và các khoảng nghịch biến của hàm số đó.

5 TÍNH CHẤM LẺ CỦA HÀM SỐ

Định nghĩa. Cho hàm số $y = f(x)$ với tập xác định $\mathcal{D}$.

Hàm số $y = f(x)$ gọi là **hàm số chẵn** nếu $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ và $f(-x) = f(x)$.

Hàm số $y = f(x)$ gọi là **hàm số lẻ** nếu $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ và $f(-x) = -f(x)$.

! Đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng. Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tìm tập xác định của hàm số

Để tìm tập xác định của hàm số $y = f(x)$, ta làm như sau:

+ Tìm điều kiện để $f(x)$ có nghĩa.

+ Tập hợp các giá trị x thỏa mãn $f(x)$ có nghĩa tìm được chính là tập xác định của hàm số.

Một số trường hợp thường gặp:

$$\begin{aligned} \sqrt{f(x)} \text{ có nghĩa} &\Leftrightarrow f(x) \geq 0. \\ \frac{1}{f(x)} \text{ có nghĩa} &\Leftrightarrow f(x) \neq 0. \\ \frac{1}{\sqrt{f(x)}} \text{ có nghĩa} &\Leftrightarrow f(x) > 0. \end{aligned}$$

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 1 ❖❖❖

Ví dụ 1. Tìm tập xác định của hàm số $y = -x^3 + 3x + 2017$.

Lời giải.

Điều kiện $-x^3 + 3x + 2017$ có nghĩa $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$. □

Ví dụ 2. Tìm tập xác định của hàm số $y = x - \frac{2}{x-3}$.

Lời giải.

Điều kiện $x - \frac{2}{x-3}$ có nghĩa $\Leftrightarrow x \neq 3$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. □

Ví dụ 3. Tìm tập xác định của hàm số $y = x + \sqrt{x+1}$.

Lời giải.

Điều kiện $x + \sqrt{x+1}$ có nghĩa $\Leftrightarrow x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.

Vậy tập xác định của hàm số là $[-1; +\infty)$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm tập xác định của hàm số $y = x^4 + x^2 - 2$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$. □

Bài 2. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{x+2}{4x^2+5x-9}$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{9}{4}; 1\}$. □

Bài 3. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{3+x}{x^2+2x+5}$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$. □

Bài 4. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{x+4}}{x-2}$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $[-4; 2) \cup (2; +\infty)$. □

Bài 5. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{2x+3}{(2x-1)(x+3)}$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-3; \frac{1}{2}\}$. □

Bài 6. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{x-2}}{x-3}$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $[2; 3) \cup (3; +\infty)$. □

Bài 7. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{x-1} + \frac{x}{x+2}$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$. □

Bài 8. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{4x+2} + \frac{x}{\sqrt{-x+1}}$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $[-\frac{1}{2}; 1)$. □

Bài 9. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{x+2}{|x-1|+|x-2|}$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$. □

Bài 10. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{2}{|x| - 3}$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$. □

Dạng 2. Tính giá trị của hàm số tại một điểm

- Để tính giá trị của hàm số $f(x)$ tại $x = x_0$ ta thay thế x bởi x_0 vào công thức $f(x)$ để tính $f(x_0)$.
- Đối với các hàm số được cho bởi hai hay nhiều công thức với các miền xác định đã cho, chẳng hạn:

$$y = f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{với } x \in \mathcal{D}_1 \\ f_2(x) & \text{với } x \in \mathcal{D}_2 \end{cases}$$

Khi tính giá trị hàm số $f(x)$ tại $x = x_0$, tùy theo x_0 thuộc $\mathcal{D}_1$ hay $\mathcal{D}_2$ mà ta sử dụng công thức $f(x) = f_1(x)$ hay $f(x) = f_2(x)$ để tính $f(x_0)$.

BÀI TẬP DẠNG 2

Với hàm số $f(x)$ được cho bởi công thức phức tạp, để tính một cách nhanh và chính xác giá trị $f(x_0)$ ta sử dụng máy tính cầm tay để tính. Quy trình bấm máy:

- Nhập công thức $f(x)$;
- Bấm r;
- Nhập giá trị x_0 ;
- Bấm =.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x) = 2x^2 - 3x - 1$. Tính giá trị của hàm số đó tại $x = -2$.

Lời giải.

Ta có $f(-2) = 2(-2)^2 - 3(-2) - 1 = 13$. □

Ví dụ 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{với } x \geq 1 \\ 1 - 2x^2 & \text{với } x < 1. \end{cases}$

Tính $f(1), f(2), f(0), f(-3)$.

Lời giải.

Ta có $f(1) = 1, f(2) = 4, f(0) = 1, f(-3) = -17$. □

Ví dụ 3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 1 & \text{với } x \leq 0 \\ \frac{x+1}{x^2+x+1} & \text{với } x > 0. \end{cases}$

Tính giá trị của hàm số đó tại $x = 1; x = 0; x = -2$.

Lời giải.

Ta có $f(1) = \frac{2}{3}$; $f(0) = -1$; $f(-2) = 4$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hàm số $f(x) = -x^2 - 4x + 5$. Tính $f(-2)$.

Lời giải.

Đáp số: $f(-2) = 9$. □

Bài 2. Cho hai hàm số $f(x) = x^2 - 2x$ và $g(x) = 1 - x$. Tính giá trị $\frac{f(-1)}{g(2)}$.

Lời giải.

Đáp số: $\frac{f(-1)}{g(2)} = -3$. □

Bài 3. Cho hàm số $f(y) = 4 - \sqrt{y}$. Tính $f(4y^2)$.

Lời giải.

Đáp số: $f(4y^2) = 4 - 2y$, với $y \geq 0$. □

Bài 4. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5-x} & \text{với } x < 3 \\ \sqrt{x+5} & \text{với } x \geq 3. \end{cases}$

Tính $f(-4)$, $f(1)$, $f(4)$.

Lời giải.

Đáp số: $f(-4) = 3$, $f(1) = 2$, $f(4) = 3$. □

Bài 5. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & \text{với } x < -1 \\ 3 & \text{với } -1 \leq x < 1 \\ \sqrt{x^2 - 1} & \text{với } x \geq 1. \end{cases}$

Tính $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$.

Lời giải.

Đáp số: $f(-2) = 7$, $f(-1) = 3$, $f(0) = 3$, $f(1) = 0$, $f(2) = \sqrt{3}$. □

Bài 6. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2(x-1) & \text{với } x \leq 2 \\ \sqrt{x^2 - 2\sqrt{2}} & \text{với } x > 2. \end{cases}$

Tính $f(1)$, $f(\sqrt{2})$, $f(\sqrt{3})$, $f(\sqrt{2} + 1)$.

Lời giải.

Đáp số: $f(1) = 0$, $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 2$, $f(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - 2$, $f(\sqrt{2} + 1) = \sqrt{3}$. □

Bài 7. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{với } -4 \leq x < -1 \\ -x^2 + 2 & \text{với } -1 \leq x \leq 2 \\ 2 - x & \text{với } x > 2. \end{cases}$

Tính $f(0)$, $f(\sqrt{2})$, $f(-1)$, $f(\sqrt{2})$, $f(3)$.

Lời giải.

Đáp số: $f(0) = 2$, $f(\sqrt{2}) = 0$, $f(-1) = 1$, $f(3) = -1$. □

Bài 8. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Tính $\frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$, với $x \neq 3$.

Lời giải.

Đáp số: $\frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = -\frac{x + 3}{9x^2}$. □

Bài 9. Cho hàm số $f(x) = -x^2 + 2x + 3$. Tính $f(a)$, $f(x + 2)$ (với a là một số thực).

Lời giải.

Đáp số: $f(a) = -a^2 + 2a + 3$, $f(x + 2) = -x^2 - 2x + 3$. □

Bài 10. Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2$. Tìm giá trị của số thực a sao cho $f(a - 1) = 2$.

Lời giải.

Ta có: $f(a - 1) = a^2 - 2a - 1 = 2 \Rightarrow a = -1, a = 3$. □

Bài 11. Cho hàm số $f(x) = 2x + m$, với m là tham số. Tính m để $f(1) = 4$.

Lời giải.

Ta có: $f(1) = 2 + m = 4 \Rightarrow m = 2$. □

Dạng 3. Dùng định nghĩa xét tính đơn điệu của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K .

- Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & \forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \\ & \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in K : x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0. \end{aligned}$$

- Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & \forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \\ & \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in K : x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0. \end{aligned}$$

BÀI TẬP DẠNG 3

Ví dụ 1. Dùng định nghĩa chứng minh hàm số $y = 2x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

- Gọi x_1, x_2 là hai giá trị phân biệt tùy ý thuộc $\mathbb{R}$, ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(2x_1 + 3) - (2x_2 + 3)}{x_1 - x_2} = \frac{2(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = 2 > 0.$$

- Vậy hàm số $y = 2x + 3$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$. □

Ví dụ 2. Dùng định nghĩa xét tính đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = x^2 + 10x + 9$ trên $(-5; +\infty)$.

Lời giải.

- Gọi x_1, x_2 là hai giá trị phân biệt tùy ý thuộc $(-5; +\infty)$, ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1^2 + 10x_1 + 9) - (x_2^2 + 10x_2 + 9)}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 10)}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2 + 10.$$

- Do $x_1 > -5, x_2 > -5$ nên $x_1 + x_2 > -10 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + 10 > 0$, từ đó suy ra $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$.

- Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-5; +\infty)$. □

Ví dụ 3. Dùng định nghĩa xét tính đơn điệu của hàm số $y = \frac{4}{x+1}$ trên $(-1; +\infty)$.

Lời giải.

- Gọi x_1, x_2 là hai giá trị phân biệt tùy ý thuộc $(-1; +\infty)$, ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{4}{x_1+1} - \frac{4}{x_2+1}}{x_1 - x_2} = \frac{4(x_2 - x_1)}{(x_1+1)(x_2+1)} = \frac{-4}{(x_1+1)(x_2+1)}.$$

- Do $x_1 > -1, x_2 > -1$ nên $(x_1+1)(x_2+1) > 0$, từ đó suy ra $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$.

- Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên $(-1; +\infty)$. □

Ví dụ 4. Dùng định nghĩa xét sự biến thiên của hàm số $y = \sqrt{x-1}$ trên tập xác định.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = [1; +\infty)$.

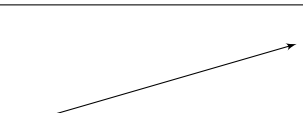
- Gọi x_1, x_2 là hai giá trị phân biệt tùy ý thuộc $[1; +\infty)$, ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\sqrt{x_1-1} - \sqrt{x_2-1}}{x_1 - x_2} = \frac{1}{\sqrt{x_1-1} + \sqrt{x_2-1}} > 0.$$

- Vậy hàm số đã cho luôn đồng biến trên tập xác định.

- Bảng biến thiên

x	1	$+\infty$
y	0	$+\infty$



Ví dụ 5. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{m}{x-2}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.
- Gọi x_1, x_2 là hai giá trị phân biệt tùy ý thuộc $(-\infty; 2)$, ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{m}{x_1 - 2} - \frac{m}{x_2 - 2}}{x_1 - x_2} = \frac{-m}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)}.$$

- Do $x_1 < 2, x_2 < 2$ nên $(x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0$, từ đó suy ra để hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 2)$ thì $m > 0$.

- Gọi x_1, x_2 là hai giá trị phân biệt tùy ý thuộc $(2; +\infty)$, ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{m}{x_1 - 2} - \frac{m}{x_2 - 2}}{x_1 - x_2} = \frac{-m}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)}.$$

- Do $x_1 > 2, x_2 > 2$ nên $(x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0$, từ đó suy ra để hàm số nghịch biến trên $(2; +\infty)$ thì $m > 0$.

- Tóm lại $m > 0$ thì hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng xác định. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Dùng định nghĩa xét tính đơn điệu của hàm số $y = -x + 5$ trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

- Gọi x_1, x_2 là hai giá trị phân biệt tùy ý thuộc $\mathbb{R}$, ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(-x_1 + 5) - (-x_2 + 5)}{x_1 - x_2} = -1 < 0.$$

- Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$. □

Bài 2. Dùng định nghĩa xét sự đồng biến nghịch biến của hàm số $y = 2x^2 + 4x + 1$ trên $(-\infty; -1)$, $(-1; +\infty)$.

Lời giải.

- Xét

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(2x_1^2 + 4x_1 + 1) - (2x_2^2 + 4x_2 + 1)}{x_1 - x_2} = 2(x_1 + x_2 + 2).$$

- Trường hợp x_1, x_2 phân biệt cùng thuộc $(-\infty; -1)$ thì $x_1 + x_2 + 2 < 0$ suy ra hàm số nghịch biến.
- Trường hợp x_1, x_2 phân biệt cùng thuộc $(-1; +\infty)$ thì $x_1 + x_2 + 2 > 0$ suy ra hàm số đồng biến. □

Bài 3. Dùng định nghĩa xét tính đơn điệu của hàm số $y = \frac{1+x}{1-x}$ trên $(-\infty; 1)$.

Lời giải.

- Gọi x_1, x_2 là hai giá trị phân biệt tùy ý thuộc $(-\infty; 1)$, ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{1+x_1}{1-x_1} - \frac{1+x_2}{1-x_2}}{x_1 - x_2} = \frac{2}{(1-x_1)(1-x_2)}.$$

- Do $x_1 < 1, x_2 < 1$ nên $(1 - x_1)(1 - x_2) > 0$, từ đó suy ra $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$.
- Vậy hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty; 1)$.

□

Bài 4. Dùng định nghĩa xét sự đồng biến nghịch biến của hàm số $y = \sqrt{3 - x}$ trên tập xác định.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = (-\infty; 3]$.
- Gọi x_1, x_2 là hai giá trị phân biệt tùy ý thuộc $\mathcal{D} = (-\infty; 3]$, ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\sqrt{3 - x_1} - \sqrt{3 - x_2}}{x_1 - x_2} = \frac{-1}{\sqrt{3 - x_1} + \sqrt{3 - x_2}} < 0.$$

- Vậy hàm số luôn nghịch biến trên tập xác định.

□

Bài 5. Dùng định nghĩa xét sự biến thiên của hàm số $y = |x - 3|$ trên tập xác định.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Xét

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{|x_1 - 3| - |x_2 - 3|}{x_1 - x_2}.$$

- Với $x_1, x_2 \in (-\infty; 3)$ thì $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(3 - x_1) - (3 - x_2)}{x_1 - x_2} = -1 < 0$.
Từ đó suy ra hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 3)$.
- Với $x_1, x_2 \in (3; +\infty)$ thì $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1 - 3) - (x_2 - 3)}{x_1 - x_2} = 1 > 0$.
Từ đó suy ra hàm số đồng biến trên $(3; +\infty)$.

- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	3	$+\infty$
y	$+\infty$	0	$+\infty$

□

Bài 6. Dùng định nghĩa xét sự đồng biến nghịch biến của hàm số $y = |\sqrt{2 - x} + 1|$ trên tập xác định.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = (-\infty; 2]$.
- Gọi x_1, x_2 là hai giá trị tùy ý thuộc $(-\infty; 2]$, ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{|\sqrt{2 - x_1} + 1| - |\sqrt{2 - x_2} + 1|}{x_1 - x_2} = \frac{-1}{\sqrt{2 - x_1} + \sqrt{2 - x_2}} < 0.$$

- Vậy hàm số đã cho luôn nghịch biến trên tập xác định.

□

Bài 7. Dùng định nghĩa xét tính đơn điệu của hàm số $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ trên $(0; 1)$, $(1; +\infty)$.

Lời giải.

- Xét biểu thức

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{x_1}{x_1^2 + 1} - \frac{x_2}{x_2^2 + 1}}{x_1 - x_2} = 1 - x_1x_2.$$

- Trường hợp $x_1, x_2 \in (0; 1)$ suy ra $0 < x_1, x_2 < 1 \Rightarrow 1 - x_1x_2 > 0$, từ đó ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0.$$

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.

- Trường hợp $x_1, x_2 \in (1; +\infty)$ suy ra $x_1, x_2 > 1 \Rightarrow 1 - x_1x_2 < 0$, từ đó ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0.$$

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

□

Bài 8. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = (m - 2)x + 5$ đồng biến trên tập xác định.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

- Gọi x_1, x_2 là hai giá trị phân biệt tùy ý thuộc $\mathbb{R}$, ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{((m - 2)x_1 + 5) - ((m - 2)x_2 + 5)}{x_1 - x_2} = \frac{(m - 2)(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = m - 2.$$

- Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > 2$.

- Vậy $m > 2$.

□

Bài 9. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{m}{x - 2}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

- Xét biểu thức

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{m}{x_1 - 2} - \frac{m}{x_2 - 2}}{x_1 - x_2} = \frac{-m}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)}.$$

- Nhận thấy trên từng khoảng xác định $(-\infty; 2)$, $(2; +\infty)$ thì tích $(x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0$, từ đó ta có để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định thì $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow -m > 0 \Leftrightarrow m < 0$.

- Vậy với $m < 0$ thì hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng xác định.

□

Bài 10. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{m+1}{x}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

- Xét biểu thức

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{m+1}{x_1} - \frac{m+1}{x_2}}{x_1 - x_2} = \frac{-(m+1)}{x_1 x_2}.$$

- Nhận thấy trên từng khoảng xác định $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$ thì tích $x_1 x_2 > 0$, từ đó ta có để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định thì $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow -(m+1) > 0 \Leftrightarrow m < -1$.

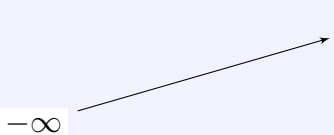
- Vậy với $m < -1$ thì hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng xác định. $\square$

Dạng 4. Tính đơn điệu của hàm bậc nhất

a) Sự biến thiên của hàm số $y = ax + b$ trên $\mathbb{R}$.

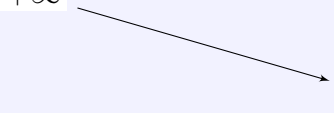
- Khi $a > 0$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
y	$-\infty$	$+\infty$



- Khi $a < 0$ hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\infty$



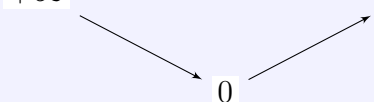
b) Sự biến thiên của hàm số $y = |x|$ trên $\mathbb{R}$.

- Ta có $y = |x| = \begin{cases} x & \text{khi } x \geq 0 \\ -x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$.

- Do đó, khi $x \geq 0$ thì $y = x$ là hàm số đồng biến, khi $x < 0$ thì $y = -x$ là hàm số nghịch biến.

- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y	$+\infty$	0	$+\infty$



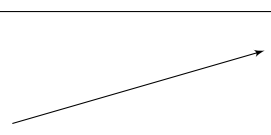
🔗🔗🔗 BÀI TẬP DẠNG 4 🔗🔗🔗

Ví dụ 1. Xét sự biến thiên của hàm số $y = 2x - 3$.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Do $a = 2 > 0$ nên hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$+\infty$
y	$-\infty$	$+\infty$



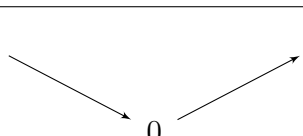
□

Ví dụ 2. Xét sự biến thiên của hàm số $y = |1 - x|$.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Ta có $y = |1 - x| = \begin{cases} x - 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 1 - x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.
- Do đó, khi $x \geq 1$ thì $y = x - 1$ là hàm số đồng biến, còn khi $x < 1$ thì $y = 1 - x$ là hàm số nghịch biến.
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$+\infty$	0	$+\infty$



□

Ví dụ 3. Xét sự biến thiên của hàm số $y = |x + 2| + |x - 2|$.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Ta có $y = |x + 2| + |x - 2| = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \geq 2 \\ 4 & \text{khi } -2 \leq x < 2 \\ -2x & \text{khi } x < -2 \end{cases}$.
- Do đó, khi $x < -2$ thì $y = -2x$ là hàm số nghịch biến, khi $-2 \leq x < 2$ thì $y = 4$ là hàm hằng, còn khi $x \geq 2$ thì $y = 2x$ là hàm đồng biến.
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
y	$+\infty$			$+\infty$
		4	4	

□

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = (1 - 2m)x + (3m + 2)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên tập xác định.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Để hàm số $y = (1 - 2m)x + (3m + 2)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$1 - 2m < 0 \Leftrightarrow 1 < 2m \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}.$$

- Vậy với $m > \frac{1}{2}$ thì hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = -\frac{1}{2}x + 5$.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Do $a = -\frac{1}{2} < 0$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

□

Bài 2. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = 3x - 1$.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Do $a = 3 > 0$ nên hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

□

Bài 3. Xét sự đồng biến nghịch biến của hàm số $y = |2x - 1|$.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Ta có $y = |2x - 1| = \begin{cases} 1 - 2x & \text{khi } x < \frac{1}{2} \\ 2x - 1 & \text{khi } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$.
- Từ đó ta có
 - + Với $x < \frac{1}{2}$ thì hàm số $y = 1 - 2x$ nghịch biến.
 - + Với $x \geq \frac{1}{2}$ thì hàm số $y = 2x - 1$ đồng biến.

□

Bài 4. Xét sự biến thiên của hàm số $y = \sqrt{x^2 + 6x + 9}$.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Ta có $y = \sqrt{(x+3)^2} = |x+3|$.
- Với $x < -3$ thì $y = -x - 3$ là hàm nghịch biến.
- Với $x \geq -3$ thì $y = x + 3$ là hàm số đồng biến.

□

Bài 5. Xét sự biến thiên của hàm số $y = |1 - x| + |2x + 4|$.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Với $x < -2$ thì $y = -3x - 3$ là hàm số nghịch biến.
- Với $-2 \leq x \leq 1$ thì $y = x + 5$ là hàm số đồng biến.
- Với $x > 1$ thì $y = 3x + 3$ là hàm số đồng biến.

□

Bài 6. Xét sự biến thiên của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} - 2|x - 1|$.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Ta có $y = |x - 2| - 2|x - 1| = \begin{cases} x & \text{khi } x < 1 \\ -3x + 4 & \text{khi } 1 \leq x < 2 \\ -x & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
y	$-\infty$	1	-2	$-\infty$

□

Bài 7. Xác định a để hàm số $y = (2a + 3)x + a - 1$ đồng biến trên tập xác định.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Để hàm số đồng biến trên tập xác định khi và chỉ khi $2a + 3 > 0 \Leftrightarrow 2a > -3 \Leftrightarrow a > -\frac{3}{2}$.
- Vậy với $a > -\frac{3}{2}$ thì hàm số đã cho đồng biến trên tập xác định.

□

Bài 8. Cho hàm số $y = (m - 1)x + (2 - m)$. Biện luận tính đơn điệu của hàm số đã cho theo tham số m .

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

- Ta có, khi $m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$ thì hàm số nghịch biến, khi $m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$ thì hàm số đồng biến, còn khi $m = 1$ thì $y = 1$ là hàm hằng. $\square$

Dạng 5. Xét tính chẵn lẻ của hàm số

- Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $\mathcal{D}$ được gọi là hàm số chẵn khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \forall x \in \mathcal{D} \text{ thì } -x \in \mathcal{D}, \\ \forall x \in \mathcal{D}, f(-x) = f(x). \end{cases}$$

- Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $\mathcal{D}$ được gọi là hàm số lẻ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \forall x \in \mathcal{D} \text{ thì } -x \in \mathcal{D}, \\ \forall x \in \mathcal{D}, f(-x) = -f(x). \end{cases}$$

- Đồ thị hàm số chẵn đối xứng qua trục Oy .
- Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 5 ❖❖❖

Ví dụ 1. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = x^2 + 3$.

Lời giải.

TXĐ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ do đó với $x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$; $f(-x) = (-x)^2 + 3 = x^2 + 3 = f(x)$. Vậy hàm đang xét là hàm chẵn. $\square$

Ví dụ 2. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = \frac{1}{x^3}$.

Lời giải.

TXĐ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ suy ra $x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$; $f(-x) = \frac{1}{(-x)^3} = -\frac{1}{x^3} = -f(x)$. Vậy hàm đang xét là hàm lẻ. $\square$

Ví dụ 3. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = \sqrt{2x - 3}$.

Lời giải.

TXĐ $\mathcal{D} = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$, do đó $x = 4 \in \mathcal{D}$ thì $-x = -4 \notin \mathcal{D}$. Vậy hàm đang xét không chẵn, không lẻ. $\square$

Ví dụ 4. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = 3$.

Lời giải.

TXĐ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, $f(-x) = 3 = f(x)$, $\forall x$. Vậy hàm đang xét là hàm chẵn. $\square$

Ví dụ 5. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = x^4 + 3x^3 - 2$.

Lời giải.

TXĐ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^4 + 3(-x)^3 - 2 = x^4 - 3x^3 - 2 \neq \pm f(x)$. Vậy hàm đã cho không chẵn, không lẻ. □

Ví dụ 6. Có hàm số nào vừa chẵn, vừa lẻ không?

Lời giải.

Hàm số $y = 0$. □

Ví dụ 7. Tìm m để hàm số $y = x^2 + (m + 1)x + 2$ là hàm chẵn.

Lời giải.

TXĐ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Hàm đã cho là hàm số chẵn khi $f(-x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$ hay $(m - 1)x = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ hay $m = 1$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau

a) $f(x) = \sqrt{3x - 4}$

b) $f(x) = \frac{2x^2 - 4}{x}$

c) $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 4}$

d) $f(x) = -5$

e) $f(x) = 0$

f) $f(x) = -x^4 + 5x - 3$

g) $f(x) = \frac{-x^4 + x^2 + 1}{3x}$

h) $f(x) = -5x^3 + 7x$

i) $f(x) = |-x + 5| - |x + 5|$

j) $f(x) = |7 - 5x| + |5x + 7|$

k) $f(x) = \frac{|x + 3| + |x - 3|}{|x + 3| - |x - 3|}$

l) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9} + \left| \frac{x - 4}{x + 4} \right| + \left| \frac{x + 4}{x - 4} \right|$

m) $f(x) = \begin{cases} 5 - x, & x \geq 0 \\ 5 + x, & x < 0. \end{cases}$

Bài 2. Tùy theo m , hãy xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau

a) $y = f(x) = \frac{1}{mx^2 + 2(m - 1)x - m}$.

b) $y = f(x) = \frac{1}{(m + 1)x^2 + mx - 1}$.

Bài 3. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + (m^2 - 1)x^2 + m - 1$. Tìm m để hàm số là hàm lẻ.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 4. Cho hàm số $f(x) = x^2 - x + 1$. Tính $f(x+h) - f(h)$ (với h là một số thực).

Lời giải.

Đáp số: $f(x+h) - f(h) = x^2 + 2xh - x$. □

Bài 5. Một quả bóng chày được đánh lên ở độ cao 1 mét so với mặt đất. Đường đi của quả bóng chày được cho bởi hàm số $y = f(x) = -0,0097x^2 + x + 1$. Trong đó x và $f(x)$ được tính bằng mét. Hỏi quả bóng có bay qua được một hàng rào cao 4 mét và nằm cách vị trí người đánh bóng 100 mét hay không?

Lời giải.

Vì hàng rào cách người đánh bóng 100 mét nên ta tính độ cao quả bóng tại vị trí $x = 100$.

Ta có $f(100) = 4$. Ta thấy ở tại vị trí hàng rào thì độ cao của quả bóng cao hơn hàng rào nên quả bóng sẽ bay qua được hàng rào. □

Bài 6. Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{5+x+2\sqrt{x+4}}$.

- Tìm tập xác định của hàm số.
- Xét tính chẵn lẻ của hàm số.
- Xét tính đơn điệu của hàm số.
- Lập bảng biến thiên của hàm số.
- Tính các giá trị $f(-5)$, $f(-4)$, $f(-3)$, $f(0)$.

Lời giải.

- Hàm số xác định khi
$$\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 5+x+2\sqrt{x+4} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ (\sqrt{x+4}+1)^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -4.$$

Vậy ta có tập xác định của hàm số $\mathcal{D} = [-4; +\infty)$.

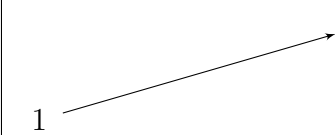
- Hàm số không chẵn cũng không lẻ do $4 \in \mathcal{D}$ nhưng $-4 \notin \mathcal{D}$.
- Ta có $y = \sqrt{(\sqrt{x+4}+1)^2} = \sqrt{x+4} + 1$. Với mọi x_1, x_2 phân biệt lớn hơn -4 ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(\sqrt{x_1+4}+1) - (\sqrt{x_2+4}+1)}{x_1 - x_2} = \frac{1}{\sqrt{x_1+4} + \sqrt{x_2+4}} > 0.$$

Vậy hàm số đã cho luôn đồng biến trên tập xác định.

- Bảng biến thiên

x	-4	$+\infty$
y	1	$+\infty$



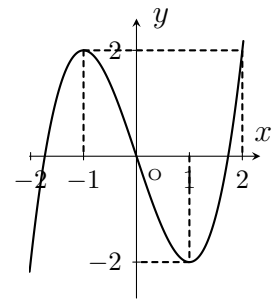
- Ta có
 - $f(-5)$ không xác định do $-5 \notin \mathcal{D}$.
 - $f(-4) = 1$.
 - $f(-3) = 2$.
 - $f(0) = 3$.

□

Bài 7.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

- a) Tìm các khoảng đồng biến, các khoảng nghịch biến của hàm số.
b) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 2]$.



Lời giải.

a) Từ đồ thị, ta có hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

b) Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$ là 2 và -2

□

C CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Điểm nào sau đây thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x-1}$?

- A. $M_1(2; 1)$. B. $M_2(1; 1)$. C. $M_3(2; 0)$. D. $M_4(0; -2)$.

Lời giải.

Xét điểm M_1 , thay $x = 2$ và $y = 1$ vào hàm số $y = \frac{1}{x-1}$ ta được $1 = \frac{1}{2-1}$ ta thấy đúng nên nhận M_1 .

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 2. Điểm nào sau đây **không** thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x}$?

- A. $A(2; 0)$. B. $B\left(3; \frac{1}{3}\right)$. C. $C(1; -1)$. D. $D(-1; -3)$.

Lời giải.

Thay từng đáp án vào hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x}$.

- Với $x = 2$ và $y = 0$, ta được $0 = \frac{\sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 + 4}}{2}$ (đúng).
- Với $x = 3$ và $y = \frac{1}{3}$, ta được $\frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3^2 - 4 \cdot 3 + 4}}{3}$ (đúng).
- Với thay $x = 1$ và $y = -1$, ta được $-1 = \frac{\sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 + 4}}{1} \Leftrightarrow -1 = 1$ (sai).

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x) = |-5x|$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. $f(-1) = 5$. B. $f(2) = 10$. C. $f(-2) = 10$. D. $f\left(\frac{1}{5}\right) = -1$.

Lời giải.

Ta có

- $f(-1) = |-5 \cdot (-1)| = |5| = 5$.
- $f(2) = |-5 \cdot 2| = |-10| = 10$.
- $f(-2) = |-5 \cdot (-2)| = |10| = 10$.
- $f\left(\frac{1}{5}\right) = \left|-5 \cdot \frac{1}{5}\right| = |-1| = 1$

Cách khác: Vì hàm đã cho là hàm trị tuyệt đối nên không âm. Do đó $f\left(\frac{1}{5}\right) = -1$ là sai.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x-1} & , x \in (-\infty; 0) \\ \sqrt{x+1} & , x \in [0; 2] \\ x^2 - 1 & , x \in (2; 5] \end{cases}$. Tính giá trị của $f(4)$.

- A. $f(4) = \frac{2}{3}$. B. $f(4) = 15$. C. $f(4) = \sqrt{5}$. D. Không tính được.

Lời giải.

Do $4 \in (2; 5]$ nên $f(4) = 4^2 - 1 = 15$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{x+2}-3}{x-1} & , x \geq 2 \\ x^2 + 1 & , x < 2 \end{cases}$. Tính $P = f(2) + f(-2)$.

- A. $P = \frac{8}{3}$. B. $P = 4$. C. $P = 6$. D. $P = \frac{5}{3}$.

Lời giải.

- Khi $x \geq 2$ thì $f(2) = \frac{2\sqrt{2+2}-3}{2-1} = 1$.
- Khi $x < 2$ thì $f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$.

Vậy $f(2) + f(-2) = 6$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 6. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{3x-1}{2x-2}$.

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. B. $\mathcal{D} = (1; +\infty)$. C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. D. $\mathcal{D} = [1; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $2x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 7. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{2x-1}{(2x+1)(x-3)}$.

- A. $\mathcal{D} = (3; +\infty)$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}; 3\right\}$. C. $\mathcal{D} = \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} 2x+1 \neq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{1}{2} \\ x \neq 3. \end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}; 3\right\}$

Chọn đáp án **B** □

Câu 8. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{x^2+1}{x^2+3x-4}$.

- A. $\mathcal{D} = \{1; -4\}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1; -4\}$. C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1; 4\}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $x^2 + 3x - 4 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -4 \end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1; -4\}$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 9. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{x+1}{(x+1)(x^2+3x+4)}$.

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. B. $\mathcal{D} = \{-1\}$. C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ x^2+3x+4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq -1$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 10. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{2x+1}{x^3-3x+2}$.

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$. C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $x^3 - 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-2) \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \neq 0 \\ x^2+x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -2 \end{cases}.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 11. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \sqrt{x+2} - \sqrt{x+3}$.

- A. $\mathcal{D} = [-3; +\infty)$. B. $\mathcal{D} = [-2; +\infty)$. C. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. D. $\mathcal{D} = [2; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -2$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = [-2; +\infty)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 12. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \sqrt{6-3x} - \sqrt{x-1}$.

- A. $\mathcal{D} = (1; 2)$. B. $\mathcal{D} = [1; 2]$. C. $\mathcal{D} = [1; 3]$. D. $\mathcal{D} = [-1; 2]$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} 6-3x \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = [1; 2]$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 13. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{\sqrt{3x-2}+6x}{\sqrt{4-3x}}$.

- A. $\mathcal{D} = \left[\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$. B. $\mathcal{D} = \left[\frac{3}{2}; \frac{4}{3}\right)$. C. $\mathcal{D} = \left[\frac{2}{3}; \frac{3}{4}\right)$. D. $\mathcal{D} = \left(-\infty; \frac{4}{3}\right)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} 3x-2 \geq 0 \\ 4-3x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x < \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq x < \frac{4}{3}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \left[\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 14. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{x+4}{\sqrt{x^2-16}}$.

- A. $\mathcal{D} = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
C. $\mathcal{D} = (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$. D. $\mathcal{D} = (-4; 4)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $x^2 - 16 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x < -4 \end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 15. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x - 3}$.

A. $\mathcal{D} = (-\infty; 3]$.

B. $\mathcal{D} = [1; 3]$.

C. $\mathcal{D} = [3; +\infty)$.

D. $\mathcal{D} = (3; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x^2 - 2x + 1 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = [3; +\infty)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 16. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{\sqrt{2-x} + \sqrt{x+2}}{x}$.

A. $\mathcal{D} = [-2; 2]$.

B. $\mathcal{D} = (-2; 2) \setminus \{0\}$.

C. $\mathcal{D} = [-2; 2] \setminus \{0\}$.

D. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ x + 2 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq -2 \\ x \neq 0 \end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = [-2; 2] \setminus \{0\}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 17. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2 - x - 6}$.

A. $\mathcal{D} = \{3\}$.

B. $\mathcal{D} = [-1; +\infty) \setminus \{3\}$.

C. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

D. $\mathcal{D} = [-1; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x^2 - x - 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq 3 \\ x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq 3 \end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = [-1; +\infty) \setminus \{3\}$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 18. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \sqrt{6-x} + \frac{2x+1}{1+\sqrt{x-1}}$.

A. $\mathcal{D} = (1; +\infty)$.

B. $\mathcal{D} = [1; 6]$.

C. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

D. $\mathcal{D} = (1; 6)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} 6 - x \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \\ 1 + \sqrt{x-1} \neq 0 \text{ (luôn đúng)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 6$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = [1; 6]$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 19. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{x+1}{(x-3)\sqrt{2x-1}}$.

A. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

B. $\mathcal{D} = \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{3\}$.

C. $\mathcal{D} = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{3\}$.

D. $\mathcal{D} = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{3\}$.

Lời giải.

$$\text{Hàm số xác định khi } \begin{cases} x - 3 \neq 0 \\ 2x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy tập xác định của hàm số là } \mathcal{D} = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{3\}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 20. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{\sqrt{x+2}}{x\sqrt{x^2-4x+4}}$.

A. $\mathcal{D} = [-2; +\infty) \setminus \{0; 2\}$.

B. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

C. $\mathcal{D} = [-2; +\infty)$.

D. $\mathcal{D} = (-2; +\infty) \setminus \{0; 2\}$.

Lời giải.

$$\text{Hàm số xác định khi } \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x \neq 0 \\ x^2-4x+4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x \neq 0 \\ (x-2)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy tập xác định của hàm số là } \mathcal{D} = [-2; +\infty) \setminus \{0; 2\}.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 21. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{x}{x - \sqrt{x} - 6}$.

A. $\mathcal{D} = [0; +\infty) \setminus \{3\}$.

B. $\mathcal{D} = [0; +\infty) \setminus \{9\}$.

C. $\mathcal{D} = [0; +\infty) \setminus \{\sqrt{3}\}$.

D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{9\}$.

Lời giải.

$$\text{Hàm số xác định khi } \begin{cases} x \geq 0 \\ x - \sqrt{x} - 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 9 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy tập xác định của hàm số là } \mathcal{D} = [0; +\infty) \setminus \{9\}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 22. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x^2+x+1}$.

A. $\mathcal{D} = (1; +\infty)$.

B. $\mathcal{D} = \{1\}$.

C. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

D. $\mathcal{D} = (-1; +\infty)$.

Lời giải.

$$\text{Hàm số xác định khi } x^2 + x + 1 \neq 0 \text{ luôn đúng với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Vậy tập xác định của hàm số là } \mathcal{D} = \mathbb{R}.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 23. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{4-x}}{(x-2)(x-3)}$.

A. $\mathcal{D} = [1; 4]$.

B. $\mathcal{D} = (1; 4) \setminus \{2; 3\}$.

C. $\mathcal{D} = [1; 4] \setminus \{2; 3\}$.

D. $\mathcal{D} = (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$.

Lời giải.

$$\text{Hàm số xác định khi } \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 4 \\ x \neq 2 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ x \neq 2 \\ x \neq 3. \end{cases}$$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = [1; 4] \setminus \{2; 3\}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 24. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \sqrt{\sqrt{x^2 + 2x + 2} - (x + 1)}$.

- A. $\mathcal{D} = (-\infty; -1)$. B. $\mathcal{D} = [-1; +\infty)$. C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\sqrt{x^2 + 2x + 2} - (x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{(x + 1)^2 + 1} \geq x + 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 < 0 \\ (x + 1)^2 + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 < 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 25. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{2018}{\sqrt[3]{x^2 - 3x + 2} - \sqrt[3]{x^2 - 7}}$.

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
C. $\mathcal{D} = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\sqrt[3]{x^2 - 3x + 2} - \sqrt[3]{x^2 - 7} \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2} \neq \sqrt[3]{x^2 - 7}$
 $\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \neq x^2 - 7 \Leftrightarrow 9 \neq 3x \Leftrightarrow x \neq 3$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 26. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{|x|}{|x - 2| + |x^2 + 2x|}$.

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 0\}$. C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 2\}$. D. $\mathcal{D} = (2; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $|x - 2| + |x^2 + 2x| \neq 0$.

Xét phương trình $|x - 2| + |x^2 + 2x| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x - 2| = 0 \\ |x^2 + 2x| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 0 \vee x = -2. \end{cases}$

Vậy không có giá trị x làm cho $|x - 2| + |x^2 + 2x| = 0$, do đó $|x - 2| + |x^2 + 2x| \neq 0$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 27. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{2x - 1}{\sqrt{x|x - 4|}}$.

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0; 4\}$. B. $\mathcal{D} = (0; +\infty)$. C. $\mathcal{D} = [0; +\infty) \setminus \{4\}$. D. $\mathcal{D} = (0; +\infty) \setminus \{4\}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $x|x-4| > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x-4| \neq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 4 \\ x > 0 \end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = (0; +\infty) \setminus \{4\}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 28. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{\sqrt{5-3|x|}}{x^2+4x+3}$.

A. $\mathcal{D} = \left[-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right] \setminus \{-1\}$.

B. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

C. $\mathcal{D} = \left(-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right) \setminus \{-1\}$.

D. $\mathcal{D} = \left[-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right]$.

Lời giải.

$$\text{Hàm số xác định khi } \begin{cases} 5-3|x| \geq 0 \\ x^2+4x+3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq \frac{5}{3} \\ x \neq -1 \\ x \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{3} \leq x \leq \frac{5}{3} \\ x \neq -1 \\ x \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{3} \leq x \leq \frac{5}{3} \\ x \neq -1. \end{cases}$$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \left[-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right] \setminus \{-1\}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 29. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-x} & ; x \geq 1 \\ \sqrt{2-x} & ; x < 1. \end{cases}$

A. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

B. $\mathcal{D} = (2; +\infty)$.

C. $\mathcal{D} = (-\infty; 2)$.

D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Lời giải.

$$\text{Hàm số xác định khi } \begin{cases} \begin{cases} x \geq 1 \\ 2-x \neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1 \\ x \leq 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq 2 \end{cases} \\ x < 1. \end{cases}$$

Vậy xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 30. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & ; x \geq 1 \\ \sqrt{x+1} & ; x < 1. \end{cases}$

A. $\mathcal{D} = \{-1\}$.

B. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

C. $\mathcal{D} = [-1; +\infty)$.

D. $\mathcal{D} = [-1; 1)$.

Lời giải.

$$\text{Hàm số xác định khi } \begin{cases} \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1 \\ x \geq -1 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy xác định của hàm số là $\mathcal{D} = [-1; +\infty)$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 31. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \sqrt{x-m+1} + \frac{2x}{\sqrt{-x+2m}}$ xác định trên khoảng $(-1; 3)$.

A. Không có giá trị m thỏa mãn.B. $m \geq 2$.C. $m \geq 3$.D. $m \geq 1$.**Lời giải.**

$$\text{Hàm số xác định khi } \begin{cases} x - m + 1 \geq 0 \\ -x + 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m - 1 \\ x < 2m. \end{cases}$$

Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = [m - 1; 2m)$ với điều kiện $m - 1 < 2m \Leftrightarrow m > -1$.Hàm số đã cho xác định trên $(-1; 3)$ khi và chỉ khi $(-1; 3) \subset [m - 1; 2m)$

$$\Leftrightarrow m - 1 \leq -1 < 3 \leq 2m \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Vậy không có giá trị m thỏa bài toán.Chọn đáp án **A**

□

Câu 32. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x + 2m + 2}{x - m}$ xác định trên $(-1; 0)$.

A. $\begin{cases} m > 0 \\ m < -1 \end{cases}$.

B. $m \leq -1$.

C. $\begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq -1 \end{cases}$.

D. $m \geq 0$.

Lời giải.Hàm số xác định khi $x - m \neq 0 \Leftrightarrow x \neq m$. Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

$$\text{Hàm số xác định trên } (-1; 0) \text{ khi và chỉ khi } m \notin (-1; 0) \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq -1. \end{cases}$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 33. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{mx}{\sqrt{x - m + 2} - 1}$ xác định trên $(0; 1)$.

A. $m \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right] \cup \{2\}$.

B. $m \in (-\infty; -1] \cup \{2\}$.

C. $m \in (-\infty; 1] \cup \{3\}$.

D. $m \in (-\infty; 1] \cup \{2\}$.

Lời giải.

$$\text{Hàm số xác định khi } \begin{cases} x - m + 2 \geq 0 \\ \sqrt{x - m + 2} - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m - 2 \\ x \neq m - 1. \end{cases}$$

Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = [m - 2; +\infty) \setminus \{m - 1\}$.Hàm số xác định trên $(0; 1)$ khi và chỉ khi $(0; 1) \subset [m - 2; +\infty) \setminus \{m - 1\}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 \leq 0 < 1 \leq m - 1 \\ m - 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 \\ m \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m \leq 1. \end{cases}$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 34. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \sqrt{x - m} + \sqrt{2x - m - 1}$ xác định trên $(0; +\infty)$.

A. $m \leq 0$.

B. $m \geq 1$.

C. $m \leq 1$.

D. $m \leq -1$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x - m \geq 0 \\ 2x - m - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m \\ x \geq \frac{m+1}{2} \end{cases} (*)$.

- Nếu $m \geq \frac{m+1}{2} \Leftrightarrow m \geq 1$ thì $(*) \Leftrightarrow x \geq m$.

Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = [m; +\infty)$. Khi đó, hàm số xác định trên $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi $(0; +\infty) \subset [m; +\infty) \Leftrightarrow m \leq 0 \Rightarrow$ Không thỏa mãn điều kiện $m \geq 1$.

- Nếu $m \leq \frac{m+1}{2} \Leftrightarrow m \leq 1$ thì $(*) \Leftrightarrow x \geq \frac{m+1}{2}$.

Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \left[\frac{m+1}{2}; +\infty\right)$. Khi đó, hàm số xác định trên $(0; +\infty)$ khi và

chỉ khi $(0; +\infty) \subset \left[\frac{m+1}{2}; +\infty\right) \Leftrightarrow \frac{m+1}{2} \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -1$.

$\Rightarrow$ Thỏa mãn điều kiện $m \leq 1$.

Vậy $m \leq -1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 35. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-6x+m-2}}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

- A. $m \geq 11$. B. $m > 11$. C. $m < 11$. D. $m \leq 11$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $x^2 - 6x + m - 2 > 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + m - 11 > 0$.

Hàm số xác định với $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x-3)^2 + m - 11 > 0$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m - 11 > 0 \Leftrightarrow m > 11$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 36. Cho hàm số $f(x) = 4 - 3x$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty; \frac{4}{3}\right)$. B. Hàm số nghịch biến trên $\left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$.
C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. D. Hàm số đồng biến trên $\left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

Lời giải.

TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ và $x_1 < x_2$, ta có $f(x_1) - f(x_2) = (4 - 3x_1) - (4 - 3x_2) = -3(x_1 - x_2) > 0$.

Suy ra $f(x_1) > f(x_2)$. Do đó, hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $\left(\frac{4}{3}; +\infty\right) \subset \mathbb{R}$ nên hàm số cũng nghịch biến trên $\left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 37. Xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 5$ trên khoảng $(-\infty; 2)$ và trên khoảng $(2; +\infty)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 2)$, đồng biến trên $(2; +\infty)$.
B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2)$, nghịch biến trên $(2; +\infty)$.
C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.
D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $f(x_1) - f(x_2) = (x_1^2 - 4x_1 + 5) - (x_2^2 - 4x_2 + 5) = (x_1^2 - x_2^2) - 4(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 4)$.

Với mọi $x_1, x_2 \in (-\infty; 2)$ và $x_1 < x_2$. Ta có $\begin{cases} x_1 < 2 \\ x_2 < 2 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 < 4$.

Suy ra $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 4)}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2 - 4 < 0$.

Vậy hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 2)$.

Với mọi $x_1, x_2 \in (2; +\infty)$ và $x_1 < x_2$. Ta có $\begin{cases} x_1 > 2 \\ x_2 > 2 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 > 4$.

Suy ra $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 4)}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2 - 4 > 0$.

Vậy hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 38. Xét sự biến thiên của hàm số $f(x) = \frac{3}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- C. Hàm số vừa đồng biến, vừa nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- D. Hàm số không đồng biến, cũng không nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $f(x_1) - f(x_2) = \frac{3}{x_1} - \frac{3}{x_2} = \frac{3(x_2 - x_1)}{x_1 x_2} = -\frac{3(x_1 - x_2)}{x_1 x_2}$.

Với mọi $x_1, x_2 \in (0; +\infty)$ và $x_1 < x_2$. Ta có $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 > 0$.

Suy ra $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = -\frac{3}{x_1 x_2} < 0 \Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 39. Xét sự biến thiên của hàm số $f(x) = x + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(1; +\infty)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- C. Hàm số vừa đồng biến, vừa nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- D. Hàm số không đồng biến, cũng không nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $f(x_1) - f(x_2) = \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) - \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) = (x_1 - x_2) + \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) = (x_1 - x_2) \left(1 - \frac{1}{x_1 x_2}\right)$.

Với mọi $x_1, x_2 \in (1; +\infty)$ và $x_1 < x_2$. Ta có $\begin{cases} x_1 > 1 \\ x_2 > 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 > 1 \Rightarrow \frac{1}{x_1 \cdot x_2} < 1$.

Suy ra $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = 1 - \frac{1}{x_1 x_2} > 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 40. Xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số $f(x) = \frac{x-3}{x+5}$ trên khoảng $(-\infty; -5)$ và trên khoảng $(-5; +\infty)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -5)$, đồng biến trên $(-5; +\infty)$.
 B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -5)$, nghịch biến trên $(-5; +\infty)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -5)$ và $(-5; +\infty)$.
 D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -5)$ và $(-5; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \left(\frac{x_1 - 3}{x_1 + 5} \right) - \left(\frac{x_2 - 3}{x_2 + 5} \right) \\ &= \frac{(x_1 - 3)(x_2 + 5) - (x_2 - 3)(x_1 + 5)}{(x_1 + 5)(x_2 + 5)} \\ &= \frac{8(x_1 - x_2)}{(x_1 + 5)(x_2 + 5)}. \end{aligned}$$

Với mọi $x_1, x_2 \in (-\infty; -5)$ và $x_1 < x_2$. Ta có $\begin{cases} x_1 < -5 \\ x_2 < -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 5 < 0 \\ x_2 + 5 < 0 \end{cases}$.

Suy ra $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{8}{(x_1 + 5)(x_2 + 5)} > 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $(-\infty; -5)$.

Với mọi $x_1, x_2 \in (-5; +\infty)$ và $x_1 < x_2$. Ta có $\begin{cases} x_1 > -5 \\ x_2 > -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 5 > 0 \\ x_2 + 5 > 0 \end{cases}$.

Suy ra $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{8}{(x_1 + 5)(x_2 + 5)} > 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $(-5; +\infty)$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 41. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{2x - 7}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên $\left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$.
 B. Hàm số đồng biến trên $\left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$.
 C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
 D. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Tập xác định là $\mathcal{D} = \left[\frac{7}{2}; +\infty\right)$ nên ta loại đáp án C và D.

$$\text{Xét } f(x_1) - f(x_2) = \sqrt{2x_1 - 7} - \sqrt{2x_2 - 7} = \frac{2(x_1 - x_2)}{\sqrt{2x_1 - 7} + \sqrt{2x_2 - 7}}.$$

Với mọi $x_1, x_2 \in \left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$ và $x_1 < x_2$, ta có $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{2}{\sqrt{2x_1 - 7} + \sqrt{2x_2 - 7}} > 0$.

Vậy hàm số đồng biến trên $\left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 42. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-3; 3]$ để hàm số $f(x) = (m + 1)x + m - 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. 7. B. 5. C. 4. D. 3.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Với mọi $x_1, x_2 \in \mathcal{D}$ và $x_1 < x_2$.

$$\text{Ta có } f(x_1) - f(x_2) = [(m + 1)x_1 + m - 2] - [(m + 1)x_2 + m - 2] = (m + 1)(x_1 - x_2).$$

Suy ra $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = m + 1$.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1 \xrightarrow{m \in [-3; 3]} m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0; 1; 2; 3\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án **C** □

Câu 43. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -x^2 + (m - 1)x + 2$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.

A. $m < 5$.

B. $m > 5$.

C. $m < 3$.

D. $m > 3$.

Lời giải.

Với mọi $x_1 \neq x_2$, ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{[-x_1^2 + (m - 1)x_1 + 2] - [-x_2^2 + (m - 1)x_2 + 2]}{x_1 - x_2} = -(x_1 + x_2) + m - 1.$$

Để hàm số nghịch biến trên $(1; 2) \Leftrightarrow -(x_1 + x_2) + m - 1 < 0$, với mọi $x_1, x_2 \in (1; 2)$

$\Leftrightarrow m < (x_1 + x_2) + 1$, với mọi $x_1, x_2 \in (1; 2) \Leftrightarrow m < (1 + 1) + 1 = 3$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 44.

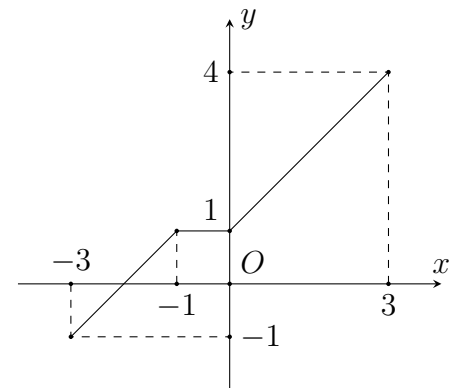
Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $[-3; 3]$ và đồ thị của nó được biểu diễn bởi hình bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; -1)$ và $(1; 3)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; -1)$ và $(1; 4)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; 3)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.



Lời giải.

Trên khoảng $(-3; -1)$ và $(1; 3)$ đồ thị hàm số đi lên từ trái sang phải

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; -1)$ và $(1; 3)$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 45.

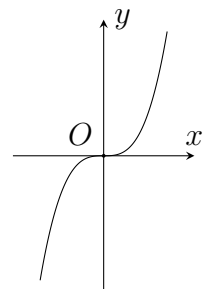
Cho đồ thị hàm số $y = x^3$ như hình bên. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

D. Hàm số đồng biến tại gốc tọa độ O .



Lời giải.

Dựa vào đồ thị, ta thấy hàm số đồng biến trên toàn miền xác định. Nhưng không thể đồng biến chỉ tại đúng một điểm.

Chọn đáp án **D** □

Câu 46. Trong các hàm số $y = 2015x$, $y = 2015x + 2$, $y = 3x^2 - 1$, $y = 2x^3 - 3x$ có bao nhiêu hàm số lẻ?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải.

- Xét $f(x) = 2015x$ có $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ nên $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$.
Ta có $f(-x) = 2015(-x) = -2015x = -f(x) \Rightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.
- Xét $f(x) = 2015x + 2$ có $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ nên $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$.
Ta có $f(-x) = 2015(-x) + 2 = -2015x + 2 \neq \pm f(x) \Rightarrow f(x)$ không chẵn, không lẻ.
- Xét $f(x) = 3x^2 - 1$ có $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ nên $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$.
Ta có $f(-x) = 3(-x)^2 - 1 = 3x^2 - 1 = f(x) \Rightarrow f(x)$ là hàm số chẵn.
- Xét $f(x) = 2x^3 - 3x$ có $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ nên $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$.
Ta có $f(-x) = 2(-x)^3 - 3(-x) = -2x^3 + 3x = -f(x) \Rightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.

Vậy có hai hàm số lẻ.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 47. Cho hai hàm số $f(x) = -2x^3 + 3x$ và $g(x) = x^{2017} + 3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $f(x)$ là hàm số lẻ; $g(x)$ là hàm số lẻ.
- B. $f(x)$ là hàm số chẵn; $g(x)$ là hàm số chẵn.
- C. Cả $f(x)$ và $g(x)$ đều là hàm số không chẵn, không lẻ.
- D. $f(x)$ là hàm số lẻ; $g(x)$ là hàm số không chẵn, không lẻ.

Lời giải.

- Xét $f(x) = -2x^3 + 3x$ có $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ nên $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$.
Ta có $f(-x) = -2(-x)^3 + 3(-x) = 2x^3 - 3x = -f(x) \Rightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.
- Xét $g(x) = x^{2017} + 3$ có $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ nên $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$.
Ta có $g(-x) = (-x)^{2017} + 3 = -x^{2017} + 3 \neq \pm g(x) \Rightarrow g(x)$ không chẵn, không lẻ.

Vậy $f(x)$ là hàm số lẻ; $g(x)$ là hàm số không chẵn, không lẻ.Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 48. Cho hàm số $f(x) = x^2 - |x|$. Khẳng định nào sau đây là đúng.

- A. $f(x)$ là hàm số lẻ.
- B. $f(x)$ là hàm số chẵn.
- C. Đồ thị của hàm số $f(x)$ đối xứng qua gốc tọa độ.
- D. Đồ thị của hàm số $f(x)$ đối xứng qua trục hoành.

Lời giải.Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ nên $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$.Ta có $f(-x) = (-x)^2 - |-x| = x^2 - |x| = f(x) \Rightarrow f(x)$ là hàm số chẵn.Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 49. Cho hàm số $f(x) = |x - 2|$. Khẳng định nào sau đây là đúng.

- A. $f(x)$ là hàm số lẻ.
- B. $f(x)$ là hàm số chẵn.
- C. $f(x)$ là hàm số vừa chẵn, vừa lẻ.
- D. $f(x)$ là hàm số không chẵn, không lẻ.

Lời giải.Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ nên $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$.Ta có $f(-x) = |(-x) - 2| = |-x - 2| \neq \pm f(x) \Rightarrow f(x)$ không chẵn, không lẻ.**Lưu ý:** Hàm số vừa chẵn, vừa lẻ chỉ có một hàm duy nhất là $f(x) = 0$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 50. Trong các hàm số nào sau đây, hàm số nào là hàm số lẻ?

- A. $y = x^{2018} - 2017$. B. $y = \sqrt{2x+3}$.
C. $y = \sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}$. D. $y = |x+3| + |x-3|$.

Lời giải.

- Xét $f(x) = x^{2018} - 2017$ có $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ nên $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$.
Ta có $f(-x) = (-x)^{2018} - 2017 = x^{2018} - 2017 = f(x) \Rightarrow f(x)$ là hàm số chẵn.
- Xét $f(x) = \sqrt{2x+3}$ có $\mathcal{D} = \left[-\frac{3}{2}; +\infty\right)$.
Ta có $x_0 = 2 \in D$ nhưng $-x_0 = -2 \notin D \Rightarrow f(x)$ không chẵn, không lẻ.
- Xét $f(x) = \sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}$ có $\mathcal{D} = [-3; 3]$ nên $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$.
Ta có $f(-x) = \sqrt{3-x} - \sqrt{3+x} = -(\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}) = -f(x) \Rightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.
- Xét $f(x) = |x+3| + |x-3|$ có $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ nên $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$.
Ta có $f(-x) = |-x+3| + |-x-3| = |x-3| + |x+3| = f(x)$ là hàm số chẵn.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 51. Trong các hàm số nào sau đây, hàm số nào là hàm số chẵn?

- A. $y = |x+1| + |x-1|$. B. $y = |x+3| + |x-2|$.
C. $y = 2x^3 - 3x$. D. $y = 2x^4 - 3x^2 + x$.

Lời giải.

Xét $f(x) = |x+1| + |x-1|$ có $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ nên $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$.

Ta có $f(-x) = |-x+1| + |-x-1| = |x-1| + |x+1| = f(x) \Rightarrow f(x)$ là hàm số chẵn.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 52. Trong các hàm số $y = |x+2| - |x-2|$, $y = |2x+1| + \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$, $y = x(|x|-2)$,
 $y = \frac{|x+2015| + |x-2015|}{|x+2015| - |x-2015|}$ có bao nhiêu hàm số lẻ?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải.

- Xét $f(x) = |x+2| - |x-2|$ có $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ nên $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$.
Ta có $f(-x) = |(-x)+2| - |(-x)-2| = |-x+2| - |-x-2|$
 $= |x-2| - |x+2| = -(|x+2| - |x-2|) = -f(x)$.
 $\Rightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.
- Xét $f(x) = |2x+1| + \sqrt{4x^2 - 4x + 1} = |2x+1| + \sqrt{(2x-1)^2} = |2x+1| + |2x-1|$.
 $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ nên $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$.
Ta có $f(-x) = |2(-x)+1| + |2(-x)-1| = |-2x+1| + |-2x-1|$
 $= |2x-1| + |2x+1| = |2x+1| + |2x-1| = f(x)$.
 $\Rightarrow f(x)$ là hàm số chẵn.
- Xét $f(x) = x(|x|-2)$ có $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ nên $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$.
Ta có $f(-x) = (-x)(|-x|-2) = -x(|x|-2) = -f(x) \Rightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.
- Xét $f(x) = \frac{|x+2015| + |x-2015|}{|x+2015| - |x-2015|}$ có $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nên $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$.

$$\begin{aligned}\text{Ta có } f(-x) &= \frac{|-x+2015|+|-x-2015|}{|-x+2015|-|-x-2015|} = \frac{|x-2015|+|x+2015|}{|x-2015|-|x+2015|} \\ &= -\frac{|x+2015|+|x-2015|}{|x+2015|-|x-2015|} = -f(x).\end{aligned}$$

$\Rightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.

Vậy có tất cả 3 hàm số lẻ.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 53. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -x^3 - 6 & ; x \leq -2 \\ |x| & ; -2 < x < 2 \\ x^3 - 6 & ; x \geq 2 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $f(x)$ là hàm số lẻ.
- B. $f(x)$ là hàm số chẵn.
- C. Đồ thị của hàm số $f(x)$ đối xứng qua gốc tọa độ.
- D. Đồ thị của hàm số $f(x)$ đối xứng qua trục hoành.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ nên $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$.

$$\text{Ta có } f(-x) = \begin{cases} -(-x)^3 - 6 & ; (-x) \leq -2 \\ |-x| & ; -2 < -x < 2 \\ (-x)^3 - 6 & ; (-x) \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} x^3 - 6 & ; x \geq 2 \\ |x| & ; -2 < x < 2 \\ -x^3 - 6 & ; x \leq -2 \end{cases} = f(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 54. Tìm điều kiện của tham số để các hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ là hàm số chẵn.

- A. a tùy ý, $b = 0, c = 0$.
- B. a tùy ý, $b = 0, c$ tùy ý.
- C. a, b, c tùy ý.
- D. a tùy ý, b tùy ý, $c = 0$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ nên $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$.

Để $f(x)$ là hàm số chẵn $\Leftrightarrow f(-x) = f(x), \forall x \in \mathcal{D}$.

$$\Leftrightarrow a(-x)^2 + b(-x) + c = ax^2 + bx + c, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2bx = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b = 0.$$

Cách giải nhanh. Hàm $f(x)$ chẵn khi hệ số của mũ lẻ bằng 0 $\Leftrightarrow b = 0$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 55. Biết rằng khi $m = m_0$ thì hàm số $f(x) = x^3 + (m^2 - 1)x^2 + 2x + m - 1$ là hàm số lẻ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $m_0 \in \left(\frac{1}{2}; 3\right)$.
- B. $m_0 \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right]$.
- C. $m_0 \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$.
- D. $m_0 \in [3; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ nên $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$.

$$\text{Ta có } f(-x) = (-x)^3 + (m^2 - 1)(-x)^2 + 2(-x) + m - 1 = -x^3 + (m^2 - 1)x^2 - 2x + m - 1.$$

Để hàm số đã cho là hàm số lẻ khi $f(-x) = -f(x)$, với mọi $x \in \mathcal{D}$.

$$\Leftrightarrow -x^3 + (m^2 - 1)x^2 - 2x + m - 1 = -[x^3 + (m^2 - 1)x^2 + 2x + m - 1], \text{ với mọi } x \in \mathcal{D}.$$

$$\Leftrightarrow 2(m^2 - 1)x^2 + 2(m - 1) = 0, \text{ với mọi } x \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1 \in \left(\frac{1}{2}; 3\right).$$

Cách giải nhanh. Hàm $f(x)$ lẻ khi hệ số của mũ chẵn bằng 0 và hệ số tự do cũng bằng 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1 \in \left(\frac{1}{2}; 3\right).$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 56. Cho hàm số $y = f(x) = |x + 2|$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

- A. Hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn.
- B. Hàm số $f(x)$ không tồn tại đạo hàm tại điểm $x = -2$.
- C. Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- D. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ bằng 0.

Lời giải.

Xét $f(-1) = |-1 + 2| = 1$, $f(1) = |1 + 2| = 3$.

Ta nhận thấy $f(-1) \neq f(1)$ do đó $f(x)$ **không phải** là hàm số chẵn.

Chọn đáp án **A** □

Câu 57. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{5 - x^2 - 2\sqrt{4 - x^2}}$ có dạng $[a; b]$. Tìm $a + b$.

- A. -3.
- B. -1.
- C. 3.
- D. 0.

Lời giải.

$$\text{Ta có } y = \sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{5 - x^2 - 2\sqrt{4 - x^2}} = \sqrt{(\sqrt{x - 1} + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{4 - x^2} - 1)^2}. \quad (*)$$

$$\text{Như vậy hàm số } (*) \text{ xác định khi và chỉ khi } \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 4 - x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ -2 \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2.$$

Tập xác định của hàm số $(*)$ là $\mathcal{D} = [1; 2] \Rightarrow a = 1, b = 2 \Rightarrow a + b = 3$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 58. Tập xác định của hàm số $y = \frac{x + 1}{x - 1}$ là

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.
- D. $(1; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $y = \frac{x + 1}{x - 1}$ là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 59. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{x+2}-3}{x-1} & \text{khi } x \geq 2 \\ x^2 + 1 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Khi đó, giá trị của $f(2) + f(-2)$ bằng bao nhiêu?

- A. 6.
- B. 4.
- C. $\frac{5}{3}$.
- D. $\frac{8}{3}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } f(2) + f(-2) = \frac{2\sqrt{2+2}-3}{2-1} + (-2)^2 + 1 = 1 + 4 + 1 = 6.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 60. Trong các hàm số sau $y = \frac{x+3}{x-1}$, $y = x^4 - 3x^2 + 2$, $y = x^3 - 3x$, $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 1}$ có bao nhiêu hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$?

- A. 2.
- B. 4.
- C. 1.
- D. 3.

Lời giải.

- Hàm số $y = \frac{x+3}{x-1}$ có TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- Hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 2$ có TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Hàm số $y = x^3 - 3x$ có TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Hàm số $y = \frac{x^2+2x-3}{x+1}$ có TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 61. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = 2x^3 + 2(m^2 - 4)x^2 + (4 + m)x + 3m - 6$ là hàm số lẻ.

- A. $m = -2$. B. $m = 2$. C. $m = -4$. D. $m = \pm 2$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, $x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$. Hàm số $y = f(x)$ là hàm số lẻ

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow -2x^3 + 2(m^2 - 4)x^2 - (4 + m)x + 3m - 6 = -[2x^3 + 2(m^2 - 4)x^2 + (4 + m)x + 3m - 6], \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow 2(m^2 - 4)x^2 + 3m - 6 = 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2 = 0 \\ 3m - 6 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow m = 2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 62. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$ là

- A. $(1; 3)$. B. $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.
C. $[-1; 3]$. D. $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $-x^2 + 2x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$. Suy ra TXĐ của hàm số là $\mathcal{D} = [-1; 3]$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 63. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x-m}} + \sqrt{-x+2m+6}$ xác định trên $(-1; 0)$.

- A. $-6 < m \leq -1$. B. $-6 \leq m < -1$. C. $-3 \leq m < 1$. D. $-3 \leq m \leq -1$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện hàm số đã cho xác định là: } \begin{cases} x - m > 0 \\ -x + 2m + 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < x \leq 2m + 6.$$

Để hàm số có tập xác định $\mathcal{D} \neq \emptyset$ thì ta phải có $m < 2m + 6 \Leftrightarrow m > -6$ (*). Khi đó hàm số có tập xác định là $(m; 2m + 6]$.

Hàm số xác định trên $(-1; 0)$ khi và chỉ khi $(-1; 0) \subset (m; 2m + 6]$, điều này tương đương với.

$$\begin{cases} m \leq -1 \\ 2m + 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m \leq -1. \text{ Kết hợp với (*) ta được } -3 \leq m \leq -1.$$

Vậy với $-3 \leq m \leq -1$ thì hàm số đã cho xác định trên $(-1; 0)$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 64. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + 2m + 2}{x - m}$ xác định trên khoảng $(-1; 0)$.

- A. $\begin{cases} m > 0 \\ m < -1 \end{cases}$. B. $m \leq -1$. C. $\begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq -1 \end{cases}$. D. $m \geq 0$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của hàm số là $x - m \neq 0 \Leftrightarrow x \neq m$.

Để hàm số xác định trên khoảng $(-1; 0)$ thì $m \notin (-1; 0) \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 0 \end{cases}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 65. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào là hàm số lẻ?

- A. $y = x^{2018} - 2017$. B. $y = \sqrt{2x + 3}$.
C. $y = \sqrt{3 + x} - \sqrt{3 - x}$. D. $y = |x + 3| + |x - 3|$.

Lời giải.

- Xét hàm số $y = \sqrt{3 + x} - \sqrt{3 - x}$.
Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = [-3; 3]$.
Với mọi $x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$.
Ta có $y(-x) = \sqrt{3 - x} - \sqrt{3 + x} = -(\sqrt{3 + x} - \sqrt{3 - x}) = -y(x)$.
Vậy hàm số $y = \sqrt{3 + x} - \sqrt{3 - x}$ là hàm số lẻ trên $\mathcal{D}$.
- Xét hàm số $y = \sqrt{2x + 3}$.
Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \left[-\frac{3}{2}; +\infty\right)$.
Lấy $x = 2 \in \mathcal{D}$ nhưng $-x = -2 \notin \mathcal{D}$.
Do đó hàm số $y = \sqrt{2x + 3}$ là hàm số không chẵn, không lẻ trên $\mathcal{D}$.
- Xét hàm số $y = x^{2018} - 2017$.
Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
Với mọi $x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$.
Ta có $y(-x) = (-x)^{2018} - 2017 = x^{2018} - 2017 = y(x)$.
Vậy hàm số $y = x^{2018} - 2017$ là hàm số chẵn trên $\mathcal{D}$.
- Xét hàm số $y = |x + 3| + |x - 3|$.
Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
Với mọi $x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$.
Ta có $y(-x) = |-x + 3| + |-x - 3| = |x - 3| + |x + 3| = y(x)$.
Vậy hàm số $y = |x + 3| + |x - 3|$ là hàm số chẵn trên $\mathcal{D}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 66. Tìm điều kiện của tham số a, b, c để hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ là hàm số chẵn.

- A. a tùy ý, $b = 0, c = 0$. B. a và c tùy ý, $b = 0$.
C. a, b, c tùy ý. D. a và b tùy ý, $c = 0$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Với mọi $x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$.

Để hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ là hàm số chẵn trên $\mathcal{D}$ thì $f(-x) = f(x)$.

Hay $a(-x)^2 + b(-x) + c = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow 2bx = 0 \Leftrightarrow b = 0$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 67. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y = |x + 1| + |x - 1|$.

B. $y = |x + 3| + |x - 2|$.

C. $y = 2x^3 - 3x$.

D. $y = 2x^4 - 3x^2 + x$.

Lời giải.

- Xét hàm số $y = |x + 1| + |x - 1|$.

Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Với mọi $x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$.

Ta có $y(-x) = |-x + 1| + |-x - 1| = |x - 1| + |x + 1| = y(x)$.

Vậy hàm số $y = |x + 1| + |x - 1|$ là hàm số chẵn trên $\mathcal{D}$.

- Xét hàm số $y = |x + 3| + |x - 2|$.

Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Với mọi $x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$.

Ta có $y(3) = 7$ và $y(-3) = 5$ nên $y(3) \neq y(-3)$.

Vậy hàm số $y = |x + 3| + |x - 2|$ là hàm số không chẵn, không lẻ trên $\mathcal{D}$.

- Xét hàm số $y = 2x^3 - 3x$.

Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Với mọi $x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$.

Ta có $y(3) = 45$ và $y(-3) = -45$ nên $y(3) \neq y(-3)$.

Vậy hàm số $y = 2x^3 - 3x$ là hàm số không chẵn, không lẻ trên $\mathcal{D}$.

- Xét hàm số $y = 2x^4 - 3x^2 + 2$.

Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Với mọi $x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$.

Ta có $y(3) = 138$ và $y(-3) = 132$ nên $y(3) \neq y(-3)$.

Vậy hàm số $y = 2x^4 - 3x^2 + 2$ là hàm số không chẵn, không lẻ trên $\mathcal{D}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 68. Cho hàm số $f(x) = -2x^3 + 3x$ và $g(x) = x^{2017} + 3$. Mệnh đề nào sau đây **ĐÚNG**?

A. $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số lẻ.

B. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số chẵn.

C. Cả $f(x)$ và $g(x)$ đều là hàm số không chẵn, không lẻ.

D. $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số không chẵn, không lẻ.

Lời giải.

- Xét hàm số $f(x) = -2x^3 + 3x$.

Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Với mọi $x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$.

Ta có $f(-x) = -2(-x)^3 + 3(-x) = 2x^3 - 3x = -(-2x^3 + 3x) = -f(x)$.

Vậy hàm số $f(x) = -2x^3 + 3x$ là hàm số lẻ trên $\mathcal{D}$.

- Xét hàm số $g(x) = x^{2017} + 3$.

Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Với mọi $x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$.

Khi đó $g(1) = 4$ và $g(-1) = 2$, suy ra $g(1) \neq g(-1)$.

Vậy hàm số $g(x) = x^{2017} + 3$ là hàm số không chẵn, không lẻ trên $\mathcal{D}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 69. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{3-2x} + 6x}{\sqrt{4-3x}}$.

A. $\mathcal{D} = \left[\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$. B. $\mathcal{D} = \left[\frac{3}{2}; \frac{4}{3}\right)$. C. $\mathcal{D} = \left[\frac{2}{3}; \frac{3}{4}\right)$. D. $\mathcal{D} = \left(-\infty; \frac{4}{3}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của hàm số là $\begin{cases} 3-2x \geq 0 \\ 4-3x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ x < \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x < \frac{4}{3}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \left(-\infty; \frac{4}{3}\right)$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 70. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \sqrt{x-m+1} + \frac{2x}{\sqrt{-x+2m}}$ xác định trên khoảng $(-1; 3)$.

- A. Không có giá trị m thỏa mãn. B. $m \geq 2$.
C. $m \geq 3$. D. $m \geq 1$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của hàm số là $\begin{cases} x-m+1 \geq 0 \\ -x+2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m-1 \\ x < 2m \end{cases}$.

Trường hợp 1: Xét $m-1 \geq 2m \Leftrightarrow m \leq -1$.

Khi đó tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \emptyset$. Suy ra $m \leq -1$ không thỏa yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: Xét $m-1 < 2m \Leftrightarrow m > -1$.

Khi đó tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = [m-1; 2m)$.

Theo yêu cầu bài toán, hàm số xác định trên $(-1; 3)$ thì $(-1; 3) \subset \mathcal{D}$.

Hay $\begin{cases} m-1 \leq -1 \\ 2m \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset$.

Suy ra không có giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 71. Hàm số nào sau đây có tập xác định là $\mathbb{R}$?

A. $y = 3x^3 - 2\sqrt{x} - 3$. B. $y = 3x^3 - 2x - 3$. C. $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1}$. D. $y = \frac{x}{x^2 - 1}$.

Lời giải.

Nhìn vào hàm số thấy $y = 3x^3 - 2x - 3$ tồn tại giá trị với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 72. Cho các hàm số: $y = \sqrt{20-x^2}$, $y = -7x^4 + 2|x| + 1$, $y = \frac{x^4 + 10}{x}$, $y = |x+2| + |x-1|$, $y =$

$\frac{\sqrt{x^4 - x} + \sqrt{x^4 + x}}{|x| + 4}$. Trong các hàm số đó, có bao nhiêu hàm số chẵn?

A. 3. B. 1. C. 4. D. 2.

Lời giải.

Các hàm số chẵn:

$$y = \sqrt{20 - x^2}, y = -7x^4 + 2|x| + 1, y = \frac{\sqrt{x^4 - x} + \sqrt{x^4 + x}}{|x| + 4}.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 73. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

- A. $y = |x + 3| + |x - 3|$. B. $y = x^{2018} - 2017$.
C. $y = \sqrt{2x + 3}$. D. $y = \sqrt{3 + x} - \sqrt{3 - x}$.

Lời giải.

+) Xét hàm số $y = f(x) = |x + 3| + |x - 3|$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$ nên $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Lại có $f(-x) = |-x + 3| + |-x - 3| = |x + 3| + |x - 3| = f(x)$ nên hàm số đã cho là hàm chẵn.

+) Xét hàm số $y = f(x) = x^{2018} - 2017$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$ nên $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Lại có $f(-x) = (-x)^{2018} - 2017 = x^{2018} - 2017 = f(x)$ nên hàm số đã cho là hàm số chẵn.

+) Xét hàm số $y = \sqrt{2x + 3}$ có tập xác định $D = \left[-\frac{3}{2}; +\infty\right)$, giả sử ta lấy $2 \in D \Rightarrow -2 \in D$ nên hàm số đã cho không là hàm số lẻ.

+) Xét hàm số $y = f(x) = \sqrt{3 + x} - \sqrt{3 - x}$ có $D = [-3; 3]$ nên với $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ (1).

$$\text{Xét } f(-x) = \sqrt{3 - x} - \sqrt{3 - (-x)} = \sqrt{3 - x} - \sqrt{3 + x} = -(\sqrt{3 + x} - \sqrt{3 - x}) = -f(x) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 74. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{x^2 + 2x + m}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $m \geq 1$. B. $m > 1$. C. $m \leq 1$. D. $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số đã cho có TXĐ là $\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 + 2x + m \neq 0; \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + m = 0 \text{ vô nghiệm}$$

$$\Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow 1 - m < 0 \Leftrightarrow m > 1.$$

Vậy $m > 1$ là tất cả giá trị cần tìm.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 75. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{-3x - 2} - \frac{x + 1}{x^2 - 3x - 4}$ là

- A. $\mathcal{D} = \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \setminus \{-4\}$. B. $\mathcal{D} = \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \setminus \{-1\}$.
C. $\mathcal{D} = \left[-\frac{2}{3}; +\infty\right) \setminus \{4\}$. D. $\mathcal{D} = \left[-\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi

$$\begin{cases} -3x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 3x - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{2}{3} \\ x \neq -1 \\ x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{2}{3} \\ x \neq -1. \end{cases}$$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \setminus \{-1\}$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 76. Cho hàm số $y = f(x) = |x + 2018| + |x - 2018|$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

- A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.
- B. Hàm số $y = f(x)$ là hàm số chẵn.
- C. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ nhận trục tung làm trục đối xứng.
- D. Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Ta có

- $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow (-x) \in \mathcal{D}$.
- $f(-x) = |-x + 2018| + |-x - 2018| = |x - 2018| + |x + 2018| = f(x), \forall x \in \mathcal{D}$.

Vậy hàm số $y = f(x)$ là hàm số chẵn, và nhận trục tung làm trục đối xứng.

Suy ra mệnh đề sai là “Đồ thị hàm số $y = f(x)$ nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng”.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 77. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x-1} & \text{khi } x < 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{khi } 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 1 & \text{khi } 2 < x \leq 5 \end{cases}$. Tính giá trị của $f(4)$ ta được kết quả

- A. $\frac{2}{3}$.
- B. 15.
- C. $\sqrt{5}$.
- D. 7.

Lời giải.

Vì $4 \in (2; 5]$ nên $f(4) = 4^2 - 1 = 15$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 78. Xét tính chẵn, lẻ của hai hàm số $f(x) = |x + 2| - |x - 2|$, $g(x) = -|x|$ trên tập xác định $\mathbb{R}$ ta được kết quả nào trong các kết quả sau?

- A. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số chẵn.
- B. $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số chẵn.
- C. $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số lẻ.
- D. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ.

Lời giải.

Với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có

$$\begin{cases} -x \in \mathbb{R} \\ f(-x) = |-x + 2| - |-x - 2| = |x - 2| - |x + 2| = -f(x) \\ g(-x) = -|-x| = -|x| = g(x). \end{cases}$$

Do đó $f(x)$ là hàm số lẻ và $g(x)$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 79. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$. Đặt $g(x) = f(x + 3) - 3f(x + 2) + 3f(x + 1)$. Tính $g(1)$.

- A. $g(1) = a - b - c$.
- B. $g(1) = a + b - c$.
- C. $g(1) = a - b + c$.
- D. $g(1) = a + b + c$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} g(1) &= f(4) - 3f(3) + 3f(2) \\ &= (16a + 4b + c) - 3(9a + 3b + c) + 3(4a + 2b + c) \\ &= a + b + c. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 80. Hàm số $y = \frac{x+1}{x-2m+1}$ xác định trên $[0; 1)$ khi và chỉ khi

A. $m < \frac{1}{2}$ hoặc $m \geq 1$. B. $m \geq 2$ hoặc $m < 1$. C. $m < \frac{1}{2}$. D. $m \geq 1$.

Lời giải.

Ta có $\frac{x+1}{x-2m+1}$ có nghĩa $\Leftrightarrow x \neq 2m-1$.

Suy ra tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = (-\infty; 2m-1) \cup (2m-1; +\infty)$.

Do đó, hàm số xác định trên $[0; 1)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} [0; 1) \subset (-\infty; 2m-1) \\ [0; 1) \subset (2m-1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1 \geq 1 \\ 2m-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m < \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy $m < \frac{1}{2}$ hoặc $m \geq 1$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 81. Tập xác định $\mathcal{D}$ và tính chẵn lẻ của hàm số $y = x^3 + 5x$ là

A. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, hàm số chẵn. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, hàm số lẻ.
C. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, hàm số không chẵn không lẻ. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, hàm số lẻ.

Lời giải.

Hàm số $y = x^3 + 5x$ có tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta thấy $y(-x) = (-x)^3 + 5(-x) = -(x^3 + 5x) = -y(x), \forall x \in \mathcal{D}$.

Suy ra hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 82. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{1-3x}$ là

A. $\mathcal{D} = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$. B. $\mathcal{D} = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$. C. $\mathcal{D} = \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$. D. $\mathcal{D} = \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Hàm số $y = \sqrt{1-3x}$ xác định khi và chỉ khi $1-3x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 83. Tập xác định của hàm số $y = \frac{x+1}{x(x^2+4)}$ là

A. $\mathbb{R} \setminus (-\infty; 0)$. B. $\mathbb{R} \setminus \{0; 2; -2\}$. C. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. D. $\mathbb{R} \setminus (-\infty; 0]$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x(x^2+4) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.

Tập xác định hàm số là: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 84. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \sqrt{2x-6} - \frac{3}{x-3}$.

- A. $\mathcal{D} = (-3; +\infty) \setminus \{3\}$. B. $\mathcal{D} = (3; +\infty)$.
C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. D. $\mathcal{D} = [3; +\infty)$.

Lời giải.

$$\text{Hàm số xác định khi và chỉ khi } \begin{cases} 2x-6 \geq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = (3; +\infty)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 85. Trong các hàm số sau đây, có bao nhiêu hàm số chẵn?

- (1) $f(x) = \frac{x^4+10}{x}$; (2) $f(x) = \frac{1}{20-x^2}$;
(3) $f(x) = -7x^4 + 2|x| + 1$; (4) $f(x) = |x+2| - |x-2|$.

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.

Lời giải.

Xét các hàm số (1), (2), (3), (4), ta có

- a) Hàm số $f(x) = \frac{x^4+10}{x}$.
+ Có tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nên nếu $x_0 \in \mathcal{D} \Rightarrow -x_0 \in \mathcal{D}$.
+ Có $f(-x) = \frac{(-x)^4+10}{-x} = -\frac{x^4+10}{x} = -f(x)$, với mọi $x \in \mathcal{D}$.

Vậy $f(x) = \frac{x^4+10}{x}$ là hàm số lẻ.

- b) Hàm số $f(x) = \frac{1}{20-x^2}$.
+ Có tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\sqrt{5}; -2\sqrt{5}\}$ nên nếu $x_0 \in \mathcal{D} \Rightarrow -x_0 \in \mathcal{D}$.
+ Có $f(-x) = \frac{1}{20-(-x)^2} = \frac{1}{20-x^2} = f(x)$, với mọi $x \in \mathcal{D}$.

Vậy $f(x) = \frac{1}{20-x^2}$ là hàm số chẵn.

- c) Hàm số $f(x) = -7x^4 + 2|x| + 1$.
+ Có tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ nên nếu $x_0 \in \mathcal{D} \Rightarrow -x_0 \in \mathcal{D}$.
+ Có $f(-x) = -7(-x)^4 + 2|-x| + 1 = -7x^4 + 2|x| + 1 = f(x)$, với mọi $x \in \mathcal{D}$.
Vậy $f(x) = -7x^4 + 2|x| + 1$ là hàm số chẵn.

- d) Hàm số $f(x) = |x+2| - |x-2|$.
+ Có tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ nên nếu $x_0 \in \mathcal{D} \Rightarrow -x_0 \in \mathcal{D}$.
+ Có $f(-x) = |-x+2| - |-x-2| = |x-2| - |x+2| = -f(x)$, với mọi $x \in \mathcal{D}$.
Vậy $f(x) = |x+2| - |x-2|$ là hàm số lẻ.

Vậy trong bốn hàm số trên có 2 hàm số chẵn và 2 hàm số lẻ.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 86. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x-3} + \frac{1}{x-3}$.

- A. $\mathcal{D} = (-\infty; 3)$. B. $\mathcal{D} = (3; +\infty)$. C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. D. $\mathcal{D} = [3; +\infty)$.

Lời giải.

$$\text{Hàm số xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ x - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = (3; +\infty)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 87. Cho hàm số $f(x) = |2x + 1| + |2x - 1|$ và $g(x) = 2x^3 + 3x$. Khi đó khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. f là hàm số lẻ, g là hàm số chẵn. B. f và g đều là hàm số lẻ.
C. f và g đều là hàm số chẵn. D. f là hàm số chẵn, g là hàm số lẻ.

Lời giải.

• Xét hàm số $f(x) = |2x + 1| + |2x - 1|$ có tập xác định $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \forall x \in \mathcal{D}_f \Rightarrow -x \in \mathcal{D}_f \\ f(-x) = |2(-x) + 1| + |2(-x) - 1| = |-(2x + 1)| + |-(2x - 1)| = f(x). \end{cases}$$

$\Rightarrow f$ là hàm số chẵn.

• Xét hàm số $g(x) = 2x^3 + 3x$ có tập xác định $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \forall x \in \mathcal{D}_g \Rightarrow -x \in \mathcal{D}_g \\ g(-x) = 2(-x)^3 + 3(-x) = -(2x^3 + 3x) = -g(x). \end{cases}$$

$\Rightarrow g$ là hàm số lẻ.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 88. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{1 + 2x} + \sqrt{6 + x}$ là

- A. $\left[-6; -\frac{1}{2}\right]$. B. $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. C. $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. D. $[-6; +\infty)$.

Lời giải.

$$\text{Hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi } \begin{cases} 1 + 2x \geq 0 \\ 6 + x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \geq -6 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}.$$

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathcal{D} = \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 89. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{3x + 1}{x - 1}$.

- A. $\mathcal{D} = [1; +\infty)$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. C. $\mathcal{D} = (1; +\infty)$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$. Vậy $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 90. Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

- A. $y = x^2 + x$. B. $y = x^2$. C. $y = x + 3$. D. $y = x^3 + x$.

Lời giải.

• Hàm số $y = x^2 + x$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$.

Ta có $y(-1) = 0 \neq 2 = y(1)$ nên hàm số không chẵn.

• Hàm số $y = x^2$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$.

Ta có $y(-x) = (-x)^2 = x^2 = y(x)$ nên hàm số chẵn.

- Hàm số $y = x + 3$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$.

Ta có $y(-1) = 2 \neq 4 = y(1)$ nên hàm số không chẵn.

- Hàm số $y = x^3 + x$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$.

Ta có $y(-1) = -2 \neq 2 = y(1)$ nên hàm số không chẵn.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 91. Trong các hàm số sau, có bao nhiêu hàm số lẻ $y = 2|x+1| - |x-1|$, $y = x - \frac{4}{x}$, $y = x^2 - 2x$, $y = \frac{1}{x} + x^3$.

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

Lời giải.

Đặt $f(x) = 2|x+1| - |x-1|$, $g(x) = x - \frac{4}{x}$, $h(x) = x^2 - 2x$, $t(x) = \frac{1}{x} + x^3$.

- Xét hàm số $f(x) = 2|x+1| - |x-1|$ có tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ nên $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$.

Hơn nữa, $f(-1) = 2|-1+1| - |-1-1| = -2$, mà $f(1) = 4$ nên hàm số $f(x) = 2|x+1| - |x-1|$ không là hàm số lẻ.

- Xét hàm số $g(x) = x - \frac{4}{x}$ có tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nên $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$.

Hơn nữa, $g(-x) = -x + \frac{4}{x} = -\left(x - \frac{4}{x}\right) = -g(x)$, nên hàm số $y = x - \frac{4}{x}$ lẻ.

- Xét hàm số $t(x) = \frac{1}{x} + x^3$ có tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nên $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$.

Hơn nữa, $\forall x \in \mathcal{D}$, $t(-x) = -\frac{1}{x} - x^3 = -\left(\frac{1}{x} + x^3\right) = -t(x)$, nên hàm số $t(x) = \frac{1}{x} + x^3$ lẻ.

- Xét hàm số $h(x) = x^2 - 2x$ có tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ nên $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$.

Hơn nữa, $h(-1) = 1 + 2 = 3$, mà $h(1) = -1$ nên hàm số $h(x) = x^2 - 2x$ không là hàm số lẻ.

Vậy có hai hàm số lẻ.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 92. Xét tính chẵn, lẻ của hai hàm số $f(x) = |x+10| + |x-10|$, $g(x) = -|x|^2$.

A. $f(x)$ là hàm chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ.B. $f(x)$ là hàm chẵn, $g(x)$ là hàm số chẵn.C. $f(x)$ là hàm lẻ, $g(x)$ là hàm số chẵn.D. $f(x)$ là hàm lẻ, $g(x)$ là hàm số lẻ.

Lời giải.

Ta có hàm $f(x)$ và $g(x)$ đều có tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Có $f(-x) = |-x+10| + |-x-10| = |x-10| + |x+10| = f(x)$. Do đó $f(x)$ là hàm chẵn.

Có $g(-x) = -|-x|^2 = -|x|^2 = g(x)$. Do đó $g(x)$ cũng là hàm số chẵn.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 93. Trong các hàm số sau, hàm số nào có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$?

A. $y = \frac{2x^2 - 5x}{x^2 + x + 1}$.B. $y = \frac{2x^2 - 5x}{x + 1}$.C. $y = \frac{2x^2 - 5x}{x^3 + 1}$.D. $y = \frac{2x^2 - 5x}{x - 1}$.

Lời giải.

Ta có phương trình $x^2 + x + 1 = 0$ vô nghiệm nên hàm số $y = \frac{2x^2 - 5x}{x^2 + x + 1}$ có tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 94. Trong các hàm số sau, hàm số nào tăng trên khoảng $(-1; 0)$.

A. $y = x$.

B. $y = |x|$.

C. $y = x^2$.

D. $y = \frac{1}{x}$.

Lời giải.

Hàm số $y = x$ với hệ số $a = 1 > 0$ nên nó đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra hàm số này đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 95. Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{3x-2a}}{x-a+2}$. Tìm tất cả các giá trị thực của a để hàm số xác định với mọi $x > -1$.

A. $a \leq 1$.

B. $a \leq -\frac{3}{2}$.

C. $a < 1$.

D. $a < -\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \left[\frac{2}{3}a; +\infty \right) \setminus \{a-2\}$.

Để hàm số xác định với mọi $x > -1$ thì $\begin{cases} \frac{2}{3}a \leq -1 \\ a-2 \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow a \leq -\frac{3}{2}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 96. Cho $(P) : y = 2x^2 + x - 3$. Điểm nào sau đây thuộc đồ thị hàm số?

A. $(0; -3)$.

B. $(-2; 1)$.

C. $(-1; 0)$.

D. $(3; -7)$.

Lời giải.

Thử tọa độ các điểm vào hàm số ta được điểm $(0; -3)$ thuộc đồ thị hàm số.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 97. Tập hợp nào sau đây là tập xác định của hàm số $y = \frac{3}{x-1}$.

A. $(-2; +\infty) \setminus \{1\}$.

B. $(1; +\infty)$.

C. $[-2; +\infty)$.

D. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \Rightarrow$ tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 98. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{x^2+1}{x-2}$.

A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

D. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Lời giải.

Điều kiện $x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

Tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 99. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = 2\sqrt{x+4} - 1$.

A. $\mathcal{D} = (-3; +\infty)$.

B. $\mathcal{D} = [-4; +\infty)$.

C. $\mathcal{D} = [-3; +\infty)$.

D. $\mathcal{D} = (-4; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $x+4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -4$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = [-4; +\infty)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 100. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{4}{\sqrt{x+1}}$ có đồ thị ($\mathcal{C}$). Điểm nào dưới đây **không** thuộc ($\mathcal{C}$)?

- A. $Q(15; 1)$. B. $M(3; 2)$. C. $P(0; 4)$. D. $N(1; 0)$.

Lời giải.

Điểm $N(1; 0)$ không thuộc ($\mathcal{C}$).

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 101. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+4} & \text{khi } x > 1 \\ x^2 + 1 & \text{khi } -1 \leq x \leq 1. \\ 2x - 1 & \text{khi } x < -1 \end{cases}$. Giá trị $f(0)$ bằng

- A. -2 . B. 2 . C. -1 . D. 1 .

Lời giải.

Ta có $f(0) = 0^2 + 1 = 1$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 102. Tập xác định của hàm số $y = \frac{2017}{x-1}$ là

- A. $\mathcal{D} = [1; +\infty)$. B. $\mathcal{D} = (-\infty; 1)$. C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 103. Hàm số nào trong các hàm số sau **không phải** là hàm số lẻ?

- A. $y = \sqrt{x+1}$. B. $y = x$. C. $y = x|x|$. D. $y = \frac{2}{x^3}$.

Lời giải.

Hàm số $y = \sqrt{x+1}$ có tập xác định là $\mathcal{D} = [-1; +\infty)$.

Ta có $x = 2 \in \mathcal{D}$, nhưng $-x = -2 \notin \mathcal{D}$.

Vậy $y = \sqrt{x+1}$ không phải hàm số lẻ.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 104. Tập xác định của hàm số $y = \frac{x+2}{\sqrt{x-1}} + \sqrt{3-x}$ là

- A. $[1; 3]$. B. $(1; 3]$. C. $(-\infty; 3]$. D. $(1; +\infty)$.

Lời giải.

$$\frac{x+2}{\sqrt{x-1}} + \sqrt{3-x} \text{ có nghĩa} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x \leq 3.$$

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $(1; 3]$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 105. Hàm số nào dưới đây là hàm số chẵn?

- A. $y = \sqrt{1-x}$. B. $y = |x| + x$. C. $y = \frac{1}{x^2}$. D. $y = x^3 + 1$.

Lời giải.

Hàm số $y = \frac{1}{x^2}$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Với mọi $x \in \mathcal{D}$, ta có

- $-x \in \mathcal{D}$;

$$\bullet f(-x) = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2} = f(x).$$

Vậy $y = \frac{1}{x^2}$ là hàm số chẵn. □

Câu 106. Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 + m}}{x^2 - 2x - m + 2}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

A. $m \in (-\infty; 1)$.

B. $m \in [0; 1)$.

C. $m \in [0; +\infty)$.

D. $m \in [0; 1]$.

Lời giải.

$$\frac{\sqrt{x^2 + m}}{x^2 - 2x - m + 2} \text{ có nghĩa khi và chỉ khi } \begin{cases} x^2 \geq -m \\ x^2 - 2x - m + 2 \neq 0 \end{cases}$$

Do đó, hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x^2 \geq -m, \forall x \in \mathbb{R} \\ x^2 - 2x - m + 2 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m \leq 0 \\ \Delta' = m - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in [0; 1).$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 107. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{4-x} + \sqrt{5-x}$ là

A. $\emptyset$.

B. $(-\infty; 4]$.

C. $[5; +\infty)$.

D. $[4; 5]$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện để hàm số xác định là } \begin{cases} 4-x \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 4.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $(-\infty; 4]$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 108. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x+5}$ là

A. $(-5; +\infty)$.

B. $(5; +\infty)$.

C. $\mathbb{R}$.

D. $[-5; +\infty)$.

Lời giải.

Biểu thức $\sqrt{x+5}$ có nghĩa khi $x+5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -5$.

Vậy $\mathcal{D} = [-5; +\infty)$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 109. Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

A. $y = |x+2| + |x-2|$.

B. $y = |x| + x$.

C. $y = x^2\sqrt{x+1}$.

D. $y = x^3 + 1$.

Lời giải.

• Xét hàm số $f(x) = |x+2| + |x-2|$, tập xác định của $f(x)$ là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } f(-x) = |-x+2| + |-x-2| = |x-2| + |x+2| = f(x).$$

Vậy hàm số trên là hàm số chẵn.

• Xét hàm số $f(x) = |x| + x$, tập xác định của hàm số $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } f(-1) = |-1| + (-1) = |1| - 1 = 0 \neq 2 = f(1).$$

Do đó hàm số này không là hàm chẵn.

• Xét hàm số $f(x) = x^2\sqrt{x+1}$, tập xác định của hàm số $\mathcal{D} = [-1; +\infty)$.

Tập xác định này không đối xứng nên hàm số đã cho không phải là hàm số chẵn.

- Xét hàm số $f(x) = x^3 + 1$, tập xác định của $f(x)$ là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $f(-1) = (-1)^3 + 1 = -1^3 + 1 = 0 \neq 2 = f(1)$.

Do đó hàm số trên không phải là hàm số chẵn.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 110. Hàm số nào trong các hàm số sau là hàm số lẻ?

- A. $y = x^3 + x$. B. $y = x^4 + x^2 - 2$. C. $y = \sqrt{2x + 8}$. D. $y = x^2$.

Lời giải.

Hàm số $y = f(x) = x^3 + x$ là hàm số lẻ, vì

- $\mathcal{D} = \mathbb{R}$,
- $f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -(x^3 + x) = -f(x)$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 111. Điểm nào dưới đây không thuộc đồ thị hàm số $y = -4x + 6$?

- A. $N(1; 2)$. B. $M(2; 2)$. C. $P(3; -6)$. D. $Q(-3; 18)$.

Lời giải.

Điểm $M(2; 2)$ không thuộc đồ thị hàm số $y = -4x + 6$ vì $2 \neq -4 \cdot 2 + 6$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 112. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{3-x-x}}{(x-4)\sqrt{1+x}}$.

- A. $(-1; 3]$. B. $(-1; 4)$. C. $[-1; 3] \setminus \{0\}$. D. $(-1; -3) \setminus \{0\}$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ 1+x > 0 \\ x-4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x \leq 3$. Vậy hàm số có tập xác định là $(-1; 3]$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 113. Tập xác định của hàm số $y = \frac{2x-1}{x^2-4x+3}$ là

- A. $(1; 3)$. B. $\{1; 3\}$. C. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. D. $\mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x^2 - 4x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 3 \end{cases}$. Vậy tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 114. Hàm số $y = \sqrt{3x-6} + \frac{x-1}{2-x}$ có tập xác định là

- A. $(-\infty; 2)$. B. $(2; +\infty)$. C. $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. D. $(-\infty; 2]$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $\begin{cases} 3x-6 \geq 0 \\ 2-x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$. Vậy tập xác định của hàm số là $(2; +\infty)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 115. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

- A. $y = |2x - 1| + |2x + 1|$. B. $y = |2x - 1| - |2x + 1|$.

C. $y = (2x + 1)|2x - 1| + |2x + 1|$.

D. $y = (2x - 1)|2x - 1| + |2x + 1|$.

Lời giải.

Hàm số $y = |2x - 1| + |2x + 1|$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\forall x \in \mathbb{R}, y(-x) = |-2x - 1| + |-2x + 1| = |2x - 1| + |2x + 1| = y(x)$ nên là hàm số chẵn.

Chọn đáp án (A) □**Câu 116.** Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{8 - 2x} - x$ là

A. $(-\infty; 4]$.

B. $[4; +\infty)$.

C. $[0; 4]$.

D. $[0; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của hàm số là $8 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 4$. Do đó tập xác định là $\mathcal{D} = (-\infty; 4]$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 117. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+3}{x+1} & \text{khi } x \geq 0 \\ \frac{\sqrt[3]{2+3x}}{x-2} & \text{khi } -2 \leq x < 0 \end{cases}$. Ta có kết quả nào sau đây đúng?

A. $f(-1) = \frac{1}{3}; f(2) = \frac{7}{3}$.

B. $f(0) = 2; f(-3) = \sqrt{7}$.

C. $f(-1)$ không xác định; $f(-3) = -\frac{11}{24}$.

D. $f(-1) = \sqrt{8}; f(3) = 0$.

Lời giải.

$$f(-1) = \frac{\sqrt[3]{2+3(-1)}}{-1-2} = \frac{1}{3}.$$

$$f(2) = \frac{2 \cdot 2 + 3}{2+1} = \frac{7}{3}.$$

$$f(0) = \frac{2 \cdot 0 + 3}{0+1} = 3.$$

$$f(-3) \text{ không xác định.}$$

$$f(3) = \frac{2 \cdot 3 + 3}{3+1} = \frac{9}{4}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 118. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -x^3 - 6, & x \leq -2 \\ |x|, & -2 < x < 2 \\ x^3 - 6, & x \geq 2 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Đồ thị của hàm số $f(x)$ nhận gốc tọa độ là tâm đối xứng.B. Đồ thị của hàm số $f(x)$ nhận trục hoành là trục đối xứng.C. Hàm số $f(x)$ là hàm lẻ.D. Hàm số $f(x)$ là hàm chẵn.**Lời giải.**

Hàm số $f(x)$ có tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Ta có $\forall x \in \mathcal{D}, -x \in \mathcal{D}$.

$$\bullet \forall x \leq -2 \Rightarrow -x \geq 2, \text{ do đó } f(-x) = (-x)^3 - 6 = -x^3 - 6 = f(x).$$

$$\bullet \forall x \geq 2 \Rightarrow -x \leq -2, \text{ do đó } f(-x) = -(-x)^3 - 6 = x^3 - 6 = f(x).$$

$$\bullet \forall x: -2 < x < 2 \Rightarrow -2 < -x < 2, \text{ do đó } f(-x) = |-x| = |x| = f(x).$$

Vậy $\forall x \in \mathcal{D}$, ta có $f(-x) = f(x)$. Suy ra hàm số $f(x)$ là hàm chẵn.

Chọn đáp án (D) □**Câu 119.** Cho hàm số $y = f(x) = |-5x|$, kết quả nào sau đây là **sai**?

- A. $f(-1) = 5$. B. $f(-2) = 10$. C. $f(2) = 10$. D. $f\left(\frac{1}{5}\right) = -1$.

Lời giải.

Ta có $f\left(\frac{1}{5}\right) = \left|-5 \cdot \frac{1}{5}\right| = 1$. Do đó, kết quả “ $f\left(\frac{1}{5}\right) = -1$ ” sai.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 120. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{2-x} + \sqrt{7+x}$ là

- A. $[2; +\infty)$. B. $[-7; 2]$. C. $(-7; 2)$. D. $\mathbb{R} \setminus \{-7; 2\}$.

Lời giải.

Hàm số $y = \sqrt{2-x} + \sqrt{7+x}$ xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ 7+x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq -7 \end{cases} \Leftrightarrow -7 \leq x \leq 2.$$

Vậy, tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = [-7; 2]$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 121. Cho hàm số $y = x^2 - 3x + 5$, chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau.

- A. Hàm số không chẵn không lẻ. B. Là hàm số lẻ.
C. Là hàm số chẵn. D. Điểm $M(0; 4)$ thuộc đồ thị hàm số.

Lời giải.

Xét hàm số $y = f(x) = x^2 - 3x + 5$.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Lấy $x_0 = 2 \in \mathcal{D} \Rightarrow -x_0 = -2 \in \mathcal{D}$, $f(2) = 3$, $f(-2) = 15$.

Ta có $\begin{cases} f(-2) \neq f(2) \\ f(-2) \neq -f(2) \end{cases}$.

Do đó hàm số $y = f(x) = x^2 - 3x + 5$ không chẵn không lẻ.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 122. Tìm tập giá trị của hàm số $y = \sqrt{6-x} + \sqrt{x+3}$.

- A. $[3; 3\sqrt{2}]$. B. $[0; 3\sqrt{2}]$. C. $[3; 2\sqrt{3}]$. D. $[0; 3]$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = [-3; 6]$.

$$y^2 = 9 + 2\sqrt{(6-x)(x+3)} \Rightarrow y^2 \geq 9 \Rightarrow y \geq 3 \text{ (do } y \geq 0, \forall x \in \mathcal{D}). \quad (1)$$

Theo bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm $(6-x)$; $(x+3)$ ta được

$$2\sqrt{(6-x)(x+3)} \leq (6-x) + (x+3) = 9 \Leftrightarrow y^2 \leq 18 \Leftrightarrow -3\sqrt{2} \leq y \leq 3\sqrt{2}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $3 \leq y \leq 3\sqrt{2}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 123. Tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{1-\sqrt{x}}$ là

- A. $\mathcal{D} = [0; +\infty)$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. C. $\mathcal{D} = [0; +\infty) \setminus \{1\}$. D. $\mathcal{D} = (0; +\infty) \setminus \{1\}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của hàm số là $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1. \end{cases}$

Do đó tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = [0; +\infty) \setminus \{1\}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 124. Với những giá trị nào của m thì hàm số $y = -2x^4 + 3(m^2 - 4)x + 2016$ là hàm số chẵn?

- A. $m = 0$. B. $m = 2$. C. $m = -2$. D. $m = \pm 2$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Khi đó $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$.

Ta có: $f(-x) = -2x^4 - 3(m^2 - 4)x + 2016$.

Hàm số đã cho là hàm số chẵn khi : $f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 125. Tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \sqrt{x - m + 1} + \frac{1}{\sqrt{2m - x}}$ xác định trên khoảng $(0; 1)$ là

- A. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$. B. $\left(\frac{1}{2}; 1\right]$. C. $\left[\frac{1}{2}; 1\right)$. D. $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Lời giải.

Hàm số $y = \sqrt{x - m + 1} + \frac{1}{\sqrt{2m - x}}$ xác định trên khoảng $(0; 1)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x - m + 1 \geq 0 \\ 2m - x > 0 \end{cases} \forall x \in (0, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \leq 0 \\ 2m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq m \leq 1.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 126. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{3x + 6}$.

- A. $(-\infty; -2]$. B. $[-2; +\infty)$. C. $[2; +\infty)$. D. $(-2; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $3x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 127. Cho $(P): y = -x^2 + 2x + 3$. Chọn khẳng định đúng.

- A. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên $(1; +\infty)$.
 B. Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.
 C. Hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty; -1)$.
 D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và nghịch biến trên $(-1; +\infty)$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = f(x) = -x^2 + 2x + 3$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$; $a = -1 < 0$, $b = 2$, $c = 3$ nên có tọa độ đỉnh là $I(1; 4)$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	4	$-\infty$

Do đó, hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên $(1; +\infty)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 128. Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

A. $y = x^4$.

B. $y = x^4 + x$.

C. $y = x^3$.

D. $y = x^3 + 1$.

Lời giải.

Ta thấy rằng các hàm số trên có tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Ta có $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$.

- Xét hàm số $y = f(x) = x^4$, khi đó $f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x), \forall x \in D$. Do đó, hàm số $y = x^4$ là hàm số chẵn.
- Xét hàm số $y = f(x) = x^4 + x$, khi đó $f(-x) = (-x)^4 + (-x) = x^4 - x, \forall x \in D$. Do đó, hàm số $y = x^4 + x$ là hàm số không chẵn, không lẻ.
- Xét hàm số $y = f(x) = x^3$, khi đó $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x), \forall x \in D$. Do đó, hàm số $y = x^3$ là hàm số lẻ.
- Xét hàm số $y = f(x) = x^3 + 1$, khi đó $f(-x) = (-x)^3 + 1 = -x^3 + 1, \forall x \in D$. Do đó, hàm số $y = x^3 + 1$ là hàm số không chẵn, không lẻ.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 129. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x+3}$ là

A. $\mathcal{D} = [-3; +\infty)$.

B. $\mathcal{D} = (3; +\infty)$.

C. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

D. $\mathcal{D} = (-\infty; 3)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 130. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x-1} + \frac{2017}{x-3}$ là

A. $\mathcal{D} = [1; +\infty) \setminus \{3\}$.

B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

C. $\mathcal{D} = [1; +\infty)$.

D. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện xác định } \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 131. Tập xác định của hàm số $y = \frac{x-1}{x^2-x+3}$ là

A. $\mathbb{R}$.

B. $(-\infty; 1)$.

C. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

D. $\emptyset$.

Lời giải.

Hàm số $y = \frac{x-1}{x^2-x+3}$ có nghĩa khi và chỉ khi $x^2 - x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập xác định của hàm số $y = \frac{x-1}{x^2-x+3}$ là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 132. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{5-x}$ là

- A. $[-5; 5]$. B. $(-\infty; 5]$. C. $\mathbb{R} \setminus \{5\}$. D. $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số $y = \sqrt{5-x}$ có nghĩa khi và chỉ khi $5-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 5$.

Vậy tập xác định của hàm số $y = \sqrt{5-x}$ là $\mathcal{D} = (-\infty; 5]$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 133. Cho hàm số $y = f(x) = 3x^4 - x^2 + 2$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $y = f(x)$ là hàm số không chẵn và không lẻ. B. $y = f(x)$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$.
C. $y = f(x)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$. D. $y = f(x)$ là hàm số vừa chẵn vừa lẻ trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số $y = f(x) = 3x^4 - x^2 + 2$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ (hiển nhiên $-x \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$).

Ta có $f(-x) = 3(-x)^4 - (-x)^2 + 2 = 3x^4 - x^2 + 2 = f(x), \forall x \in \mathcal{D}$.

Vậy $y = f(x)$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 134. Cho hai hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ và $g(x) = -x^3 + x$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $f(x)$ chẵn trên $\mathbb{R}$; $g(x)$ lẻ trên $\mathbb{R}$. B. $f(x)$ và $g(x)$ cùng lẻ trên $\mathbb{R}$.
C. $f(x)$ lẻ, $g(x)$ không chẵn không lẻ. D. $f(x)$ lẻ trên $\mathbb{R}$, $g(x)$ chẵn trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Cả hai hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ và $g(x) = -x^3 + x$ đều có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

Ta có
$$\begin{cases} f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -(x^3 - x) = -f(x), \forall x \in \mathcal{D} \\ g(-x) = -(-x)^3 + (-x) = -(-x^3 + x) = -g(x), \forall x \in \mathcal{D}. \end{cases}$$

Vậy $f(x)$ và $g(x)$ cùng lẻ trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 135. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{2-x}$ là

- A. $[-2; 2]$. B. $\mathbb{R}$. C. $(-\infty; 2]$. D. $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Lời giải.

Điều kiện $2-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$.

Suy ra tập xác định là $\mathcal{D} = (-\infty; 2]$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 136. Tập xác định của hàm số $y = f(x) = \sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{3-x}}$ là

- A. $(1; 3)$. B. $[1; 3)$. C. $(1; 3]$. D. $[1; 3]$.

Lời giải.

Điều kiện
$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 3-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x < 3 \end{cases}.$$

Suy ra tập xác định $\mathcal{D} = [1; 3)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 137. Tập xác định của hàm số $y = \frac{5-x}{\sqrt{x-3}}$ là

- A. $(3; 5]$. B. $[3; 5]$. C. $[3; +\infty)$. D. $(3; +\infty)$.

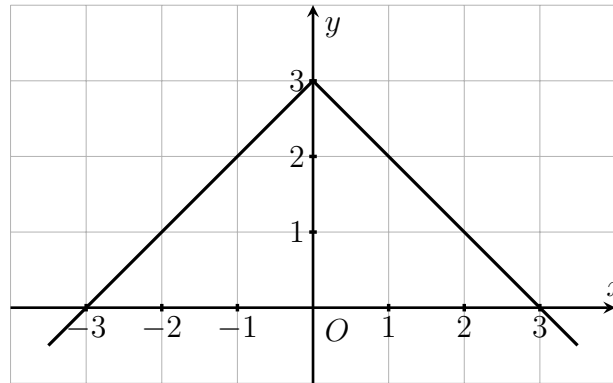
Lời giải.

Hàm số $y = \frac{5-x}{\sqrt{x-3}}$ xác định khi $x-3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$. Vậy tập xác định của hàm số là $(3; +\infty)$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 138. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ



Kết luận nào trong các kết luận sau là đúng?

- A. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. B. Hàm số $y = f(x)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$.
C. Hàm số $y = f(x)$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$. D. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy, đồ thị hàm số nhận trục tung làm trục đối xứng.

Do đó, hàm số đã cho là hàm chẵn trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 139. Hàm số nào trong các hàm số sau đây là hàm số lẻ?

- A. $y = x^2$. B. $y = \sqrt{1-2x}$.
C. $y = \sqrt[3]{2-x} - \sqrt[3]{2+x}$. D. $y = |2-x| + |2+x|$.

Lời giải.

Hàm số $y = \sqrt[3]{2-x} - \sqrt[3]{2+x}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $y(x) = -y(-x)$, nên hàm số $y = \sqrt[3]{2-x} - \sqrt[3]{2+x}$ là hàm số lẻ.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 140. Cho hàm số $y = \begin{cases} 2x+1 & \text{khi } x \leq 2 \\ x^2-3 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$. Trong các điểm sau đây, điểm nào thuộc đồ thị hàm số?

- A. $(0; 1)$. B. $(0; -3)$. C. $(3; 7)$. D. $(-3; 6)$.

Lời giải.

Điểm $(0; 1)$ thuộc đồ thị hàm số.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 141. Tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}$ là

- A. $(-\infty; 2]$. B. $(2; +\infty) \setminus \{-1\}$. C. $[2; +\infty)$. D. $(2; +\infty)$.

Lời giải.

$$\text{Hàm số đã cho xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 142. Tập xác định của hàm số $y = \frac{|x-3|}{x+4}$ là

- A. $\mathcal{D} = (3; +\infty)$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{4\}$. C. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $x+4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -4$. Vậy tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 143. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{2x + \sqrt{2-x}}{\sqrt{x+2}-1}$.

- A. $\mathcal{D} = (-2; 2)$. B. $\mathcal{D} = [-2; 2] \setminus \{-1\}$.
C. $\mathcal{D} = (-2; 2) \setminus \{-1\}$. D. $\mathcal{D} = (-2; 2]$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ \sqrt{x+2}-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq -2 \\ \sqrt{x+2} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x+2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

Suy ra tập xác định $\mathcal{D} = [-2; 2] \setminus \{-1\}$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 144. Cho hàm số $y = x(x^4 - 3x^2 - 5)$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- A. Hàm số lẻ. B. Hàm số chẵn.
C. Hàm số không chẵn, không lẻ. D. Hàm số vừa chẵn, vừa lẻ.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Do đó $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$.

Ta có, $y(-x) = -x(x^4 - 3x^2 - 5) = -y(x), \forall x \in \mathcal{D}$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Chọn đáp án **A** □

Câu 145. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{2x-3}}{x+1}$.

- A. $\mathcal{D} = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-1; \frac{3}{2}\right\}$.
C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. D. $\mathcal{D} = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right) \setminus \{-1\}$.

Lời giải.

$$\text{Để hàm số xác định thì } \begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x \neq -1 \end{cases} \Rightarrow x \geq \frac{3}{2}. \text{ Vậy } \mathcal{D} = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right).$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 146. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt[3]{1-x}$ là

A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

B. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

C. $\mathcal{D} = (-\infty; 1]$.

D. $\mathcal{D} = [1; +\infty)$.

Lời giải.Hàm số $y = \sqrt[3]{1-x}$ xác định trên $\mathbb{R}$.Chọn đáp án **(B)** □**Câu 147.** Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{x^2 + 1}{x}$.

A. $\mathcal{D} = (-\infty; 0)$.

B. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

C. $\mathcal{D} = (0; +\infty)$.

D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Lời giải. y xác định khi $x \neq 0$. Do đó, tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.Chọn đáp án **(D)** □**Câu 148.** Tập xác định của hàm số $y = f(x) = \frac{x-2}{x^2+1}$ là

A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

D. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Lời giải.Điều kiện: $x^2 + 1 \neq 0$ đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.Chọn đáp án **(D)** □**Câu 149.** Hàm số nào sau đây có tập xác định là $(3; +\infty)$?

A. $y = \frac{\sqrt{x-3}}{x-2}$.

B. $y = 3x^2 + \sqrt{x-3}$.

C. $y = \frac{2x-1}{\sqrt{3-x}}$.

D. $y = \frac{1}{x\sqrt{x-3}}$.

Lời giải.Biểu thức $\frac{1}{x\sqrt{x-3}}$ xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} x \neq 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$.Chọn đáp án **(D)** □**Câu 150.** Trong ba hàm số $f(x) = x^3 - x + 1$, $g(x) = \sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}$, $h(x) = x^2|x|$. Có bao nhiêu hàm số lẻ?

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Lời giải.• $f(x) = x^3 - x + 1$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.Khi đó $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R} \\ f(-x) = -x^3 + x + 1 \neq f(x) \text{ và } f(-x) \neq -f(x) \end{cases} \Rightarrow f(x) \text{ không là hàm chẵn cũng không là hàm lẻ.}$ • $g(x) = \sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}$ có tập xác định $\mathcal{D} = [-3; 3]$.Khi đó $\begin{cases} \forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D} \\ g(-x) = \sqrt{3-x} - \sqrt{3+x} = -g(x) \end{cases} \Rightarrow g(x) \text{ là hàm số lẻ.}$ • $h(x) = x^2|x|$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.Khi đó $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R} \\ h(-x) = (-x)^2 \cdot |-x| = x^2|x| = h(x) \end{cases} \Rightarrow h(x) \text{ là hàm số chẵn.}$ Chọn đáp án **(A)** □**Câu 151.** Tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{x-1}$ là tập nào sau đây?

A. $(-\infty; -1)$.

B. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

C. $[10; +\infty)$.

D. $(1; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{1}{x-1}$ là $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.

Suy ra tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{x-1}$ là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 152. Tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{x+1}{2x-3}$ là

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-1, \frac{3}{2}\right\}$. C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $2x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{3}{2}$.

$\Rightarrow$ Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 153. Cho hàm số $y = f(x) = 3x^4 - 4x^2 + 3$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $y = f(x)$ là hàm số không có tính chẵn lẻ. B. $y = f(x)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$.
C. $y = f(x)$ là hàm số vừa chẵn vừa lẻ. D. $y = f(x)$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Ta có

$$f(-x) = 3(-x)^4 - 4(-x)^2 + 3 = 3x^4 - 4x^2 + 3 = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(-1) \neq -f(1).$$

Vậy $y = f(x)$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 154. Tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \sqrt{x-3} + \frac{1}{x-3}$ là

- A. $\mathcal{D} = [3; +\infty)$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. C. $\mathcal{D} = (3; +\infty)$. D. $\mathcal{D} = (-\infty; 3)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$. Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = (3; +\infty)$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 155. Tập xác định của hàm số $y = \frac{3}{x^2-x-6}$ là tập hợp nào sau đây?

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; -3\}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2; -3\}$. C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $x^2-x-6 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq -2 \end{cases}$.

Vậy tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 156. Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

- A. $y = x^3 + 1$. B. $y = x^2\sqrt{x+1}$.
C. $y = |x+2| + |x-2|$. D. $y = |x| + x$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = f(x) = |x+2| + |x-2|$. Ta có

- Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$.
- $f(-x) = |-x+2| + |-x-2| = |x+2| + |x-2| = f(x)$.

Vậy hàm số $y = |x+2| + |x-2|$ là hàm số chẵn.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 157. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

- A. $y = x^4 + x^2 - 2017$. B. $y = x^3 - x$.
 C. $y = x^2 - x + 1$. D. $y = x^2 - 2017x + 2016$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x^3 - x$. Ta có

- Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$.
- $f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -(x^3 - x) = -f(x)$.

Vậy hàm số $y = x^3 - x$ là hàm số lẻ.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 158. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{4+7x}{x+5}$.

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. C. $\mathcal{D} = (-5; +\infty)$. D. $\mathcal{D} = (-\infty; -5)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $x+5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -5$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 159. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \sqrt{x+3} - 2x$.

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. B. $\mathcal{D} = [3; +\infty)$. C. $\mathcal{D} = (-3; +\infty)$. D. $\mathcal{D} = [-3; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$. Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = [-3; +\infty)$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 160. Tập hợp $\mathcal{D} = \{0\} \cup [1; +\infty)$ là tập xác định của hàm số nào?

- A. $y = \frac{x^2}{x-1}$. B. $y = \frac{2}{x\sqrt{x-1}}$. C. $y = \sqrt{x^2(x-1)}$. D. $y = \sqrt{x} + \sqrt{x-1}$.

Lời giải.

Hàm số $y = \sqrt{x^2(x-1)}$ xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} x^2 = 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$. Vậy tập xác định của hàm số

là $\mathcal{D} = \{0\} \cup [1; +\infty)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 161. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{2x-1}{x^2-4x+3}$.

- A. $(1; 3)$. B. $\{1; 3\}$. C. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. D. $\mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi

$$x^2 - 4x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 3 \end{cases}.$$

Vậy tập xác định của hàm số $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 162. Hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = -x + 2$. B. $y = 2x^2 + 4$. C. $y = x^2$. D. $y = \frac{x+3}{5}$.

Lời giải.

Ta thấy

- Hàm số $f(x) = -x + 2$ có $f(0) > f(1)$ nên không đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số $f(x) = 2x^2 + 4$ có $f(-1) > f(0)$ nên không đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số $f(x) = x^2$ có $f(-1) > f(0)$ nên không đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Xét $f(x) = \frac{x+3}{5}$. $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2$ ta có

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_2 - x_1}{5} > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1).$$

Vậy hàm số này đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 163. Tìm hàm số chẵn trong các hàm số sau.

- A. $y = 3x^4 + x^2 + 5$. B. $y = |x - 1| - |x + 1|$.
C. $y = \sqrt{x+1}$. D. $y = 2x^2 + x$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = f(x) = 3x^4 + x^2 + 5$ ta có

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R} \\ f(-x) = 3(-x)^4 + (-x)^2 + 5 = 3x^4 + x^2 + 5 = f(x) \end{cases}.$$

Vậy $y = f(x) = 3x^4 + x^2 + 5$ là hàm chẵn.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 164. Tìm tập xác định của hàm số $y = \begin{cases} \sqrt{x-2}, & \text{khi } x \geq 1 \\ \frac{1}{x-1}, & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.

- A. $(-\infty; 1) \cup [2; +\infty)$. B. $(-\infty; 1]$. C. $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$. D. $[2; +\infty)$.

Lời giải.

Khi $x \geq 1$ điều kiện xác định của y là $x \geq 2$ do đó $x \geq 2$.

Khi $x < 1$ điều kiện xác định của y là $x \neq 1$ do đó $x < 1$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = (-\infty; 1) \cup [2; +\infty)$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 165. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{x-2}{x-3} + \sqrt{4-x}$.

- A. $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. B. $[2; +\infty)$. C. $(-\infty; 4] \setminus \{3\}$. D. $(-\infty; 3) \setminus \{2\}$.

Lời giải.

- Hàm số xác định khi $\begin{cases} x \neq 3 \\ 4-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x \leq 4 \end{cases}$.

- Vậy tập xác định của hàm số là $(-\infty; 4] \setminus \{3\}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 166. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = 3|x^3| - 5x^2 - 2$.

- A. Hàm số chẵn. B. Hàm số lẻ.
C. Hàm số không chẵn, không lẻ. D. Hàm số vừa chẵn, vừa lẻ.

Lời giải.

- Hàm số có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Do đó $x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$.
- Có $y(-x) = 3|(-x)^3| - 5(-x)^2 - 2 = 3|x^3| - 5x^2 - 2 = y(x)$.

Vậy hàm số là hàm số chẵn.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 167. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{3x-3}{x} + \sqrt{2-x}$.

- A. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. B. $[2; +\infty)$. C. $(-\infty; 2] \setminus \{0\}$. D. $(-\infty; 3] \setminus \{0\}$.

Lời giải.

- Hàm số xác định khi $\begin{cases} x \neq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \leq 2. \end{cases}$
- Vậy tập xác định của hàm số là $(-\infty; 2] \setminus \{0\}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 168. Tìm tất cả giá trị của tham số a để tập giá trị của hàm số $y = \frac{x+a}{x^2+1}$ chứa đoạn $[0; 1]$.

- A. $a \in \mathbb{R}$. B. $a \geq 2$. C. $a \geq \frac{3}{4}$. D. $a < 2$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \frac{x+a}{x^2+1} \Leftrightarrow yx^2 - x + y - a = 0$.

Tập giá trị của hàm số chứa đoạn $[0; 1] \Leftrightarrow$ với mọi $y \in [0; 1]$ thì phương trình trên luôn có nghiệm.

Với $y = 0$ ta có phương trình $x + a = 0 \Leftrightarrow x = -a$. Do đó phương trình luôn có nghiệm.

Với $0 < y \leq 1$ thì phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 1 - 4y(y-a) \geq 0 \Leftrightarrow 4y^2 - 1 \leq 4ay \Leftrightarrow \frac{4y^2 - 1}{4y} \leq a$.

Yêu cầu bài toán tương đương với $\max_{(0;1]} \frac{4y^2 - 1}{4y} \leq a$.

Ta có $\frac{4y^2 - 1}{4y} = (y-1) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4y}\right) + \frac{3}{4} = (y-1)\left(1 + \frac{1}{4y}\right) + \frac{3}{4} \leq \frac{3}{4}$ với mọi $y \in (0; 1]$.

Vậy $a \geq \frac{3}{4}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 169. Hàm số $y = \sqrt{9-3|x|} + \frac{x}{\sqrt{9x^2-1}}$ có tập xác định $\mathcal{D}_1$ và hàm số $y = \frac{\sqrt{x+2}}{x|x|+4}$ có tập xác định $\mathcal{D}_2$. Khi đó số phần tử của tập $A = \mathbb{Z} \cap (\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2)$ là

- A. 4. B. 5. C. 6. D. 7.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \sqrt{9-3|x|} + \frac{x}{\sqrt{9x^2-1}}$ xác định khi:

$$\begin{cases} 9-3|x| \geq 0 \\ 9x^2-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} < x \leq 3 \\ -3 \leq x < -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \mathcal{D}_1 = \left[-3; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; 3\right].$$

Hàm số $y = \frac{\sqrt{x+2}}{x|x|+4}$ xác định khi:

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x|x|+4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 0 \\ -x^2+4 \neq 0 \\ x > 0 \\ x^2+4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x \leq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{D}_2 = (-2; +\infty).$$

$\Rightarrow A = \mathbb{Z} \cap (\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2) = \{-1; 1; 2; 3\}$. Vậy tập A gồm 4 phần tử.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 170. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x+2m-1} + \sqrt{4-2m-\frac{x}{2}}$ xác định với mọi $x \in [0; 2]$ khi $m \in [a; b]$.

Giá trị $a+b=?$

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải.

Hàm số $f(x) = \sqrt{x+2m-1} + \sqrt{4-2m-\frac{x}{2}}$ xác định khi $\begin{cases} x \geq 1-2m \\ x \leq 8-4m. \end{cases}$

Hàm số xác định trên $[0; 2]$ nên $1-2m \leq 0 < 2 \leq 8-4m \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq m \leq \frac{3}{2} \Rightarrow m \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

Do đó $a+b=2$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 171. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số sau có tập xác định là $\mathbb{R}$

$$y = \frac{2018x + 2019}{\sqrt{(m-1)x^2 + 2(m-1)x + 4}}.$$

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải.

Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = (m-1)x^2 + 2(m-1)x + 4 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Với $m=1$, ta có $f(x) = 4 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó $m=1$ thỏa mãn.

Với $m \neq 1$, yêu cầu bài toán thỏa mãn khi $\begin{cases} m > 1 \\ (m-1)^2 - 4(m-1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ 1 < m < 5. \end{cases}$

Do đó $1 \leq m < 5$. Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 172. Cho hàm số $y = \sqrt{(m+1)x + 2m + 3}$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho xác định trên $[-3; -1]$.

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. Vô số.

Lời giải.

Hàm số xác định trên $[-3; -1] \Leftrightarrow f(x) = (m+1)x + 2m + 3 \geq 0$ với mọi $x \in [-3; -1]$.

Nhận xét: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-3; -1]$ là đoạn thẳng AB với $A(-3; -m)$ và $B(-1; m+2)$.

Do đó $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in [-3; -1]$ khi và chỉ khi đoạn AB không có điểm nào nằm phía dưới trục hoành

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m \geq 0 \\ m+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 0.$$

Vậy có 3 giá trị nguyên của m là $-2; -1; 0$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 173. Tìm m để hàm số $y = \sqrt{x-m} + \sqrt{2x-m-1}$ xác định với mọi x thuộc khoảng $(0; +\infty)$.

- A. $m \leq -1$. B. $-2 \leq m \leq 2$. C. $m \leq 0$. D. $m \leq 1$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x-m \geq 0 \\ 2x-m-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m \\ x \geq \frac{m+1}{2} \end{cases} (*)$

Trường hợp 1: Nếu $m \geq \frac{m+1}{2} \Leftrightarrow m \geq 1$ thì $(*) \Leftrightarrow x \geq m$.

Khi đó tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = [m; +\infty)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (0; +\infty) \subseteq [m; +\infty) \Leftrightarrow m \leq 0$: không thỏa mãn $m \geq 1$.

Trường hợp 2: Nếu $m \leq \frac{m+1}{2} \Leftrightarrow m \leq 1$ thì $(*) \Leftrightarrow x \geq \frac{m+1}{2}$.

Khi đó tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \left[\frac{m+1}{2}; +\infty\right)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (0; +\infty) \subseteq \left[\frac{m+1}{2}; +\infty\right) \Leftrightarrow \frac{m+1}{2} \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -1$: thỏa mãn điều kiện $m \leq 1$.

Vậy $m \leq -1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 174. Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{2\sqrt{x-2m+3}}{3(x-m)} + \frac{x-2}{\sqrt{-x+m+5}}$ xác định trên khoảng $(0; 1)$.

- A. $m \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$. B. $m \in [-3; 0]$.
C. $m \in [-3; 0] \cup [0; 1]$. D. $m \in [-4; 0] \cup \left[1; \frac{3}{2}\right]$.

Lời giải.

Gọi $\mathcal{D}$ là tập xác định của hàm số $y = \frac{2\sqrt{x-2m+3}}{3(x-m)} + \frac{x-2}{\sqrt{-x+m+5}}$.

Khi đó

$$x \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2m+3 \geq 0 \\ x-m \neq 0 \\ -x+m+5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2m-3 \\ x \neq m \\ x < m+5 \end{cases}$$

Hàm số $y = \frac{\sqrt{x-2m+3}}{x-m} + \frac{3x-1}{\sqrt{-x+m+5}}$ xác định trên khoảng $(0; 1)$ khi và chỉ khi

$$(0; 1) \subseteq \mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-3 \leq 0 \\ m+5 \geq 1 \\ m \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{3}{2} \\ m \geq -4 \\ \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m \in [-4; 0] \cup \left[1; \frac{3}{2}\right].$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 175. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{16-x^2} + \sqrt{2017x+2018m}$ (m là tham số). Để tập xác định của hàm số chỉ có đúng một phần tử thì $m = \frac{a}{b}$ ($a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*$) với $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $a+b$.

A. -3025.

B. 3025.

C. 5043.

D. -5043.

Lời giải.

Điều kiện xác định của hàm số là

$$\begin{cases} 16 - x^2 \geq 0 \\ 2017x + 2018m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq 4 \\ x \geq -\frac{2018m}{2017} \end{cases}.$$

Tập xác định của hàm số chỉ có đúng một phần tử $\Leftrightarrow [-4; 4] \cap \left[-\frac{2018m}{2017}; +\infty\right)$ chỉ có đúng một phần tử $\Leftrightarrow \frac{-2018m}{2017} = 4 \Leftrightarrow m = \frac{-4034}{1009}$. Vậy $a + b = -3025$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 176. Cho hàm số $y = \sqrt{1 - |2x^2 + mx + m + 15|}$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số xác định trên đoạn $[1; 3]$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải.Hàm số xác định trên đoạn $[1; 3]$ khi

$$1 - |2x^2 + mx + m + 15| \geq 0, \forall x \in [1; 3] \Leftrightarrow |2x^2 + mx + m + 15| \leq 1, \forall x \in [1; 3]. (1)$$

Bài toán được chuyển về việc tìm m để bất phương trình (1) nghiệm đúng với $\forall x \in [1; 3]$.

Điều kiện cần: Bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in [1; 3]$ nên bất phương trình nghiệm đúng với $x = 1, x = 2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |2m + 17| \leq 1 \\ |3m + 23| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq 2m + 17 \leq 1 \\ -1 \leq 3m + 23 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9 \leq m \leq -8 \\ -8 \leq m \leq -\frac{22}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = -8.$$

Vậy với $m = -8$ là điều kiện cần để (1) nghiệm đúng với $\forall x \in [1; 3]$.

Điều kiện đủ: Với $m = -8$, ta có:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow |2x^2 - 8x + 7| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 2x^2 - 8x + 7 \leq 1. \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 8x + 8 \geq 0 \\ 2x^2 - 8x + 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2)^2 \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3. \end{aligned}$$

Vậy với $m = -8$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Chọn đáp án **A** □

Câu 177. Tìm m để hàm số $y = \frac{\sqrt{x - 4m + 3}}{x - 2m} + \frac{3x - 1}{\sqrt{5 + 2m - x}}$ xác định trên khoảng $(0; 1)$.

A. $\begin{cases} -2 \leq m \leq 0 \\ \frac{1}{2} \leq m \leq \frac{3}{4} \end{cases}.$

B. $-2 \leq m \leq 0.$

C. $\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{3}{4}.$

D. $\begin{cases} -2 < m \leq 0 \\ \frac{1}{2} \leq m < \frac{3}{4} \end{cases}.$

Lời giải.

Gọi $\mathcal{D}$ là tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{x - 4m + 3}}{x - 2m} + \frac{3x - 1}{\sqrt{5 + 2m - x}}$.

$$x \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4m + 3 \geq 0 \\ x - 2m \neq 0 \\ 5 + 2m - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4m - 3 \\ x \neq 2m \\ x < 2m + 5. \end{cases}$$

Hàm số $y = \frac{\sqrt{x-4m+3}}{x-2m} + \frac{3x-1}{\sqrt{5+2m-x}}$ xác định trên khoảng $(0; 1) \Leftrightarrow (0; 1) \subseteq \mathcal{D}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4m-3 \leq 0 \\ 2m \notin (0; 1) \\ 2m+5 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{3}{4} \\ m \leq 0 \text{ hay } m \geq \frac{1}{2} \\ m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq m \leq 0 \\ \frac{1}{2} \leq m \leq \frac{3}{4} \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 178. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(1; 2) \cup [4; +\infty)$, biết $y = f(x) = \sqrt{x+m} - \frac{1}{2x-m+1}$.

A. 6.

B. 7.

C. 8.

D. 9.

Lời giải.

Điều kiện xác định của hàm số là

$$\begin{cases} x+m \geq 0 \\ 2x-m+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -m \\ x \neq \frac{m-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m \leq 1 \\ \left[\frac{m-1}{2} \leq 1 \right. \\ \left. 2 \leq \frac{m-1}{2} < 4 \right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ \begin{cases} m \leq 3 \\ 5 \leq m < 9 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m \in [-1; 3] \cup [5; 9).$$

Do m là các số nguyên dương nên $m \in \{1; 2; 3; 5; 6; 7; 8\}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 179. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $y = \sqrt{-m^2x^2 + 2|m|x + 3}$ xác định trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$. Khi đó số các phần tử của S là

A. 0.

B. 4.

C. 8.

D. 9.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & -m^2x^2 + 2|m|x + 3 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & -(|m|x - 1)^2 + 4 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & |(|m|x - 1)| \leq 2 \\ \Leftrightarrow & -2 \leq |m|x - 1 \leq 2 \\ \Leftrightarrow & -1 \leq |m|x \leq 3. \end{aligned}$$

Nhận thấy nếu $m = 0$ thì luôn thỏa mãn.

Nếu $m \neq 0$, ta có $-\frac{1}{|m|} \leq x \leq \frac{3}{|m|}$.

Để hàm số xác định trên $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right) \subset \left[-\frac{1}{|m|}; \frac{3}{|m|}\right]$. Ta có $\frac{-1}{|m|} < 0, \forall m \neq 0$ nên

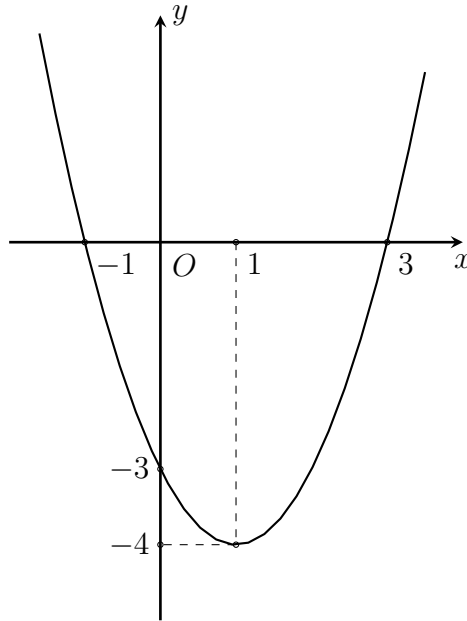
$$\frac{2}{3} \leq \frac{3}{|m|} \Leftrightarrow \begin{cases} |m| \leq \frac{9}{2} \\ m \neq 0. \end{cases}$$

Vậy $m \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$. Do đó, số phần tử của S là 8.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 180. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm giá trị nguyên lớn nhất của m để hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{f(x) - 2m + 2}}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.



- A. $m = -2$. B. $m = -1$. C. $m = -4$. D. $m = 0$.

Lời giải.

Hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{f(x) - 2m + 2}}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$f(x) - 2m + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2m - 2 < \min f(x).$$

Từ đồ thị hàm số, ta có $\min f(x) = -4$. Suy ra $2m - 2 < -4 \Leftrightarrow m < -1$.

Vậy giá trị nguyên lớn nhất của m là $m = -2$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 181. Tìm số giá trị nguyên của tham số $m \in [-2018; 2019]$ để hàm số $y = \sqrt{x - m} + \sqrt{2x - m - 1}$ xác định với mọi $x \in (0; +\infty)$.

- A. 4038. B. 2018. C. 2019. D. 2020.

(Đinh Thị Duy Phương)

Lời giải.

Điều kiện xác định $\begin{cases} x \geq m \\ x \geq \frac{m+1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in [m; +\infty) \cap \left[\frac{m+1}{2}; +\infty\right)$. Hàm số xác định với mọi $x \in (0; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m < \frac{m+1}{2} \\ \frac{m+1}{2} \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{m+1}{2} \leq m \\ m \leq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -1.$$

Vậy có 2018 giá trị nguyên của m cần tìm.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 182. Cho hàm số $y = \sqrt{x^4 - x^2 + 1 - mx\sqrt{2x^4 + 2}}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số có tập xác định là tập số thực $\mathbb{R}$.

- A. $m \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$. B. $m \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$. C. $m \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$. D. $m \in [-1; 1]$.

Lời giải.

Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow x^4 - x^2 + 1 + mx\sqrt{2x^4 + 2} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x^4 + 1}\right)^2 + 2m(\sqrt{2x})\sqrt{x^4 + 1} - (\sqrt{2x})^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow 2 + 2m\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x^4 + 1}} - \left(\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x^4 + 1}}\right)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x^4 + 1}}\right)^2 - 2m\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x^4 + 1}} - 2 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (1)$$

Đặt $t = \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x^4 + 1}}$ thì $|t| = \frac{|\sqrt{2x}|}{\sqrt{x^4 + 1}} = \sqrt{\frac{2x^2}{x^4 + 1}} \leq 1$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x^2 = 1$.

Khi đó, phương trình (1) trở thành $t^2 - 2mt - 2 \leq 0, \forall t \in [-1; 1]$. (2)

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 2mt - 2$. Đây là hàm số bậc hai có hệ số $a > 1$ nên

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) \leq 0 \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 1 \leq 0 \\ 2m + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 183. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trên đoạn $[-2018; 2018]$ để hàm số $y = \sqrt{m - x + 2} - \frac{x}{\sqrt{-x + 1 - 2m}}$ xác định trên $[0; 1)$?

- A. 2018. B. 2019. C. 4036. D. 4037.

Lời giải.

Điều kiện xác định $\begin{cases} x \geq 2 - m \\ x < 1 - 2m \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1 - 2m) \cap [m - 2; +\infty)$.

Hàm số xác định trên $[0; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 < 1 - 2m \\ m - 2 \leq 0 \\ 1 - 2m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \leq 2 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 0.$

Vậy có 2019 giá trị của m thỏa yêu cầu đề bài.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 184. Tìm số giá trị nguyên của tham số k để hàm số $y = \sqrt{2x - 3k + 4} + \frac{x - k}{x + k - 1}$ xác định trên khoảng $(0; +\infty)$.

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 2x - 3k + 4 \geq 0 \\ x + k - 1 \neq 0 \end{cases}.$

Hàm số xác định trên $(0; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} -k + 1 \leq 0 \\ \frac{3k - 4}{2} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow k \in \left[1; \frac{4}{3}\right].$

Chọn đáp án (A) ☐

Câu 185. Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{3x+1} + x - 1}{x - 2}$ đi qua điểm nào dưới đây?

- A. $M(1; -2)$. B. $N(-2; 1)$. C. $P(0; -1)$. D. $Q(1; 2)$.

Lời giải.

Do $y(1) = -2 \Rightarrow$ Điểm $M(1; -2)$ thuộc đồ thị hàm số đã cho.

Chọn đáp án (A) ☐

Câu 186. Điểm $M(1; -1)$ thuộc đồ thị hàm số nào dưới đây?

- A. $y = x^3 - 3x + 2$. B. $y = \frac{2x - 1}{x - 2}$. C. $y = \sqrt{5 - x} - x$. D. $y = \frac{x}{x + 1}$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \frac{2x - 1}{x - 2}$ có $y(1) = -1 \Rightarrow$ Điểm $M(1; -1)$ thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{2x - 1}{x - 2}$

Chọn đáp án (B) ☐

Câu 187. Điểm $A(-1; 2)$ không thuộc đồ thị hàm số nào dưới đây?

- A. $y = x^4 + 1$. B. $y = |x| + 1$. C. $y = -x^4 + x + 4$. D. $y = x^4 + |x| - 2$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x^4 + |x| - 2$ có $y(-1) = 0 \Rightarrow$ Điểm $A(-1; 2)$ không thuộc đồ thị hàm số $y = x^4 + |x| - 2$.

Chọn đáp án (D) ☐

Câu 188. Điểm $A(-1; -2)$ thuộc đồ thị hàm số nào sau đây?

- A. $y = \frac{x - 1}{2x + 3}$. B. $y = x^4 - 1$.
C. $y = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 2}$. D. $y = x^3 + 3x^2 - 4x - 6$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \frac{x - 1}{2x + 3}$ có $y(-1) = -2 \Rightarrow$ Điểm $A(-1; -2)$ thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x - 1}{2x + 3}$.

Chọn đáp án (A) ☐

Câu 189. Cho hàm số $y = x - |x|$. Trên đồ thị của hàm số lấy điểm A có hoành độ là -2 . Tọa độ của điểm A là

- A. $A(-2; 4)$. B. $A(-2; -4)$. C. $A(-2; 0)$. D. $A(-2; 2)$.

Lời giải.

Ta có $y(-2) = -2 - |-2| = -4 \Rightarrow A(-2; -4)$.

Chọn đáp án (B) ☐

Câu 190. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = -x^4 + (2m - 1)x + 2$ đi qua điểm $A(1; 0)$?

- A. $m = 1$. B. $m = 0$. C. $m > 0$. D. $m = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Điểm $A(1; 0)$ thuộc đồ thị hàm số $y = -x^4 + (2m - 1)x + 2$ nếu

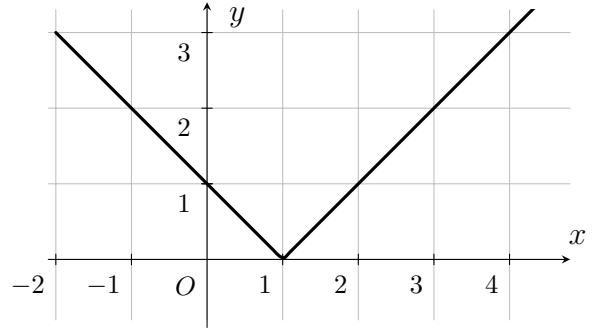
$$0 = -(1)^4 + (2m - 1) \cdot (1) + 2 \Leftrightarrow m = 0$$

Chọn đáp án (B) ☐

Câu 191.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ trong hình bên. Tính $f(3)$.

- A. $f(3) = 0$.
 B. $f(3) = 3$.
 C. $f(3) = 2$.
 D. $f(3) = 1$.

**Lời giải.**

Ta thấy đồ thị hàm số đi qua điểm $(3; 2)$ nên $f(3) = 2$.

Chọn đáp án **C** ☐

Câu 192. Điểm nào sau đây thuộc đồ thị hàm số $y = x^4 + x^3 - 2x^2 + 1$?

- A. $M(-2; 1)$. B. $N(1; 6)$. C. $P(-1; 1)$. D. $Q(0; -1)$.

Lời giải.

Điểm $M(-2; 1)$ thuộc đồ thị hàm số vì $(-2)^4 + (-2)^3 - 2 \cdot (-2)^2 + 1 = 1$.

Chọn đáp án **A** ☐

Câu 193. Cho hàm số $y = f(x) = |-5x|$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. $f(-1) = 5$. B. $f(2) = 10$. C. $f(-2) = 10$. D. $f\left(\frac{1}{5}\right) = -1$.

Lời giải.

Ta có $f\left(\frac{1}{5}\right) = 1$ nên $f\left(\frac{1}{5}\right) = -1$ là sai.

Chọn đáp án **D** ☐

Câu 194. Điểm nào sau đây thuộc đồ thị hàm số $y = 2|x - 1| + 3|x| - 2$?

- A. $M(2; 6)$. B. $N(1; -1)$. C. $P(-2; -10)$. D. $Q(0; -4)$.

Lời giải.

Ta thay tọa độ các điểm M, N, P, Q vào $y = 2|x - 1| + 3|x| - 2$ chỉ thấy tọa độ điểm $M(2; 6)$ thỏa mãn.

Chọn đáp án **A** ☐

Câu 195. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{với } x \geq 2 \\ x^2 - 2 & \text{với } x < 2 \end{cases}$. Khi đó giá trị $f(3)$ là

- A. $f(3) = 7$. B. $f(3) = 1$. C. $f(3) = 1$. D. $f(3) = 4$.

Lời giải.

Vì $3 \geq 2$ nên $f(3) = 3 + 1 = 4$.

Chọn đáp án **D** ☐

Câu 196. Cho hàm số $y = \begin{cases} -2x + 1 & \text{khi } x \leq -3 \\ \frac{x + 7}{2} & \text{khi } x > -3 \end{cases}$. Biết $f(x_0) = 5$ thì x_0 là

- A. -2 . B. 3 . C. 0 . D. 1 .

Lời giải.

TH1. $x_0 \leq -3$: Với $f(x_0) = 5 \Leftrightarrow -2x_0 + 1 = 5 \Leftrightarrow x_0 = -2$ (loại).

TH2. $x_0 > -3$: Với $f(x_0) = 5 \Leftrightarrow \frac{x_0 + 7}{2} = 5 \Leftrightarrow x_0 = 3$ (nhận).

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 197. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+3}{x+1} & \text{khi } x \geq 0 \\ \frac{\sqrt[3]{2+3x}}{x-2} & \text{khi } -2 \leq x < 0 \end{cases}$. Ta có kết quả nào sau đây đúng?

- A. $f(-1) = \frac{1}{3}; f(2) = \frac{7}{3}$.
 B. $f(0) = 2; f(-3) = \sqrt{7}$.
 C. $f(-1)$: không xác định; $f(-3) = -\frac{11}{24}$.
 D. $f(-1) = \sqrt{8}; f(3) = 0$.

Lời giải.

$$f(-1) = \frac{\sqrt[3]{2-3}}{-1-2} = \frac{1}{3}; f(2) = \frac{2 \cdot 2 + 3}{2+1} = \frac{7}{3}.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 198. Hàm số nào sau đây luôn đồng biến trên tập $\mathbb{R}$?

- A. $y = x^2$.
 B. $y = 2x + 1$.
 C. $y = -x^2 + 3x - 1$.
 D. $y = \frac{1}{x}$.

Lời giải.

Hàm số $y = 2x + 1$ có hệ số $a = 2 > 0$ nên luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

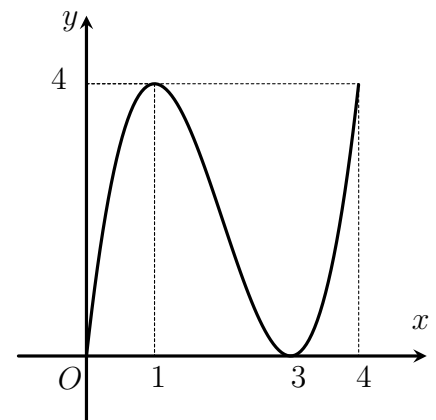
Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 199.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Kết luận nào sau đây là **sai**?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.
 B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$.
 C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(3; 4)$.
 D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 4)$.



Lời giải.

Vì hàm số nghịch biến trên $(1; 3)$ và $(1; 3) \subset (1; 4)$ nên hàm số không thể đồng biến trên $(1; 4)$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 200. Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Phương án nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số $f(x) - g(x)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
 B. Hàm số $f(x) \cdot g(x)$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
 C. Hàm số $f(x) - g(x)$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
 D. Hàm số $-f(x) - g(x)$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Vì hàm số $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $f(x) + g(x)$ cũng đồng biến trên $\mathbb{R}$. Suy ra hàm số $-(f(x) + g(x))$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 201. Phương án nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số $y = x^2 - 2x + 3$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
- B. Hàm số $y = x^2 - 2x + 3$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.
- C. Hàm số $y = x^2 - 2x + 3$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- D. Hàm số $y = x^2 - 2x + 3$ nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x^2 - 2x + 3$. Với mọi x_1, x_2 thuộc $(1; +\infty)$ và $x_1 < x_2$, ta có

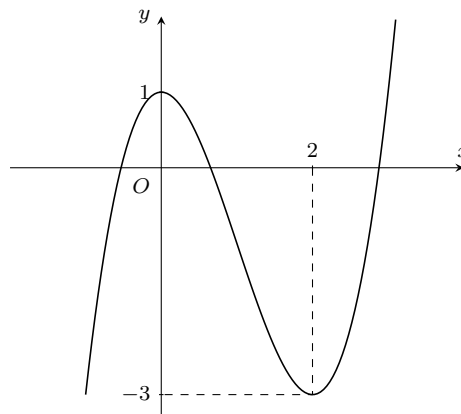
$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2^2 - 2x_2 + 3) - (x_1^2 - 2x_1 + 3) = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 2) > 0, \forall x \in (1; +\infty).$$

Vậy hàm số $y = x^2 - 2x + 3$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 202. Cho hàm số có đồ thị như hình bên dưới. Khẳng định nào dưới đây là đúng?



- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 3)$.
- D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Lời giải.

Từ hình vẽ ta có: Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$ là khẳng định đúng.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 203. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cùng đồng biến trên khoảng $(a; b)$ cho trước. Xét tính đơn điệu của hàm số $h(x) = f(x) + g(x)$ trên khoảng $(a; b)$.

- A. Hàm số $h(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a; b)$.
- B. Hàm số $h(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$.
- C. Hàm số $h(x)$ không đổi trên khoảng $(a; b)$.
- D. Không xác định được.

Lời giải.

Hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cùng đồng biến trên khoảng $(a; b)$ nên $\forall x_1, x_2 \in (a; b)$ và $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$ và $g(x_1) < g(x_2)$. Suy ra $f(x_1) + g(x_1) < f(x_2) + g(x_2) \Leftrightarrow h(x_1) < h(x_2)$. Do đó hàm số $h(x) = f(x) + g(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 204. Hàm số nào sau đây đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$?

- A. $y = x$.
- B. $y = \frac{1}{x}$.
- C. $y = 1 - 2x$.
- D. $y = x^2$.

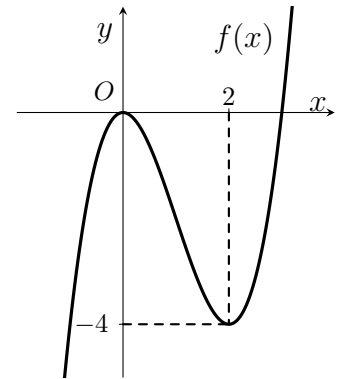
Lời giải.

Ta có hàm số $y = x$ làm hàm số bậc nhất với hệ số $a = 1 > 0$ nên đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó y đồng biến trên $(-1; 0)$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 205.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$, mệnh đề nào sau đây **sai**?



- A. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- B. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
- D. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có mệnh đề “Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ ” là mệnh đề sai.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 206. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = (m - 1)x + m^2 - 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m > 1$.
- B. $m \geq 1$.
- C. $m < 1$.
- D. $m \leq 1$.

Lời giải.

Hàm số $f(x) = (m - 1)x + m^2 - 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a = m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 207. Khẳng định nào sau đây về hàm số $y = x^2$ là khẳng định đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên $[0; +\infty)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên $[0; +\infty)$.
- C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- D. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số $y = x^2$ có hệ số $a = 1 > 0$ nên hàm đồng biến trên $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ hay $[0; +\infty)$ (vì hàm số chỉ bằng 0 tại một điểm là $x = 0$).

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 208. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên khoảng $(-3; 2)$.

- A. $y = |x + 2|$.
- B. $y = \frac{1 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{2}}x - 1$.
- C. $y = -x^2 - 6x + 10$.
- D. $y = x^2 + 6x + 10$.

Lời giải.

Ta có hàm số $y = x^2 + 6x + 10$ đồng biến trên miền $(-3; +\infty)$ nên đồng biến trên miền $(-3; 2)$.

Hàm số $y = |x + 2|$ đồng biến trên miền $(-2; +\infty)$.

Hàm số $y = \frac{1 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{2}}x - 1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

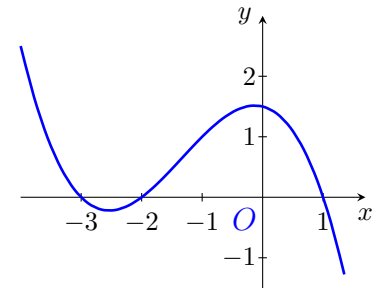
Hàm số $y = -x^2 - 6x + 10$ đồng biến trên miền $(-\infty; -\frac{3}{2})$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 209.

Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên. Những giá trị x âm làm cho giá trị của hàm số $y = f(x)$ âm là

- A. $x < 0$.
 B. $-3 < x < -2$.
 C. $-3 < x < 0$.
 D. $\begin{cases} -3 < x < -2 \\ x > 1 \end{cases}$.

**Lời giải.**

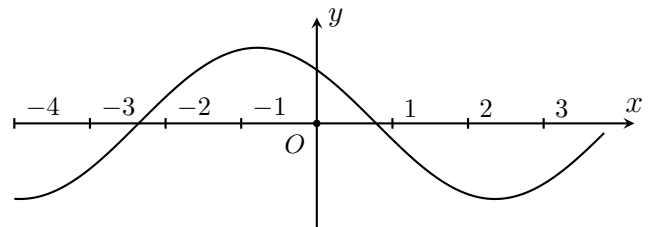
Giá trị của $f(x)$ âm khi đồ thị nằm dưới trục hoành. Khi đó $\begin{cases} -3 < x < -2 \\ x > 1 \end{cases}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 210.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ trong hình bên. Tìm tập hợp S gồm tất cả các giá trị nguyên của x để $f(x) > 0$.

- A. $S = \emptyset$.
 B. $S = \{-4, -3, 1, 2, 3\}$.
 C. $S = \{-2, -1, 0\}$.
 D. $S = \{-2, 1\}$.

**Lời giải.**

Giá trị của $f(x)$ dương khi đồ thị nằm trên trục hoành. Khi đó $x = -2, x = -1, x = 0$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 211. Trên đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ là các số nguyên?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Lời giải.

Ta có $y = \frac{2x-1}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1}$.

Để y nguyên thì $x-1$ phải là ước của 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ x-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=0 \end{cases}$.

Vậy có 2 điểm có tọa độ là các số nguyên.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 212. Cho hàm số $y = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x - \frac{11}{3}$ có đồ thị $(\mathcal{C})$. Giả sử $M(a; b)$, $N(c; d)$ là hai điểm phân biệt, thuộc $(\mathcal{C})$ và đối xứng nhau qua trục tung. Tính $b + d$.

- A. $\frac{16}{3}$. B. $-\frac{16}{3}$. C. $\frac{32}{3}$. D. $\frac{32}{3}$.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có $M(a; b)$, khi đó $N(-a; b)$ (điều kiện $a \neq 0$). Ta có:

$$\begin{cases} M(a; b) \in (\mathcal{C}) \\ N(-a; b) \in (\mathcal{C}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{a^3}{3} + a^2 + 3a - \frac{11}{3} & (1) \\ b = \frac{a^3}{3} + a^2 - 3a - \frac{11}{3} & (2) \end{cases}$$

Cộng (1) và (2) theo vế ta được $b = a^2 - \frac{11}{3}$, thay vào (2) ta được:

$$\begin{aligned} a^2 - \frac{11}{3} &= \frac{a^3}{3} + a^2 - 3a - \frac{11}{3} \Leftrightarrow \frac{a^3}{3} - 3a = 0 \\ \Leftrightarrow a^3 - 9a &= 0 \Leftrightarrow a(a^2 - 9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ (loại)} \\ a = \pm 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Khi đó $b = \frac{16}{3}$. Vậy $b + d = 2b = \frac{32}{3}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 213. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ (m là tham số). Tìm m để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ.

- A. $m < 0$. B. $m = 1$. C. $m > 0$. D. $m \geq 0$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đã cho có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ khi và chỉ khi:

$$\begin{aligned} \exists x_0 \neq 0 : -y(x_0) &= y(-x_0) \\ \Leftrightarrow \exists x_0 \neq 0 : -(x_0^3 - 3x_0^2 + m) &= -x_0^3 - 3x_0^2 + m \\ \Leftrightarrow \exists x_0 \neq 0 : m &= 3x_0^2 \Leftrightarrow m > 0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 214. Cho hàm số bậc bốn $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ($a \neq 0$). Biết rằng các hệ số a, b, c, d, e là các số nguyên không âm và không lớn hơn 8 và $f(9) = 32078$. Tính tổng các hệ số $S = a + b + c + d + e$.

- A. $S = 4$. B. $S = 10$. C. $S = 12$. D. $S = 14$.

Lời giải.

Ta có $f(9) = 6561a + 729b + 81c + 9d + e = 32078$.

Suy ra $32078 - e = 6561a + 729b + 81c + 9d \Rightarrow (32078 - e) : 9$.

Mà $e \in \mathbb{N}$, $0 \leq e \leq 8$ nên suy ra $e = 2$.

Vậy ta có $6561a + 729b + 81c + 9d = 32076 \Leftrightarrow 729a + 81b + 9c + d = 3564$.

$\Rightarrow d = 3564 - (729a + 81b + 9c) : 9$. Mà $d \in \mathbb{N}$, $0 \leq d \leq 8$ nên suy ra $d = 0$.

Từ đó ta có $729a + 81b + 9c = 3564 \Rightarrow 81a + 9b + c = 396 \Rightarrow c = 396 - (81a + 9b) : 9$.

mà $c \in \mathbb{N}$, $0 \leq c \leq 8$ nên $c = 0$. Suy ra $81a + 9b = 396 \Rightarrow 9a + b = 44 \Rightarrow 9a = 44 - b$.

Vì $b \in \mathbb{N}$, $0 \leq b \leq 8$ nên suy ra $36 \leq 9a \leq 44 \Rightarrow a = 4, b = 8$. Vậy $S = 14$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 215. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \sqrt{mx^2 - 3mx + 3m - 2}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

- A. $m > \frac{4}{3}$. B. $m > 0$. C. $m \geq \frac{8}{3}$. D. $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Yêu cầu bài toán tương đương

$$mx^2 - 3mx + 3m - 2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}m - 2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad (1).$$

TH1. $m \leq 0$, thay vào (1) ta thấy không thỏa mãn.

TH2. $m > 0$, khi đó

$$(1) \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \geq \frac{-\frac{3}{4}m + 2}{m}, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -\frac{3}{4}m + 2 \leq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{8}{3}.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 216. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = \frac{2 + \sqrt{x-2}}{|x^2 - 2mx| + |x^2 - 3x + 2m|}$ có tập xác định là $[2; +\infty)$.

A. $m \in \mathbb{R}$.

B. $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

C. $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

D. $m \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{x-2}$ xác định khi $x \in [2; +\infty)$. Do đó, hàm số $y = \frac{2 + \sqrt{x-2}}{|x^2 - 2mx| + |x^2 - 3x + 2m|}$ có tập xác định là khoảng $[2; +\infty)$ khi mẫu số vô nghiệm hoặc có nghiệm $x \notin [2; +\infty)$.

$$\text{Khi đó } |x^2 - 2mx| + |x^2 - 3x + 2m| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2mx = 0 \\ x^2 - 3x + 2m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x - 2m) = 0 & (1) \\ x^2 - 3x + 2m = 0 & (2) \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m. \end{cases}$$

TH1. Với $x = 0$ thay vào (2) được $m = 0$. Khi $m = 0$, hàm số $y = \frac{2 + \sqrt{x-2}}{|x^2| + |x^2 - 3x|}$ có tập xác định là $[2; +\infty)$ (thỏa yêu cầu).

$$\text{TH2. Với } x = 2m \text{ thay vào (2) ta được } 4m^2 - 6m + 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1. \end{cases}$$

Khi $m = 1$, hàm số $y = \frac{2 + \sqrt{x-2}}{|x^2 - 2x| + |x^2 - 3x + 2|}$ có tập xác định là $(2; +\infty)$ (không thỏa yêu cầu).

Tóm lại $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 217. Cho hàm số $y = \frac{x - 2m}{x^2 - (2m + 1)x + m^2 + m}$. Tìm m để hàm số xác định trên $\mathcal{D} = [-2; 5)$.

A. $m < -2$ hoặc $m \geq 4$.

B. $m < -3$ hoặc $m \geq 5$.

C. $m < -3$ hoặc $m \geq 4$.

D. $m < -2$ hoặc $m \geq 5$.

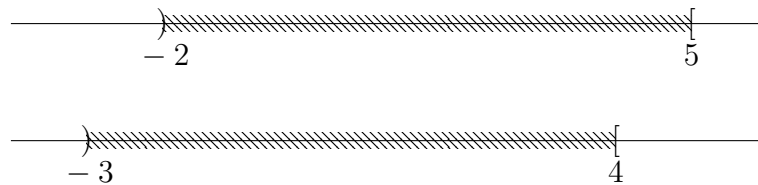
Lời giải.

Viết lại hàm số dưới dạng $y = \frac{x - 2m}{(x - m)(x - m - 1)}$. Từ đó suy ra, hàm số xác định với mọi $x \neq m$ và $x \neq m + 1$.

Vì thế, để hàm số xác định trên $\mathcal{D} = [-2; 5)$ thì $m \notin \mathcal{D}$ và $m + 1 \notin \mathcal{D}$.

Muốn vậy ta cần có:

$$\begin{cases} \begin{cases} m < -2 \\ m \geq 5 \end{cases} \\ \begin{cases} m + 1 < -2 \\ m + 1 \geq 5 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m < -2 \\ m \geq 5 \end{cases} \\ \begin{cases} m < -3 \\ m \geq 4 \end{cases} \end{cases}$$



Vậy các giá trị cần tìm của m là $m < -3$ hoặc $m \geq 5$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 218. Cho hàm số $y = \begin{cases} \frac{5}{\sqrt{x-m}} & \text{với } x > 1 \\ \frac{1}{m+2} & \text{với } x = 1 \\ \frac{x^2}{x^2 - (2m+15)x + m^2 + 15m + 54} & \text{với } x < 1. \end{cases}$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số trên xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$?

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

Lời giải.

+ Với $x > 1$ thì $y = \frac{5}{\sqrt{x-m}}$ có điều kiện xác định lúc này là $x - m > 0 \Leftrightarrow x > m$.

Để hàm số xác định với mọi $x > 1 \Leftrightarrow m \leq 1$.

(1)

+ Với $x = 1$ thì $y = \frac{1}{m+2}$ có điều kiện xác định lúc này là $m \neq -2$.

Do đó để hàm số xác định tại $x = 1 \Leftrightarrow m \neq -2$.

(2)

+ Với $x < 1$ thì $y = \frac{x^2}{x^2 - (2m+15)x + m^2 + 15m + 54}$ có điều kiện xác định lúc này là $\begin{cases} x \neq m+6 \\ x \neq m+9 \end{cases}$.

Để hàm số xác định với mọi $x < 1 \Leftrightarrow m+6 \geq 1 \Leftrightarrow m \geq -5$.

(3)

Từ (1), (2), (3) suy ra hàm số trên xác định với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq m \leq 1 \\ m \neq -2. \end{cases}$

Vậy có 6 giá trị nguyên của m để hàm số đã cho xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 219. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in [-10; 10]$ để hàm số sau xác định với mọi $x \in [2; 5]$?

$$y = \begin{cases} \frac{6}{\sqrt{|x-2m|}} & \text{với } x < 3 \\ \frac{1}{m-2} & \text{với } x = 3 \\ \frac{1}{\sqrt{x+2m}} & \text{với } x > 3. \end{cases}$$

A. 11.

B. 12.

C. 18.

D. 20.

Lời giải.

+ Với $x < 3$ thì $y = \frac{6}{\sqrt{|x-2m|}}$ có điều kiện xác định lúc này là $x - 2m \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2m$.

Để hàm số xác định với mọi $x \in [2; 3)$ thì $\begin{cases} 2m < 2 \\ 2m \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \geq \frac{3}{2}. \end{cases}$

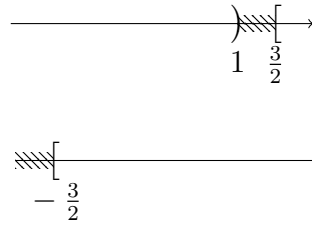
(1)

+ Với $x = 3$ thì $y = \frac{1}{m-2}$ có điều kiện xác định lúc này là $m \neq 2$.

Do đó để hàm số xác định tại $x = 3$ thì $m \neq 2$. (2)

+ Với $x > 3$ thì $y = \sqrt{x + 2m}$ có điều kiện xác định lúc này là $x + 2m \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2m$.

Để hàm số xác định với mọi $x \in (3; 5]$ thì $-2m \leq 3 \Leftrightarrow m \geq \frac{-3}{2}$. (3)



Từ (1), (2), (3) suy ra hàm số đã cho xác định với mọi $x \in [2; 5]$ khi và chỉ khi
$$\begin{cases} \frac{-3}{2} \leq m < 1 \\ m \geq \frac{3}{2} \\ m \neq 2. \end{cases}$$

Vậy có 12 giá trị nguyên của $m \in [-10; 10]$ để hàm số đã cho xác định với mọi $x \in [2; 5]$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 220. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + x + m - 5}{x + 3}$ đồng biến trên khoảng $(-3; +\infty)$.

A. $m \in (-\infty; -1]$. B. $m \in (-1; +\infty)$. C. $m \in (1; +\infty)$. D. $m \neq -1$.

Lời giải.

Ta có $y = \frac{x^2 + x + m - 5}{x + 3} = x - 2 + \frac{m + 1}{x + 3}$.

Xét $x_1, x_2 \in (-3; +\infty)$ với $x_1 < x_2$, ta có:

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 > 0 &\Leftrightarrow x_2 - x_1 + (m + 1) \left(\frac{1}{x_2 + 3} - \frac{1}{x_1 + 3} \right) > 0 \\ &\Leftrightarrow x_2 - x_1 + (m + 1) \frac{x_1 - x_2}{(x_1 + 3)(x_2 + 3)} > 0 \\ &\Leftrightarrow (x_2 - x_1) \left[1 - \frac{m + 1}{(x_1 + 3)(x_2 + 3)} \right] > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x_1 + 3)(x_2 + 3) - m - 1}{(x_1 + 3)(x_2 + 3)} > 0 \\ &\Leftrightarrow (x_1 + 3)(x_2 + 3) > m + 1. \end{aligned}$$

Để $y_2 - y_1 > 0$ với mọi $x_1, x_2 \in (-3; +\infty)$ thì $m + 1 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 221. Tìm khoảng đồng biến của hàm số $y = \frac{\sqrt[2018]{x}}{\sqrt[2018]{x} + 2018}$.

A. $\mathbb{R}$. B. $(0; +\infty)$. C. $(-\infty; 0)$. D. $(-1; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là: $\mathcal{D} = [0; +\infty)$.

Xét $x_1, x_2 \in \mathcal{D}, x_1 < x_2$, ta có:

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 > 0 &\Leftrightarrow \frac{{}^{2018}\sqrt{x_2}}{{}^{2018}\sqrt{x_2} + 2018} - \frac{{}^{2018}\sqrt{x_1}}{{}^{2018}\sqrt{x_1} + 2018} > 0 \\ &\Leftrightarrow {}^{2018}\sqrt{x_2}({}^{2018}\sqrt{x_1} + 2018) - {}^{2018}\sqrt{x_1}({}^{2018}\sqrt{x_2} + 2018) > 0 \\ &\Leftrightarrow 2018({}^{2018}\sqrt{x_2} - {}^{2018}\sqrt{x_1}) > 0 \\ &\Leftrightarrow {}^{2018}\sqrt{x_2} > {}^{2018}\sqrt{x_1} \\ &\Leftrightarrow x_2 > x_1. \end{aligned}$$

Do đó khoảng đồng biến của hàm số là $(0; +\infty)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 222. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{4+x}{x-2m+1}$ xác định trên $[0; 1)$.

A. $m < \frac{1}{2}$ hoặc $m \geq 1$. B. $m < \frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{2} < m < 1$. D. $m \geq 1$.

Lời giải.

Hàm số $y = \frac{4+x}{x-2m+1}$ xác định khi và chỉ khi $x \neq 2m-1$. Do đó, hàm số $y = \frac{4+x}{x-2m+1}$ xác định trên $[0; 1)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2m-1 < 0 \\ 2m-1 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{2} \\ m \geq 1. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 223. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \sqrt{1 - |2x^2 + mx + m + 15|}$ xác định trên đoạn $[1; 3]$.

A. $m = -8$. B. $m = -6$. C. $m = -4$. D. $m = -2$.

Lời giải.

Hàm số có nghĩa khi và chỉ khi $1 - |2x^2 + mx + m + 15| \geq 0 \Leftrightarrow |2x^2 + mx + m + 15| \leq 1$. (*)

Bài toán trở thành tìm điều kiện cần và đủ để (*) có nghiệm đúng với mọi $x \in [1, 3]$.

Điều kiện cần: (*) đúng với mọi $x \in [1; 3]$, suy ra (*) đúng với $x = 1, x = 2$. Khi đó, ta có

$$\begin{cases} |2m+17| \leq 1 \\ |3m+23| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9 \leq m \leq -8 \\ -8 \leq m \leq -\frac{22}{3} \end{cases} \Rightarrow m = -8.$$

Điều kiện đủ: Với $m = -8$, (*) trở thành $|2x^2 - 8x + 7| \leq 1 \Rightarrow 1 \leq x \leq 3$.

Vậy $m = -8$ thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 224. Cho hàm số $y = \sqrt{x-a} + \sqrt{2x-a-1}$ với a là tham số. Tìm giá trị thực của tham số a để hàm số đã cho xác định trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. $a \leq -1$. B. $a \geq 1$. C. $0 \leq a \leq 1$. D. $-1 \leq a \leq 1$.

Lời giải.

Gọi $\mathcal{D}$ là tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x-a} + \sqrt{2x-a-1}$.

$$\text{Hàm số } y = \sqrt{x-a} + \sqrt{2x-a-1} \text{ xác định khi và chỉ khi } \begin{cases} x \geq a \\ x \geq \frac{a+1}{2} \end{cases}.$$

(1) Nếu $a \geq 1$ (*) thì $\mathcal{D} = [a; +\infty)$. Do đó, hàm số đã cho xác định trên khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi $a \leq 0$.

Kết hợp (*), không tồn tại giá trị tham số a thỏa yêu cầu bài toán.

(2) Nếu $a \leq 1$ (**) thì $\mathcal{D} = \left[\frac{a+1}{2}; +\infty\right)$. Do đó, hàm số đã cho xác định trên khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi $\frac{a+1}{2} \leq 0 \Leftrightarrow a \leq -1$.

Kết hợp với (**), ta có $a \leq -1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 225. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -x^2 + (m-1)x + 2$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.

A. $m < 3$.

B. $1 \leq m \leq 2$.

C. $m \leq 3$.

D. $m < 1$ hoặc $m > 2$.

Lời giải.

Với mọi $x_1, x_2 \in (1; 2)$, $x_1 \neq x_2$, ta có $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = (m-1) - (x_1 + x_2)$.

Để hàm số $y = -x^2 + (m-1)x + 2$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$ thì $(m-1) - (x_1 + x_2) < 0$ với mọi $x_1, x_2 \in (1; 2)$.

Vì $x_1, x_2 \in (1; 2)$ nên $2 < x_1 + x_2 < 4$. Ta suy ra $(m-1) - (x_1 + x_2) < m-3$. Do đó, $m-3 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 3$ thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 226. Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $\mathcal{D}$, gọi (C) là đồ thị hàm số. Trên trục hoành lấy điểm A có hoành độ là a , qua A kẻ đường thẳng d vuông góc với trục Ox . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Đường thẳng d cắt (C) nếu $a = 0$.

B. Nếu $a \in \mathcal{D}$ thì đường thẳng d cắt (C) tại ít nhất hai điểm.

C. Nếu $a \in \mathcal{D}$ thì đường thẳng d cắt (C) tại duy nhất một điểm.

D. Nếu $a \notin \mathcal{D}$ thì đường thẳng d vẫn có thể cắt đồ thị (C) .

Lời giải.

Với mỗi giá trị $x \in \mathcal{D}$ thì có duy nhất một giá trị $f(x)$.

Nếu $a \in \mathcal{D}$ thì đường thẳng d cắt (C) tại duy nhất một điểm.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 227. Tìm m để hàm số $y = \frac{\sqrt{x-2m+3}}{x-m} + \frac{3x-1}{\sqrt{-x+m+5}}$ xác định trên khoảng $(0; 1)$.

A. $m \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$.

B. $m \in [-3; 0]$.

C. $m \in [-3; 0] \cup [0; 1]$.

D. $m \in [-4; 0] \cup \left[1; \frac{3}{2}\right]$.

Lời giải.

Gọi $\mathcal{D}$ là tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{x-2m+3}}{x-m} + \frac{3x-1}{\sqrt{-x+m+5}}$.

$$x \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2m+3 \geq 0 \\ x-m \neq 0 \\ -x+m+5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2m-3 \\ x \neq m \\ x < m+5. \end{cases}$$

Hàm số $y = \frac{\sqrt{x-2m+3}}{x-m} + \frac{3x-1}{\sqrt{-x+m+5}}$ xác định trên khoảng $(0; 1)$

$$\Leftrightarrow (0; 1) \subset \mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-3 \leq 0 \\ m+5 \geq 1 \\ m \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{3}{2} \\ m \geq -4 \\ \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m \in [-4; 0] \cup \left[1; \frac{3}{2}\right].$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 228. Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x+m+2}{x-m}$ xác định trên $(-1; 2)$.

A. $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 2 \end{cases}$ B. $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 2 \end{cases}$ C. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \end{cases}$ D. $-1 < m < 2$.

Lời giải.

Hàm số $y = \frac{x+m+2}{x-m}$ xác định khi $x \neq m$.

Để hàm số $y = \frac{x+m+2}{x-m}$ xác định trên $(-1; 2)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 2. \end{cases}$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 229. Hàm số $y = |2x + 2017| - |2x - 2017|$ đồng biến trên khoảng có độ dài lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. 2. B. 2017. C. 4034. D. $\frac{2017}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} y = |2x + 2017| - |2x - 2017| &= \begin{cases} (2x + 2017) - (2x - 2017) & \text{với } x \geq \frac{2017}{2} \\ (2x + 2017) + (2x - 2017) & \text{với } -\frac{2017}{2} \leq x < \frac{2017}{2} \\ -(2x + 2017) + (2x - 2017) & \text{với } x < -\frac{2017}{2} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 4034 & \text{với } x \geq \frac{2017}{2} \\ 4x & \text{với } -\frac{2017}{2} \leq x < \frac{2017}{2} \\ -4034 & \text{với } x < -\frac{2017}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Do hàm số $y = 4x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{2017}{2}; \frac{2017}{2}\right)$, nên hàm số $y = |2x + 2017| - |2x - 2017|$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{2017}{2}; \frac{2017}{2}\right)$ có độ dài bằng 2017.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 230. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + m - 2}{x + 1}$ đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

- A. $m \in (-\infty; -2]$. B. $m \in (2; +\infty)$. C. $m \in (-1; +\infty)$. D. $m \neq -2$.

Lời giải.

Ta có $y = \frac{x^2 - 3x + m - 2}{x + 1} = x - 4 + \frac{m + 2}{x + 1}$. Xét $x_1, x_2 \in (-1; +\infty)$ và $x_1 < x_2$, ta có

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 > 0 &\Leftrightarrow x_2 - x_1 + (m + 2) \left(\frac{1}{x_2 + 1} - \frac{1}{x_1 + 1} \right) > 0 \\ &\Leftrightarrow (x_2 - x_1) \left(1 - \frac{m + 2}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} \right) > 0 \Leftrightarrow \frac{(x_1 + 1)(x_2 + 1) - m - 2}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} > 0 \\ &\Leftrightarrow (x_1 + 1)(x_2 + 1) > m + 2. \end{aligned}$$

Để $y_2 - y_1 > 0$ với mọi $x_1, x_2 \in (-1; +\infty)$ thì $m + 2 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -2$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 231. Tìm khoảng đồng biến của hàm số $y = \frac{|x|^{2017}}{|x|^{2017} + 1}$.

- A. $(0; +\infty)$. B. $(-1; +\infty)$. C. $(-\infty; 1)$. D. $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Xét $x_1, x_2 \in \mathcal{D}, x_1 < x_2$ (1), ta có $y_1 = \frac{|x_1|^{2017}}{|x_1|^{2017} + 1}$ và $y_2 = \frac{|x_2|^{2017}}{|x_2|^{2017} + 1}$.

Khi đó,

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 > 0 &\Leftrightarrow \frac{|x_2|^{2017}}{|x_2|^{2017} + 1} - \frac{|x_1|^{2017}}{|x_1|^{2017} + 1} > 0 \Leftrightarrow \frac{|x_2|^{2017} - |x_1|^{2017}}{(|x_1|^{2017} + 1)(|x_2|^{2017} + 1)} > 0 \\ &\Leftrightarrow |x_2|^{2017} - |x_1|^{2017} > 0 \Leftrightarrow |x_2| > |x_1| \quad (2). \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) ta được $x_2 > x_1 > 0$. Do đó, khoảng đồng biến của hàm số là $(0; +\infty)$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 232. Tìm tập hợp S tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{mx}{x - 1}$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.

- A. $S = (-\infty; 0)$. B. $S = (-\infty; 1)$. C. $S = (0; +\infty)$. D. $S = (1; +\infty)$.

Lời giải.

Với $1 < x_1 < x_2$, ta có: $y_1 - y_2 = \frac{m(x_2 - x_1)}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}$. Mà $y_1 - y_2 < 0 \Rightarrow m < 0$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 233. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$. Điểm $M(-2; 4)$ thuộc đồ thị hàm số đã cho, hỏi điểm nào dưới đây cũng thuộc đồ thị hàm số?

- A. $(-2; -4)$. B. $(2; -4)$. C. $(2; 4)$. D. $(-2; 0)$.

Lời giải.

Ta có tính chất hàm chẵn $f(-x) = f(x)$. Do $M(-2; 4)$ thuộc đồ thị hàm số nên $f(-2) = f(2)$ suy ra điểm $(2; 4)$ đối xứng với M qua trục tung cũng thuộc đồ thị hàm số.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 234. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$. Điểm $N(1; -3)$ thuộc đồ thị hàm số đã cho, hỏi điểm nào dưới đây cũng thuộc đồ thị hàm số?

- A. $(1; 0)$. B. $(1; 3)$. C. $(-1; -3)$. D. $(-1; 3)$.

Lời giải.

Ta có tính chất hàm lẻ $f(-x) = -f(x)$. Do $N(1; -3)$ thuộc đồ thị hàm số nên $f(1) = -f(1)$ suy ra điểm $(-1; 3)$ đối xứng với N qua gốc tọa độ O cũng thuộc đồ thị hàm số.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 235. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

- A. $f(-x) = -f(x) \forall x \in \mathbb{R}$. B. $f(1) + f(-1) = 0$.
C. $f(0) = 0$. D. $f(1) + f(-1) = 2f(1) = 2f(-1)$.

Lời giải.

Ta có hàm số $y = f(x)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$ suy ra $f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(-x) + f(x) = 0$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 236. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $f(-x) = -f(x) \forall x \in \mathbb{R}$. B. $f(2) + f(-2) = 2f(2) = 2f(-2)$.
C. $f(1) + f(-1) = 0$. D. $f(0) = 0$.

Lời giải.

Ta hàm số $y = f(x)$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$ suy ra $f(-x) = f(x) \Rightarrow f(-x) + f(x) = 2f(x) = 2f(-x)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 237. Cho hàm số $y = f(x)$ lẻ trên đoạn $[-5; 5]$ và $f(-4) = 7$. Đặt $P = f(-1) + f(1) + f(4)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $P = 7$. B. $P \notin \{-7; 7\}$. C. P không tồn tại. D. $P = -7$.

Lời giải.

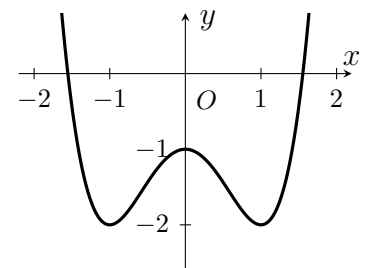
Ta có $P = f(-1) + f(1) + f(4) = 0 - f(-4) = -7$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 238.

Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

- A. $y = \sqrt{x} - 1$.
B. $y = x - 1$.
C. $y = x^3$.
D. $y = x^4 - 2x^2 - 1$.

**Lời giải.**

Nhìn hình thấy đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng nên hàm số là hàm chẵn.

Trong các hàm số đang xét thì chỉ có hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$ là hàm chẵn.

Vậy chọn hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 239. Cho hàm số $f(x) = (m^2 + 3m - 4)x^{2019} + m^2 - 7$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số f là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$.

- A. $m = 1$. B. $m = 4$. C. $m = -4$. D. $m = 1, m = -4$.

Lời giải.

Hàm số $f(x) = (m^2 + 3m - 4)x^{2019} + m^2 - 7$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ hay

$$\begin{aligned}(m^2 + 3m - 4)x^{2019} + m^2 - 7 &= (m^2 + 3m - 4)(-x)^{2019} + m^2 - 7, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow (m^2 + 3m - 4)x &= 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow m^2 + 3m - 4 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -4. \end{cases}\end{aligned}$$

Vậy $m = 1, m = -4$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 240. Cho hàm số $f(x) = (m^2 + 3m - 4)x^{2017} + m^2 - 7$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số f là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$.

A. $m = 1$.

B. $m = \sqrt{7}$.

C. $m = -\sqrt{7}, m = \sqrt{7}$.

D. $m = 1, m = -4$.

Lời giải.

Hàm số $f(x) = (m^2 + 3m - 4)x^{2017} + m^2 - 7$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ hay

$$\begin{aligned}(m^2 + 3m - 4)(-x^{2017}) + m^2 - 7 &= -(m^2 + 3m - 4)x^{2017} - m^2 + 7, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow m^2 - 7 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \sqrt{7} \\ m = -\sqrt{7}. \end{cases}\end{aligned}$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 241. Tìm tất cả giá trị của m để hàm số $y = x^3 + 3(m^2 - 1)x^2 + 3x + m - 1$ là hàm số lẻ.

A. $m = 1$.

B. $m = -1$.

C. $m = 0$.

D. $m = 2$.

Lời giải.

Hàm số $f(x) = x^3 + 3(m^2 - 1)x^2 + 3x + m - 1$ là hàm số lẻ khi và chỉ khi $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{hay } \begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 242. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $f(x) = \frac{x}{1 - 2^x} - \frac{x}{2}$ trên tập $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ (Biết rằng với $a \neq 0, x$ là số nguyên thì $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$).

A. $f(x)$ là hàm số chẵn.

B. $f(x)$ là hàm số lẻ.

C. $f(x)$ không phải là hàm số chẵn cũng không phải là hàm số lẻ.

D. $f(x)$ vừa là hàm số chẵn vừa là hàm số lẻ.

Lời giải.

Hàm số $f(x) = \frac{x}{1 - 2^x} - \frac{x}{2}$ xác định trên $\mathcal{D} = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Với mọi $x \in \mathcal{D}$, ta có $-x \in \mathcal{D}$ và

$$f(-x) = \frac{-x}{1 - 2^{-x}} - \frac{-x}{2} = \frac{-x}{1 - \frac{1}{2^x}} + \frac{x}{2} = \frac{-x2^x}{2^x - 1} + \frac{x}{2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x2^x}{1-2^x} + \frac{x}{2} = \frac{x-x(1-2^x)}{1-2^x} + \frac{x}{2} \\
 &= \frac{x}{1-2^x} - x + \frac{x}{2} = \frac{x}{1-2^x} - \frac{x}{2} = f(x).
 \end{aligned}$$

Vậy f là hàm số chẵn trên $\mathcal{D}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 243. Biết rằng điều kiện để hàm số $f(x) = 3x^2 + (m^2 - 5m - 1)x + \sqrt{x^2 + 1}$ là hàm số chẵn là $m = a$ hoặc $m = b$. Tính $a^3 + b^3$.

A. 110.

B. 125.

C. 130.

D. 140.

Lời giải.

Hàm số đã cho là hàm số chẵn khi và chỉ khi $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ hay $m^2 - 5m - 1 = 0$. (1)

Như vậy a và b là nghiệm của phương trình (1), do đó theo định lý Viet, ta có $a + b = 5$, $ab = -1$. Vì thế nên $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = 125 + 15 = 140$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 244. Cho hàm số $y = f(x)$ chẵn trên $\mathcal{D}$ và hàm số $y = g(x)$ lẻ trên $\mathcal{D}$. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = f(x) \cdot g(x)$ trên $\mathcal{D}$.

A. Hàm số chẵn.

B. Hàm số lẻ.

C. Hàm số không chẵn, không lẻ.

D. Hàm số vừa chẵn vừa lẻ.

Lời giải.

- Gọi $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Ta có hàm số $y = h(x)$ xác định trên $\mathcal{D}$ và $x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$. Mặt khác ta có $h(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = -f(x) \cdot g(x)$, $\forall x \in \mathcal{D}$.

- Vậy hàm số $y = f(x) \cdot g(x)$ lẻ trên $\mathcal{D}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 245. Cho hàm số $y = f(x)$ chẵn trên $\mathcal{D}$, hàm số $y = g(x)$ lẻ trên $\mathcal{D}$ và cả hai hàm số này đều có tập giá trị là $\mathcal{D}$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

A. Hàm số $y = f(g(x))$ lẻ trên $\mathcal{D}$.

B. Hàm số $y = g(f(x))$ lẻ trên $\mathcal{D}$.

C. Hàm số $y = f(g(x))$ chẵn trên $\mathcal{D}$.

D. Hàm số $y = g(f(x))$ không chẵn, không lẻ trên $\mathcal{D}$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = f(g(x))$, có $y(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x))$, $\forall x \in \mathcal{D}$. Vậy hàm số $y = f(g(x))$ là hàm số chẵn.

Tương tự ta có $y = g(f(x))$ chẵn.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 246. Cho hàm số $y = \begin{cases} x + 1 & \text{nếu } x \geq 0 \\ mx + 1 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đã

cho là hàm số chẵn.

A. $m = 1$.

B. $m = -1$.

C. $m \neq -1$.

D. $m < 0$.

Lời giải.

+ Điều kiện cần $f(1) = f(-1) \Leftrightarrow 2 = -m + 1 \Leftrightarrow m = -1$.

+ Với $m = -1$, thay vào hàm số ta được hàm chẵn. Vậy $m = -1$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 247. Cho hàm số $y = \begin{cases} x - 1 & \text{nếu } x \geq 1 \\ 0 & \text{nếu } -1 < x < 1. \\ mx + 1 & \text{nếu } x \leq -1 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để

hàm số đã cho là hàm số lẻ.

A. $m = 1$.

B. $m = -1$.

C. $m \neq 1$.

D. $m > 1$.

Lời giải.

+ Điều kiện cần $f(2) = -f(-2) \Leftrightarrow 1 = -(-2m + 1) \Leftrightarrow m = 1$.

+ Với $m = 1$, thay vào hàm số ta được hàm lẻ. Vậy $m = 1$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 248. Biết rằng hàm số f là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f(xy) - f(x)f(y) = 3[f(x+y) - 2xy - 1], \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. $f(x) = x^2 - f(0), \forall x \in \mathbb{R}$.

B. $f(x) = x^2 + 2f(0), \forall x \in \mathbb{R}$.

C. $f(x) = x^2 + f(0), \forall x \in \mathbb{R}$.

D. $f(x) = -x^2 + f(0), \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Theo giả thiết hàm số f thỏa mãn:

$$f(xy) - f(x)f(y) = 3[f(x+y) - 2xy - 1], \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Từ (1) thay x bởi $\frac{x}{2}$ và y bởi $\frac{x}{2}$ ta được

$$f\left(\frac{x^2}{4}\right) - f^2\left(\frac{x}{2}\right) = 3\left[f(x) - \frac{x^2}{2} - 1\right], \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Từ (1) thay x bởi $\frac{x}{2}$ và y bởi $-\frac{x}{2}$ ta được

$$f\left(-\frac{x^2}{4}\right) - f\left(\frac{x}{2}\right)f\left(-\frac{x}{2}\right) = 3\left[f(0) + \frac{x^2}{2} - 1\right], \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Do f là hàm chẵn nên (3) viết lại

$$f\left(\frac{x^2}{4}\right) - f^2\left(\frac{x}{2}\right) = 3\left[f(0) + \frac{x^2}{2} - 1\right], \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Lấy (2) trừ (4) theo vế ta được: $f(x) = x^2 + f(0), \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 249. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(x+y) = f(x) + f(y) \forall x, y \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số $y = f(x)$ là hàm số chẵn.

- B. Hàm số $y = f(x)$ là hàm số lẻ.
 C. Hàm số $y = f(x)$ là hàm số không chẵn, không lẻ.
 D. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ nhận trục tung làm trục đối xứng.

Lời giải.

- Ta có $f(0+0) = 2f(0)$ suy ra $f(0) = 0$.
 - Từ đó suy ra $0 = f(x-x) = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(-x) = -f(x)$.
 - Ta lại có $\forall x \in \mathbb{R}$ thì $-x \in \mathbb{R}$. Vậy hàm số $y = f(x)$ là hàm số lẻ.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 250. Cho $y = f(x)$ là một hàm số tùy ý xác định trên $\mathbb{R}$. Hàm số $\varphi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ thuộc loại nào?

- A. Hàm số chẵn.
 B. Hàm số lẻ.
 C. Hàm số $y = f(x)$ không phải là hàm số chẵn cũng không phải là hàm số lẻ.
 D. Vừa là hàm chẵn, vừa là hàm lẻ.

Lời giải.

- Ta có $\forall x \in \mathbb{R}$ thì $-x \in \mathbb{R}$ và $\varphi(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -\varphi(x)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 251. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$. Đặt $F(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. $F(x)$ là hàm số chẵn. B. $F(x)$ là hàm số lẻ.
 C. $F(x)$ là hàm số không chẵn, không lẻ. D. $F(x)$ vừa là hàm số chẵn, vừa là hàm số lẻ.

Lời giải.

Hàm số $F(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$. $F(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) - f(x)] = -F(x)$. Vậy $F(x)$ là hàm số lẻ.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 252. Điểm nào dưới đây thuộc đồ thị hàm số $y = 2|x-1| + 3|x| - 2$?

- A. $(2; -6)$. B. $(1; -1)$. C. $(-2; -10)$. D. $(2; 6)$.

Lời giải.

- Xét $(2; -6)$, ta có $-6 = 2|2-1| + 3|2| - 2 \Leftrightarrow -6 = 6$ (vô lý).
- Xét $(1; -1)$, ta có $-1 = 2|1-1| + 3|1| - 2 \Leftrightarrow -1 = 1$ (vô lý).
- Xét $(-2; -10)$, ta có $-10 = 2|-2-1| + 3|-2| - 2 \Leftrightarrow -10 = 10$ (vô lý).
- Xét $(2; 6)$, ta có $6 = 2|2-1| + 3|2| - 2 \Leftrightarrow 6 = 6$ (đúng).

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 253. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x-1} & \text{với } x \in (-\infty; 0) \\ \sqrt{x+1} & \text{với } x \in [0; 2] \\ x^2 - 1 & \text{với } x \in (2; 5] \end{cases}$. Kết quả nào dưới đây đúng?

- A. $f(4) = \frac{2}{3}$. B. $f(4) = 15$. C. $f(4) = \sqrt{5}$. D. $f(4) = -\frac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $f(4) = 4^2 - 1 = 15$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 254. Quy tắc nào sau đây không phải là một hàm số xác định trên $\mathcal{D} = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

A.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	3	2	3	1	5
x	1	2	3	4	5
$f(x)$	1	2	3	4	5

B.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	1	1	1	1	1
x	1	2	3	4	5
$f(x)$	1	2	3	4	5

Lời giải.

Theo định nghĩa về khái niệm hàm số, hàm số f xác định trên $\mathcal{D}$ là một quy tắc đặt tương ứng mỗi số x thuộc $\mathcal{D}$ với **một và chỉ một số**, kí hiệu là $f(x)$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 255. Gọi (G) là đồ thị của hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$. Tìm giá trị của hai tham số a, b để đồ thị (G) đi qua hai điểm $M(1; -3), N(-1; 5)$.

A. $a = 0, b = -5$.

B. $a = -5, b = 0$.

C. $a = 5, b = 0$.

D. $a = 0, b = 5$.

Lời giải.

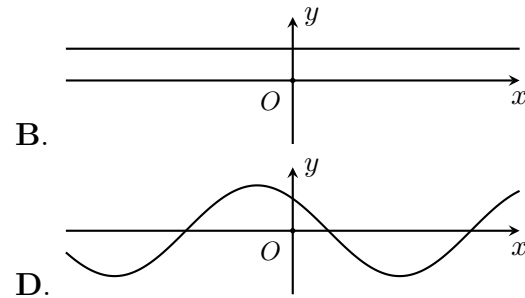
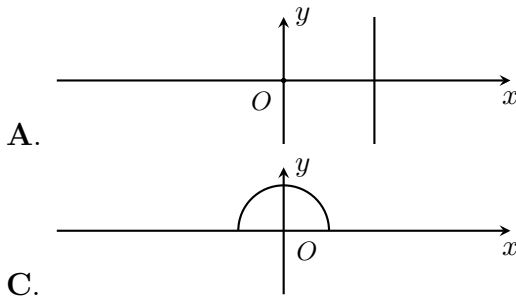
Ta có đồ thị (G) qua M, N suy ra

$$\begin{cases} M \in (G) \\ N \in (G) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 = 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 1 \\ 5 = (-1)^3 + a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -5 \\ a - b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -5 \end{cases}$$

Chọn đáp án **(A)**

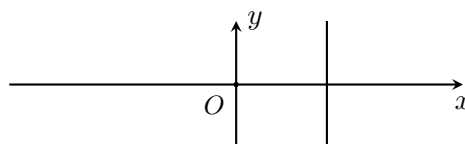
□

Câu 256. Đường trong hình nào dưới đây **không** phải là đồ thị của một hàm số?



Lời giải.

Ta có tập hợp điểm có tọa độ $(x; f(x))$ với $x \in \mathcal{D}$, được gọi là đồ thị của hàm số f . Trong trường hợp



Đồ thị là đường thẳng $x = x_0$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 257. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{\sqrt{7-x}}{(3x+1)\sqrt{2x+3}}$.

A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{3}; -\frac{3}{2}; 7 \right\}$.

B. $\mathcal{D} = \left(-\frac{3}{2}; 7 \right] \setminus \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$.

$$\text{C. } \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{3}; -\frac{3}{2} \right\}.$$

$$\text{D. } \mathcal{D} = \left(-\frac{3}{2}; +\infty \right) \setminus \left\{ -\frac{1}{3} \right\}.$$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện xác định } \begin{cases} 7-x \geq 0 \\ 3x+1 \neq 0 \\ 2x+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 7 \\ x \neq -\frac{1}{3} \\ x > -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 258. Cho điểm $I(2; 5)$ nằm trên đồ thị hàm số $y = f(x)$. Điểm nào sau đây thuộc đồ thị hàm số $y = -f(x+4)$?

A. $M(-2; 5)$.

B. $N(-2; -5)$.

C. $P(-2; 4)$.

D. $Q(-2; 4)$.

Lời giải.

- Đồ thị hàm số $y = f(x+4)$ được suy ra bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ song song với trục Ox theo hướng từ phải sang trái 4 đơn vị, do đó điểm $I(2; 5)$ biến thành điểm $J(-2; 5)$.
- Đồ thị hàm số $y = -f(x+4)$ được suy ra bằng cách lấy đối xứng đồ thị hàm số $y = f(x+4)$ qua trục Oy , do đó điểm $J(-2; 5)$ biến thành điểm $N(-2; -5)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 259. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x-3} - \sqrt{1-2x}$ là

A. $\mathcal{D} = \emptyset$.

B. $\mathcal{D} = \left[\frac{1}{2}; 3 \right]$.

C. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

D. $\mathcal{D} = \left(-\infty; \frac{1}{2} \right] \cup [3; +\infty)$.

Lời giải.

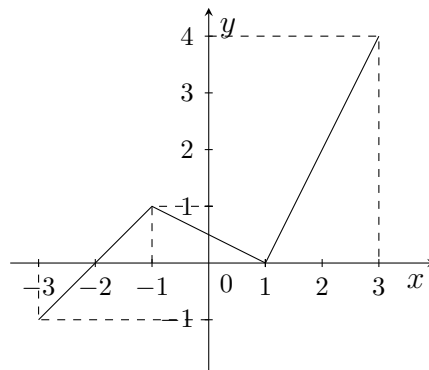
$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 1-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \nexists x.$$

Do đó tập xác định của hàm số đã cho là $\mathcal{D} = \emptyset$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 260. Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $[-3; 3]$ và đồ thị như hình vẽ



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; 1)$ và $(1; 4)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 1)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; -1)$ và $(1; 3)$.

D. Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Lời giải.

Trên $[-3; 3]$ hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-3; -1)$ và $(1; 3)$; nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$; Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 261. Miền giá trị của hàm số $y = \frac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1}$ là

A. $\left[-1; \frac{3}{4}\right]$.

B. $[1; 2]$.

C. $[-2; 4]$.

D. $[2; 4]$.

Lời giải.

- **Cách 1** Do $x^2 + 1 > 0; \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $y = \frac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1}$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Gọi y_0 là giá trị tùy ý, ta có phương trình:

$$\frac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1} = y_0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x + 3 = y_0(x^2 + 1) \Leftrightarrow 3x^2 + 2x + 3 = y_0x^2 + y_0$$

$$\Leftrightarrow (3 - y_0)x^2 + 2x + 3 - y_0 = 0 \quad (1).$$

⊕ Nếu $y_0 = 3$ thì phương trình (1) trở thành: $2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Vậy phương trình (1) có nghiệm $y_0 = 3$ (*).

⊕ Nếu $y_0 \neq 3$ thì phương trình (1) là phương trình bậc hai, nên nó có nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta' = 1^2 - (3 - y_0)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -y_0^2 + 6y_0 - 8 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq y_0 \leq 4.$$

$$\text{Vậy phương trình (1) có nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq y_0 \leq 4 \\ y_0 \neq 3 \end{cases} \quad (**).$$

⊕ Kết hợp (*), (**) thì phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow 2 \leq y_0 \leq 4$.

Vậy: Miền giá trị của hàm số $y = \frac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1}$ là $[2; 4]$.

- **Cách 2** Ta có

$$\frac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 2x + 1 + x^2 + 2}{x^2 + 1} = \frac{(x + 1)^2 + 2(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = 2 + \frac{(x + 1)^2}{x^2 + 1} \geq 2.$$

Suy ra GTNN của $A = 2$ khi và chỉ khi $x = -1$.

$$\text{Mặt khác} \quad \frac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1} = \frac{-x^2 + 2x - 1 + 4x^2 + 4}{x^2 + 1} = \frac{-(x - 1)^2 + 4(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = 4 - \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1} \leq 4.$$

Suy ra GTLN của $A = 4$ khi và chỉ khi $x = 1$.

Vậy miền giá trị của hàm số là $[2; 4]$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 262. Cho $f(x)$ là hàm số đồng biến trên khoảng $(a; b)$ cho trước. Phương án nào sau đây là đúng?

A. Hàm số $f^2(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$. B. Hàm số $|f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$.

C. Hàm số $\sqrt{f(x)}$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$. D. Hàm số $f^3(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$.

Lời giải.

$f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$ nên với mọi $x_1, x_2 \in (a; b)$ và $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f^3(x_1) < f^3(x_2)$. Do đó $f^3(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 263. Cho hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a; b)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số $y = f(x) + 2017$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$.
 B. Hàm số $y = 2017f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$.
 C. Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$.
 D. Hàm số $y = -f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$.

Lời giải.

Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(a; b)$ nên với mọi x_1, x_2 thuộc $(a; b)$ và $x_1 < x_2$, ta có

$$f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow -f(x_1) < -f(x_2).$$

Do đó hàm số $y = -f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 264. Hàm số nào sau đây đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

- A. $y = \frac{1}{x+2}$. B. $y = \frac{1}{x^2}$. C. $y = x^2 - 1$. D. $y = -\sqrt{x+1}$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x^2 - 1$ trên khoảng $(1; +\infty)$. Ta có

$$\forall x_1, x_2 \in (1; +\infty) \text{ và } x_1 < x_2 \text{ thì } y(x_2) - y(x_1) = x_2^2 - 1 - (x_1^2 - 1) = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0.$$

Do đó hàm số $y = x^2 - 1$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 265. Hàm số nào sau đây đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

- A. $y = \frac{1}{x-1}$. B. $y = -x^2$. C. $y = \frac{1}{x+1}$. D. $y = \frac{2}{1-x}$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \frac{2}{1-x}$ trên khoảng $(1; +\infty)$. Ta có

$$\forall x_1, x_2 \in (1; +\infty) \text{ và } x_1 < x_2 \text{ thì } y(x_2) - y(x_1) = \frac{2}{1-x_2} - \frac{2}{1-x_1} = \frac{2(x_2 - x_1)}{(1-x_2)(1-x_1)} > 0.$$

Do đó hàm số $y = \frac{2}{1-x}$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 266. Tìm giá trị thực của tham số a để hàm số $y = \frac{ax}{x-2}$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

- A. $a > 0$. B. $a > 2$. C. $a < 0$. D. $a < 2$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } y = \frac{ax}{x-2} = a + \frac{2a}{x-2}.$$

Với mọi $x_1, x_2 \in (2; +\infty)$, $x_1 \neq x_2$, ta có

$$K = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\frac{2a}{x_1-2} - \frac{2a}{x_2-2}}{x_1 - x_2} = -\frac{2a}{(x_1-2)(x_2-2)}.$$

Để hàm số $y = \frac{ax}{x-2}$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ thì $K > 0, \forall x \in (2; +\infty)$. Mặt khác, $(x_1-2)(x_2-2) > 0$, với mọi $x_1, x_2 \in (2; +\infty)$, $x_1 \neq x_2$. Do đó

$$K > 0, \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow -2a > 0 \Leftrightarrow a < 0.$$

Vậy $a < 0$ thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 267. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $y = f(x) = \sqrt{1+x}$.

- A. $f(x)$ là hàm số chẵn.
 B. $f(x)$ là hàm số lẻ.
 C. $f(x)$ không phải là hàm số chẵn cũng không phải là hàm số lẻ.
 D. $f(x)$ vừa là hàm số chẵn vừa là hàm số lẻ.

Lời giải.

TXĐ: $\mathcal{D} = [-1; +\infty)$.

Do tập $\mathcal{D}$ không có tính đối xứng nên hàm số $y = f(x)$ không phải hàm số chẵn cũng không phải hàm số lẻ.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 268. Hàm số $f(x) = |x+1| + |-x+1|$

- A. là hàm số chẵn. B. là hàm số lẻ. C. là hàm số hằng. D. đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$ và $f(-x) = |-x+1| + |x+1| = f(x)$ nên hàm số $y = f(x)$ là hàm số chẵn.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 269. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số lẻ?

- A. $y = 5x^3 - 3x + 1$. B. $y = 2x^4 - 7x^2 + 2$.
 C. $y = \sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}$. D. $y = |x+7| + |x-7|$.

Lời giải.

Ta có:

- Hàm số $y = 5x^3 - 3x + 1$ có TXĐ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ và mệnh đề $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ là mệnh đề sai nên hàm số $y = 5x^3 - 3x + 1$ không phải là hàm số lẻ.
- Hàm số $y = 2x^4 - 7x^2 + 2$ có TXĐ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ nên $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ và mệnh đề $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ là mệnh đề sai nên hàm số $y = 2x^4 - 7x^2 + 2$ không phải là hàm số lẻ.
- Hàm số $y = |x+7| + |x-7|$ có TXĐ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ nên $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ và mệnh đề $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ là mệnh đề sai nên hàm số $y = |x+7| + |x-7|$ không phải là hàm số lẻ.
- Hàm số $y = \sqrt{4+x} + \sqrt{4-x}$ có TXĐ $\mathcal{D} = [-4; 4]$.
 $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$ và $f(-x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{4+x} = f(x)$ nên hàm số $y = \sqrt{4+x} + \sqrt{4-x}$ là hàm số chẵn.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 270. Trong các hàm số sau, hàm số nào không phải là hàm số lẻ?

- A. $y = x^3 + 1$. B. $y = x^3 - x$. C. $y = x^3 + x$. D. $y = \frac{1}{x}$.

Lời giải.

Ta có

- Hàm số $y = x^3 - x$ có TXĐ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ nên $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ và mệnh đề $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ là mệnh đề đúng nên hàm số $y = x^3 - x$ là hàm số lẻ.

- Hàm số $y = x^3 + x$ có TXĐ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ nên $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ và mệnh đề $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ là mệnh đề đúng nên hàm số $y = x^3 + x$ là hàm số lẻ.
- Hàm số $y = \frac{1}{x}$ có TXĐ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nên $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ và mệnh đề $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ là mệnh đề đúng nên hàm số $y = x^3 + x$ là hàm số lẻ.
- Hàm số $y = f(x) = x^3 + 1$ có TXĐ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ và mệnh đề $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ là mệnh đề sai nên hàm số $y = x^3 + 1$ không phải là hàm số lẻ.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 271. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số chẵn?

- A. $y = |x + 5| + |x - 5|$. B. $y = |x + 3| + |x - 2|$.
C. $y = 3x^3 - 7x$. D. $y = x^4 - 2x^2 + x$.

Lời giải.

Ta có

- Hàm số $y = |x + 3| + |x - 2|$ có TXĐ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ và mệnh đề $f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ là mệnh đề sai nên hàm số $y = |x + 3| + |x - 2|$ không phải là hàm số chẵn.
- Hàm số $y = f(x) = 3x^3 - 7x$ có TXĐ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ và mệnh đề $f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ là mệnh đề sai nên hàm số $y = 3x^3 - 7x$ không phải là hàm số chẵn.
- Hàm số $y = f(x) = x^4 - 2x^2 + x$ có TXĐ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ và mệnh đề $f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ là mệnh đề sai nên hàm số $y = x^4 - 2x^2 + x$ không phải là hàm số chẵn.
- Hàm số $y = f(x) = |x + 5| + |x - 5|$ có TXĐ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ nên $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ và mệnh đề $f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ là mệnh đề đúng nên hàm số $y = |x + 5| + |x - 5|$ là hàm số chẵn.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 272. Trong các hàm số sau, hàm số nào **không** phải là hàm số chẵn?

- A. $y = |x + 1| + |1 - x|$. B. $y = |x + 1| - |x - 1|$.
C. $y = |x^2 - 1| + |x^2 + 1|$. D. $y = |x^2 + 1| - |1 - x^2|$.

Lời giải.

Ta có

- Hàm số $y = |x + 1| + |1 - x|$ có TXĐ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ nên $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ và mệnh đề $f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ là mệnh đề đúng nên hàm số $y = |x + 1| + |1 - x|$ là hàm số chẵn.
- Hàm số $y = |x^2 - 1| + |x^2 + 1|$ có TXĐ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ nên $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ và mệnh đề $f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ là mệnh đề đúng nên hàm số $y = |x^2 - 1| + |x^2 + 1|$ là hàm số chẵn.
- Hàm số $y = |x^2 + 1| - |1 - x^2|$ có TXĐ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ nên $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ và mệnh đề $f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ là mệnh đề đúng nên hàm số $y = |x^2 + 1| - |1 - x^2|$ là hàm số chẵn.
- Hàm số $y = f(x) = |x + 1| - |x - 1|$ có TXĐ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ và mệnh đề $f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ là mệnh đề sai nên hàm số $y = f(x) = |x + 1| - |x - 1|$ không phải là hàm số chẵn.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 273. Trong các hàm số dưới đây có bao nhiêu hàm số chẵn?

- i) $y = |x|$
ii) $y = \frac{x^2 + 4x}{|x| - 2}$
iii) $y = \frac{-x^4 + 2x^2}{x^2 + 1}$

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

Để thấy các hàm số $y = |x|$ và $y = \frac{-x^4 + 2x^2}{x^2 + 1}$ đều có tập xác định là $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\forall x \in \mathbb{R}$ thì

$$\begin{cases} -x \in \mathbb{R} \\ f(-x) = f(x) \end{cases} \text{ nên chúng đều là các hàm số chẵn.}$$

Hàm số $y = \frac{x^2 + 4x}{|x| - 2}$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ và mệnh đề $f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ là mệnh đề sai nên nó không phải là hàm số chẵn.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 274. Trong các hàm số dưới đây có bao nhiêu hàm số lẻ?

a) $y = x|x|$

b) $y = x^5 - x^3 + 2x$

c) $y = |2x - 1| - |2x + 1|$

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

- Xét $y = x|x|$, có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $f(-x) = -x|-x| = -x|x| = -f(x)$. Suy ra hàm số lẻ.

- Xét $y = x^5 - x^3 + 2x$, có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $f(-x) = (-x)^5 - (-x)^3 + 2(-x) = -x^5 + x^3 - 2x = -(x^5 - x^3 + 2x) = -f(x)$. Suy ra hàm số lẻ.

- Xét $y = |2x - 1| - |2x + 1|$, có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $f(-x) = |2(-x) - 1| - |2(-x) + 1| = |2x + 1| - |2x - 1| = -f(x)$. Suy ra hàm số lẻ

Chọn đáp án **D**

□

Câu 275. Chỉ ra khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:A. Hàm số $y = x^2$ là hàm số chẵn.B. Hàm số $y = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ là hàm số chẵn.C. Hàm số $y = x^2 + 1$ là hàm số chẵn.D. Hàm số $y = (x+1)^2$ là hàm số chẵn.**Lời giải.**

- Xét hàm số $y = x^2$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, lại có $f(-x) = f(x)$ suy ra hàm số chẵn.

- Xét hàm số $y = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ có tập xác định $\mathcal{D} = [-1; 1]$.

Ta có $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$, xét $f(-x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = f(x)$ suy ra hàm số chẵn.

- Xét hàm số $y = x^2 + 1$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, lại có $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$ suy ra hàm số chẵn.

- Xét hàm số $y = (x+1)^2$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, lại có $f(-x) = (-x+1)^2 \neq f(x)$ suy ra hàm số không phải là hàm số chẵn.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 276. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $y = f(x) = \frac{|x-2| + |x+2|}{|x|}$.A. $f(x)$ là hàm số chẵn.

- B. $f(x)$ là hàm số lẻ.
 C. $f(x)$ không phải là hàm số chẵn cũng không phải là hàm số lẻ.
 D. $f(x)$ vừa là hàm số chẵn vừa là hàm số lẻ.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ta có $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$.

Xét

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{|-x-2| + |-x+2|}{|-x|} \\ &= \frac{|x+2| + |x-2|}{|x|} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Vậy $f(x)$ là hàm số chẵn.

Chọn đáp án **A** □

Câu 277. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **sai**?

- i) Hàm số $y = \frac{-x^2 + 1}{|x| - 1}$ là hàm số chẵn trên tập xác định.
 ii) Hàm số $y = -x^3 + 1$ là hàm số lẻ trên tập xác định.

- A. (i) đúng, (ii) sai. B. (i) sai, (ii) đúng. C. (i) sai, (ii) sai. D. (i) đúng, (ii) đúng.

Lời giải.

- Xét hàm số $y = \frac{-x^2 + 1}{|x| - 1}$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.
 Ta có $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$. Xét

$$f(-x) = \frac{-(-x)^2 + 1}{|-x| - 1} = \frac{-x^2 + 1}{|x| - 1} = f(x).$$

Đây là hàm số chẵn.

- Xét hàm số $y = -x^3 + 1$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
 Ta có $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$. Xét

$$f(-x) = -(-x)^3 + 1 = x^3 + 1.$$

Ta thấy $\begin{cases} f(-x) \neq f(x) \\ f(-x) \neq -f(x) \end{cases}$. Vậy hàm số không chẵn không lẻ.

Chọn đáp án **A** □

Câu 278. Xét tính chẵn lẻ của hai hàm số $f(x) = |x+2| - |x-2|$, $g(x) = -|x|$.

- A. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số chẵn. B. $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số chẵn.
 C. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ. D. $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số lẻ.

Lời giải.

- Xét hàm số $f(x) = |x+2| - |x-2|$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
 Ta có $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$. Xét

$$f(-x) = |-x+2| - |-x-2| = |x-2| - |x+2| = -(|x+2| - |x-2|) = -f(x).$$

Vậy $f(x)$ là hàm số lẻ.

- Xét hàm số $g(x) = -|x|$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$. Xét

$$g(-x) = -|-x| = -|x| = g(x).$$

Vậy $g(x)$ là hàm số chẵn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 279. Cho hai hàm số $f(x) = x^{2017}$ và $g(x) = (x-2)^3 + (x+2)^3$. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = f(g(x))$.

- A. Hàm số chẵn.
- B. Hàm số lẻ.
- C. Hàm số không phải là hàm số chẵn cũng không phải hàm số lẻ.
- D. Hàm số vừa chẵn vừa lẻ.

Lời giải.

Hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ đều có tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Ta có $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$. Xét

$$f(g(-x)) = (g(-x))^{2017} = (-g(x))^{2017} = -(g(x))^{2017} = -f(g(x)).$$

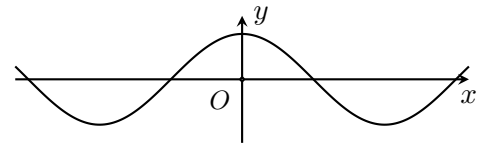
Vậy hàm số $y = f(g(x))$ là hàm số lẻ.

Chọn đáp án (B) □

Câu 280.

Dựa vào tính đối xứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ trong hình bên. Hãy xét tính chẵn lẻ của hàm số đó.

- A. Hàm số chẵn.
- B. Hàm số lẻ.
- C. Hàm số không phải là hàm số chẵn cũng không phải hàm số lẻ.
- D. Hàm số vừa chẵn vừa lẻ.



Lời giải.

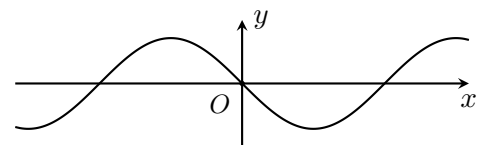
Dựa vào đồ thị, ta thấy hàm số nhận trục tung làm trục đối xứng, nên hàm số chẵn.

Chọn đáp án (A) □

Câu 281.

Dựa vào tính đối xứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ trong hình bên. Hãy xét tính chẵn lẻ của hàm số đó.

- A. Hàm số chẵn.
- B. Hàm số lẻ.
- C. Hàm số không phải là hàm số chẵn cũng không phải hàm số lẻ.
- D. Hàm số vừa chẵn vừa lẻ.



Lời giải.

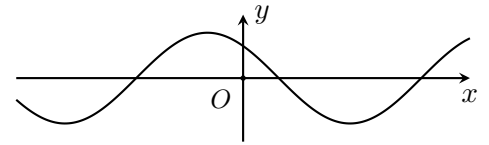
Dựa vào đồ thị, ta thấy hàm số nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng, nên hàm số lẻ.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 282.

Dựa vào tính đối xứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ trong hình bên. Hãy xét tính chẵn lẻ của hàm số đó.



- A. Hàm số chẵn.
- B. Hàm số lẻ.
- C. Hàm số không phải là hàm số chẵn cũng không phải hàm số lẻ.
- D. Hàm số vừa chẵn vừa lẻ.

Lời giải.

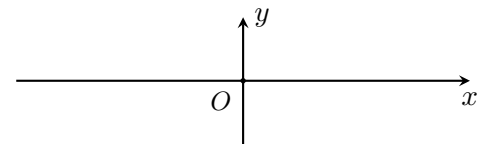
Dựa vào đồ thị, ta thấy hàm số không đối xứng qua trục tung Oy , không nhận gốc O làm tâm đối xứng. Nên hàm số không chẵn không lẻ.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 283.

Biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ trùng với trục hoành như hình bên. Hỏi hàm số đã cho thuộc loại nào (hãy chọn khẳng định đúng)?



- A. Hàm số chẵn và không phải là hàm số lẻ.
- B. Hàm số lẻ và không phải là hàm số chẵn.
- C. Hàm số không phải là hàm số chẵn cũng không phải hàm số lẻ.
- D. Hàm số vừa chẵn vừa lẻ.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị, ta thấy hàm số vừa đối xứng qua trục tung, vừa nhận gốc O làm tâm đối xứng. Nên hàm số vừa chẵn vừa lẻ.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 284. Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

- A. $y = |x - 1|$.
- B. $y = \sqrt{3x + 5}$.
- C. $y = x^5 - x^3 + 1$.
- D. $y = x^4 + x^2 + |x|$.

Lời giải.

Hàm số $y = f(x) = x^4 + x^2 + |x|$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Với mọi $x \in \mathcal{D}$ ta có $-x \in \mathcal{D}$.

Ta có $f(x) = (-x)^4 + (-x)^2 + |-x| = x^4 + x^2 + |x| = f(x)$.

Vậy hàm số $y = x^4 + x^2 + |x|$ là hàm số chẵn.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 285. Hàm số nào sau đây là hàm số lẻ?

- A. $y = x^3 + x^2$.
- B. $y = x^2 - x$.
- C. $y = x^3 - x$.
- D. $y = x^3 - |x|$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = x^3 - x$.

Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có với mọi x thuộc $\mathcal{D}$ thì $-x$ cũng thuộc $\mathcal{D}$.

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -f(x).$$

Vậy hàm số $y = x^3 - x$ là hàm số lẻ.

Chọn đáp án **C** □

Câu 286. Đồ thị hàm số nào sau đây nhận trục Oy làm trục đối xứng?

- A. $y = x^3 - x$. B. $y = x^2 - x$. C. $y = x^3 - |x|$. D. $y = x^2 - |x|$.

Lời giải.

- Hàm số $y = x^3 - x$ là hàm số lẻ do đó không nhận trục Oy làm trục đối xứng.
- Hàm số $y = x^2 - x$ và $y = x^3 - |x|$ không phải là hàm chẵn, hàm lẻ do đó không nhận trục Oy làm trục đối xứng.
- Hàm số $y = x^2 - |x|$ là hàm số chẵn do đó nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Chọn đáp án **D** □

Câu 287. Cho hàm số $y = f(x) = |x + 1| + |x - 1|$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.
 B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ nhận trục Oy là trục đối xứng.
 C. Hàm số $y = f(x)$ là hàm số chẵn.
 D. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ nhận gốc tọa độ O là tâm đối xứng.

Lời giải.

Xét hàm số $y = f(x) = |x + 1| + |x - 1|$.

- Tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Tính chẵn, lẻ của hàm số

$$\forall x \in \mathcal{D} \text{ thì } -x \in \mathcal{D}.$$

$$\text{Và } f(-x) = |-x + 1| + |-x - 1| = |-(x - 1)| + |-(x + 1)| = |x - 1| + |x + 1| = f(x).$$

Do đó hàm số $y = f(x)$ là hàm số chẵn.

- Tính đối xứng: Vì hàm số $y = f(x)$ là hàm số chẵn nên đồ thị của nó nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Chọn đáp án **D** □

Câu 288. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -x^3 - 6 & \text{khi } x \leq -2 \\ |x| & \text{khi } -2 < x < 2 \\ x^3 - 6 & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Đồ thị của hàm số $f(x)$ đối xứng qua gốc tọa độ.
 B. Đồ thị của hàm số $f(x)$ đối xứng qua trục hoành.
 C. $f(x)$ là hàm số lẻ.
 D. $f(x)$ là hàm số chẵn.

Lời giải.

TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Đồ thị của hàm số f gồm 3 phần:

Phần 1: $f(x) = -x^3 - 6$, $x \leq -2$.

Phần 2: $f(x) = |x|$, $-2 < x < 2$.

Phần 3: $f(x) = x^3 - 6, x \geq -2$.

Ta thấy:

+) Phần 2 là hàm số chẵn

+) Kết hợp phần 1 và phần 3 ta được đồ thị của hàm số $g(x) = |x^3| - 6$ là hàm số chẵn.

Vậy hàm số $f(x)$ đã cho là hàm chẵn.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 289. Hàm số $f(x)$ có tập xác định $\mathcal{D}$ gọi là hàm số chẵn nếu

A. $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $f(-x) = -f(x)$.

B. $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $f(-x) = f(x)$.

C. $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ và $f(-x) = -f(x)$.

D. $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ và $f(-x) = f(x)$.

Lời giải.

Theo định nghĩa của hàm số chẵn, ta chọn **D**.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 290. Hàm số $f(x)$ có tập xác định $\mathcal{D}$ gọi là hàm số lẻ nếu

A. $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $f(-x) = -f(x)$.

B. $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $f(-x) = f(x)$.

C. $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ và $f(-x) = -f(x)$.

D. $\forall x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$ và $f(-x) = f(x)$.

Lời giải.

Theo định nghĩa của hàm số lẻ, ta chọn **D**.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 291. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

I. Đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.

II. Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ $O(0;0)$ làm tâm đối xứng.

III. Đồ thị hàm số lẻ nhận trục tung làm trục đối xứng.

VI. Đồ thị hàm số chẵn nhận gốc tọa độ $O(0;0)$ làm tâm đối xứng.

A. Mệnh đề I, II, III đúng; mệnh đề VI sai.

B. Mệnh đề I, II đúng; mệnh đề III, VI sai.

C. Mệnh đề I, III đúng; mệnh đề II, VI sai.

D. Mệnh đề II đúng; mệnh đề I, III, VI sai.

Lời giải.

Từ định nghĩa của các hàm số chẵn và hàm số lẻ suy ra đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng, đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ $O(0;0)$ làm tâm đối xứng.

Xét hai hàm số $f(x) = x$ và $g(x) = x^2$, dễ thấy hai mệnh đề III và VI đều sai.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 292. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $y = f(x) = -2x^3 + x$.

A. $f(x)$ là hàm số chẵn.

B. $f(x)$ là hàm số lẻ.

C. $f(x)$ không phải là hàm số chẵn cũng không phải là hàm số lẻ.

D. $f(x)$ vừa là hàm số chẵn vừa là hàm số lẻ.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Khi đó:

• $\forall x \in \mathcal{D}$, suy ra $-x \in \mathcal{D}$;

• Với mọi $x \in \mathcal{D}$, ta có $f(-x) = -2(-x)^3 + (-x) = -(-2x^3 + x) = -f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 293. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $y = f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$.

- A. $f(x)$ là hàm số chẵn.
- B. $f(x)$ là hàm số lẻ.
- C. $f(x)$ không phải là hàm số chẵn cũng không phải là hàm số lẻ.
- D. $f(x)$ vừa là hàm số chẵn vừa là hàm số lẻ.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Khi đó:

- $\forall x \in \mathcal{D}$, suy ra $-x \in \mathcal{D}$;
- Với mọi $x \in \mathcal{D}$, ta có $f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 + 1 = x^4 - 3x^2 + 1 = f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 294. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $y = f(x) = x^2|x|$.

- A. $f(x)$ là hàm số chẵn.
- B. $f(x)$ là hàm số lẻ.
- C. $f(x)$ không phải là hàm số chẵn cũng không phải là hàm số lẻ.
- D. $f(x)$ vừa là hàm số chẵn vừa là hàm số lẻ.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Khi đó:

- $\forall x \in \mathcal{D}$, suy ra $-x \in \mathcal{D}$;
- Với mọi $x \in \mathcal{D}$, ta có $f(-x) = (-x)^2|-x| = x^2|x| = f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 295. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $y = f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$.

- A. $f(x)$ là hàm số chẵn.
- B. $f(x)$ là hàm số lẻ.
- C. $f(x)$ không phải là hàm số chẵn cũng không phải là hàm số lẻ.
- D. $f(x)$ vừa là hàm số chẵn vừa là hàm số lẻ.

Lời giải.

Ta có $f(-1) = 0$ và $f(1) = 2$. Suy ra $f(-1) \neq f(1)$, $f(-1) \neq -f(1)$. Do đó hàm số đã cho không phải là hàm số chẵn cũng không phải là hàm số lẻ.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 296. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x) = \frac{(x-1)^{2019} + (x+1)^{2019}}{x^{2017}}$.

- A. Hàm số vừa chẵn vừa lẻ.
- B. Hàm số không chẵn không lẻ.
- C. Hàm số lẻ.
- D. Hàm số chẵn.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Khi đó:

- $\forall x \in \mathcal{D}$, suy ra $-x \in \mathcal{D}$;

- Với mọi $x \in \mathcal{D}$, ta có

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{[(-x) - 1]^{2019} + [(-x) + 1]^{2019}}{(-x)^{2017}} \\ &= \frac{-(x+1)^{2019} - (x-1)^{2019}}{-x^{2017}} \\ &= \frac{(x-1)^{2019} + (x+1)^{2019}}{x^{2017}} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 297. Hàm số nào dưới đây là hàm số lẻ?

- A. $y = 2$. B. $y = x^3 + 2x^2$. C. $y = \frac{-x^4 + 2x^2 + 1}{x}$. D. $y = x^4 - 4x^2$.

Lời giải.

Xét hàm số ở phương án **C**, đặt $y = f(x) = \frac{-x^4 + 2x^2 + 1}{x}$. Ta có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Khi đó:

- $\forall x \in \mathcal{D}$, suy ra $-x \in \mathcal{D}$;
- Với mọi $x \in \mathcal{D}$, ta có $f(-x) = \frac{-(-x)^4 + 2(-x)^2 + 1}{-x} = -\frac{-x^4 + 2x^2 + 1}{x} = -f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 298. Hàm số nào dưới đây là hàm số chẵn?

- A. $y = x^3 + x$. B. $y = 3$. C. $y = \frac{x+4}{2x-2}$. D. $y = \frac{x^4 + 2x^2 - 5}{x}$.

Lời giải.

Xét hàm số ở phương án **B**, đặt $y = f(x) = 3$. Ta có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Khi đó:

- $\forall x \in \mathcal{D}$, suy ra $-x \in \mathcal{D}$;
- Với mọi $x \in \mathcal{D}$, ta có $f(-x) = 3 = f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 299. Xét tính chất chẵn lẻ của hàm số $y = f(x) = 2x^3 + 3x + 1$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $y = f(x)$ là hàm số chẵn. B. $y = f(x)$ là hàm số lẻ.
C. $y = f(x)$ là hàm số không có tính chẵn lẻ. D. $y = f(x)$ là hàm số vừa chẵn vừa lẻ.

Lời giải.

TXD: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

Ta có $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$ và $f(-x) = 2(-x)^3 + 3(-x) + 1 = -2x^3 - 3x + 1$

$\Rightarrow$ Hàm số $y = f(x)$ không có tính chẵn lẻ.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 300. Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

- A. $y = x^2 + 2$. B. $y = 2x$. C. $y = x^3$. D. $y = x - 1$.

Lời giải.

Hàm số $y = f(x) = x^2 + 2$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và $f(x) = f(-x)$ nên $f(x)$ là hàm số chẵn.

Chọn đáp án 

□

ĐÁP ÁN

1. A	2. C	3. D	4. B	5. C	6. C	7. B	8. B	9. C	10. B
11. B	12. B	13. A	14. C	15. C	16. C	17. B	18. B	19. D	20. A
21. B	22. C	23. C	24. D	25. A	26. A	27. D	28. A	29. D	30. C
31. A	32. C	33. D	34. D	35. B	36. B	37. A	38. B	39. A	40. D
41. B	42. C	43. C	44. A	45. D	46. B	47. D	48. B	49. D	50. C
51. A	52. C	53. B	54. B	55. A	56. A	57. C	58. A	59. A	60. A
61. B	62. C	63. D	64. C	65. C	66. B	67. A	68. D	69. D	70. A
71. B	72. A	73. D	74. B	75. B	76. A	77. B	78. B	79. D	80. A
81. D	82. A	83. C	84. B	85. A	86. B	87. D	88. C	89. D	90. B
91. B	92. B	93. A	94. A	95. B	96. A	97. D	98. B	99. B	100. D
101. D	102. C	103. A	104. B	106. B	107. B	108. D	109. A	110. A	111. B
112. A	113. D	114. B	115. A	116. A	117. A	118. D	119. D	120. B	121. A
122. A	123. C	124. D	125. D	126. B	127. A	128. A	129. A	130. A	131. A
132. B	133. B	134. B	135. C	136. B	137. D	138. C	139. C	140. A	141. C
142. D	143. B	144. A	145. A	146. B	147. D	148. D	149. D	150. A	151. B
152. D	153. D	154. C	155. D	156. C	157. B	158. A	159. D	160. C	161. D
162. D	163. A	164. A	165. C	166. A	167. C	168. C	169. A	170. A	171. C
172. B	173. A	174. D	175. A	176. A	177. A	178. B	179. C	180. A	181. B
182. B	183. B	184. A	185. A	186. B	187. D	188. A	189. B	190. B	191. C
192. A	193. D	194. A	195. D	196. B	197. A	198. B	199. D	200. D	201. C
202. B	203. B	204. A	205. B	206. A	207. A	208. D	209. B	210. C	211. C
212. C	213. C	214. D	215. C	216. C	217. B	218. C	219. B	220. A	221. B
222. A	223. A	224. A	225. C	226. C	227. D	228. B	229. B	230. A	231. A
232. A	233. C	234. D	235. D	236. B	237. D	238. D	239. D	240. C	241. A
242. A	243. D	244. B	245. C	246. B	247. A	248. C	249. B	250. B	251. B
252. D	253. B	254. D	255. A	256. A	257. B	258. B	259. A	260. C	261. D
262. D	263. D	264. C	265. D	266. C	267. C	268. A	269. C	270. A	271. A
272. B	273. C	274. D	275. D	276. A	277. A	278. B	279. B	280. A	281. B
282. C	283. D	284. D	285. C	286. D	287. D	288. D	289. D	290. C	291. B
292. B	293. A	294. A	295. C	296. D	297. C	298. B	299. C	300. A	

§2 HÀM SỐ $Y = AX + B$

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa. Hàm số $y = ax + b$ với $a \neq 0$ gọi là hàm số bậc nhất.

- Hàm số $y = ax + b$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nếu $a > 0$, nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nếu $a < 0$.
- Đồ thị của hàm số $y = ax + b, a \neq 0$ là một đường thẳng không song song và không trùng với các trục tọa độ. Đồ thị hàm số $y = ax + b$ còn gọi là đường thẳng $y = ax + b$, trong đó a gọi là hệ số góc của đường thẳng.
- Hai đường thẳng $y = ax + b$ và $y = a'x + b'$ song song với nhau nếu $a = a'$ và $b \neq b'$.
- Hai đường thẳng $y = ax + b, a \neq 0$ và $y = a'x + b', a' \neq 0$ vuông góc với nhau nếu $aa' = -1$.

Định nghĩa. Hàm số $y = b$ gọi là hàm số hằng.

- Hàm số $y = b$ có giá trị không đổi trên $\mathbb{R}$.
- Đồ thị của hàm số $y = b$ là một đường thẳng song song hoặc trùng với trục hoành.

B CÁC DẠNG TOÁN

📁 Dạng 1. Vẽ đồ thị hàm số bậc nhất

Để vẽ đồ thị của hàm số bậc nhất $y = ax + b$, ta tìm hai điểm phân biệt mà đồ thị đi qua. Sau đó vẽ một đường thẳng đi qua hai điểm đó. Thông thường ta chọn hai điểm $(0; b)$ và $(-\frac{b}{a}; 0)$.

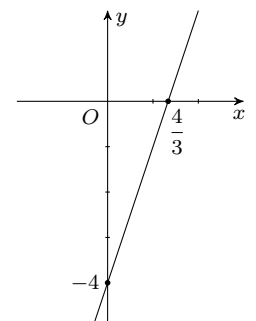
Đặc biệt: Đồ thị của hàm số hằng $y = b$ là một đường thẳng vuông góc và cắt trục tung tại điểm $(0; b)$.

🔗🔗🔗 BÀI TẬP DẠNG 1 🔗🔗🔗

Ví dụ 1. Vẽ đồ thị của hàm số $y = 3x - 4$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đã cho đi qua hai điểm $(0; -4)$ và $(\frac{4}{3}; 0)$.

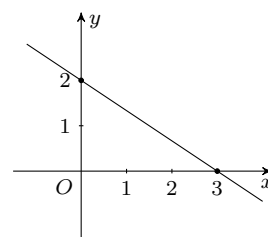


□

Ví dụ 2. Vẽ đồ thị của hàm số $y = -\frac{2}{3}x + 2$.

Lời giải.

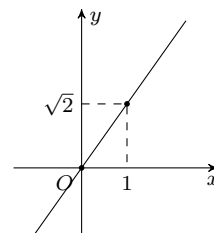
Đồ thị hàm số đã cho đi qua hai điểm $(0; 2)$ và $(3; 0)$.



Ví dụ 3. Vẽ đồ thị của hàm số $y = \sqrt{2}x$.

Lời giải.

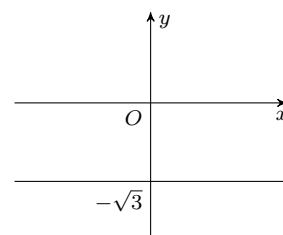
Đồ thị hàm số đã cho đi qua hai điểm $(0; 0)$ và $(1; \sqrt{2})$.



Ví dụ 4. Vẽ đồ thị của hàm số $y = -\sqrt{3}$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đã cho vuông góc với trục tung tại điểm $(0; -\sqrt{3})$.

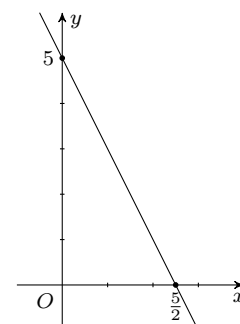


BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Vẽ đồ thị của hàm số $y = -2x + 5$.

Lời giải.

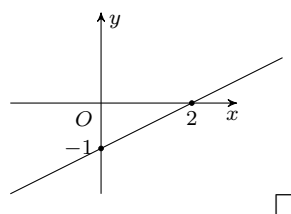
Đồ thị như hình vẽ



Bài 2. Vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{2}x - 1$.

Lời giải.

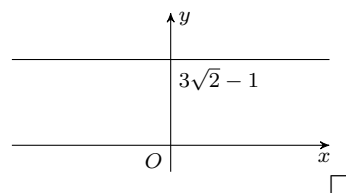
Đồ thị như hình vẽ



Bài 3. Vẽ đồ thị của hàm số $y = 3\sqrt{2} - 1$.

Lời giải.

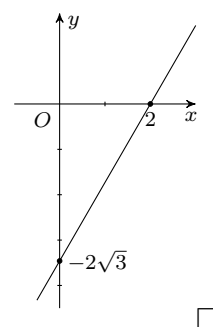
Đồ thị như hình vẽ



Bài 4. Vẽ đồ thị của hàm số $y = \sqrt{3}(x - 2)$.

Lời giải.

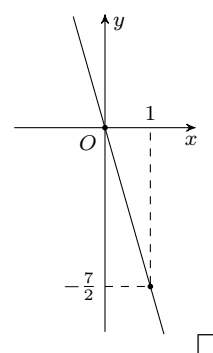
Đồ thị như hình vẽ



Bài 5. Vẽ đồ thị của hàm số $y = -\frac{7}{2}x$.

Lời giải.

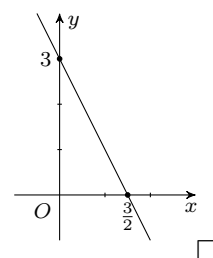
Đồ thị như hình vẽ



Bài 6. Vẽ đồ thị của hàm số $y = -2(x - 1) + 1$.

Lời giải.

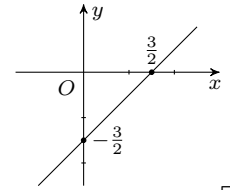
Đồ thị như hình vẽ



Bài 7. Vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{2x - 3}{2}$.

Lời giải.

Đồ thị như hình vẽ



Dạng 2. Xác định hệ số a và b của số bậc nhất

Phương pháp: Dựa vào các yếu tố điểm thuộc đường, lý thuyết hai đường song song, vuông góc, hệ số góc, giao điểm của hai đường để tìm ra mối quan hệ giữa a và b .

Những điểm cần chú ý:

- Nếu có hai tham số a, b chưa biết thì ta cần tìm hai quan hệ của a, b độc lập để giải hệ phương trình tìm a, b .
- Nếu điểm $M(x_M; y_M)$ thuộc đường thẳng $d: y = ax + b$ thì ta có $y_M = ax_M + b$.
- Cho $(d): y = ax + b$ và $(d'): y = a'x + b'$.

$$\text{Nếu } (d) \parallel (d') \text{ thì } \begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}.$$

$$\text{Nếu } (d) \perp (d') \text{ thì } a' = -\frac{1}{a}.$$

- Nếu cho hệ số góc k tức là cho hệ số a của đường thẳng $(d): y = ax + b$.
- Nếu cho góc của đường thẳng $(d): y = ax + b$ tạo với trục hoành là α thì ta hiểu là cho $a = \tan(\alpha)$.

BÀI TẬP DẠNG 2

Ví dụ 1. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = x + b$. Tìm b biết (d) đi qua điểm $M(1; 2)$.

Lời giải.

Vì $M \in (d)$ nên ta có $2 = 1 + b \Leftrightarrow b = 1$.

Vậy: $b = 1$ tức là (d) có phương trình là $y = x + 1$. □

Ví dụ 2. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm a, b biết (d) đi qua điểm $A(-1; 2)$ và $B(2; 3)$.

Lời giải.

$$\text{Vì } A, B \in (d) \text{ nên ta có } \begin{cases} 2 = a \cdot (-1) + b \\ 3 = a \cdot 2 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 2 \\ 2a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{7}{3} \end{cases}.$$

Vậy: $a = \frac{1}{3}$ và $b = \frac{7}{3}$ tức là (d) có phương trình là $y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$. □

Ví dụ 3. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm a, b biết (d) đi qua điểm $A(-1; -2)$ và có hệ số góc là 3.

Lời giải.

Vì $A \in (d)$ nên ta có $-2 = a \cdot (-1) + b$.

Mặt khác ta có hệ số góc là 3 nên $a = 3 \Rightarrow b = 1$.

Vậy: $a = 3$ và $b = 1$ tức là (d) có phương trình là $y = 3x + 1$. □

Ví dụ 4. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm phương trình (d) biết (d) đi qua điểm $A(-3; 2)$ và song song với $(\Delta) : y = -x + 2$.

Lời giải.

Vì $A \in (d)$ nên ta có $2 = a \cdot (-3) + b$.

Mặt khác ta có $\Delta \parallel (d)$ nên $a = -1 \Rightarrow b = -1$ (nhận vì $b \neq 2$).

Vậy: (d) có phương trình là $y = -x - 1$. □

Ví dụ 5. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm phương trình (d) biết (d) đi qua điểm $M(2; 5)$ và vuông góc với $(\Delta) : y = -\frac{1}{2}x + 2$.

Lời giải.

Vì $M \in (d)$ nên ta có $5 = a \cdot 2 + b$.

Mặt khác ta có $\Delta \perp (d)$ nên $a = \frac{-1}{\frac{-1}{2}} = 2 \Rightarrow b = 1$.

Vậy: (d) có phương trình là $y = 2x + 1$. □

Ví dụ 6. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm phương trình (d) biết (d) cắt Ox tại điểm có hoành độ là 3 và đi qua điểm $A(1; 2)$.

Lời giải.

Vì (d) cắt Ox tại điểm có hoành độ là 2 $\Rightarrow x = -\frac{b}{a} = 3 \Rightarrow a = -\frac{b}{3}$.

và $A \in (d)$ nên $2 = a \cdot 1 + b$.

$$\text{Do đó } \begin{cases} a + b = 2 \\ a = -\frac{b}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}.$$

Vậy: (d) có phương trình là $y = -x + 3$. □

Ví dụ 7. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = f(x) = ax + b$. Tìm a, b biết đường thẳng d đi qua giao điểm của $(d_1) : y = x + 1$ và $(d_2) : y = -2x + 1$ và điểm $B(-1; 2)$.

Lời giải.

Gọi A là giao điểm của d_1 và d_2 .

$$\text{Ta có } \begin{cases} x - y = -1 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(0, 1) \text{ nên } 1 = a \cdot 0 + b \Leftrightarrow b = 1.$$

Mặt khác $B \in (d) \Rightarrow 2 = a \cdot (-1) + b \Rightarrow a = -1$.

Vậy: $a = -\frac{3}{4}; b = \frac{9}{4}$ tức là (d) có phương trình là $y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$. □

Ví dụ 8. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = f(x) = ax + b$. Tìm a, b biết phương trình $f(x + 1) = 0$ có nghiệm là $x = 2$ và $f(2x + 1) = 3$ là có nghiệm là $x = -1$.

Lời giải.

Vì phương trình $f(x + 1) = 0$ có nghiệm là $x = 2$ nên $a(2 + 1) + b = 0 \Leftrightarrow 3a + b = 0$.

và phương trình $f(2x + 1) = 3$ là $x = -1$ nên $a(2 \cdot (-1) + 1) + b = 3 \Leftrightarrow -a + b = 3$.

$$\text{Do đó } \begin{cases} 3a + b = 0 \\ -a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ b = \frac{9}{4} \end{cases}.$$

Vậy: $a = -\frac{3}{4}; b = \frac{9}{4}$ tức là (d) có phương trình là $y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm a, b biết (d) song song với đường phân giác góc phần tư thứ nhất và đi qua điểm $A(3; 1)$.

Lời giải.

Vì $A \in (d)$ nên ta có $1 = a \cdot 3 + b$ và (d) song song với đường phân giác góc phần tư thứ nhất ($y = x$) nên $a = 1 \Rightarrow b = -2$.

Vậy: $a = 1, b = -2$. □

Bài 2. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm a, b biết (d) đi qua điểm $A(1, 2)$ và gốc toạ độ O .

Lời giải.

$$\text{Vì } A, O \in (d) \text{ nên ta có } \begin{cases} 2 = a \cdot 1 + b \\ 0 = a \cdot 0 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases}.$$

Vậy: $a = 2$ và $b = 0$. □

Bài 3. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm a, b biết (d) đi qua điểm $A(1; -2)$ và (d) tạo với Ox một góc là 45° .

Lời giải.

Vì $A \in (d)$ nên ta có $-2 = a \cdot 1 + b$.

Mặt khác ta có hệ số góc là $a = \tan(45^\circ) = 1 \Rightarrow b = -3$.

Vậy: $a = 1$ và $b = -3$ tức là (d) có phương trình là $y = x - 3$. □

Bài 4. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm phương trình (d) biết (d) đi qua điểm $A(3, 2)$ và song song với Ox .

Lời giải.

Vì $A \in (d)$ nên ta có $2 = a \cdot 3 + b$.

Mặt khác ta có $(Ox) \parallel (d)$ nên $a = 0 \Rightarrow b = 2$ (nhận vì $b \neq 0$).

Vậy: (d) có phương trình là $y = 2$. □

Bài 5. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm phương trình (d) biết (d) đi qua điểm $M(2, 1)$ và vuông góc với $(\Delta) : y = 3x + 2$.

Lời giải.

Vì $M \in (d)$ nên ta có $1 = a.2 + b$.

Mặt khác ta có $\Delta \perp (d)$ nên $a = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{5}{3}$.

Vậy: (d) có phương trình là $y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$. □

Bài 6. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$. Tìm phương trình (d) biết (d) cắt Ox tại điểm có hoành độ là 2 và cắt trục Oy với tung độ là 3.

Lời giải.

Vì (d) cắt Ox tại điểm có hoành độ là 2 $\Rightarrow x = -\frac{b}{a} = 2 \Rightarrow a = -\frac{b}{2}$.

và (d) cắt Oy tại điểm có tung độ là 3 $\Rightarrow y = a.0 + b = b = 3$.

Do đó $a = -\frac{3}{2}$

Vậy: (d) có phương trình là $y = -\frac{3}{2}x + 3$. □

Bài 7. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = f(x) = ax + b$. Tìm phương trình a, b biết phương trình $f(x + 1) = 0$ có nghiệm là $x = 1$ và $f(2) = 3$.

Lời giải.

Vì phương trình $f(x + 1) = 0$ có nghiệm là $x = 1$ nên $a(1 + 1) + b = 0 \Leftrightarrow 2a + b = 0$.

và $f(-1) = 3 \Leftrightarrow -a + b = 3$.

Do đó $\begin{cases} 2a + b = 0 \\ -a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$.

Vậy: $a = -1; b = 2$ tức là (d) có phương trình là $y = -x + 2$. □

📁 Dạng 3. Xét sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số bậc nhất có chứa giá trị tuyệt đối

Để vẽ đồ thị hàm số $y = |x|$ ta sử dụng định nghĩa của giá trị tuyệt đối:

$$y = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Sau đó ta xét sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho trên từng khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

🔗🔗🔗 **BÀI TẬP DẠNG 3** 🔗🔗🔗

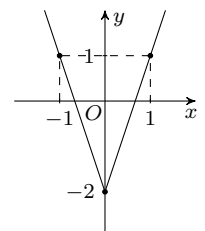
CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Vẽ đồ thị của hàm số $y = 3|x| - 2$.

Lời giải.

Ta có $y = 3|x| - 2 = \begin{cases} 3x - 2 & \text{nếu } x \geq 0 \\ -3x - 2 & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(0; -2)$, $(-1; 1)$ và $(1; 1)$.



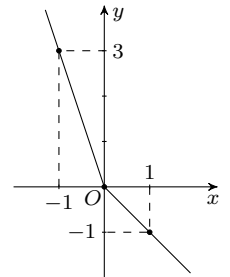


Ví dụ 2. Vẽ đồ thị của hàm số $y = |x| - 2x$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } y = |x| - 2x = \begin{cases} -x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -3x & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(0; 0)$, $(-1; 3)$ và $(1; -1)$.



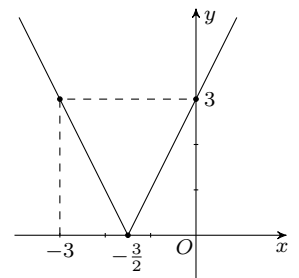
Ví dụ 3. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = |2x + 3|$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } y = |2x + 3| = \begin{cases} 2x + 3 & \text{nếu } x \geq -\frac{3}{2} \\ -2x - 3 & \text{nếu } x < -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
y	$+\infty$	0	$+\infty$



Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(-\frac{3}{2}; 0)$, $(0; 3)$ và $(-3; 3)$.

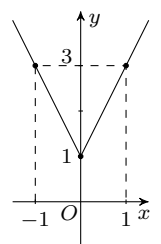


BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Vẽ đồ thị của hàm số $y = 2|x| + 1$.

Lời giải.

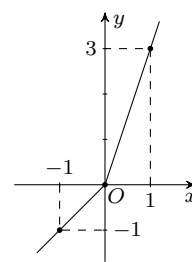
Đồ thị như hình vẽ.



Bài 2. Vẽ đồ thị của hàm số $y = 2x + |x|$.

Lời giải.

Đồ thị như hình vẽ.

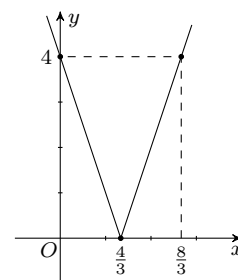


□

Bài 3. Vẽ đồ thị của hàm số $y = |3x - 4|$.

Lời giải.

Đồ thị như hình vẽ.



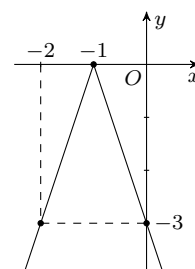
□

Bài 4. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -3|x + 1|$.

Lời giải.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y	$-\infty$	0	$-\infty$



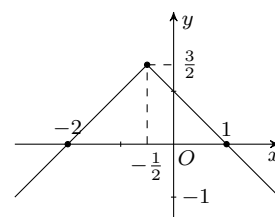
□

Bài 5. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{2}|2x + 1| + \frac{3}{2}$.

Lời giải.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
y	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$-\infty$



□

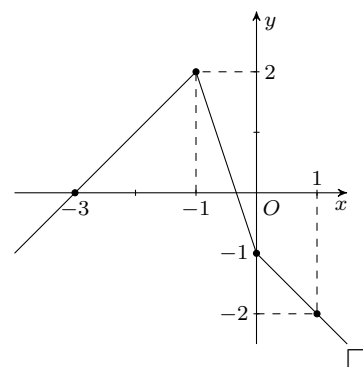
BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 6. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = |x| - 2|x + 1| + 1$.

Lời giải.

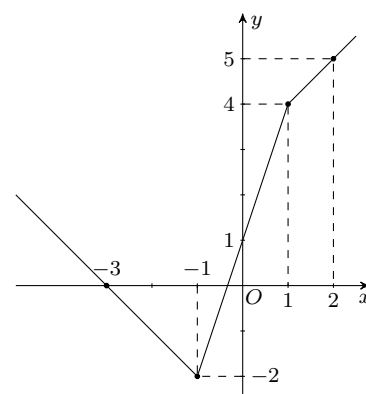
Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
y	$-\infty$	2	-1	$-\infty$

**Bài 7.** Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = 2|x + 1| - |x - 1|$.**Lời giải.**

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y	$+\infty$	-2	4	$+\infty$

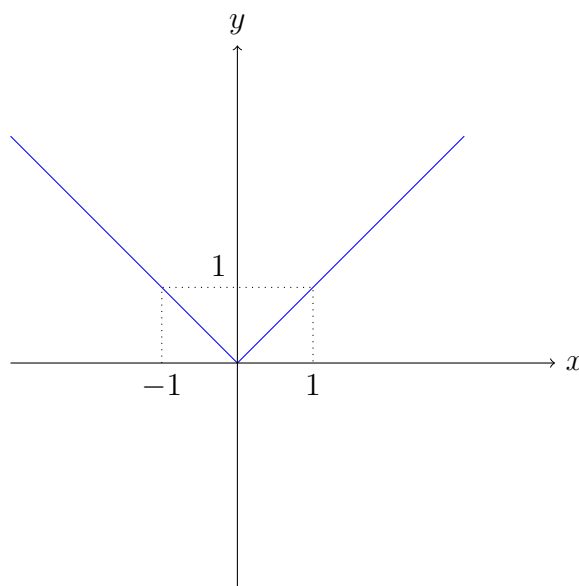
**Dạng 4. Vẽ đồ thị hàm số cho bởi hệ nhiều công thức**Vẽ đồ thị hàm số trùng với từng đồ thị hàm số thành phần tương ứng với điều kiện x ở phía sau.**BÀI TẬP DẠNG 4****Ví dụ 1.** Vẽ đồ thị hàm số: $y = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$.**Lời giải.**

Đồ thị hàm số $y = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$ là sự "lắp ghép"

của 2 đồ thị:

- Đồ thị hàm số $y = x$ (chỉ lấy phần ứng với $x \geq 0$).
- Đồ thị hàm số $y = -x$ (chỉ lấy phần ứng với $x < 0$).

Ta dễ dàng thấy được, đồ thị của hàm số đã cho là sự lắp ghép của 2 tia phân giác của góc phần tư thứ (I) và (II), chúng đối xứng với nhau qua trục Oy .

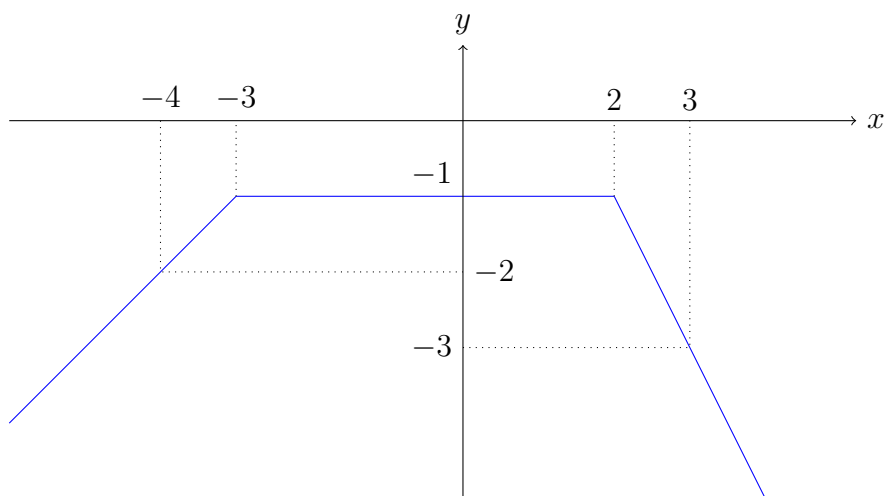


Ví dụ 2. Vẽ đồ thị hàm số: $y = \begin{cases} -2x + 3 & \text{nếu } x > 2 \\ -1 & \text{nếu } -3 \leq x \leq 2. \\ x + 2 & \text{nếu } x < -3 \end{cases}$

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = \begin{cases} -2x + 3 & \text{nếu } x > 2 \\ -1 & \text{nếu } -3 \leq x \leq 2. \\ x + 2 & \text{nếu } x < -3 \end{cases}$

- Trùng với đồ thị hàm số $y = -2x + 3$ trên $(2; +\infty]$.
- Trùng với đồ thị hàm số $y = -1$ trên $[-3; 2]$.
- Trùng với đồ thị hàm số $y = x + 2$ trong $(-\infty; -3)$.



Ví dụ 3. Cho hàm số: $y = f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{nếu } x \leq -1 \\ -2x & \text{nếu } -1 < x \leq 1. \\ x - 3 & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$

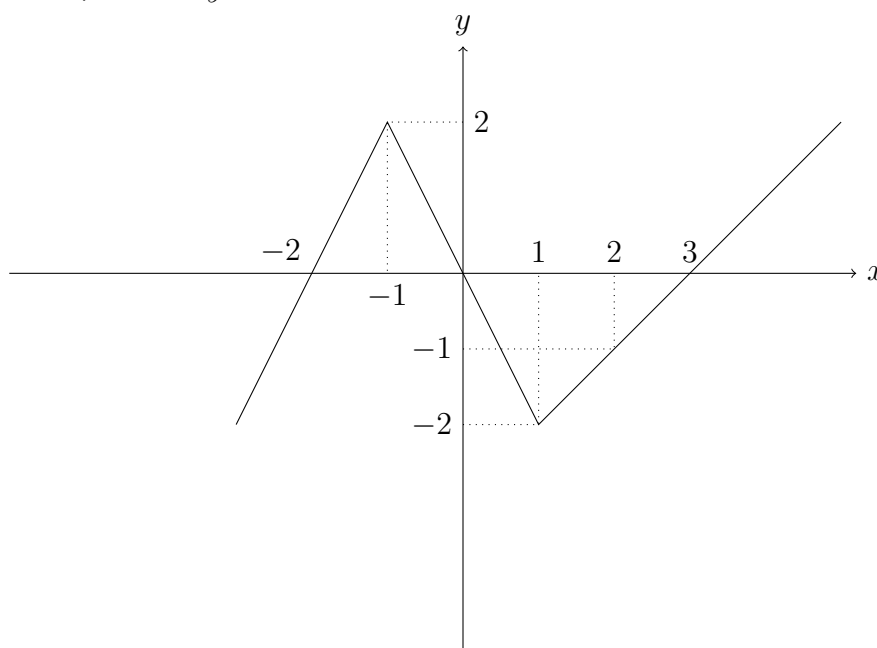
- Tìm tập xác định và vẽ đồ thị hàm số trên.
- Cho biết sự biến thiên của hàm số đã cho trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$; $(-1; 1)$; $(1; +\infty)$ và lập bảng biến thiên.

Lời giải.

a. TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Đồ thị hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{nếu } x \leq -1 \\ -2x & \text{nếu } -1 < x \leq 1. \\ x - 3 & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$

- Trùng với đồ thị hàm số $y = 2x + 4$ nếu $x \leq -1$.
- Trùng với đồ thị hàm số $y = -2x$ nếu $-1 < x \leq 1$.
- Trùng với đồ thị hàm số $y = x - 3$ nếu $x > 1$.



b. Trên khoảng $(-2; -1)$ và $(1; 3)$ hàm số đồng biến.

Trên khoảng $(-1; 1)$ hàm số nghịch biến.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Vẽ đồ thị hàm số:

$$y = \begin{cases} 3x - 6 & \text{nếu } x \geq 2 \\ 6 - 3x & \text{nếu } x < 2 \end{cases}.$$

Lời giải.

Với $x \geq 2$: Đồ thị hàm số trùng với đường thẳng $y = 3x - 6$.

Với $x < 2$: Đồ thị hàm số trùng với đường thẳng $y = 6 - 3x$. □

Bài 2. Vẽ đồ thị hàm số:

$$y = \begin{cases} x + 1 & \text{nếu } 0 \leq x < 2 \\ -\frac{1}{2}x + 4 & \text{nếu } 2 \leq x \leq 4 \\ 2x - 6 & \text{nếu } 4 < x \leq 5 \end{cases}.$$

Lời giải.

Với $0 \leq x < 2$: Đồ thị hàm số trùng với đường thẳng $y = x + 1$.

Với $2 \leq x \leq 4$: Đồ thị hàm số trùng với đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

Với $4 < x \leq 5$: Đồ thị hàm số trùng với đường thẳng $y = 2x - 6$. □

Bài 3. Cho hàm số: $y = f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{nếu } -2 \leq x < -1 \\ -2x & \text{nếu } -1 \leq x \leq 1 \\ x - 3 & \text{nếu } 1 < x \leq 3 \end{cases}.$

- Tìm tập xác định và vẽ đồ thị hàm số trên.
- Cho biết sự biến thiên của hàm số đã cho trên mỗi khoảng $(-\infty; -2)$; $(-2; 4)$; $(4; +\infty)$ và lập bảng biến thiên.

Dạng 5. Sự tương giao giữa các đường thẳng

Phương pháp:

- Cho 2 đường thẳng $d_1 : y = a_1x + b_1$ và $d_2 : y = a_2x + b_2$ ($a_1 \neq 0; a_2 \neq 0$)
 - d_1 cắt $d_2 \Leftrightarrow a_1 \neq a_2$.
 - $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$ và $b_1 \neq b_2$.
 - $d_1 \equiv d_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$ và $b_1 = b_2$.
 - $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow a_1 \cdot a_2 = -1$.
- d_1 cắt d_2 tại một điểm trên trục tung $\Leftrightarrow a_1 \neq a_2$ và $b_1 = b_2$.
- Để chứng minh 3 đường thẳng đồng quy, ta chứng minh 2 trong 3 đường thẳng cắt nhau và giao điểm của chúng thuộc đường còn lại.

🔗🔗🔗 BÀI TẬP DẠNG 5 🔗🔗🔗

Ví dụ 1. Tìm các cặp đường thẳng song song trong các đường thẳng đã cho sau đây.

a. $d_1 : y = 3 + \frac{x}{2}$.

b. $d_2 : 3y - 6x + 1 = 0$.

c. $d_3 : y = -0,5x - 4$.

d. $d_4 : 2y + x = 6$.

e. $d_5 : 2x - y = 1$.

f. $d_6 : y = 0,5x + 1$.

Lời giải.

Đưa mỗi đường thẳng về dạng: $y = ax + b$

a. $d_1 : y = 3 + \frac{x}{2}$.

b. $d_2 : y = 2x - \frac{1}{3}$.

c. $d_3 : y = -0,5x - 4$.

d. $d_4 : -\frac{1}{2}x + 6$.

e. $d_5 : y = 2x - 1$.

f. $d_6 : y = 0,5x + 1$.

Các cặp đường thẳng song song là d_1 và d_6 ; d_2 và d_5 ; d_3 và d_4 . □

Ví dụ 2. Tìm giao điểm của 2 đường thẳng $d_1 : y = x - 5$ và $d_2 : y = 1 + 3x$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và d_2 :

$$x - 5 = 1 + 3x \Leftrightarrow 2x = -6 \Leftrightarrow x = -3.$$

Giao điểm của d_1 và d_2 là $(-3; -8)$. □

Ví dụ 3. Tìm giao điểm của đường thẳng $d : y = 1 + 2x$ với

a. Trục Ox .

b. Trục Oy .

Lời giải.

a. Trục $Ox : y = 0$.

Giao điểm của đường thẳng $d : y = 1 + 2x$ với Ox là $A(-\frac{1}{2}; 0)$.

b. Trục $Oy : x = 0$.

Giao điểm của đường thẳng $d : y = 1 + 2x$ với Oy là $B(0; 1)$. □

Ví dụ 4. Cho 2 đường thẳng: $d_1 : y = mx + 3$ và $d_2 : y = (2m + 1)x - 5$. Tìm m để

a. $d_1 \parallel d_2$.

b. d_1 cắt d_2 .

Lời giải.

$$a. d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2m + 1 \\ 3 \neq -5 \\ m \neq 0 \\ 2m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m \neq 0 \\ m \neq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

$$b. d_1 \text{ cắt } d_2 \Leftrightarrow m \neq 2m + 1 \Leftrightarrow m \neq -1.$$

□

Ví dụ 5. Cho $d_1 : y = mx - m + 2$; $d_2 : y = (m - 3)x + m$. Tìm m để d_1 cắt d_2 tại 1 điểm trên trục tung.

Lời giải.

d_1 cắt d_2 tại 1 điểm trên trục tung

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq m - 3 \\ -m + 2 = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \neq -3 \\ 2m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

□

Ví dụ 6. Cho $d_1 : y = 2x - 6$; $d_2 : y = -x + 3$.

a. Tìm tọa độ giao điểm A của d_1 và d_2 .

b. d_1 và d_2 cắt trục tung tại B và C . Tính diện tích ΔABC .

Lời giải.

a. Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và d_2 là

$$2x - 6 = -x + 3 \Leftrightarrow x = 3.$$

$$\text{Với } x = 3 \Rightarrow y = 0.$$

Vậy tọa độ giao điểm A của d_1 và d_2 là $(3; 0)$.

b. d_1 và d_2 lần lượt cắt trục tung tại B và C . Dễ dàng suy ra được tọa độ của B và C là $B(0; -6)$ và $C(0; 3)$.

$$\text{Diện tích } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AO \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 9 = \frac{27}{2} (\text{đvdt}).$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho đường thẳng $d : y = (m^2 - 2)x + m - 1$. Xác định giá trị của m sao cho

a. d song song với $d_1 : y = 2x + 1$.

b. d cắt $d_2 : y = m(2x - 1) + 3 + x$.

Lời giải.

a. $m = -2$.

b. $\begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq -3 \end{cases}.$

□

Bài 2. Cho 2 đường thẳng: $(d_1) : y = (m + 2)x - 3$; $(d_2) : y = 4x + 2m + 1$. Tìm m để d_1 cắt d_2 tại 1 điểm trên trục tung.

Lời giải.

Không tồn tại giá trị m thỏa mãn điều kiện bài toán.

□

Bài 3. Cho 3 đường thẳng: $(d_1) : y = 2x$; $(d_2) : y = x + 1$; $(d_3) : y = (m - 2)x + 2m + 1$. Tìm m để

a. $d_1 \perp d_3$.

b. d_1, d_2, d_3 đồng quy.

Lời giải.

- a. $m = \frac{3}{2}$.
b. $m = 1$.

□

Bài 4. Tìm m để 3 đường thẳng sau phân biệt và đồng quy.

- a. $d_1 : y = 2x$, $d_2 : y = -3 - x$, $d_3 : y = mx + 5$.
b. $d_1 : y = -5(x + 1)$, $d_2 : y = mx + 3$, $d_3 : y = 3x + m$.
c. $d_1 : y = x + 2m$, $d_2 : y = 3x + 2$, $d_3 : y = -mx + 2$.

Lời giải.

- a. $m = 7$.
b. $m = -13$.
c. $m = 1$.

□

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 5. Cho (d) có phương trình $y = ax + b$ và $(d_1) : y = x + 1$; $(d_2) : y = 2x + 1$.

- a) Tìm giao điểm M của (d_1) và (d_2) .
b) Tìm phương trình đường thẳng (d) , biết (d) cắt (d_1) tại $A(1, 2)$ và cắt (d_2) tại $B(-1, 3)$.

Lời giải.

a) Xét $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 1 \\ -2x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$.

Vậy: $M(0, 1)$ là giao điểm của (d_1) và (d_2) .

b) Vì (d) cắt (d_1) tại $A(1, 2) \Rightarrow A(1, 2) \in (d) \Rightarrow 2 = a + b$.

và (d) cắt (d_2) tại $B(-1, 3) \Rightarrow B(-1, 3) \in (d) \Rightarrow 3 = -a + b$.

Do đó: $\begin{cases} 1 = 2a + b \\ 3 = -a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ -a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{5}{2} \end{cases}$.

Vậy: $(d) : y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

□

Bài 6. Cho (d) có phương trình $y = ax + b$ và $(d_1) : y = x - 1$; $(d_2) : y = -2x - 1$.

- a) Tìm giao điểm N của (d_1) và (d_2) .
b) Xác định phương trình đường thẳng d , biết $(d); (d_1); (d_2)$ đồng qui và (d) đi qua $A(1, -5)$.

Lời giải.

a) Xét $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = -1 \\ 2x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$.

Vậy: $N(0, -1)$ là giao điểm của (d_1) và (d_2) .

b) Vì $(d); (d_1); (d_2)$ đồng qui nên $N(0, -1) \in (d) \Rightarrow -1 = a.0 + b \Rightarrow b = -1$.

và $A \in (d) \Rightarrow -5 = a + b \Rightarrow a = -4$.

Vậy: $(d) : y = -4x - 1$.

□

Bài 7. Cho (d) có phương trình $y = ax + b$ và $A(6, -2)$.

- a) Tìm d sao cho d đi qua A và gốc toạ độ O .
 b) Xác định phương trình đường thẳng d , biết (d) đi qua A và cắt Ox, Oy lần lượt tại B, C sao cho tam giác OBC có diện tích là 3.

Lời giải.

- a) Vì $O \in (d)$ nên $b = 0$.

Mặt khác $A \in (d)$ nên $-2 = 6a + b \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$.

Vậy: $(d) : y = -\frac{1}{3}x$.

- b) Ta có: $A \in (d)$ nên $-2 = 6a + b$ và $B(0, b); C(-\frac{b}{a}, 0)$.

Do đó: Diện tích tam giác OCB là $\frac{1}{2}|b||\frac{-b}{a}| = 3 \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{b^2}{6} \\ a = \frac{b^2}{6} \end{cases}$.

$$\text{Vì vậy ta được } \begin{cases} 6a + b = -2 \\ a = -\frac{b^2}{6} \\ a = \frac{b^2}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a + b = -2 \\ a = -\frac{b^2}{6} \\ 6a + b = -2 \\ a = \frac{b^2}{6} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} -b^2 + b - 2 = 0 \\ a = -\frac{b^2}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1; a = -\frac{1}{3} \\ b = 2; a = -\frac{4}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} b^2 + b - 2 = 0 \\ a = \frac{b^2}{6} \end{cases} \text{ (Vô nghiệm)} \end{cases} \text{ . Vậy: } (d) : y = -\frac{1}{3}x - 1 \text{ hay } (d) : y = -\frac{4}{3}x + 2$$

□

C CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tìm m để hàm số $y = (2m + 1)x + m - 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m > \frac{1}{2}$. B. $m < \frac{1}{2}$. C. $m < -\frac{1}{2}$. D. $m > -\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Hàm số bậc nhất $y = ax + b$ đồng biến khi $a > 0$ nên suy ra $2m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 2. Tìm m để hàm số $y = m(x + 2) - x(2m + 1)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m > -2$. B. $m < -\frac{1}{2}$. C. $m > -1$. D. $m > -\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Viết lại $y = m(x + 2) - x(2m + 1) = (-1 - m)x + 2m$.

Hàm số bậc nhất $y = ax + b$ nghịch biến khi $a < 0$ nên suy ra $-1 - m < 0 \Leftrightarrow m > -1$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 3. Tìm m để hàm số $y = -(m^2 + 1)x + m - 4$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m > 1$. B. Với mọi m . C. $m < -1$. D. $m > -1$.

Lời giải.

Hàm số bậc nhất $y = ax + b$ nghịch biến khi $a < 0 \Leftrightarrow -(m^2 + 1) < 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 4. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2017; 2017]$ để hàm số $y = (m - 2)x + 2m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. 2014. B. 2016. C. Vô số. D. 2015.

Lời giải.

Hàm số bậc nhất $y = ax + b$ đồng biến khi $a > 0 \Leftrightarrow m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > 2$

$\Rightarrow m \in \{3; 4; 5; \dots; 2017\}$.

Vậy có $2017 - 3 + 1 = 2015$ giá trị nguyên của m cần tìm.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2017; 2017]$ để hàm số $y = (m^2 - 4)x + 2m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. 4030. B. 4034. C. Vô số. D. 2015.

Lời giải.

Hàm số bậc nhất $y = ax + b$ đồng biến khi $a > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$

$\Rightarrow m \in \{-2017; -2016; -2015; \dots; -3\} \cup \{3; 4; 5; \dots; 2017\}$.

Vậy có $2 \times (2017 - 3 + 1) = 2 \times 2015 = 4030$ giá trị nguyên của m cần tìm.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 6. Đường thẳng nào sau đây song song với đường thẳng $y = \sqrt{2}x$?

- A. $y = 1 - \sqrt{2}x$. B. $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x - 3$. C. $y + \sqrt{2}x = 2$. D. $y - \frac{2}{\sqrt{2}}x = 5$.

Lời giải.

Hai đường thẳng song song khi có hệ số góc bằng nhau nên ta nhận đường thẳng

$$y - \frac{2}{\sqrt{2}}x = 5 \Leftrightarrow y = \sqrt{2}x + 5.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = (m^2 - 3)x + 2m - 3$ song song với đường thẳng $y = x + 1$.

- A. $m = 2$. B. $m = \pm 2$. C. $m = -2$. D. $m = 1$.

Lời giải.

Đường thẳng $y = (m^2 - 3)x + 2m - 3$ song song với đường thẳng $y = x + 1$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m^2 - 3 = 1 \\ 2m - 3 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 2 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = 3x + 1$ song song với đường thẳng $y = (m^2 - 1)x + (m - 1)$.

- A. $m = \pm 2$. B. $m = 2$. C. $m = -2$. D. $m = 0$.

Lời giải.

Đường thẳng $y = (m^2 - 1)x + (m - 1)$ song song với đường thẳng $y = 3x + 1$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m^2 - 1 = 3 \\ m - 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 2 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 9. Biết rằng đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua điểm $M(1; 4)$ và song song với đường thẳng $y = 2x + 1$. Tính tổng $S = a + b$.

- A. $S = 4$. B. $S = 2$. C. $S = 0$. D. $S = -4$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $M(1; 4)$ nên $4 = a \times 1 + b$. (1)

Mặt khác, đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y = 2x + 1$ nên $\begin{cases} a = 2 \\ b \neq 1. \end{cases}$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ $\begin{cases} 4 = a \times 1 + b \\ a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow a + b = 4$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 10. Biết rằng đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua điểm $E(2; -1)$ và song song với đường thẳng ON với O là gốc tọa độ và $N(1; 3)$. Tính giá trị biểu thức $S = a^2 + b^2$.

- A. $S = -4$. B. $S = -40$. C. $S = -58$. D. $S = 58$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $E(2; -1)$ nên $-1 = a \times 2 + b$. (1)

Gọi $y = a'x + b'$ là đường thẳng đi qua hai điểm $O(0; 0)$ và $N(1; 3)$ nên $\begin{cases} 0 = a' \times 0 + b' \\ 3 = a' \times 1 + b' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = 3 \\ b' = 0. \end{cases}$

Đồ thị hàm số song song với đường thẳng ON nên $\begin{cases} a = a' = 3 \\ b \neq b' = 0. \end{cases} \quad (2)$

Từ (1) và (2), ta có hệ $\begin{cases} -1 = a \cdot 2 + b \\ a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -7 \end{cases} \Rightarrow S = a^2 + b^2 = 58.$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (3m + 2)x - 7m - 1$ vuông góc với đường $\Delta: y = 2x - 1$.

- A. $m = 0$. B. $m = -\frac{5}{6}$. C. $m < \frac{5}{6}$. D. $m > -\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng d khi và chỉ khi $2(3m + 2) = -1 \Leftrightarrow m = -\frac{5}{6}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 12. Biết rằng đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua điểm $N(4; -1)$ và vuông góc với đường thẳng $4x - y + 1 = 0$. Tính tích $P = ab$.

- A. $P = 0$. B. $P = -\frac{1}{4}$. C. $P = \frac{1}{4}$. D. $P = -\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $N(4; -1)$ nên $-1 = a \times 4 + b$. (1)

Mặt khác, đồ thị hàm số vuông góc với đường thẳng $y = 4x + 1$ nên $4 \times a = -1$. (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ $\begin{cases} -1 = a \times 4 + b \\ 4a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow P = ab = 0.$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 13. Tìm a và b để đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua các điểm $A(-2; 1)$, $B(1; -2)$.

- A. $a = -2$ và $b = -1$. B. $a = 2$ và $b = 1$. C. $a = 1$ và $b = 1$. D. $a = -1$ và $b = -1$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(-2; 1)$, $B(1; -2)$ nên $\begin{cases} 1 = a \times (-2) + b \\ -2 = a \times 1 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1. \end{cases}$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 14. Biết rằng đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua hai điểm $M(-1; 3)$ và $N(1; 2)$. Tính tổng $S = a + b$.

- A. $S = -\frac{1}{2}$. B. $S = 3$. C. $S = 2$. D. $S = \frac{5}{2}$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $M(-1; 3)$, $N(1; 2)$ nên $\begin{cases} -a + b = 3 \\ a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow S = a + b = 2.$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 15. Biết rằng đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua điểm $A(-3; 1)$ và có hệ số góc bằng -2 . Tính tích $P = ab$.

- A. $P = -10$. B. $P = 10$. C. $P = -7$. D. $P = -5$.

Lời giải.

Hệ số góc bằng $-2 \Rightarrow a = -2$. Đồ thị đi qua điểm $A(-3; 1) \Rightarrow -3a + b = 1 \Rightarrow b = -5$.

Vậy $P = ab = (-2) \times (-5) = 10$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 16. Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng $y = \frac{1-3x}{4}$ và $y = -\left(\frac{x}{3} + 1\right)$ là:

- A. $(0; -1)$. B. $(2; -3)$. C. $\left(0; \frac{1}{4}\right)$. D. $(3; -2)$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ của hai đường thẳng là

$$\frac{1-3x}{4} = -\left(\frac{x}{3} + 1\right) \Leftrightarrow -\frac{5}{12}x + \frac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y = -2.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 17. Tìm tất cả các giá trị thực của m để đường thẳng $y = m^2x + 2$ cắt đường thẳng $y = 4x + 3$.

- A. $m = \pm 2$. B. $m \neq \pm 2$. C. $m \neq 2$. D. $m \neq -2$.

Lời giải.

Để đường thẳng $y = m^2x + 2$ cắt đường thẳng $y = 4x + 3$ khi và chỉ khi $m^2 \neq 4 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 18. Cho hàm số $y = 2x + m + 1$. Tìm giá trị thực của m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 3.

- A. $m = 7$. B. $m = 3$. C. $m = -7$. D. $m = \pm 7$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 3

$\Rightarrow A(3; 0)$ thuộc đồ thị hàm số $\Rightarrow 0 = 2 \times 3 + m + 1 \Leftrightarrow m = -7$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 19. Cho hàm số $y = 2x + m + 1$. Tìm giá trị thực của m để đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2 .

- A. $m = -3$. B. $m = 3$. C. $m = 0$. D. $m = -1$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2

$\Rightarrow B(0; -2)$ thuộc đồ thị hàm số $\Rightarrow -2 = 2 \times 0 + m + 1 \Leftrightarrow m = -3$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 20. Tìm giá trị thực của m để hai đường thẳng $d: y = mx - 3$ và $\Delta: y + x = m$ cắt nhau tại một điểm nằm trên trục tung.

- A. $m = -3$. B. $m = 3$. C. $m = \pm 3$. D. $m = 0$.

Lời giải.

Gọi $A(0; a)$ là giao điểm hai đường thẳng nằm trên trục tung.

$$\Rightarrow \begin{cases} A \in d \\ A \in \Delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \times m - 3 \\ a + 0 = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ m = -3. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 21. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hai đường thẳng $d: y = mx - 3$ và $\Delta: y + x = m$ cắt nhau tại một điểm nằm trên trục hoành.

- A. $m = \sqrt{3}$. B. $m = \pm\sqrt{3}$. C. $m = -\sqrt{3}$. D. $m = 3$.

Lời giải.

Gọi $B(b; 0)$ là giao điểm hai đường thẳng nằm trên trục hoành

$$\Rightarrow \begin{cases} B \in d \\ B \in \Delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = m \times b - 3 \\ 0 + b = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 3 \\ b = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = m = \sqrt{3} \\ b = m = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 22. Cho hàm số bậc nhất $y = ax + b$. Tìm a và b , biết rằng đồ thị hàm số đi qua điểm $M(-1; 1)$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là 5.

- A. $a = \frac{1}{6}; b = \frac{5}{6}$. B. $a = -\frac{1}{6}; b = -\frac{5}{6}$. C. $a = \frac{1}{6}; b = -\frac{5}{6}$. D. $a = -\frac{1}{6}; b = \frac{5}{6}$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $M(-1; 1) \Rightarrow 1 = a \times (-1) + b$. (1)

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ là 5 $\Rightarrow 0 = a \times 5 + b$. (2)

$$\text{Từ (1) và (2), ta có hệ } \begin{cases} 1 = a \times (-1) + b \\ 0 = a \times 5 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 1 \\ 5a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{6} \\ b = \frac{5}{6} \end{cases}$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 23. Cho hàm số bậc nhất $y = ax + b$. Tìm a và b , biết rằng đồ thị hàm số cắt đường thẳng $\Delta_1: y = 2x + 5$ tại điểm có hoành độ bằng -2 và cắt đường thẳng $\Delta_2: y = -3x + 4$ tại điểm có tung độ bằng -2 .

- A. $a = \frac{3}{4}; b = \frac{1}{2}$. B. $a = -\frac{3}{4}; b = \frac{1}{2}$. C. $a = -\frac{3}{4}; b = -\frac{1}{2}$. D. $a = \frac{3}{4}; b = -\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Với $x = -2$ thay vào $y = 2x + 5$, ta được $y = 1$.

Đồ thị hàm số cắt đường thẳng Δ_1 tại điểm có hoành độ bằng -2 nên đi qua điểm $A(-2; 1)$.

Do đó ta có $1 = a \times (-2) + b$. (1)

Với $y = -2$ thay vào $y = -3x + 4$, ta được $x = 2$.

Đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y = -3x + 4$ tại điểm có tung độ bằng -2 nên đi qua điểm $B(2; -2)$.

Do đó ta có $-2 = a \times 2 + b$. (2)

$$\text{Từ (1) và (2), ta có hệ } \begin{cases} 1 = a \times (-2) + b \\ -2 = a \times 2 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + b = 1 \\ 2a + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 24. Tìm giá trị thực của tham số m để ba đường thẳng $y = 2x$, $y = -x - 3$ và $y = mx + 5$ phân biệt và đồng qui.

- A. $m = -7$. B. $m = 5$. C. $m = -5$. D. $m = 7$.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm A của hai đường thẳng $y = 2x$ và $y = -x - 3$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = -x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow A(-1; -2).$$

Để ba đường thẳng đồng quy thì đường thẳng $y = mx + 5$ đi qua $A \Rightarrow -2 = -1 \times m + 5 \Rightarrow m = 7$.

Thử lại, với $m = 7$ thì ba đường thẳng $y = 2x$; $y = -x - 3$; $y = 7x + 5$ phân biệt và đồng quy.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 25. Tìm giá trị thực của tham số m để ba đường thẳng $y = -5(x + 1)$, $y = mx + 3$ và $y = 3x + m$ phân biệt và đồng quy.

A. $m \neq 3$.

B. $m = 13$.

C. $m = -13$.

D. $m = 3$.

Lời giải.

Để ba đường thẳng phân biệt khi $m \neq 3$ và $m \neq -5$.

Tọa độ giao điểm B của hai đường thẳng $y = mx + 3$ và $y = 3x + m$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y = mx + 3 \\ y = 3x + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 + m \end{cases} \Rightarrow B(1; 3 + m).$$

Để ba đường thẳng đồng quy thì đường thẳng $y = -5(x + 1)$ đi qua $B(1; 3 + m)$

$$\Rightarrow 3 + m = -5(1 + 1) \Rightarrow m = -13.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 26. Cho hàm số $y = x - 1$ có đồ thị là đường Δ . Đường thẳng Δ tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích S bằng bao nhiêu?

A. $S = \frac{1}{2}$.

B. $S = 1$.

C. $S = 2$.

D. $S = \frac{3}{2}$.

Lời giải.

Giao điểm của Δ với trục hoành, trục tung lần lượt là $A(1; 0)$, $B(0; -1)$.

Ta có $OA = 1$, $OB = 1 \Rightarrow$ Diện tích tam giác OAB là $S_{OAB} = \frac{1}{2} \times OA \times OB = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 27. Tìm phương trình đường thẳng $d: y = ax + b$. Biết đường thẳng d đi qua điểm $I(2; 3)$ và tạo với hai tia Ox , Oy một tam giác vuông cân.

A. $y = x + 5$.

B. $y = -x + 5$.

C. $y = -x - 5$.

D. $y = x - 5$.

Lời giải.

Đường thẳng $d: y = ax + b$ đi qua điểm $I(2; 3) \Rightarrow 3 = 2a + b$ (*)

Ta có $d \cap Ox = A\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$; $d \cap Oy = B(0; b)$.

Suy ra $OA = \left|-\frac{b}{a}\right| = -\frac{b}{a}$ và $OB = |b| = b$ (do A, B thuộc hai tia Ox, Oy).

Tam giác OAB vuông tại O . Do đó, ΔOAB vuông cân khi $OA = OB \Rightarrow -\frac{b}{a} = b \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -1. \end{cases}$

• Với $b = 0 \Rightarrow A \equiv B \equiv O(0; 0)$ không thỏa mãn bài toán.

• Với $a = -1$, kết hợp với (*) ta được hệ phương trình $\begin{cases} 3 = 2a + b \\ a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 5. \end{cases}$

Vậy đường thẳng cần tìm là $d: y = -x + 5$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 28. Tìm phương trình đường thẳng $d: y = ax + b$. Biết đường thẳng d đi qua điểm $I(1; 2)$ và tạo với hai tia Ox , Oy một tam giác có diện tích bằng 4.

A. $y = -2x - 4$.

B. $y = -2x + 4$.

C. $y = 2x - 4$.

D. $y = 2x + 4$.

Lời giải.

Đường thẳng $d: y = ax + b$ đi qua điểm $I(1; 2) \Rightarrow 2 = a + b$. (1)

Ta có $d \cap Ox = A\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$; $d \cap Oy = B(0; b)$.

Suy ra $OA = \left|-\frac{b}{a}\right| = -\frac{b}{a}$ và $OB = |b| = b$ (do A, B thuộc hai tia Ox, Oy).

Tam giác OAB vuông tại O . Do đó, ta có

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}OA \times OB = 4 \Rightarrow \frac{1}{2} \times \left(-\frac{b}{a}\right) \times b = 4 \Rightarrow b^2 = -8a. \quad (2)$$

Từ (1) suy ra $b = 2 - a$. Thay vào (2), ta được

$$(2 - a)^2 = -8a \Leftrightarrow a^2 - 4a + 4 = -8a \Leftrightarrow a^2 + 4a + 4 = 0 \Leftrightarrow a = -2.$$

Với $a = -2 \Rightarrow b = 4$. Vậy đường thẳng cần tìm là $d: y = -2x + 4$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 29. Đường thẳng $d: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, a \neq 0; b \neq 0$ đi qua điểm $M(-1; 6)$ tạo với các tia Ox, Oy một tam giác có diện tích bằng 4. Tính $S = a + 2b$.

A. $S = -\frac{38}{3}$. B. $S = \frac{-5 + 7\sqrt{7}}{3}$. C. $S = 10$. D. $S = 6$.

Lời giải.

Đường thẳng $d: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ đi qua điểm $M(-1; 6) \Rightarrow \frac{-1}{a} + \frac{6}{b} = 1$. (1)

Ta có $d \cap Ox = A(a; 0)$; $d \cap Oy = B(0; b)$.

Suy ra $OA = |a| = a$ và $OB = |b| = b$ (do A, B thuộc hai tia Ox, Oy).

Tam giác OAB vuông tại O . Do đó, ta có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}OA \times OB = 4 \Rightarrow \frac{1}{2}ab = 4$. (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ
$$\begin{cases} -\frac{1}{a} + \frac{6}{b} = 1 \\ \frac{1}{2}ab = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a - b - ab = 0 \\ ab = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6a - b - 8 = 0 \\ ab = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 6a - 8 \\ a(6a - 8) - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 6a - 8 \\ \begin{cases} a = 2 \\ a = -\frac{2}{3} \end{cases} \end{cases}$$

Do A thuộc tia $Ox \Rightarrow a = 2$. Khi đó, $b = 6a - 8 = 4$. Suy ra $a + 2b = 10$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 30. Tìm phương trình đường thẳng $d: y = ax + b$. Biết đường thẳng d đi qua điểm $I(1; 3)$, cắt hai tia Ox, Oy và cách gốc tọa độ một khoảng bằng $\sqrt{5}$.

A. $y = 2x + 5$. B. $y = -2x - 5$. C. $y = 2x - 5$. D. $y = -2x + 5$.

Lời giải.

Đường thẳng $d: y = ax + b$ đi qua điểm $I(1; 3) \Rightarrow 3 = a + b$. (1)

Ta có $d \cap Ox = A\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$; $d \cap Oy = B(0; b)$.

Suy ra $OA = \left|-\frac{b}{a}\right| = -\frac{b}{a}$ và $OB = |b| = b$ (do A, B thuộc hai tia Ox, Oy).

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên đường thẳng d .

Xét tam giác AOB vuông tại O , có đường cao OH nên ta có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Leftrightarrow \frac{1}{5} = \frac{a^2}{b^2} + \frac{1}{b^2} \Leftrightarrow b^2 = 5a^2 + 5. \quad (2)$$

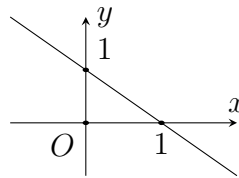
Từ (1) suy ra $b = 3 - a$. Thay vào (2), ta được $(3 - a)^2 = 5a^2 + 5 \Leftrightarrow 4a^2 + 6a - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$.

- Với $a = \frac{1}{2}$, suy ra $b = \frac{5}{2}$. Suy ra $OA = \left| -\frac{b}{a} \right| = -\frac{b}{a} = -5 < 0$ (Loại).
- Với $a = -2$, suy ra $b = 5$. Vậy đường thẳng cần tìm là $d: y = -2x + 5$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 31. Đồ thị hình vẽ là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



- A. $y = x + 1$. B. $y = -x + 2$. C. $y = 2x + 1$. D. $y = -x + 1$.

Lời giải.

Đồ thị đi xuống từ trái sang phải $\Rightarrow$ hệ số góc $a < 0$.

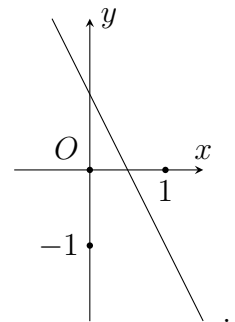
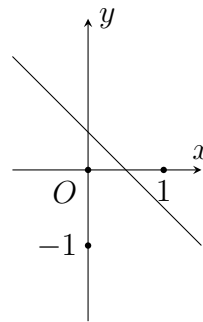
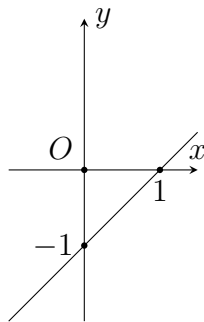
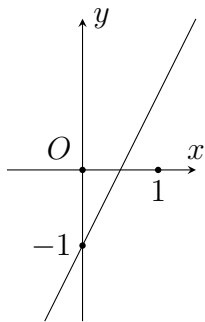
Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0; 1)$.

Do đó, hàm số $y = -x + 1$ thỏa bài toán.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 32. Hàm số $y = 2x - 1$ có đồ thị là hình nào trong bốn hình sau?



Lời giải.

Giao điểm của đồ thị hàm số $y = 2x - 1$ với trục hoành là $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.

Giao điểm của đồ thị hàm số $y = 2x - 1$ với trục tung là $(0; -1)$. Chỉ có A thỏa mãn

Chọn đáp án **A**

□

Câu 33.

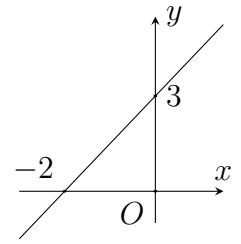
Cho hàm số $y = ax + b$ có đồ thị là hình bên. Tìm a và b .

A. $a = -2$ và $b = 3$.

B. $a = -\frac{3}{2}$ và $b = 2$.

C. $a = -3$ và $b = 3$.

D. $a = \frac{3}{2}$ và $b = 3$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua điểm $A(-2; 0)$ suy ra $-2a + b = 0$. (1)

Đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua điểm $B(0; 3)$ suy ra $b = 3$. (2)

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \begin{cases} -2a + b = 0 \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 3 \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = 3. \end{cases}$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 34.

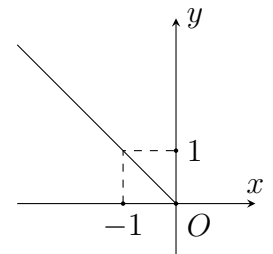
Đồ thị hình vẽ là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = |x|$.

B. $y = -x$.

C. $y = |x|$ với $x > 0$.

D. $y = -x$ với $x < 0$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số nằm hoàn toàn “bên trái” trục tung.

Đồ thị hàm số đi xuống từ trái sang phải $\Rightarrow a < 0$. Nên nhận hàm số $y = -x$ với $x < 0$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 35.

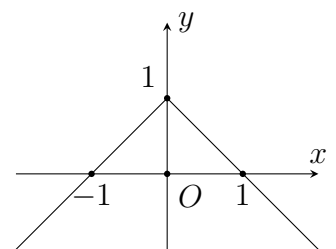
Đồ thị hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = |x|$.

B. $y = |x| + 1$.

C. $y = 1 - |x|$.

D. $y = |x| - 1$.



Lời giải.

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là $(0; 1)$.

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là $(-1; 0)$ và $(1; 0)$. Nên nhận hàm số $y = 1 - |x|$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 36.

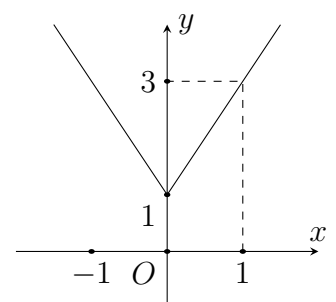
Đồ thị hình vẽ là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = |x| + 1$.

B. $y = 2|x| + 1$.

C. $y = |2x + 1|$.

D. $y = |x + 1|$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(1; 3)$.

Đồ thị hàm số không có điểm chung với trục hoành. Nên nhận hàm số $y = 2|x| + 1$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 37.

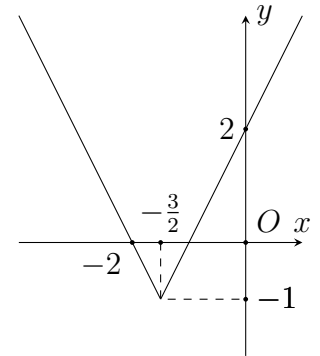
Đồ thị hình vẽ là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = |2x + 3|$.

B. $y = |2x + 3| - 1$.

C. $y = |x - 2|$.

D. $y = |3x + 2| - 1$.

**Lời giải.**

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là $(0; 2)$.

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là $(-2; 0)$. Nên nhận hàm số $y = |2x + 3| - 1$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 38.

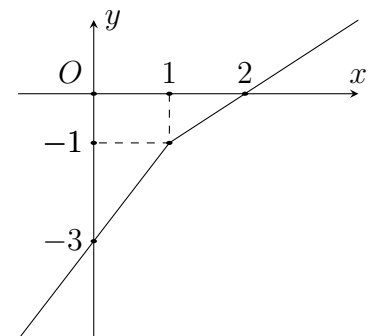
Đồ thị hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{khi } x \geq 1 \\ x - 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.

B. $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{khi } x < 1 \\ x - 2 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$.

C. $f(x) = \begin{cases} 3x - 4 & \text{khi } x \geq 1 \\ -x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.

D. $y = |x - 2|$.

**Lời giải.**

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là $(2; 0)$.

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là $(0; -3)$. Nên nhận hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{khi } x < 1 \\ x - 2 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 39. Bảng biến thiên ở dưới là bảng biến thiên của hàm số nào trong các hàm số được cho ở bốn phương án A, B, C, D sau đây?

A. $y = 2x - 1$.

B. $y = |2x - 1|$.

C. $y = 1 - 2x$.

D. $y = -|2x - 1|$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
y	$+\infty$	0	$+\infty$

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có đồ thị hàm số nằm hoàn toàn phía trên trục Ox . Nên nhận hàm số $y = |2x - 1|$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 40. Bảng biến thiên ở dưới là bảng biến thiên của hàm số nào trong các hàm số được cho ở bốn phương án A, B, C, D sau đây?

A. $y = |4x + 3|$.

B. $y = |4x - 3|$.

C. $y = |-3x + 4|$.

D. $y = |3x + 4|$.

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
y	$+\infty$	0	$+\infty$

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có $x = \frac{4}{3}$ thì $y = 0$. Nên nhận hàm số $y = |-3x + 4|$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 41. Cho hàm số $y = 2x - 3$ có đồ thị là đường thẳng d . Xét các phát biểu sau

(I). Hàm số $y = 2x - 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

(II). Đường thẳng d song song với đồ thị hàm số $2x + y - 3 = 0$.

(III). Đường thẳng d cắt trục Ox tại $A(0; -3)$.

Số các phát biểu đúng là

A. 2.

B. 0.

C. 3.

D. 1.

Lời giải.

Hàm số $y = 2x - 3$ có hệ số $a = 2 > 0$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow (I)$ đúng.

Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow d$ cắt đồ thị hàm số

$2x + y - 3 = 0$ tại điểm $\left(\frac{3}{2}; 0\right) \Rightarrow (II)$ sai.

Giao Ox cho $y = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow d$ giao Ox tại điểm $\left(\frac{3}{2}; 0\right) \Rightarrow (III)$ sai.

Vậy số các phát biểu đúng là 1.

Chọn đáp án (D) □

Câu 42. Cho hàm số $y = 2x - 3$ có đồ thị là đường thẳng d . Xét các phát biểu sau

(I) Hàm số $y = 2x - 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

(II) Đường thẳng d song song với đồ thị hàm số $2x + y - 3 = 0$.

(III) Đường thẳng d cắt trục Ox tại $A(0; -3)$.

Số các phát biểu đúng là

A. 2.

B. 0.

C. 3.

D. 1.

Lời giải.

- Hàm số $y = 2x - 3$ có hệ số $a = 2 > 0$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên (I) đúng.

- Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 0 \end{cases}$ suy ra d cắt đồ thị hàm số $2x + y - 3 = 0$ tại điểm $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ nên (II) sai.
- Giao Ox : cho $y = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow$ giao Ox tại điểm $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ nên (III) sai.

Vậy số các phát biểu đúng là 1.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 43. Tìm phương trình đường thẳng $d: y = ax + b$, biết đường thẳng d đi qua điểm $I(1; 3)$ và tạo với hai tia Ox, Oy một tam giác có diện tích bằng 6.

- A. $y = -3x + 6$. B. $y = (9 - \sqrt{72})x + \sqrt{72} - 6$.
C. $y = (9 + \sqrt{72})x - \sqrt{72} - 6$. D. $y = 3x + 6$.

Lời giải.

d qua $I(1; 3)$ nên $3 = a + b$ (1).
 d cắt Ox và Oy lần lượt tại $A\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$ và $B(0; b)$ với $-\frac{b}{a} > 0$ và $b > 0$ hay $a < 0$ và $b > 0$.

Diện tích $\triangle OAB$ bằng 6 nên $OA \cdot OB = 12 \Leftrightarrow \left|\frac{b}{a} \cdot b\right| = 12$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $\begin{cases} a = -3 \\ b = 6. \end{cases}$

Vậy phương trình đường thẳng là $d: y = -3x + 6$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 44. Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng $d: y = x - 1$ và đường cong ($\mathcal{C}$): $y = \frac{2x - 1}{x + 5}$. Hoàn thành độ trung điểm I của đoạn thẳng MN bằng

- A. 1. B. -1. C. -2. D. 2.

Lời giải.

Hoàn thành độ của 2 điểm M, N là nghiệm của phương trình

$$\begin{aligned} \frac{2x - 1}{x + 5} &= x - 1, \quad x \neq -5 \\ \Leftrightarrow 2x - 1 &= (x - 1)(x + 5), \quad x \neq -5 \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x - 4 &= 0, \quad x \neq -5 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - \sqrt{5} \\ x = -1 + \sqrt{5}. \end{cases} \end{aligned}$$

Do đó trung điểm I của đoạn MN có hoành độ là $x_I = \frac{-1 - \sqrt{5} + (-1 + \sqrt{5})}{2} = -1$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 45. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-3; 3]$ để hàm số $f(x) = (m + 1)x + m - 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. 7. B. 5. C. 4. D. 3.

Lời giải.

Để hàm số $f(x) = (m+1)x + m - 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

Do $m \in [-3; 3]$ nên các giá trị nguyên của tham số m là 0, 1, 2, 3.

Vậy có 4 giá trị nguyên thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **C** □

Câu 46. Tìm m để hàm số $y = m(x+2) - x(2m+1)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m > -2$. B. $m < -\frac{1}{2}$. C. $m > -1$. D. $m > -\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $y = m(x+2) - x(2m+1) = mx + 2m - x(2m+1) = (-m-1)x + 2m$.

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $-m-1 < 0 \Leftrightarrow m > -1$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 47. Biết rằng đồ thị của hàm số $y = ax + b$ đi qua điểm $M(1; 4)$ và song song với đường thẳng $y = 2x + 1$. Tính tổng $S = a + b$.

- A. $S = 4$. B. $S = 2$. C. $S = 0$. D. $S = -4$.

Lời giải.

Do đồ thị của hàm số $y = ax + b$ song song với đường thẳng $y = 2x + 1$ nên $\begin{cases} a = 2 \\ b \neq 1. \end{cases}$

Mặt khác đồ thị của hàm số $y = ax + b$ đi qua điểm $M(1; 4)$ nên $a + b = 4 \Rightarrow b = 2$.

Vậy $S = a + b = 4$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 48. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (3m+2)x - 7m - 1$ vuông góc với đường thẳng $\Delta: y = 2x - 1$.

- A. $m = 0$. B. $m = -\frac{5}{6}$. C. $m < \frac{5}{6}$. D. $m > -\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Để đường thẳng $d: y = (3m+2)x - 7m - 1$ vuông góc với đường thẳng $\Delta: y = 2x - 1$ thì $2(3m+2) = -1 \Rightarrow m = -\frac{5}{6}$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 49. Biết rằng đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua điểm $A(-3; 1)$ và có hệ số góc bằng $k = -2$. Tính tích $P = ab$.

- A. $P = -10$. B. $P = 10$. C. $P = -7$. D. $P = -5$.

Lời giải.

Do đồ thị hàm số $y = ax + b$ có hệ số góc $k = -2$ nên $a = -2$.

Do đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-3; 1)$ nên $1 = -3a + b \Rightarrow b = -5$.

Vậy $P = ab = 10$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 50. Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng $y = \frac{1-3x}{4}$ và $y = -\left(\frac{x}{3} + 1\right)$ là

- A. $(0; -1)$. B. $(2; -3)$. C. $\left(0; \frac{1}{4}\right)$. D. $(3; -2)$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của $y = \frac{1-3x}{4}$ và $y = -\left(\frac{x}{3} + 1\right)$ là

$$\frac{1-3x}{4} = -\left(\frac{x}{3} + 1\right) \Rightarrow x = 3.$$

Khi $x = 3$ thì $y = -2$.

Vậy tọa độ giao điểm của hai đường thẳng $y = \frac{1-3x}{4}$ và $y = -\left(\frac{x}{3} + 1\right)$ là $(3; -2)$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 51. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = m^2x + 2$ cắt đường thẳng $y = 4x + 3$.

A. $m = \pm 2$.

B. $m \neq \pm 2$.

C. $m \neq 2$.

D. $m \neq -2$.

Lời giải.

Để đường thẳng $y = m^2x + 2$ cắt đường thẳng $y = 4x + 3$ thì $m^2 \neq 4 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 52. Cho hàm số bậc nhất $y = ax + b$. Tìm a và b , biết rằng đồ thị hàm số đi qua điểm $M(-1; 1)$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 5.

A. $a = \frac{1}{6}; b = \frac{5}{6}$.

B. $a = -\frac{1}{6}; b = -\frac{5}{6}$.

C. $a = \frac{1}{6}; b = -\frac{5}{6}$.

D. $a = -\frac{1}{6}; b = \frac{5}{6}$.

Lời giải.

Để đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua điểm $M(-1; 1)$ thì $-a + b = 1$.

Do đồ thị hàm số $y = ax + b$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 5 nên $5a + b = 0$.

Do đó ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} -a + b = 1 \\ 5a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{6} \\ b = \frac{5}{6} \end{cases}$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 53. Tìm giá trị thực của tham số m để ba đường thẳng $y = 2x$, $y = -x - 3$ và $y = mx + 5$ phân biệt và đồng quy.

A. $m = -7$.

B. $m = 5$.

C. $m = -5$.

D. $m = 7$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = 2x$ và $y = -x - 3$ là

$$2x = -x - 3 \Leftrightarrow x = -1.$$

Với $x = -1$ thì $y = -2$.

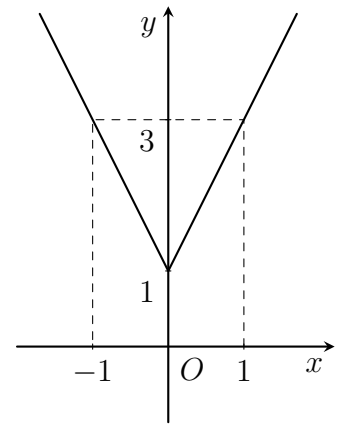
Để ba đường thẳng $y = 2x$, $y = -x - 3$ và $y = mx + 5$ phân biệt và đồng quy thì đường thẳng $y = mx + 5$ đi qua điểm $(-1; -2)$ nên $-2 = -m + 5 \Rightarrow m = 7$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 54.

Đồ thị hình vẽ dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = |x| + 1$. B. $y = 2|x| + 1$. C. $y = |2x + 1|$. D. $y = x + 1$.



Lời giải.

Với $x > 0$. Gọi đường thẳng $d: y = ax + b$. Khi đó d đi qua điểm $(0; 1)$ và $(1; 3)$ nên ta có hệ phương trình $\begin{cases} b = 1 \\ a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1. \end{cases}$

Vậy $y = 2x + 1$.

Với $x < 0$, ta thấy phần đường thẳng này đối xứng với đường thẳng d qua trục Oy nên hàm số đã cho là $y = 2|x| + 1$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 55.

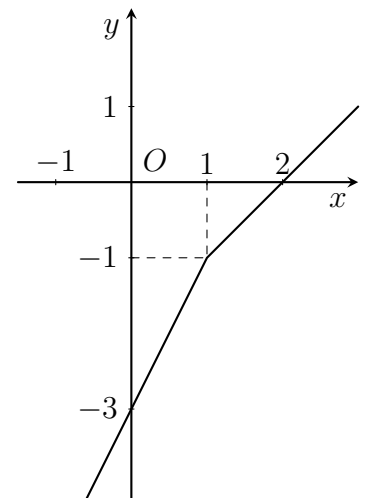
Đồ thị hình vẽ dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & , x \geq 1 \\ x - 2 & , x < 1 \end{cases}$.

B. $f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & , x < 1 \\ x - 2 & , x \geq 1 \end{cases}$.

C. $f(x) = \begin{cases} 3x - 4 & , x \geq 1 \\ -x & , x < 1 \end{cases}$.

D. $f(x) = |x - 2|$.



Lời giải.

Trường hợp 1: $x < 1$.

Gọi $d: y = ax + b$. Khi đó d đi qua điểm $(0; -3)$ và $(1; -1)$ nên ta có hệ $\begin{cases} b = -3 \\ a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3. \end{cases}$

Vậy $d: y = 2x - 3$.

Trường hợp 2: $x \geq 1$.

Gọi $d': y = ax + b$. Khi đó d' đi qua điểm $(2; 0)$ và $(1; -1)$ nên ta có hệ $\begin{cases} 2a + b = 0 \\ a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2. \end{cases}$

Vậy $d': y = x - 2$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 56. Cho phương trình đường thẳng $y = ax + b$ có đồ thị đi qua điểm $E(2; -1)$ và song song với đường thẳng ON với O là gốc tọa độ và $N(1; 3)$. Tính giá trị biểu thức $S = a^2 + b^2$.

A. $S = -4$.

B. $S = -40$.

C. $S = -58$.

D. $S = 58$.

Lời giải.Phương trình đường thẳng $ON: y = 3x$.Do đường thẳng $y = ax + b$ song song với đường thẳng ON nên $\begin{cases} a = 3 \\ b \neq 0. \end{cases}$ Do đường thẳng $y = ax + b$ đi qua điểm $E(2; -1)$ nên $-1 = 2a + b \Rightarrow b = -7$.Vậy giá trị biểu thức $S = a^2 + b^2 = 3^2 + (-7)^2 = 58$.Chọn đáp án **(D)** □**Câu 57.** Tìm các giá trị thực của tham số m để hai đường thẳng $d: y = mx - 3$ và $\Delta: y + x = m$ cắt nhau tại một điểm nằm trên trục tung.

A. $m = -3$.

B. $m = 3$.

C. $m = \pm 3$.

D. $m = 0$.

Lời giải.Ta có $\Delta: y = -x + 3$.Để đường thẳng d và Δ cắt nhau thì $m \neq -1$.Phương trình hoành độ giao điểm của d và Δ là

$$mx - 3 = -x + m \Leftrightarrow x = \frac{m + 3}{m + 1}.$$

Do d và Δ cắt nhau tại một điểm nằm trên trục tung nên $\frac{m + 3}{m + 1} = 0 \Leftrightarrow m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -3$.Chọn đáp án **(A)** □**Câu 58.** Cho hàm số $y = x - 1$ có đồ thị là đường thẳng Δ . Đường thẳng Δ tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích S bằng bao nhiêu?

A. $S = \frac{1}{2}$.

B. $S = 1$.

C. $S = 2$.

D. $S = \frac{3}{2}$.

Lời giải.Đường thẳng $\Delta: y = x - 1$ cắt trục Ox tại $A(1; 0)$ và cắt trục Oy tại $B(0; -1)$.Khi đó $\triangle OAB$ vuông tại O . Vậy $S = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$.Chọn đáp án **(A)** □**Câu 59.** Tìm phương trình đường thẳng $d: y = ax + b$. Biết đường thẳng d đi qua điểm $I(2; 3)$ và tạo với hai tia Ox, Oy một tam giác vuông cân.

A. $y = x + 5$.

B. $y = -x + 5$.

C. $y = -x - 5$.

D. $y = x - 5$.

Lời giải.Do đường thẳng d đi qua $I(2; 3)$ nên $3 = 2a + b \Rightarrow b = 3 - 2a$. Suy ra $d: y = ax + 3 - 2a$ ($a \neq 0$).Ta có d cắt Ox tại $A\left(\frac{2a - 3}{a}; 0\right)$ và cắt trục Oy tại $B(0; 3 - 2a)$.Do $I(2; 3)$ thuộc góc phần tư thứ nhất và do d tạo với hai tia Ox, Oy một tam giác vuông cân nên

$$\frac{2a - 3}{a} = 3 - 2a \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ a = -1. \end{cases}$$

Khi đó phương trình đường thẳng $d: y = -x + 5$ hoặc $d: y = \frac{3}{2}x$.Chọn đáp án **(B)** □

Câu 60. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để hàm số $y = (m - 2)x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 2017.

B. 2015.

C. Vô số.

D. 2016.

Lời giải.

Hàm số $y = (m - 2)x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > 2$

Mà $m \in [-2018; 2018]; m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{3; 4; 5; 6; \dots; 2018\}$. Vậy có 2016 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 61. Một hàm số bậc nhất $y = f(x)$ thỏa mãn $f(-1) = 2$ và $f(2) = -3$. Hàm số đó là

A. $y = \frac{-5x - 1}{3}$.B. $y = \frac{-5x + 1}{3}$.C. $y = 2x - 3$.D. $y = -2x + 3$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = ax + b$. Từ giả thiết ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} -a + b = 2 \\ 2a + b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{5}{3} \\ b = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy $y = f(x) = \frac{-5x + 1}{3}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 62. Cho hai đường thẳng $d_1: mx + (m - 1)y - 2(m + 2) = 0$ và $d_2: 3mx - (3m + 1)y - 5m - 4 = 0$.

Khi $m = \frac{1}{3}$ thì d_1 và d_2

A. trùng nhau.

B. cắt nhau tại một điểm.

C. vuông góc với nhau.

D. song song với nhau.

Lời giải.

Khi $m = \frac{1}{3}$ ta được $d_1: \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{14}{3} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - 7$ và $d_2: x - 2y - \frac{17}{3} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{17}{6}$.

Ta thấy, hai đường thẳng này có $\begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}$ nên $d_1 \parallel d_2$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 63. Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(-1; 2)$ và $B(3; 1)$ là

A. $y = \frac{3x}{2} + \frac{7}{2}$.B. $y = -\frac{3x}{2} + \frac{1}{2}$.C. $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$.D. $y = -\frac{x}{4} + \frac{7}{4}$.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng có dạng d: $y = ax + b$.

Do d đi qua A, B nên ta có

$$\begin{cases} 2 = -a + b \\ 1 = 3a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = \frac{7}{4} \end{cases}$$

Vậy d: $y = -\frac{x}{4} + \frac{7}{4}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

D

Câu 64. Hàm số $y = (m - 1)x + m^2 + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi

A. $m > 1$.

B. $m \leq 1$.

C. $m \geq 1$.

D. $m < 1$.

Lời giải.

- Nếu $m = 1$ thì hàm số trở thành $y = 3$ là đường thẳng song song với trục hoành nên hàm số không đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- Nếu $m \neq 1$ thì $y = (m - 1)x + m^2 + 2$ là hàm bậc nhất nên đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$.

Chọn đáp án **(A)**

□

A

Câu 65. Cho đường thẳng có phương trình $y = ax + b$ đi qua hai điểm $M(1; 3)$, $N(2; -4)$. Giá trị của a và b là

A. $a = -7; b = -10$.

B. $a = 7; b = 10$.

C. $a = 7; b = -10$.

D. $a = -7; b = 10$.

Lời giải.

Đường thẳng $y = ax + b$ đi qua $M(1; 3)$ nên ta có $a + b = 3$.

Đường thẳng $y = ax + b$ đi qua $M(2; -4)$ nên ta có $2a + b = -4$.

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} a + b = 3 \\ 2a + b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -7 \\ b = 10 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

D

Câu 66. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = \frac{x}{3} - 2$.

B. $y = -\frac{x}{3} + 2$.

C. $y = \frac{1}{3}x^2 + 2$.

D. $y = \frac{3}{x} + 2$.

Lời giải.

Hàm số $y = \frac{x}{3} - 2$ là hàm số bậc nhất có hệ số $a = \frac{1}{3} > 0$ nên hàm số đó đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

A

Câu 67. Trên một hệ trục tọa độ Oxy , độ dài được tính theo đơn vị cm, đường thẳng $y = 2x - 2$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng

A. 3 cm^2 .

B. 4 cm^2 .

C. 2 cm^2 .

D. 1 cm^2 .

Lời giải.

Gọi d là đường thẳng $y = 2x - 2$. Có $d \cap Ox = A(1; 0)$, $d \cap Oy = B(0; -2)$.

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2}|1| \cdot |-2| = 1 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

D

Câu 68. Cho hàm số $y = -x^2 + 4x + 2$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số giảm trên khoảng $(3; +\infty)$.

B. Hàm số giảm trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

C. Hàm số giảm trên khoảng $(-\infty; 2)$.D. Hàm số tăng trên khoảng $(-\infty; 6)$.**Lời giải.**Ta có $a = -1$, $b = 4$, $c = 2$, suy ra $-\frac{b}{2a} = 2$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	6	$-\infty$

Vậy hàm số giảm trên khoảng $(3; +\infty)$.Chọn đáp án **(A)**

□

A

Câu 69. Tìm điều kiện của tham số m để hàm số $y = (3m + 4)x + 5m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m < -\frac{4}{3}$.

B. $m > -\frac{4}{3}$.

C. $m \neq -\frac{4}{3}$.

D. $m = -\frac{4}{3}$.

Lời giải.Hàm số $y = (3m + 4)x + 5m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $3m + 4 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{4}{3}$.Chọn đáp án **(B)**

□

B

Câu 70. Đường thẳng đi qua điểm $A(1; 3)$ và song song với đường thẳng $y = x + 1$ có phương trình là

A. $y = x - 2$.

B. $y = x + 2$.

C. $y = 2x + 1$.

D. $y = -x + 4$.

Lời giải.Đường thẳng d song song với đường thẳng $y = x + 1$ có dạng $y = x + b$ với $b \neq 1$.Vì $A(1; 3) \in d$ nên $b = 2$. Vậy $d: y = x + 2$.Chọn đáp án **(B)**

□

B

Câu 71. Đồ thị hàm số $y = x + 1$ đi qua điểm nào sau đây?

A. $(0; 1)$.

B. $(2; -1)$.

C. $(0; 2)$.

D. $(1; 0)$.

Lời giải.Đồ thị hàm số $y = x + 1$ đi qua điểm $(0; 1)$.Chọn đáp án **(A)**

□

A

Câu 72. Đường thẳng $y = ax + b$ đi qua hai điểm $A(1; 5)$ và $B(-2; 8)$ thì a, b bằng

A. $-1; 6$.

B. $1; 6$.

C. $1; 6$.

D. $-1; -6$.

Lời giải.Đường thẳng $y = ax + b$ đi qua hai điểm $A(1; 5)$ và $B(-2; 8)$ nên

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ -2a + b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 6 \end{cases}$$

Chọn đáp án (A)

□

A

Câu 73. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x - 2m + 1$ cắt hai trục tọa độ tạo ra một tam giác có diện tích bằng $\frac{25}{2}$.

A. 2; 4.

B. -2; 3.

C. -2.

D. 2; 3.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = x - 2m + 1$ cắt hai trục tại hai điểm $A(0; -2m + 1)$ và $B(2m - 1; 0)$.

Vì diện tích tam giác OAB bằng $\frac{25}{2}$ nên

$$\frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{25}{2} \Leftrightarrow (2m - 1)^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 3. \end{cases}$$

Chọn đáp án (B)

□

B

Câu 74. Đường thẳng $y = 4x + 5$ song song với đường thẳng nào sau đây

A. $y = 4x - 3$.B. $y = -3x + 2$.C. $y = 3x + 1$.D. $y = 4x + 5$.**Lời giải.**

Đường thẳng $y = 4x + 5$ song song với đường thẳng $y = 4x - 3$.

Chọn đáp án (A)

□

A

Câu 75. Xác định hàm số $y = ax + b$, biết đồ thị hàm số đi qua hai điểm $A(1; -3)$ và $B(-1; 5)$.

A. $y = 4x + 1$.B. $y = -4x - 1$.C. $y = 4x - 1$.D. $y = -4x + 1$.**Lời giải.**

$$\text{Đồ thị hàm số đi qua hai điểm } A \text{ và } B \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -3 \\ -a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 1 \end{cases}.$$

Vậy hàm số đã cho là $y = -4x + 1$.

Chọn đáp án (D)

□

D

Câu 76. Điểm nào sau đây thuộc đồ thị hàm số $y = 2x - 3$?

A. $N(1; 1)$.B. $P(-2; -7)$.C. $M(0; 3)$.D. $Q(-1; 5)$.**Lời giải.**

Thay tọa độ điểm M, N, P, Q vào hàm số $y = 2x - 3$.

Ta thấy $-7 = 2 \cdot (-2) - 3 \Rightarrow P$ thuộc đồ thị hàm số $y = 2x - 3$.

Chọn đáp án (B)

□

B

Câu 77.

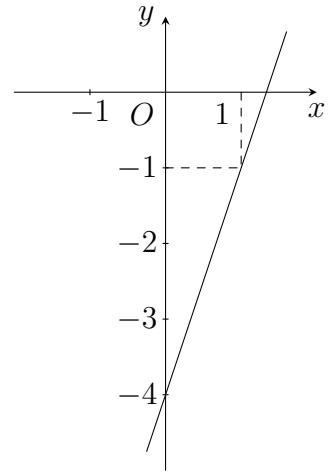
Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên?

A. $y = -3x - 4$.

B. $y = 2x - 3$.

C. $y = 3x - 4$.

D. $y = -2x + 1$.



Lời giải.

Theo hình vẽ, ta thấy đồ thị hàm số đồng biến, suy ra hệ số góc $a > 0$, từ đó ta loại hàm số $y = -3x - 4$ và $y = -2x + 1$.

Bên cạnh đó, đồ thị hàm số qua điểm $(0; -4)$, suy ra hàm số cần tìm là $y = 3x - 4$.

Chọn đáp án **C**

□

C

Câu 78. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = -2x + 1$.

B. $y = 2x - 1$.

C. $y = -x^2 + 2$.

D. $y = -5$.

Lời giải.

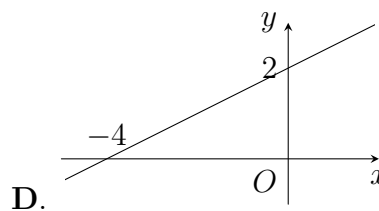
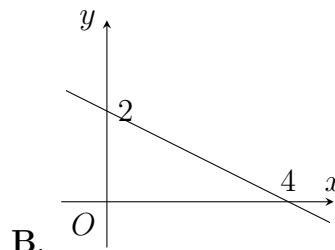
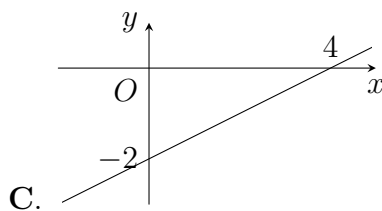
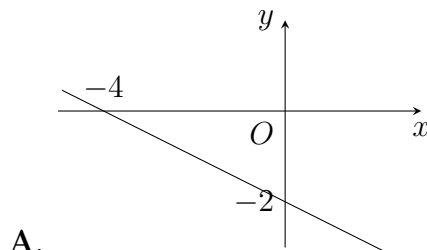
Hàm số $y = -2x + 1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án **A**

□

A

Câu 79. Đồ thị của hàm số $y = -\frac{x}{2} + 2$ là hình nào?



Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = -\frac{x}{2} + 2$ cắt trục Ox tại điểm $(4; 0)$ và cắt trục Oy tại điểm $(0; 2)$.

Chọn đáp án **B**

□

B

Câu 80.

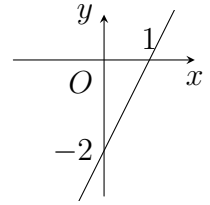
Hình vẽ bên là của đồ thị hàm số nào?

A. $y = x - 2$.

B. $y = -x - 2$.

C. $y = -2x - 2$.

D. $y = 2x - 2$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy

- Hàm số đồng biến nên $a > 0$.
- Đồ thị hàm số cắt trục Ox tại điểm $(1; 0)$, cắt trục Oy tại điểm $(0; -2)$.

Đối chiếu với các phương án ta được hàm số cần tìm là $y = 2x - 2$.

Chọn đáp án **D**

□

D

Câu 81. Tìm hai số thực a, b để đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua hai điểm $A(1; 2)$ và $B(-2; 4)$.

A. $a = \frac{5}{2}$ và $b = -\frac{3}{4}$. B. $a = -\frac{4}{3}$ và $b = \frac{10}{3}$. C. $a = -\frac{3}{2}$ và $b = 4$. D. $a = -\frac{2}{3}$ và $b = \frac{8}{3}$.

Lời giải.

Vì đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua hai điểm $A(1; 2)$ và $B(-2; 4)$ nên ta có

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ -2a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ b = \frac{8}{3} \end{cases}$$

Chọn đáp án **D**

□

D

Câu 82.

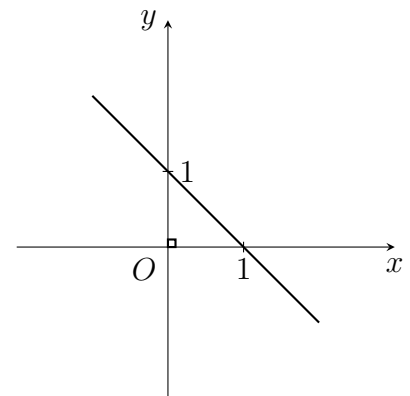
Hàm số nào trong bốn phương án liệt kê ở các đáp án A, B, C, D có đồ thị như hình bên?

A. $y = -x + 2$.

B. $y = 2x + 1$.

C. $y = x + 1$.

D. $y = -x + 1$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số đã cho đi qua 2 điểm $(1; 0)$ và $(0; 1)$. Do đó hàm $y = -x + 1$ thỏa mãn.

Chọn đáp án **D**

□

D

Câu 83. Hàm số bậc nhất $y = f(x)$ có $f(-1) = 2$ và $f(2) = -3$. Hàm số đó là

A. $f(x) = -2x + 3$. B. $f(x) = \frac{-5x + 1}{3}$. C. $f(x) = 2x - 3$. D. $f(x) = \frac{-5x - 1}{3}$.

Lời giải.

$y = f(x)$ là hàm số bậc nhất nên có dạng $y = ax + b$, $a \neq 0$. Ta có

$$\begin{cases} f(-1) = 2 \\ f(2) = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + b = 2 \\ 2a + b = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{5}{3} \\ b = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy $f(x) = \frac{-5x + 1}{3}$.

Chọn đáp án **(B)**

B

Câu 84. Đường thẳng $d: y = (m - 3)x - 2m + 1$ cắt hai trục tọa độ tại hai điểm A và B sao cho tam giác OAB cân. Khi đó, số giá trị của m thỏa mãn là

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Lời giải.

$d: y = (m - 3)x - 2m + 1$ cắt Ox tại $A(a; 0)$ nên $0 = (m - 3)a - 2m + 1 \Rightarrow a = \frac{2m - 1}{m - 3}$.

$d: y = (m - 3)x - 2m + 1$ cắt Oy tại $B(0; b)$ nên $b = (m - 3) \cdot 0 - 2m + 1 = -2m + 1$.

Vì $\triangle OAB$ vuông tại O nên $\triangle OAB$ cân tại O .

$$\text{Do đó } OA = OB \Leftrightarrow \left| \frac{2m - 1}{m - 3} \right| = |-2m + 1| \Leftrightarrow |-2m + 1|(|m - 3| - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ m = 4 \\ m = 2. \end{cases}$$

Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án **(C)**

C

Câu 85. Giá trị nào của k thì hàm số $y = (k - 1)x + k - 2$ nghịch biến trên tập xác định của hàm số

A. $k < 2$.

B. $k > 1$.

C. $k < 2$.

D. $k < 1$.

Lời giải.

Hàm số $y = (k - 1)x + k - 2$ nghịch biến trên tập xác định của nó khi và chỉ khi $k - 1 < 0 \Leftrightarrow k < 1$.

Chọn đáp án **(D)**

D

Câu 86. Đường thẳng đi qua hai điểm $A(-1; 2)$, $B(3; 1)$ có phương trình nào sau đây?

A. $y = -\frac{x}{4} + \frac{7}{4}$.

B. $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$.

C. $y = \frac{3x}{2} + \frac{7}{2}$.

D. $y = -\frac{3x}{2} + \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Gọi (d) là đường thẳng có phương trình $y = ax + b$.

(d) qua $A(-1; 2)$, $B(3; 1)$ nên $\begin{cases} -a + b = 2 \\ 3a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = \frac{7}{4} \end{cases}$

Vậy đường thẳng (d) có phương trình $y = -\frac{x}{4} + \frac{7}{4}$.

Chọn đáp án **(A)**

A

Câu 87. Cho hai đường thẳng $d_1: y = mx + 2$ và $d_2: y = (2m + 1)x$. Để $d_1 \parallel d_2$ thì giá trị của m là

- A. $m = -1$. B. $m = 1$. C. $m = 0$. D. m tùy ý.

Lời giải.

Ta có $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m = 2m + 1 \Leftrightarrow m = -1$.

Chọn đáp án **(A)**

□

A

Câu 88. Tìm a để đường thẳng $y = ax - 1$ đi qua điểm $M(1; 3)$.

- A. $a = 2$. B. $a = 4$. C. $a = 1$. D. $a = 0$.

Lời giải.

Đường thẳng $y = ax - 1$ đi qua điểm $M(1; 3)$ nên $3 = a \cdot 1 - 1 \Leftrightarrow a = 4$.

Chọn đáp án **(B)**

□

B

Câu 89. Điểm nào dưới đây thuộc đồ thị hàm số $y = 3x - 1$.

- A. $(1; 1)$. B. $(2; 5)$. C. $(2; 3)$. D. $(0; 1)$.

Lời giải.

Ta có

- Với $x = 0$ thì $y = 3 \cdot 0 - 1 = -1$.
- Với $x = 1$ thì $y = 3 \cdot 1 - 1 = 2$.
- Với $x = 2$ thì $y = 3 \cdot 2 - 1 = 5$.

Vậy điểm thuộc đồ thị hàm số $y = 3x - 1$ là $(2; 5)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

B

Câu 90. Hàm số $y = |2x + 10|$ là hàm số nào sau đây?

- A. $y = \begin{cases} 2x + 10 & \text{nếu } x \geq -5 \\ 2x - 10 & \text{nếu } x < -5 \end{cases}$ B. $y = \begin{cases} 2x + 10 & \text{nếu } x \geq -5 \\ -2x + 10 & \text{nếu } x < -5 \end{cases}$
- C. $y = \begin{cases} 2x + 10 & \text{nếu } x \geq 5 \\ -2x - 10 & \text{nếu } x < 5 \end{cases}$ D. $y = \begin{cases} 2x + 10 & \text{nếu } x \geq -5 \\ -2x - 10 & \text{nếu } x < -5 \end{cases}$

Lời giải.

$$\text{Ta có } y = |2x + 10| = \begin{cases} 2x + 10 & \text{nếu } 2x + 10 \geq 0 \\ -(2x + 10) & \text{nếu } 2x + 10 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x + 10 & \text{nếu } x \geq -5 \\ -2x - 10 & \text{nếu } x < -5 \end{cases}$$

Chọn đáp án **(C)**

□

C

Câu 91. Hàm số $y = |-6x + 12|$ bằng hàm số nào sau đây?

- A. $y = \begin{cases} -6x + 12 & \text{nếu } x \leq 2 \\ -6x - 12 & \text{nếu } x > 2 \end{cases}$ B. $y = \begin{cases} -6x + 12 & \text{nếu } x \geq 2 \\ 6x - 12 & \text{nếu } x < 2 \end{cases}$
- C. $y = \begin{cases} -6x + 12 & \text{nếu } x \leq 2 \\ 6x - 12 & \text{nếu } x > 2 \end{cases}$ D. $y = \begin{cases} -6x + 12 & \text{nếu } x \geq 2 \\ -6x - 12 & \text{nếu } x < 2 \end{cases}$

Lời giải.

$$\text{Ta có } y = |-6x + 12| = \begin{cases} -6x + 12 & \text{nếu } -6x + 12 \geq 0 \\ -(-6x + 12) & \text{nếu } -6x + 12 < 0 \end{cases} = \begin{cases} -6x + 12 & \text{nếu } x \leq 2 \\ 6x - 12 & \text{nếu } x > 2. \end{cases}$$

Chọn đáp án **C**

□

C

Câu 92. Cho parabol $(P): y = -2x^2 + 4x - 7$, (P) có trục đối xứng là

A. $x = 1$.

B. $y = -1$.

C. $x = -1$.

D. $y = 1$.

Lời giải.

Trục đối xứng của (P) là $x = -\frac{4}{2 \cdot (-2)}$, hay $x = 1$.

Chọn đáp án **A**

□

A

Câu 93. Tính diện tích S của tam giác tạo bởi đồ thị hàm số $y = 2x - 1$ với hai trục tọa độ Ox , Oy .

A. $S = \frac{1}{2}$.

B. $S = 2$.

C. $S = 4$.

D. $S = \frac{1}{4}$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đã cho cắt hai trục Ox , Oy lần lượt tại $A\left(\frac{1}{2}; 0\right)$, $B(0; -1)$. Suy ra diện tích tam giác cần tìm là $S_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{4}$.

Chọn đáp án **D**

□

D

Câu 94. Cho hàm số $y = (2 + m)x + 3$ (với m là tham số). Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. Hàm số nghịch biến khi $m < -2$.

B. Hàm số nghịch biến khi $m > 2$.

C. Hàm số nghịch biến khi $m = 2$.

D. Hàm số nghịch biến khi $m > -2$.

Lời giải.

Hàm số $y = (2 + m)x + 3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $2 + m < 0 \Leftrightarrow m < -2$.

Chọn đáp án **A**

□

A

Câu 95. Đồ thị hàm số $y = \begin{cases} 2x + 1 & \text{khi } x \leq 2 \\ x^2 - 3 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ đi qua điểm nào sau đây?

A. $Q(0; -3)$.

B. $M(0; 1)$.

C. $N(0; 3)$.

D. $P(-3; 0)$.

Lời giải.

Dựa vào cách cho hàm số, ta có hoành độ của các điểm Q , M , N , P đều nhỏ hơn 2 nên lần lượt thay tọa độ các điểm trên vào hàm số $g(x) = 2x + 1$, ta có được $M(0; 1)$ thỏa mãn.

Chọn đáp án **B**

□

B

Câu 96. Cho hàm số $y = (2k - 4)x - 2$ có đồ thị (d) . Tìm tất cả các giá trị của k để (d) song song với trục hoành.

A. $k < 2$.

B. $k = -2$.

C. $k = 2$.

D. $k > 2$.

Lời giải.

Để đường thẳng (d) song song với trục hoành, ta có $\begin{cases} 2k - 4 = 0 \\ -2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow k = 2.$

Vậy $k = 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 97.

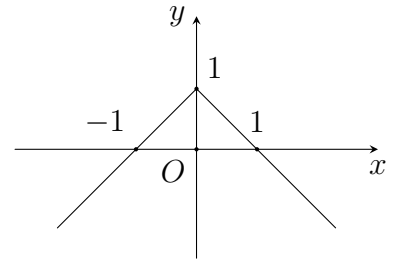
Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình vẽ.

A. $y = |x| + 1.$

B. $y = -|x| + 1.$

C. $y = |x| - 1.$

D. $y = |x|.$



Lời giải.

Cho $x = 0$ thì $y = 1$ loại $y = |x| - 1$ và $y = |x|.$

Cho $y = 0$ thì $x = \pm 1$ loại $y = |x| + 1$ và chọn $y = -|x| + 1.$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 98.

Khẳng định nào về hàm số $y = -2x + 3$ là **sai**?

A. Hàm số có đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0; 3).$

B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}.$

C. hàm số có đồ thị cắt trục hoành tại điểm $\left(\frac{3}{2}; 0\right).$

D. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}.$

Lời giải.

Hàm số bậc nhất $y = -2x + 3$ có hệ số $a = -2 < 0$ nên nghịch biến trên $\mathbb{R}.$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 99.

Xác định hàm số bậc nhất $y = ax + b$, biết nó có hệ số góc bằng -2 và đồ thị của nó đi qua điểm $A(-3; 1).$

A. $y = 2x + 7.$

B. $y = -2x - 5.$

C. $y = 2x + 2.$

D. $y = -2x + 1.$

Lời giải.

Vì hệ số góc bằng -2 nên $a = -2.$

Mặt khác đồ thị đi qua điểm $A(-3; 1)$ nên $-2 \cdot (-3) + b = -1 \Leftrightarrow b = -5.$

Vậy $y = -2x - 5.$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 100.

Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hai đường thẳng $(d_1): y = mx + 3m + 1$ và $(d_2): y = m(m + 2)x + 2m + 1$ song song nhau?

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 0.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm giữa đường thẳng (d_1) và (d_2) là

$$mx + 3m + 1 = m(m + 2)x + 2m + 1 \Leftrightarrow (m^2 + m)x = m \quad (*).$$

Ta có $(d_1) \parallel (d_2)$ khi và chỉ khi phương trình $(*)$ vô nghiệm.

Điều kiện tương đương là $\begin{cases} m^2 + m = 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$

Vậy hai đường thẳng (d_1) và (d_2) song song với nhau khi và chỉ khi $m = -1$.

Chọn đáp án **(B)**

□

B

Câu 101. Hàm số nào trong các hàm số sau đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = \frac{1}{3}x - 5$. B. $y = -3x + 5$. C. $y = -\sqrt{3}x + 5$. D. $y = 1 - \frac{1}{23}x$.

Lời giải.

Hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$) đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a > 0$.

Trong các hàm số đã cho, hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ là $y = \frac{1}{3}x - 5$.

Chọn đáp án **(A)**

□

A

Câu 102. Cho các đường thẳng $(d_1): y = 2x - 1$, $(d_2): y = -x + 2$. Tìm tọa độ giao điểm của (d_1) , (d_2) .

A. $(1; 1)$. B. $\left(\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$. C. $(-1; 3)$. D. $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là $2x - 1 = -x + 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Thay $x = 1$ vào phương trình của (d_1) ta được $y = 1$.

Vậy tọa độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là $(1; 1)$.

Chọn đáp án **(A)**

□

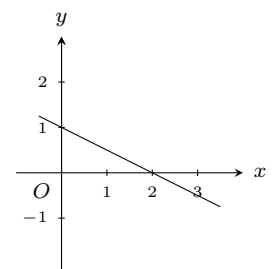
A

Câu 103.

Đồ thị bên cạnh là đồ thị của một trong các hàm số ở các phương án A, B, C, D.

Hỏi đó là hàm số nào?

A. $y = -2x + 1$. B. $y = 2x - 1$. C. $y = -\frac{1}{2}x + 1$. D. $y = \frac{1}{2}x + 1$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số đi qua điểm có tọa độ $(2; 0)$ nên hàm số cần tìm là $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

Chọn đáp án **(C)**

□

C

Câu 104. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng (d) có phương trình: $y = kx + k^2 - 3$. Tất cả các giá trị của k để đường thẳng (d) đi qua gốc tọa độ là

A. $k = \sqrt{3}$.

B. $k = -\sqrt{2}$.

C. $k = \sqrt{2}$.

D. $k = \sqrt{3}$ hoặc $k = -\sqrt{3}$.

Lời giải.(d) đi qua gốc tọa độ $\Leftrightarrow k^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{3}$.Chọn đáp án **(D)**

□

D

Câu 105. Đường thẳng song song với đường thẳng $y = -\sqrt{3}x + 6$ có phương trình là

A. $y = x$.

B. $y = \sqrt{3}x - 6$.

C. $y + \sqrt{3}x = 0$.

D. $y = \sqrt{3}x + 8$.

Lời giải.Áp dụng lý thuyết: Hai đường thẳng $y = ax + b$ và $y = a'x + b'$ song song với nhau khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}$$

Chọn đáp án **(C)**

□

C

Câu 106. Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(3; 1)$, $B(-2; 6)$ là

A. $y = x - 4$.

B. $y = -x + 6$.

C. $y = -x + 4$.

D. $y = 2x + 2$.

Lời giải.Phương trình đường thẳng cần tìm có dạng $y = ax + b$. Theo đề bài, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 3a + b = 1 \\ -2a + b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(3; 1)$, $B(-2; 6)$ là $y = -x + 4$.Chọn đáp án **(C)**

□

C

Câu 107. Tất cả những giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = (2 - m)x + 3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là

A. $\begin{cases} m < 2 \\ m \neq 3 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} m > 2 \\ m \neq 3 \end{cases}$.

C. $m < 2$.

D. $m > 2$.

Lời giải.Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow 2 - m < 0 \Leftrightarrow m > 2$.Chọn đáp án **(D)**

□

D

Câu 108. Cho hai đường thẳng $d_1: y = 2x + 3$ và $d_2: y = x + 4$. Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng trên là

A. $(-1; 1)$.

B. $(2; 7)$.

C. $(1; 5)$.

D. $(-2; 2)$.

Lời giải.Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và d_2 là $2x + 3 = x + 4 \Leftrightarrow x = 1$.Do đó tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 là $(1; 5)$.Chọn đáp án **(C)**

□

C

Câu 109. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng $(d): y = kx + k^2 - 3$. Tìm k để đường thẳng (d) đi qua gốc tọa độ.

- A. $k = \pm\sqrt{3}$. B. $k = \sqrt{3}$. C. $k = \sqrt{2}$. D. $k = -\sqrt{2}$.

Lời giải.

Đường thẳng (d) đi qua gốc tọa độ nên $0 = k \cdot 0 + k^2 - 3 \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{3}$.

Chọn đáp án **(A)** □

A

Câu 110. Đường thẳng đi qua hai điểm $A(1; 2)$ và $B(-1; 0)$ có phương trình là

- A. $y = x + 1$. B. $y = 2x + 1$. C. $y = x - 1$. D. $y = 2x - 1$.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng d có dạng $y = ax + b$ ($a \neq 0$).

$$\text{Vì } A, B \text{ thuộc } d \text{ nên } \begin{cases} a + b = 2 \\ -a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 1.$$

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình $y = x + 1$.

Chọn đáp án **(A)** □

A

Câu 111. Phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm $A(3; 1)$, $B(-2; 6)$ là.

- A. $y = x - 4$. B. $y = -x + 6$. C. $y = 2x + 2$. D. $y = -x + 4$.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng d có dạng $y = ax + b$ ($a \neq 0$).

$$\text{Vì } A, B \text{ thuộc } d \text{ nên } \begin{cases} 3a + b = 1 \\ -2a + b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \end{cases}.$$

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình $y = -x + 4$.

Chọn đáp án **(D)** □

D

Câu 112. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x - 1| + |2x - 3|$.

- A. $\min y = -1$. B. $\min y = 5$. C. $\min y = \frac{1}{2}$. D. $\min y = -10$.

Lời giải.

$$1/ \text{ Xét } x \geq \frac{3}{2} \text{ ta có } y = x - 1 + 2x - 3 = 3x - 4 \geq \frac{1}{2} \left(\text{do } x \geq \frac{3}{2} \right).$$

$$2/ \text{ Xét } x \leq 1 \text{ ta có } y = 1 - x - 2x + 3 = -3x + 4 \geq 1 \left(\text{do } x \leq 1 \right).$$

$$3/ \text{ Xét } 1 < x < \frac{3}{2} \text{ ta có } y = x - 1 + 3 - 2x = -x + 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < y < 1 \left(\text{do } 1 < x < \frac{3}{2} \right).$$

$$\text{Vậy } \min y = \frac{1}{2} \text{ khi } x = \frac{3}{2}.$$

Chọn đáp án **(C)** □

C

Câu 113. Cho $x, y, z \in [0; 2]$. Tìm giá trị lớn nhất của $T = 2(x + y + z) - (xy + yz + zx)$.

- A. $T = 3$. B. $T = 0$. C. $T = 4$. D. $T = 2$.

Lời giải.

Ta có $T = f(x) = (2 - y - z)x + 2(y + z) - yz$.

Nếu $y + z = 2$ thì $f(x) = 4 - yz \leq 4$ do $-yz \leq 0$.

Nếu $y + z \neq 2$ thì $f(x)$ là hàm số bậc nhất.

Ta có $f(0) = -(2 - y)(2 - z) + 4 \leq 4$ và $f(2) = -yz + 4 \leq 4$.

Vậy $\max T = 4$ khi $x = 0, y = z = 2$ hoặc $x = 2, y = z = 0$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 114. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(-1; 1)$ và $B(-2; 3)$. Điểm $M\left(0; \frac{m}{n}\right)$ (với $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản, $n > 0$) nằm trên trục tung thỏa mãn tổng khoảng cách từ M tới hai điểm A và B là nhỏ nhất. Tính $S = m + 2n$.

A. $S = 1$.

B. $S = 11$.

C. $S = 4$.

D. $S = 3$.

Lời giải.

Ta có A, B nằm cùng phía so với Oy . Lấy điểm $B'(2; 3)$ đối xứng với điểm B qua Oy .

Ta có: $MA + MB = MA + MB'$. Do đó, để $MA + MB$ nhỏ nhất thì 3 điểm M, A, B' thẳng hàng.

Phương trình đường thẳng đi qua A và B' là: $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$.

Đường thẳng AB' cắt trục tung tại điểm $M\left(0; \frac{5}{3}\right) \Leftrightarrow m = 5; n = 3 \Leftrightarrow m + 2n = 11$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 115. Cho a, b, c là các số thực thuộc đoạn $[0; 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = a(1 - b) + b(1 - c) + c(1 - a).$$

A. $\frac{5}{4}$.

B. 1.

C. $\frac{5}{6}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Biểu thức P được viết lại dưới dạng

$$P = (1 - b - c)a + b + c - bc$$

Xét hàm số

$$f(x) = (1 - b - c)x + b + c - bc$$

với $x \in [0; 1]$.

Do $f(x)$ là hàm số bậc nhất trên đoạn $[0; 1]$ nên ta có

$$f(x) \leq \max\{f(0), f(1)\}, \forall x \in [0; 1].$$

Lại có

$$f(0) = b + c - bc = -(1 - b)(1 - c) + 1 \leq 1, \forall b, c \in [0; 1]$$

và

$$f(1) = 1 - bc \leq 1, \forall b, c \in [0; 1].$$

Do đó

$$f(x) \leq 1, \forall x \in [0; 1] \Rightarrow f(a) \leq 1.$$

Đẳng thức xảy ra chẳng hạn tại $a = 1, b = 0, c \in [0; 1]$.

Vậy $\max P = 1$.

Chọn đáp án **(B)**

□

B

Câu 116. Cho bất phương trình $mx + 4 > 0$ đúng với $|x| < 8$ khi m thuộc đoạn $[a, b]$. Tính $a + b$?

A. 0.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. 3.

Lời giải.

Yêu cầu bài toán tương đương với $f(x) = mx + 4 > 0, \forall x \in (-8; 8) \Leftrightarrow$ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(-8; 8)$ nằm phía trên trục hoành $\Leftrightarrow$ hai đầu mút của đoạn thẳng đó đều nằm phía trên trục hoành. Ta có

$$\begin{cases} f(-8) \geq 0 \\ f(8) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8m + 4 \geq 0 \\ 8m + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{2} \\ m \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}.$$

Khi đó $a + b = 0$.

Chọn đáp án **(A)**

□

A

Câu 117. Tìm số giá trị nguyên của $m \in [-2018; 2018]$ để phương trình $|x + 2| + m|x - 1| = 3$ có nghiệm duy nhất.

A. 2017.

B. 2018.

C. 4034.

D. 4036.

Lời giải.

TH 1: Với $m < -1$ ta có bảng biến thiên:

Khi đó phương trình $f(x) = 3$ luôn có nghiệm duy nhất $x = 1$ với mọi $m < -1$.

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$3m$	3	$-\infty$

TH 2: Với $-1 < m < 1$ ta có bảng biến thiên:

Khi đó phương trình $f(x) = 3$ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $3m = 3 \Leftrightarrow m = 1$ (không thỏa mãn).

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$3m$	3	$+\infty$

TH 3: Với $m > 1$ ta có bảng biến thiên:

Khi đó phương trình $f(x) = 3$ luôn có nghiệm duy nhất $x = 1$ với mọi $m > 1$.

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$3m$	3	$+\infty$

TH4: Với $m = -1$ ta có $f(x) = 3$ với mọi $x \geq 1$ không thỏa mãn điều kiện có nghiệm duy nhất.

TH5: Với $m = 1$ ta có $f(x) = 3$ với mọi $x \in [-2; 1)$ không thỏa mãn điều kiện có nghiệm duy nhất.

Vậy với $m < -1$ hoặc $m > 1$ thì phương trình $f(x) = 3$ có nghiệm duy nhất.

Lại do $m \in [-2018; 2018]$ và $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2018; -2017; \dots; -2; 2; \dots; 2017; 2018\}$

Vậy có 4034 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **C**

□

C

Câu 118. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = 3$. B. $y = \frac{2}{x} + 4$. C. $y = -x + 5$. D. $y = \frac{1}{2}x + 3$.

Lời giải.

- $y = 3$ là hàm hằng.
- $y = \frac{2}{x} + 4$ là hàm nghịch biến trên từng khoảng xác định do
 - +) Với mọi $x_1 < x_2 \in (0; +\infty)$ ta có $f(x_1) - f(x_2) = \frac{2}{x_1} - \frac{2}{x_2} = \frac{2(x_2 - x_1)}{x_1 x_2} > 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, từ đó suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
 - +) Với mọi $x_1 < x_2 \in (-\infty; 0)$ ta có $f(x_1) - f(x_2) = \frac{2}{x_1} - \frac{2}{x_2} = \frac{2(x_2 - x_1)}{x_1 x_2} > 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, từ đó suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- $y = -x + 5$ là hàm nghịch biến do hệ số $a = -1 < 0$.
- $y = \frac{1}{2}x + 3$ là hàm đồng biến do hệ số $a = \frac{1}{2} > 0$.

Chọn đáp án **D**

□

D

Câu 119. Cho hàm số $y = 2x + 1$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Tập xác định của hàm số trên là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. B. Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
C. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$. D. Đồ thị hàm số trên đi qua điểm $(0; 1)$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = 2x + 1$.

- +) Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- +) Do $a = 2 > 0$, nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- +) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; 1)$ do $1 = 2 \cdot 0 + 1$.

Chọn đáp án **B**

□

B

Câu 120. Hàm số $y = (m - 1)x + m - 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi

- A. $m = 1$. B. $m > 1$. C. $m < 1$. D. $m \neq 1$.

Lời giải.

Hàm số $y = (m - 1)x + m - 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$.

Chọn đáp án **C**

□

C

Câu 121. Hệ số góc của đồ thị hàm số $y = 2x - 1$ là

- A. -1 . B. 1 . C. 2 . D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = 2x - 1$ có hệ số góc là 2.

Chọn đáp án **C**

□

C

Câu 122. Hàm số $y = (-2 + m)x + 3m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi

A. $m = 2$.

B. $m < 2$.

C. $m > 2$.

D. $m > -2$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = (-2 + m)x + 3m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $(-2 + m) > 0 \Leftrightarrow m > 2$.

Chọn đáp án **C**

□

C

Câu 123. Hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$) nghịch biến nếu

A. $b < 0$.

B. $a < 0$.

C. $b > 0$.

D. $a > 0$.

Lời giải.

Hàm số $y = ax + b$ nghịch biến khi và chỉ khi $a < 0$.

Chọn đáp án **B**

□

B

Câu 124. Với những giá trị nào của m thì hàm số $f(x) = (m + 1)x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $m = 0$.

B. $m = 1$.

C. $m < 0$.

D. $m > -1$.

Lời giải.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

Chọn đáp án **D**

□

D

Câu 125. Hàm số $y = (1 - 2m)x + 3$ nghịch biến khi

A. $m > \frac{1}{2}$.

B. $m > 2$.

C. $m < \frac{1}{2}$.

D. $m > -\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $1 - 2m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **A**

□

A

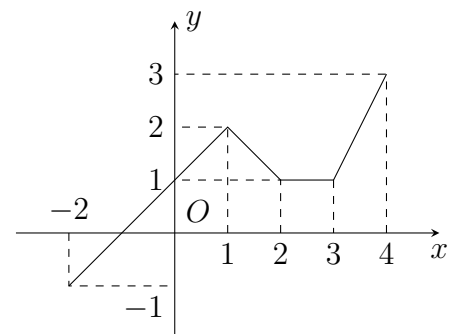
Câu 126. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-2; 4]$ như hình vẽ. Xét trên đoạn $[-2; 4]$, mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2, 2)$ và $(3, 4)$.

B. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất là -2 .

C. Hàm số đạt giá trị lớn nhất là 3 .

D. Chỉ có hai giá trị của x thoả mãn $f(x) = 1$.



Lời giải.

Trên đoạn $[-2; 4]$ của đồ thị, tồn tại điểm $M(4; 3)$ có tung độ cao nhất. Do đó giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 4]$ là 3 .

Chọn đáp án **C**

□

C

Câu 127. Khẳng định nào sau đây về hàm số $y = x - 2$ là khẳng định **sai**?

- A. Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2.
- B. Hàm số nghịch biến trên tập $\mathbb{R}$.
- C. Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$.
- D. Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2 .

Lời giải.

Hàm số $y = x - 2$ có

- Tập xác định là $\mathbb{R}$.
- Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2.
- Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2 .

Chọn đáp án **B**

□

B

Câu 128. Cho hàm số $y = (m + 2)x + \sqrt{2 - m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Lời giải.

Điều kiện cần và đủ để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ là $\begin{cases} 2 - m \geq 0 \\ m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq 2$.

Vậy các giá trị nguyên của m thỏa đề bài là $m \in \{-1; 0; 1; 2\}$.

Chọn đáp án **C**

□

C

Câu 129. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = (3 - m)x + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m > 0$. B. $m = 3$. C. $m > 3$. D. $m < 3$.

Lời giải.

Hàm số $y = (3 - m)x + 2$ có dạng hàm số bậc nhất.

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $3 - m < 0 \Leftrightarrow m > 3$.

Chọn đáp án **C**

□

C

Câu 130. Tìm m để hàm số $y = (-2m + 1)x + m - 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m < \frac{1}{2}$. B. $m > \frac{1}{2}$. C. $m < 3$. D. $m > 3$.

Lời giải.

Khi $-2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{5}{2} < 0$ nên nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Vậy hàm số $y = (-2m + 1)x + m - 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $-2m + 1 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **A**

□

A

Câu 131. Tìm điều kiện của tham số m để hàm số $y = (3m + 4)x + 5m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

- A. $m < -\frac{4}{3}$. B. $m > -\frac{4}{3}$. C. $m \neq -\frac{4}{3}$. D. $m = -\frac{4}{3}$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = (3m + 4)x + 5m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $3m + 4 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{4}{3}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

B

Câu 132. Cho hàm số $f(x) = (m - 2)x + 1$. Với giá trị nào của m thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$?; nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A. Với $m \neq 2$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$; $m > 2$ thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
 B. Với $m \neq 2$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$; $m < 2$ thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
 C. Với $m < 2$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$; $m = 2$ thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
 D. Với $m > 2$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$; $m < 2$ thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số $f(x) = (m - 2)x + 1$ đồng biến khi $m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > 2$.

Hàm số $f(x) = (m - 2)x + 1$ nghịch biến khi $m - 2 < 0 \Leftrightarrow m < 2$.

Chọn đáp án **(D)**

□

D

Câu 133. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = (2m + 3)x + m + 3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m \leq -\frac{3}{2}$. B. $m \geq -\frac{3}{2}$. C. $m > -\frac{3}{2}$. D. $m < -\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Hàm số $y = (2m + 3)x + m + 3$ có dạng hàm số bậc nhất.

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow 2m + 3 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{3}{2}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

D

Câu 134. Hàm số $y = (m - 1)x - \sqrt{2 - m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ khi

- A. $1 < m \leq 2$. B. $m \leq 2$. C. $m < 1$. D. $m > 1$.

Lời giải.

Hàm số $y = (m - 1)x - \sqrt{2 - m}$ có dạng hàm số bậc nhất.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 > 0 \\ 2 - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m \leq 2$.

Chọn đáp án **(A)**

□

A

Câu 135. Hàm số $f(x) = ax - \sqrt{1 - a}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

- A. $0 < a < 1$. B. $a < 1$. C. $0 < a \leq 1$. D. $a > 0$.

Lời giải.

Hàm số $f(x) = ax - \sqrt{1 - a}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} a > 0 \\ 1 - a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a \leq 1$.

Chọn đáp án **(C)**

□

C

Câu 136. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = (m - 2)x + 2m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m \leq 2$. B. $m > 2$. C. $m \geq 2$. D. $m < 2$.

Lời giải.

Hàm số $y = (m - 2)x + 2m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > 2$.

Chọn đáp án (B)

□

B

Câu 137. Tìm m để hàm số $y = (3 - m)x + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m > 0$. B. $m = 3$. C. $m > 3$. D. $m < 3$.

Lời giải.

Hàm số $y = (3 - m)x + 2$ có dạng hàm số bậc nhất.

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $3 - m < 0 \Leftrightarrow m > 3$.

Chọn đáp án (C)

□

C

Câu 138. Cho hàm số $f(x) = (\sqrt{7} - m)x + 3$. Có bao nhiêu số tự nhiên m để $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. 2. B. 4. C. 3. D. vô số.

Lời giải.

Để hàm số $f(x) = (\sqrt{7} - m)x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $\sqrt{7} - m > 0 \Leftrightarrow m < \sqrt{7}$

Vậy $m \in \{0; 1; 2\}$.

Chọn đáp án (C)

□

C

Câu 139. Hàm số nào sau đây **không phải** là hàm số bậc nhất?

- A. $y = 1 - x$. B. $y = \frac{x}{2}$. C. $y = \frac{2}{x}$. D. $y = x + 2$.

Lời giải.

- Các hàm số bậc nhất là $y = 1 - x$, $y = \frac{x}{2}$, $y = x + 2$.
- Hàm số hữu tỷ là $y = \frac{2}{x}$.

Chọn đáp án (C)

□

C

Câu 140. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc nhất?

- A. $y = \frac{1}{x+2}$. B. $y = \sqrt{7}x + 1$. C. $y = \frac{mx+1}{x}$. D. $y = \sqrt{2x+m+1}$.

Lời giải.

- $y = \frac{1}{x+2}$ và $y = \frac{mx+1}{x}$ là hàm số hữu tỷ.
- $y = \sqrt{7}x + 1$ là hàm số bậc nhất.
- $y = \sqrt{2x+m+1}$ là hàm số vô tỷ.

Chọn đáp án (B)

□

B

Câu 141. Hàm số $y = (m - 1)x + 2m + 2$ là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi

- A. $m = 1$. B. $m > 1$. C. $m < 1$. D. $m \neq 1$.

Lời giải.

Hàm số $y = (m - 1)x + 2m + 2$ là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.

Chọn đáp án **(D)**

□

D

Câu 142. Điểm nào sau đây thuộc đồ thị của hàm số bậc nhất có hệ số góc bằng 2 và đi qua gốc tọa độ?

- A. $M(1; 2)$. B. $N(0; 2)$. C. $P(2; 0)$. D. $Q(0; 2)$.

Lời giải.

d đi qua gốc tọa độ và có hệ số góc bằng 2 nên (d) có phương trình

$$d: y = 2x.$$

Thay tọa độ $M(1; 2)$ vào phương trình thỏa mãn nên $M(1; 2) \in d$.

Chọn đáp án **(A)**

□

A

Câu 143. Đồ thị của hàm số nào sau đây đối xứng với đồ thị hàm số $y = -4x + 4$ qua trục tung?

- A. $y = 4x + 4$. B. $y = \frac{1}{4}x + 4$. C. $y = x + 3$. D. $y = 2x + 2$.

Lời giải.

$d: y = -4x + 4$ cắt Ox, Oy lần lượt tại điểm $(1; 0)$ và $(0; 4)$.

Đường thẳng Δ đối xứng với d qua Oy thì Δ qua $(-1; 0)$ và $(0; 4)$ suy ra phương trình đường thẳng

$$\Delta: y = 4x + 4.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

A

Câu 144. Tìm tập hợp S tất cả các giá trị của m để hàm số $y = mx + \sqrt{1 + m}$ là hàm số bậc nhất.

- A. $S = (-\infty; -1)$. B. $S = (-1; +\infty)$.
C. $S = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. D. $S = [-1; +\infty) \setminus \{0\}$.

Lời giải.

Hàm số $y = mx + \sqrt{1 + m}$ là hàm bậc nhất khi $\begin{cases} m \neq 0 \\ 1 + m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -1 \end{cases}$.

Suy ra $S = [-1; +\infty) \setminus \{0\}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

D

Câu 145. Xác định hàm số $y = ax + b$, biết đồ thị của nó qua hai điểm $M(2; -1)$ và $N(1; 3)$.

- A. $y = -4x + 7$. B. $y = -3x + 5$. C. $y = 3x + 7$. D. $y = 4x - 9$.

Lời giải.

Do đồ thị hàm số đi qua hai điểm $M(2; -1)$ và $N(1; 3)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2a + b = -1 \\ a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 7 \end{cases}$$

Vậy hàm số đã cho có phương trình là $y = -4x + 7$.

Chọn đáp án **(A)**

□

A

Câu 146. Đường thẳng d đi qua hai điểm $M(-2; 2)$ và $N(4; -1)$ có phương trình là

- A. $y = 3x + 2$. B. $y = x - 1$. C. $y = -\frac{1}{2}x + 1$. D. $y = 2x + 1$.

Lời giải.

Giả sử đường thẳng có phương trình $d: y = ax + b$ với $a \neq 0$.

$$\text{Vì } d \text{ đi qua } M \text{ và } N \text{ nên ta có hệ } \begin{cases} -2a + b = 2 \\ 4a + 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases}$$

Khi đó đường thẳng d có phương trình $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

Chọn đáp án **(C)**

□

C

Câu 147. Giá trị của a và b để đường thẳng $y = ax + b$ đi qua $A(1; 3)$ và $B(-2; 9)$ là

- A. $a = 1; b = 2$. B. $a = 2; b = -5$. C. $a = -2; b = 5$. D. $a = -3; b = 3$.

Lời giải.

Vì đường thẳng $y = ax + b$ đi qua $A(1; 3)$ và $B(-2; 9)$ nên có hệ phương trình

$$\begin{cases} 3 = a + b \\ 9 = -2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = -6 \\ b = 3 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 5 \end{cases}$$

Vậy $y = -2x + 5$.

Chọn đáp án **(C)**

□

C

Câu 148. Tìm phương trình đường thẳng d song song với đường thẳng $y = 3x - 2$ và đi qua điểm $M(2; 3)$.

- A. $d: y = -3x - 3$. B. $d: y = 3x - 3$. C. $d: y = -\frac{1}{3}x - 3$. D. $d: y = 3x + 3$.

Lời giải.

Đường thẳng d song song với đường thẳng $y = 3x - 2$ có dạng

$$d: y = 3x + b \quad (b \neq -2).$$

Vì d đi qua điểm $M(2; 3)$ nên ta có phương trình

$$3 = 3 \cdot 2 + b \Leftrightarrow b = -3 \text{ (nhận).}$$

Vậy $d: y = 3x - 3$.

Chọn đáp án **(B)**

□

B

Câu 149. Xác định các hệ số a, b để đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua điểm $A(1; 5)$ và điểm $B(-2; -1)$.

- A. $a = -2, b = 3$. B. $a = 2, b = 3$. C. $a = -2, b = -3$. D. $a = 3, b = 2$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua điểm $A(1; 5)$ và điểm $B(-2; -1)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ -2a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3. \end{cases}$$

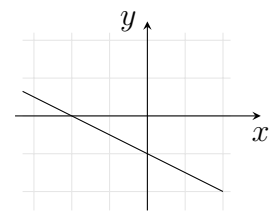
Chọn đáp án **(B)**

□

B

Câu 150.

Cho hàm số $y = ax + b$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?



- A. $a < 0, b < 0$. B. $a > 0, b > 0$.
C. $a < 0, b > 0$. D. $a > 0, b < 0$.

Lời giải.

- Đường thẳng đi xuống từ trái sang phải nên $a < 0$;
- Đường thẳng cắt trục tung tại tung độ âm nên $b < 0$.

Vậy $a < 0, b < 0$.

Chọn đáp án **(A)**

□

A

Câu 151. Đường thẳng $y = ax + b$ có hệ số góc bằng 2 và đi qua điểm $A(-3; 1)$ là

- A. $y = -2x + 1$. B. $y = 2x + 7$. C. $y = 2x + 5$. D. $y = -2x - 5$.

Lời giải.

Hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$ là a nên $a = 2$, suy ra phương trình của đường thẳng có dạng $y = 2x + b$.

Mặt khác đường thẳng này đi qua điểm $A(-3; 1)$ nên $1 = -6 + b$ hay $b = 7$.

Vậy phương trình của đường thẳng cần tìm là $y = 2x + 7$.

Chọn đáp án **(B)**

□

B

Câu 152. Một hàm số bậc nhất $y = f(x)$ có $f(-1) = 2$ và $f(2) = -3$. Hàm số đó là

- A. $y = -2x + 3$. B. $f(x) = \frac{-5x + 1}{3}$. C. $y = 2x - 3$. D. $f(x) = \frac{-5x - 1}{3}$.

Lời giải.

Hàm số đã cho có dạng $y = f(x) = ax + b$.

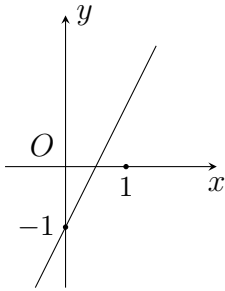
$$\text{Ta có } \begin{cases} f(-1) = 2 \\ f(2) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot (-1) + b = 2 \\ a \cdot 2 + b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{5}{3} \\ b = \frac{1}{3} \end{cases}. \text{ Vậy } f(x) = \frac{-5x + 1}{3}.$$

Chọn đáp án **(B)**

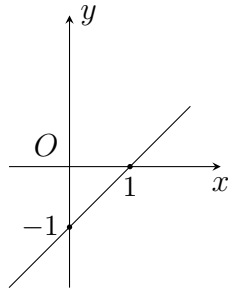
□

B

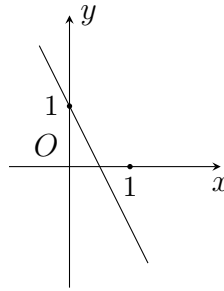
Câu 153. Hàm số $y = 2x - 1$ có đồ thị là hình nào trong các hình sau?



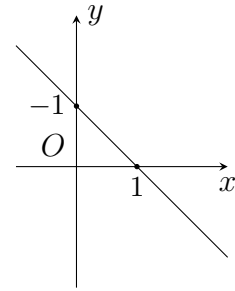
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

A. Hình 2.

B. Hình 4.

C. Hình 3.

D. Hình 1.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = 2x - 1$ đi qua hai điểm có tọa độ $(0; -1)$ và $(\frac{1}{2}; 0)$.

Do đó chỉ có hình 1 thỏa mãn.

Chọn đáp án **(D)**

D

□

Câu 154. Đường thẳng $y = ax + b$ có hệ số góc bằng 2 và đi qua điểm $A(-3; 1)$ là

A. $y = -2x + 1$.B. $y = 2x + 7$.C. $y = 2x + 5$.D. $y = -2x - 5$.

Lời giải.

Đường thẳng có hệ số góc bằng 2 $\Leftrightarrow a = 2 \Rightarrow y = 2x + b$ và đi qua điểm $A(-3; 1)$.

Nên $1 = 2 \cdot (-3) + b \Leftrightarrow b = 7$. Vậy hàm số cần tìm là $y = 2x + 7$.

Chọn đáp án **(B)**

B

□

Câu 155. Đồ thị hàm số $y = 3x + 2$ cắt trục tung tại điểm

A. $(-\frac{2}{3}; 0)$.B. $(0; 3)$.C. $(0; 2)$.D. $(0; -\frac{2}{3})$.

Lời giải.

Cho $x = 0$ suy ra $y = 3 \cdot 0 + 2 = 2$, từ đó suy ra đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0; 2)$.

Chọn đáp án **(C)**

C

□

Câu 156. Đồ thị hàm số $y = -x + 4$ cắt trục hoành tại điểm

A. $(-4; 0)$.B. $(0; 4)$.C. $(4; 0)$.D. $(0; -4)$.

Lời giải.

Cho $y = 0$ suy ra $0 = -x + 4 \Leftrightarrow x = 4$, từ đó suy ra đồ thị cắt trục hoành tại điểm $(4; 0)$.

Chọn đáp án **(C)**

C

□

Câu 157. Đường thẳng $(d) : y = 2x + 1$ vuông góc với đường thẳng

A. $y = -2x + 9$.B. $y = -\frac{1}{2}x + 3$.C. $y = \frac{1}{2}x + 4$.D. $y = 2x - 4$.

Lời giải.

Giả sử đường thẳng $y = ax + b$ vuông góc với đường thẳng $y = 2x + 1$, suy ra $2a = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$.

Vậy đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x + 3$ vuông góc với đường thẳng $y = 2x + 1$.

Chọn đáp án (B)

□

B

Câu 158. Tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = 2x - 1$ và $y = 3x + 2$ là

- A. $(-3; 7)$. B. $(3; 11)$. C. $(3; 5)$. D. $(-3; -7)$.

Lời giải.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm $2x - 1 = 3x + 2 \Leftrightarrow x = -3$.

Từ đó suy ra $y = 2(-3) - 1 = -7$.

Vậy tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số đã cho là $(-3; -7)$.

Chọn đáp án (D)

□

D

Câu 159. Cho hai đường thẳng $d_1 : y = \frac{1}{2}x + 100$ và $d_2 : y = -2x + 100$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

- A. d_1 và d_2 trùng nhau. B. d_1 và d_2 cắt nhau nhưng không vuông góc.
C. d_1 và d_2 song song với nhau. D. d_1 và d_2 vuông góc với nhau.

Lời giải.

Ta có $a_1 \cdot a_2 = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1$, suy ra hai đường thẳng d_1 và d_2 vuông góc với nhau.

Chọn đáp án (D)

□

D

Câu 160. Cho bốn đường thẳng $d_1 : y = \sqrt{2}x + 1$, $d_2 : y = -\sqrt{2}x + 2$, $d_3 : y = \frac{2}{\sqrt{2}}x - 1$, $d_4 : y = 2x + 1$.

Cặp đường thẳng nào song song với nhau?

- A. d_1 và d_3 . B. d_3 và d_4 . C. d_1 và d_2 . D. d_2 và d_3 .

Lời giải.

Nhận thấy $\begin{cases} \sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \\ 1 \neq -1 \end{cases}$, suy ra $d_1 \parallel d_3$.

Chọn đáp án (A)

□

A

Câu 161. Giao điểm của hai đường thẳng $y = 3x - 1$ và $y = 5x - 2$ có tọa độ là

- A. $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. B. $(2; 5)$. C. $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right)$. D. $(-2; -5)$.

Lời giải.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm $3x - 1 = 5x - 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$.

Vậy tọa độ giao điểm là $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Chọn đáp án (A)

□

A

Câu 162. Cho hàm số $(I): y = ax + b$ với $a \neq 0$, đồ thị của hàm số (I) song song với đồ thị của hàm số $y = cx + b^2$ thì

- A. $\begin{cases} a = c \\ b \neq 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} a = c \\ b \neq 1 \end{cases}$. C. $a = c$. D. $\begin{cases} a = c \\ b \neq 0 \text{ và } b \neq 1 \end{cases}$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số (I) và (II) song song khi $\begin{cases} a = c \\ b \neq b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b \neq 0 \text{ và } b \neq 1 \end{cases}.$

Chọn đáp án **(D)**

□

D

Câu 163. Cho hàm số (I): $y = ax + b$ với $a \neq 0$, đồ thị của hàm số (I) vuông góc với đồ thị của hàm số $y = cx + b^2$ thì

- A. $\begin{cases} a \cdot c = -1 \\ b \neq 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} a \cdot c = -1 \\ b \neq 1 \end{cases}$. C. $a \cdot c = -1$. D. $\begin{cases} a \cdot c = -1 \\ b \neq 0 \text{ và } b \neq 1 \end{cases}$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số (I) và (II) vuông góc khi $a \cdot c = -1$.

Chọn đáp án **(C)**

□

C

Câu 164. Cho hai hàm số $y = 2x + 2$ và $y = \frac{1}{2}x + 3$. Đồ thị của hai hàm số này sẽ

- A. vuông góc nhau. B. song song nhau. C. trùng nhau. D. cắt nhau.

Lời giải.

Do $a = 2 \neq a' = \frac{1}{2}$ nên đồ thị hai hàm số này cắt nhau.

Chọn đáp án **(D)**

□

D

Câu 165. Trong các cặp hàm số sau đây, cặp hàm số nào có đồ thị là hai đường thẳng song song nhau

- A. $d_1 : y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - 2\sqrt{3}$ và $d_2 : y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{6 - 2\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$.
 B. $d_1 : y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 2\sqrt{3}$ và $d_2 : y = \frac{3}{\sqrt{3}}x + \frac{6 + 2\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$.
 C. $d_1 : y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 2\sqrt{3}$ và $d_2 : y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{6 + 2\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$.
 D. $d_1 : y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + 2\sqrt{3}$ và $d_2 : y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{6 + 2\sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$.

Lời giải.

Ta có $\frac{6 - 2\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = 4\sqrt{3} - 6 \neq -2\sqrt{3}$ và $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ nên đường thẳng $d_1 : y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - 2\sqrt{3}$ song song với đường thẳng $d_2 : y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{6 - 2\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

A

Câu 166. Cho hai đường thẳng $d_1 : y = -x + 1000$ và $d_2 : y = -\frac{1}{2}x - 10$. Khẳng định nào là khẳng định **đúng**?

- A. d_1 song song d_2 . B. d_1 trùng với d_2 .
 C. d_1 cắt nhưng không vuông góc với d_2 . D. d_1 vuông góc với d_2 .

Lời giải.

Ta có $-1 \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow d_1$ cắt d_2 . Mặt khác, ta có $-1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \neq -1 \Rightarrow d_1$ không vuông góc d_2 .

Vậy d_1 cắt nhưng không vuông góc với d_2 .

Chọn đáp án **(C)**

□

C

Câu 167. Cho hai đường thẳng $d_1: y = -3x + 6$ và $d_2: y = 2x + 1$. Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 là

A. (2; 5).

B. (1; 3).

C. (-1; 9).

D. (0; 6).

Lời giải.

Hoành độ giao điểm của d_1 và d_2 là nghiệm của phương trình $-3x + 6 = 2x + 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Khi đó thay vào d_1 ta được $y = -3 \cdot 1 + 6 = 3$.

Vậy giao điểm của d_1 và d_2 có tọa độ (1; 3)

Chọn đáp án **(B)**

□

B

Câu 168. Biết đường thẳng đi qua hai điểm $A(1; -2)$, $B(2; -1)$ cắt trục tung tại điểm M . Tìm tung độ của điểm M .

A. $y_M = \frac{-31}{2}$.B. $y_M = 3$.C. $y_M = 0$.D. $y_M = -3$.**Lời giải.**

Gọi đường thẳng đi qua hai điểm A, B là $d: y = ax + b$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a + b = -2 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3. \end{cases}$$

Suy ra $d: y = x - 3$. Vì $d \cap Oy = M$ nên $x_M = 0 \Rightarrow y_M = -3$.

Chọn đáp án **(D)**

□

D

Câu 169. Biết ba đường thẳng $d_1: y = 2x - 1$, $d_2: y = 8 - x$, $d_3: y = (3 - 2m)x + 2$ đồng quy. Giá trị của m bằng

A. $m = -\frac{3}{2}$.B. $m = 1$.C. $m = -1$.D. $m = \frac{1}{2}$.**Lời giải.**

Gọi M là giao điểm của d_1 và d_2 .

$$\text{Xét hệ: } \begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 8 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y = -1 \\ x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow M(3; 5).$$

$M \in d_3$ nên ta có: $5 = (3 - 2m) \cdot 3 + 2 \Leftrightarrow 5 = 9 - 6m + 2 \Leftrightarrow 6m = 6 \Leftrightarrow m = 1$.

Chọn đáp án **(B)**

□

B

Câu 170. Đường thẳng đi qua điểm $M(2; -1)$ và vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + 5$ có phương trình là

A. $y = 3x - 7$.B. $y = 3x + 5$.C. $y = -3x - 7$.D. $y = -3x + 5$.

Lời giải.

Gọi d là đường thẳng cần tìm. Do d vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + 5$ nên $d: y = 3x + m$.

Do d đi qua điểm $M(2; -1)$ nên $-1 = 3 \cdot 2 + m \Leftrightarrow m = -7$.

Vậy $d: y = 3x - 7$.

Chọn đáp án **(A)** □

A

Câu 171. Điểm A có hoành độ $x_A = 1$ và thuộc đồ thị hàm số $y = mx + 2m - 3$. Tìm m để điểm A nằm trong nửa mặt phẳng tọa độ phía trên trục hoành (không chứa trục hoành).

A. $m > 0$.

B. $m \geq 0$.

C. $m > 1$.

D. $m < 0$.

Lời giải.

Từ giả thiết điểm A nằm trong nửa mặt phẳng tọa độ phía trên trục hoành (không chứa trục hoành) nên $y_A > 0$ ta có $y_A = mx + 2m - 3 = m \cdot 1 + 2m - 3 = 3m - 3 > 0 \Leftrightarrow m > 1$.

Chọn đáp án **(C)** □

C

Câu 172. Cho hai đường thẳng $(d_1): y = \frac{1}{2}x + 100$ và $(d_2): y = -\frac{1}{2}x + 100$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. (d_1) và (d_2) trùng nhau.

B. (d_1) và (d_2) vuông góc nhau.

C. (d_1) và (d_2) cắt nhau.

D. (d_1) và (d_2) song song với nhau.

Lời giải.

Cách 1: Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của (d_1) và (d_2) .

Vì $k_1 = \frac{1}{2}$ và $k_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow k_1 \cdot k_2 = -\frac{1}{4}$ nên (d_1) và (d_2) không vuông góc nhau.

$$\text{Xét hệ: } \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 100 \\ y = -\frac{1}{2}x + 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}x + y = 100 \\ \frac{1}{2}x + y = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 100. \end{cases}$$

Vậy (d_1) và (d_2) cắt nhau.

Cách 2: Ta thấy $\frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2}$ nên (d_1) và (d_2) cắt nhau.

Chọn đáp án **(C)** □

C

Câu 173. Tìm các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = (m^2 - 3)x + 3m + 1$ song song với đường thẳng $y = x - 5$?

A. $m = \pm 2$.

B. $m = \pm\sqrt{2}$.

C. $m = -2$.

D. $m = 2$.

Lời giải.

Đường thẳng $y = (m^2 - 3)x + 3m + 1$ song song với đường thẳng $y = x - 5$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m^2 - 3 = 1 \\ 3m + 1 \neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 4 \\ 3m \neq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \text{ hoặc } m = 2 \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

Chọn đáp án **(D)** □

D

Câu 174. Cho hàm số $y = f(x) = (2m + 1)x - 3m - 2$. Gọi m_1 và m_2 lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của m làm cho $f(x) \leq 0, \forall x \in [-3; 4]$. Giá trị của $m_1^2 + m_2^2$ là

A. $\frac{949}{2025}$.

B. $\frac{661}{225}$.

C. $\frac{436}{2025}$.

D. $\frac{249}{225}$.

Lời giải.

$$\text{Có } f(x) \leq 0, \forall x \in [-3; 4] \Leftrightarrow \begin{cases} f(-3) \leq 0 \\ f(4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9m - 5 \leq 0 \\ 5m + 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{5}{9} \leq m \leq -\frac{2}{5}.$$

$$\text{Vậy } m_1^2 + m_2^2 = \frac{949}{2025}.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

A

Câu 175. Xác định hàm số $y = ax + b$, biết đồ thị hàm số song song với đường thẳng $(d): y = 2x + 4$ và tạo với 2 trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 4.

A. $y = 2x + 4$.

B. $y = 2x - 4$.

C. $y = x + 2$.

D. $y = -x + 2$.

Lời giải.+ Gọi đồ thị hàm số $y = ax + b$ là đường thẳng Δ .Vì $\Delta \parallel (d)$ nên $a = 2$ và $b \neq 4$.+ Phương trình $\Delta: y = 2x + b$ ($b \neq 4$).+ Δ cắt Ox tại $A\left(-\frac{b}{2}; 0\right)$ + Δ cắt Oy tại $B(0; b)$.+ Vì ΔOAB vuông tại O nên:

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB \Leftrightarrow \frac{1}{2}OA \cdot OB = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot |b| \cdot \left|\frac{b}{2}\right| = 4 \Leftrightarrow b^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} b = 4 \text{ (loại)} \\ b = -4 \end{cases}.$$

Vậy hàm số cần tìm là $y = 2x - 4$.Chọn đáp án **(B)**

□

B

Câu 176. Cho đường thẳng $(d): y = ax + b$ ($b > 0$). Xác định a và b biết (d) song song với đường thẳng $(\Delta): y = 3x + 5$ và cắt 2 trục tọa độ tại A và B sao cho $AB = 2\sqrt{10}$.

A. $\begin{cases} a = 3 \\ b = 6 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} a = 3 \\ b = -6 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} a = 2 \\ b = 6 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} a = 3 \\ b = 8 \end{cases}$.

Lời giải.Vì $(d) \parallel (\Delta)$ nên $a = 3$ và $b \neq 5$.+ Δ cắt Ox tại $A\left(-\frac{b}{3}; 0\right)$ + Δ cắt Oy tại $B(0; b)$

Ta có:

$$AB = 2\sqrt{10} \Leftrightarrow AB^2 = 40 \Leftrightarrow OA^2 + OB^2 = 40 \Leftrightarrow \frac{b^2}{9} + b^2 = 40 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 6 \\ b = -6 \end{cases} \text{ (loại)}.$$

Vậy $a = 3$ và $b = 6$.Chọn đáp án **(A)**

□

A

Câu 177. Cho hàm số bậc nhất $y = (m - 2)x + 4$ ($m \neq 2$). Tìm giá trị của m để đồ thị của hàm số tạo với tia Ox một góc 135° .

A. $m = 2$.

B. $m = 0$.

C. $m = 5$.

D. $m = 1$.

Lời giải.

Gọi a là hệ số góc của đường thẳng, α là góc tạo bởi đường thẳng và tia Ox , α' là góc kề bù với α . Theo đề bài $\alpha = 135^\circ$ nên $\alpha' = 45^\circ$. Ta có: $-a = \tan \alpha' = \tan 45^\circ = 1$ nên $a = -1$. Do đó: $m - 2 = -1 \Leftrightarrow m = 1$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 178. Trên đồ thị của hàm số $y = x - |x|$ lấy hai điểm A và B có hoành độ lần lượt là -2 và 1 . Phương trình đường thẳng AB là

A. $y = \frac{3x}{4} - \frac{3}{4}$.

B. $y = \frac{4x}{3} - \frac{4}{3}$.

C. $y = \frac{-3x}{4} + \frac{3}{4}$.

D. $y = -\frac{3x}{2} + \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $A(-2; -4)$, $B(1; 0)$.

Gọi phương trình đường thẳng AB có dạng $y = ax + b$.

$$\text{Do } AB \text{ đi qua } A \text{ và } B \text{ nên ta có } \begin{cases} -2a + b = -4 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{3} \\ b = -\frac{4}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } AB: y = \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 179. Cho họ đường thẳng $d_m: (m + 1)x - 2(m - 2)y + 3 = 0$ và các mệnh đề

I. d_m luôn đi qua hai điểm cố định.

II. $d_1 \parallel d_5$.

III. $d_1 \perp d_3$.

IV. d_5 là đường phân giác thứ nhất của hệ trục tọa độ Oxy .

Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề trên.

A. I.

B. I, III.

C. II, III.

D. I, II, III, IV.

Lời giải.

I. Gọi $(x_0; y_0)$ là điểm cố định của họ d_m . Ta có

$$m(x_0 - 2y_0) + (x_0 + 4y_0 + 3) = 0, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 2y_0 = 0 \\ x_0 + 4y_0 + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

II. $d_1: 2x + 2y + 3 = 0$ và $d_5: 6x - 6y + 3 = 0 \Rightarrow d_1$ không song song với d_5 .

III. $d_1: 2x + 2y + 3 = 0$ và $d_3: 4x - 2y + 3 = 0 \Rightarrow d_1$ cắt d_3 và không vuông góc.

IV. $d_5: 6x - 6y + 3 = 0 \Rightarrow d_5$ không phải là phân giác thứ nhất của hệ trục tọa độ Oxy .

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 180. Cho hai họ đường thẳng $d_m: mx - x + 2my - 3y - m - 1 = 0$ và $\Delta_m: 3mx + 6x + 3y + 2m - 1 = 0$. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

A. d_m luôn đi qua một điểm cố định.B. Δ_m luôn đi qua một điểm cố định.C. $\Delta_{\frac{3}{2}} \perp d_{\frac{3}{2}}$.D. $d_1 \perp Oy$.**Lời giải.**

- Gọi $(x_0; y_0)$ là điểm cố định của họ d_m . Ta có

$$m(x_0 + 2y_0 - 1) + (-x_0 - 3y_0 - 1) = 0, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 2y_0 - 1 = 0 \\ -x_0 - 3y_0 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 5 \\ y_0 = -2 \end{cases}$$

- Gọi $(x_0; y_0)$ là điểm cố định của họ Δ_m . Ta có

$$m(3x_0 + 2) + (6x_0 + 3y_0 - 1) = 0, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0 + 2 = 0 \\ 6x_0 + 3y_0 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{2}{3} \\ y_0 = \frac{5}{3} \end{cases}$$

- $d_{\frac{3}{2}}: \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} = 0, \Delta_{\frac{3}{2}}: \frac{21}{2}x + 3y + 2 = 0 \Rightarrow d_{\frac{3}{2}}$ cắt $\Delta_{\frac{3}{2}}$ và hai đường thẳng không vuông góc.
- $d_1: y + 2 = 0 \Rightarrow d_1 \perp Oy$.

Chọn đáp án **C**

□

C

Câu 181. Gọi $M(a; b)$ là điểm mà đồ thị hàm số $y = mx + 1 + x$ luôn đi qua dù m nhận bất kì giá trị thực nào. Khi đó a, b bằng bao nhiêu?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

Vì $M(a; b)$ là điểm mà đồ thị luôn đi qua với mọi giá trị thực của m nên

$$b = am + 1 + a, \forall m \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a \cdot m + (1 + a - b) = 0, \forall m \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 1 + a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **A**

□

A

Câu 182. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = mx + 4$ trên đoạn $[-1, 2]$ luôn nằm phía trên trục hoành?

A. 0.

B. 1.

C. 5.

D. 8.

Lời giải.

$$\text{Yêu cầu bài toán tương đương với } \begin{cases} y(-1) > 0 \\ y(2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m + 4 > 0 \\ 2m + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m > -2 \end{cases}.$$

Hơn nữa, do m nguyên nên có tất cả 5 giá trị của m .

Chọn đáp án **C**

□

C

Câu 183. Cho hàm số $y = 2x$ có đồ thị là đường thẳng d . Tịnh tiến d sang phải 2 đơn vị để được đường thẳng d' . Tính diện tích của tứ giác tạo bởi $d, d',$ trục Ox và đường thẳng $y = 4$.

A. 16.

B. 8.

C. 12.

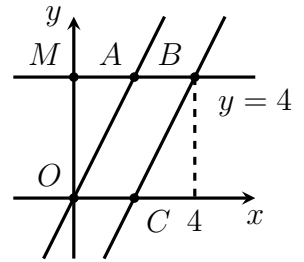
D. 4.

Lời giải.

Do tịnh tiến d sang phải 2 đơn vị nên $d' : y = 2(x - 2)$.

d' cắt Ox tại $C(2; 0)$ và d cắt đường thẳng $y = 4$ tại $A(2; 4)$.

Diện tích của tứ giác $OABC$ là $S_{OABC} = AC \cdot OC = 8$

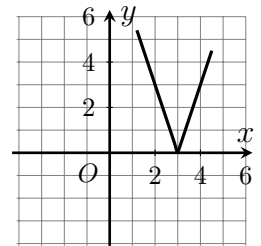


Chọn đáp án (B)

B

Câu 184.

Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên?



A. $y = |3x + 9|$.

B. $y = |3x - 9|$.

C. $y = \left| -\frac{x}{3} + 9 \right|$.

D. $y = |9x + 3|$.

Lời giải.

Nhận xét: đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = 3$ làm trục đối xứng và đi qua các điểm $(2; 3)$, $(4; 3)$, $(3; 0)$ nên khi ta tịnh tiến đồ thị hàm số song song với trục Ox sang trái 3 đơn vị thì ta sẽ được một hàm chẵn $f(x)$, đồng thời đồ thị hàm số $f(x)$ sẽ đi qua các điểm $(-1; 3)$, $(1; 3)$ và $(0; 0) \Rightarrow f(x) = 3|x|$. Do vậy, đồ thị hàm số ban đầu được suy ra bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $f(x) = 3|x|$ song song với trục Ox sang phải 3 đơn vị, ta được $f(x - 3) = 3|x - 3| = |3x - 9|$.

Chọn đáp án (B)

B

Câu 185. Xác định m để ba đường thẳng $(d_1): y = 2x - 1$; $(d_2): y = 8 - x$ và $(d_3): y = (3 - 2m)x + 2$ đồng quy.

A. $m = -1$.

B. $m = \frac{1}{2}$.

C. $m = 1$.

D. $m = -\frac{3}{2}$.

Lời giải.

+ Giao điểm của (d_1) và (d_2) là $A(3; 5)$

+ Vì (d_1) ; (d_2) ; (d_3) đồng quy nên $A \in d_3: (3 - 2m)3 + 2 = 5 \Leftrightarrow m = 1$.

Chọn đáp án (C)

C

Câu 186. Tìm m để ba đường thẳng $d_1: y = 2x - 1$, $d_2: y = 8 - x$, $d_3: y = (3 - 2m)x + 2$ đồng quy.

A. $m = 1$.

B. $m = -1$.

C. $m = \frac{1}{2}$.

D. $m = -\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của d_1 và d_2 là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 8 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$

Thay $x = 3$; $y = 5$ vào d_3 ta được $m = 1$.

Chọn đáp án (A)

A

Câu 187. Tìm m để đường thẳng $d_m: y = (2 - m)x + 1$ cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A, B phân biệt sao cho tam giác OAB có diện tích bằng $\frac{1}{2}$.

- A. $m = 1, m = 3$. B. $m = -1, m = -3$. C. $m = 1, m = -3$. D. $m = -1, m = 3$.

Lời giải.

Điều kiện để d_m cắt các trục Ox, Oy tại hai điểm A, B phân biệt là $m \neq 2$.

Tọa độ $A\left(\frac{1}{m-2}; 0\right)$ và $B(0; 1) \Rightarrow OA = \frac{1}{|m-2|}$ và $OB = 1$.

Diện tích tam giác $OAB: \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \Rightarrow |m-2| = 1 \Rightarrow m = 1; m = 3$.

Chọn đáp án **(A)**

□

A

Câu 188. Đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua $A(2; 3)$ và chắn hai tia Ox, Oy tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ nhất. Khi đó $a.b$ bằng bao nhiêu?

- A. 6. B. -9. C. 10. D. 12.

Lời giải.

Vì $A(2; 3)$ thuộc đồ thị hàm số $y = ax + b$ nên $3 = 2a + b$ hay $b = 3 - 2a$.

Đồ thị hàm số cắt hai tia Ox, Oy lần lượt tại $A\left(-\frac{b}{a}; 0\right), B(0, b)$ trong đó $a < 0, b > 0$.

Suy ra $S_{OAB} = -\frac{b^2}{2a} = -\frac{(3-2a)^2}{2a} = \frac{9}{-2a} + (-2a) + 6 \geq 2\sqrt{\frac{9}{-2a} \cdot (-2a)} + 6 = 12$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\frac{9}{-2a} = -2a$.

Kết hợp với điều kiện $a < 0$ ta giải được $a = -\frac{3}{2}$ và từ đó được $b = 6$. Vậy $a.b = -9$.

Chọn đáp án **(B)**

□

B

Câu 189. Cho hàm số bậc nhất $y = ax + b$ với $a < 0$ có đồ thị là đường thẳng d . Biết rằng d đi qua điểm $M(2; -4)$ và cắt hai trục Ox, Oy lần lượt tại hai điểm phân biệt A và B sao cho $OA = 2OB$. Tính giá trị của tổng $a^2 + b^2$.

- A. $\frac{101}{4}$. B. $\frac{37}{4}$. C. $\frac{37}{4}$ hay 4. D. $\frac{101}{4}$ hay 4.

Lời giải.

Có $A\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$ và $B(0; b)$ nên $OA = 2OB \Leftrightarrow \left|-\frac{b}{a}\right| = 2|b| \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = \pm \frac{1}{2} \end{cases}$

Lại có M thuộc đồ thị nên $2a + b = -4$. Từ đó giải ra được $\begin{cases} a = -2; b = 0 \\ a = \frac{1}{2}; b = -5 \\ a = -\frac{1}{2}; b = -3 \end{cases}$

Ta nhận cặp số $a = -\frac{1}{2}; b = -3$ nên $a^2 + b^2 = \frac{37}{4}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

B

Câu 190. Nếu hai đường thẳng $d_1: y = x - 2$ và $d_2: y = 2x - m + 1$ cắt nhau tại một điểm trên trục Oy thì giá trị của m là

A. $m = -3$.

B. $m = 5$.

C. $m = 2$.

D. $m = 3$.

Lời giải.Ta có (d_1) cắt trục Oy tại điểm $M(0; -2)$. Khi đó điểm $M \in d_2 \Rightarrow -m + 1 = -2 \Rightarrow m = 3$.Chọn đáp án **(D)**

□

D

Câu 191. Đồ thị hàm số $y = x - 2m + 1$ tạo với hệ trục tọa độ Oxy tam giác có diện tích bằng $\frac{25}{2}$. Khi đó m bằng

A. $m = 2; m = 3$.

B. $m = 2; m = 4$.

C. $m = -2; m = 3$.

D. $m = -2$.

Lời giải.Gọi: A, B lần lượt là giao điểm của đồ thị hàm số $y = x - 2m + 1$ với trục hoành và trục tungSuy ra $A(2m - 1; 0); B(0; 1 - 2m)$.Theo giả thiết thì tam giác có diện tích bằng $\frac{25}{2}$ là tam giác OAB vuông tại O .

Do đó: $S_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{25}{2}$

$\Leftrightarrow OA \cdot OB = 25 \Leftrightarrow |2m - 1| \cdot |1 - 2m| = 25 \Leftrightarrow |2m - 1| \cdot |2m - 1| = 25$

$\Leftrightarrow (2m - 1)^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 1 = 5 \\ 2m - 1 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -2. \end{cases}$

Chọn đáp án **(A)**

□

A

Câu 192. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $x^2 - 4x + 6 + 3m = 0$ có nghiệm thuộc đoạn $[-1; 3]$.

A. $\frac{2}{3} \leq m \leq \frac{11}{3}$.

B. $-\frac{11}{3} \leq m \leq -\frac{2}{3}$.

C. $-1 \leq m < -\frac{2}{3}$.

D. $-\frac{11}{3} \leq m \leq -1$.

Lời giải.Ta có: $x^2 - 4x + 6 + 3m = 0 \Leftrightarrow 3m = -x^2 + 4x - 6$.Số nghiệm của phương trình $x^2 - 4x + 6 + 3m = 0$ là số nghiệm của đường thẳng $y = 3m$ và parabol $y = -x^2 + 4x - 6$.Bảng biến thiên của hàm số $y = -x^2 + 4x - 6$ trên đoạn $[-1; 3]$:

x	-1	2	3
y	-11	-2	-3

Phương trình có nghiệm thuộc đoạn $[-1; 3] \Leftrightarrow -11 \leq 3m \leq -2 \Leftrightarrow -\frac{11}{3} \leq m \leq -\frac{2}{3}$.Chọn đáp án **(B)**

□

B

Câu 193. Xác định m để phương trình $m = |x^2 - 6x - 7|$ có 4 nghiệm phân biệt.

A. $m \in (-16; 16)$.

B. $m \in (0; 16)$.

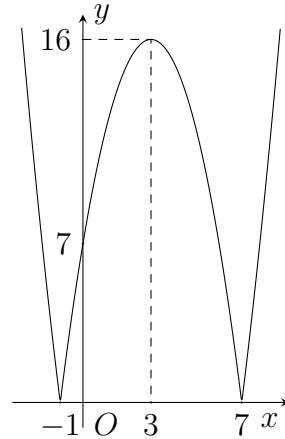
C. $m \in \emptyset$.

D. $m \in [0; 16]$.

Lời giải.

$m = |x^2 - 6x - 7|$ là phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = m$ và đồ thị $(C) : y = |x^2 - 6x - 7|$.

Vẽ $(P) : y = x^2 - 6x - 7$, lấy đối xứng phần phía dưới Ox của (P) lên trên Ox và xóa đi phần phía dưới Ox (vì $y = |x^2 - 6x - 7| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$), ta được đồ thị (C) .



Dựa vào đồ thị: phương trình $m = |x^2 - 6x - 7|$ có 4 nghiệm phân biệt khi $m \in (0; 16)$

Chọn đáp án **B**

□

B

Câu 194. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m sao cho parabol $(P) : y = x^2 - 4x + m$ cắt Ox tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn $OA = 3OB$. Tính tổng T các phần tử của S .

- A. $T = 3$. B. $T = -15$. C. $T = \frac{3}{2}$. D. $T = -9$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và Ox : $x^2 - 4x + m = 0$ (1)

Để P cắt Ox tại hai điểm phân biệt thì (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m > 0 \\ 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 4.$$

Giả sử $A(x_1; 0)$, $B(x_2; 0)$ và $x_1 + x_2 = 4$, $x_1 x_2 = m$.

$$\text{Ta có } OA = 3OB \Leftrightarrow |x_1| = 3|x_2| \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_2 \\ x_1 = -3x_2 \end{cases}.$$

$$\text{Trường hợp 1: } x_1 = 3x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow m = 3 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Trường hợp 2: } x_1 = -3x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow m = -12 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $S = -12 + 3 = -9$.

Chọn đáp án **D**

□

D

Câu 195. Cho hàm số $y = x^2 - 2x - 2$ có đồ thị P , và đường thẳng d có phương trình $y = x + m$. Tìm m để d cắt P tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $OA^2 + OB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $m = -\frac{5}{2}$. B. $m = \frac{5}{2}$. C. $m = 1$. D. $m = 2$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 2x - 2 = x + m \Leftrightarrow x^2 - 3x - 2 - m = 0$

d cắt P tại hai điểm phân biệt $A, B \Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 17 + 4m > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{17}{4}$.

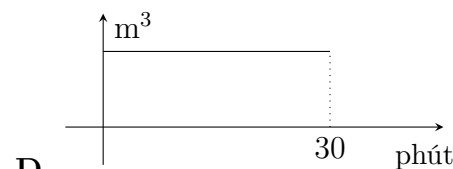
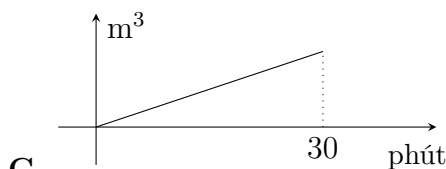
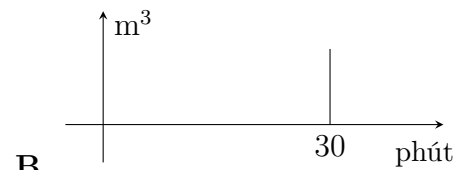
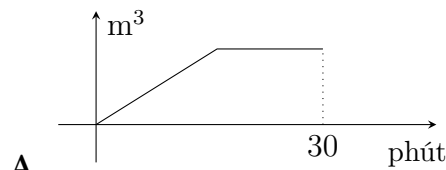
$A(x_1; x_1 + m) \Rightarrow \overrightarrow{OA} = (x_1; x_1 + m)$.

$B(x_2; x_2 + m) \Rightarrow \overrightarrow{OB} = (x_2; x_2 + m)$.

$$\begin{aligned} OA^2 + OB^2 &= x_1^2 + x_2^2 + (x_1 + m)^2 + (x_2 + m)^2 = 2(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 + 2m(x_1 + x_2) + 2m^2 \\ &= 18 - 4(2 - m) + 6m + 2m^2 = 2m^2 + 10m + 10 \\ &= 2\left(m + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{15}{2} \geq \frac{15}{2} \text{ với } m > -\frac{17}{4}. \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $OA^2 + OB^2$ là $\frac{15}{2}$ khi $m = -\frac{5}{2}$ □

Câu 196. Người ta bơm nước vào một cái bể hình lập phương có cạnh bằng 1 (m) với lưu lượng 1 lít/giây. Trong các hình vẽ sau, hình vẽ nào thể hiện sự thay đổi chiều cao cột nước trong bể theo thời gian trong khoảng thời gian 30 phút kể từ lúc bắt đầu bơm nước vào bể? (Giả sử lưu lượng nước bơm vào là như nhau tại mọi thời điểm trong khoảng thời gian nói trên và khi nước đầy bể thì bơm sẽ tự ngắt).



Lời giải.

Ta có thể tích của bể là $1 \text{ m}^3 = 1000$ lít.

Suy ra thời gian để nước đầy bể là $1000 \text{ giây} = \frac{50}{3} \text{ phút} < 30 \text{ phút}$. Do đó trong khoảng thời gian còn lại, chiều cao cột nước là không đổi.

Chọn đáp án **A** □

A

Câu 197. Với giá trị nào của m thì hàm số $y = (m - 2)x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $m < 2$. B. $m = 2$. C. $m \neq 2$. D. $m > 2$.

Lời giải.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > 2$.

Chọn đáp án **D** □

D

Câu 198. Hàm số $y = mx - \sqrt{2 - m}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi

- A. $0 < m < 2$. B. $m > 0$. C. $m \geq -1$. D. $0 < m \leq 2$.

Lời giải.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $\begin{cases} m > 0 \\ 2 - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 2.$

Chọn đáp án **(D)**

□

D

Câu 199. Cho hàm số bậc nhất $y = (\sqrt{2} - 1)x + 2$. Trong các khẳng định sau khẳng định nào sai?

- A. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.
 B. Giá trị của y khi $x = \sqrt{2} + 1$ bằng 3.
 C. Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
 D. Giá trị của x khi $y = \sqrt{2}$ bằng $-\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta thấy $\sqrt{2} - 1 > 0$ nên hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

C

Câu 200. Tìm các giá trị của m để hàm số $y = (1 - m^2)x + 2m - 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $-1 < m < \frac{3}{2}$.
 B. $m = -1$.
 C. $m = 1$.
 D. $-1 < m < 1$.

Lời giải.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $1 - m^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$

Chọn đáp án **(D)**

□

D

Câu 201. Cho hàm số $(I) : y = |x - 2|$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số (I) đồng biến trên $\mathbb{R}$.
 B. Hàm số (I) đồng biến trên $(0; +\infty)$.
 C. Hàm số (I) đồng biến trên $(2; +\infty)$.
 D. Hàm số (I) đồng biến trên $(-\infty; 2)$.

Lời giải.

Ta có hàm số $y = |x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{khi } x \geq 2 \\ -x + 2 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Do đó, hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$.

Chọn đáp án **(C)**

□

C

Câu 202. Đường thẳng đi qua điểm $A(1; 3)$ và song song với đường thẳng $(d) : y = x + 1$ có phương trình là

- A. $y = x - 2$.
 B. $y = -x - 2$.
 C. $y = -x + 2$.
 D. $y = x + 2$.

Lời giải.

Gọi đường thẳng cần viết là Δ .

Vì đường thẳng Δ song song với (d) nên phương trình đường thẳng Δ có dạng $y = x + m$.

Mặt khác Δ đi qua điểm $A(1; 3)$ nên $3 = 1 + m \Leftrightarrow m = 2$.

Vậy phương trình đường thẳng Δ cần tìm là $y = x + 2$.

Chọn đáp án **(D)**

□

D

Câu 203. Đường thẳng đi qua $M(-1; 4)$ và vuông góc với đường thẳng $(d) : y = -\frac{1}{2}x + 2$ có phương trình là

A. $y = 2x + 6$.

B. $y = -2x + 6$.

C. $y = 2x - 6$.

D. $y = -2x - 6$.

Lời giải.Gọi đường thẳng cần viết là Δ .Vì đường thẳng Δ vuông góc với (d) nên phương trình đường thẳng Δ có dạng $y = 2x + m$.Mặt khác Δ đi qua điểm $M(-1; 4)$ nên $4 = -2 + m \Leftrightarrow m = 6$.Vậy phương trình đường thẳng Δ cần tìm là $y = 2x + 6$.

Chọn đáp án (A)

□

A

Câu 204. Đồ thị hàm số đi qua $A(0; 1)$ và $B(1; 2)$ có phương trình là

A. $y = x + 1$.

B. $y = 3x - 1$.

C. $y = 3x + 2$.

D. $y = 3x + 1$.

Lời giải.Giả sử hàm số cần viết có phương trình là $y = ax + b$.Đồ thị hàm số đi qua $A(0; 1)$ nên $1 = 0 \cdot x + b \Rightarrow b = 1$.Đồ thị hàm số đi qua $B(1; 2)$ nên $2 = a \cdot 1 + b \Rightarrow a = 2 - 1 = 1$.Vậy hàm số cần tìm là $y = x + 1$.

Chọn đáp án (A)

□

A

Câu 205. Xác định đường thẳng $y = ax + b$, biết hệ số góc của đường thẳng bằng -2 và đường thẳng đi qua $A(-3; 1)$.

A. $y = -2x + 1$.

B. $y = 2x + 7$.

C. $y = 2x + 2$.

D. $y = -2x - 5$.

Lời giải.Hệ số góc của đường thẳng bằng -2 , nên phương trình đường thẳng là $y = -2x + m$.Đường thẳng đi qua $A(-3; 1)$ nên ta có $1 = 6 + m \Rightarrow m = -5$.Vậy phương trình đường thẳng là $y = -2x - 5$.

Chọn đáp án (D)

□

D

Câu 206. Tìm phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(2; 1)$ và song song với đường thẳng $y = 2x + 3$.

A. $y = 2x - 3$.

B. $y = -2x - 2$.

C. $y = 2x + 4$.

D. $y = 2x + 2$.

Lời giải.Do đường thẳng cần tìm song song với đường thẳng $y = 2x + 3$ nên có dạng $y = 2x + m$.Đường thẳng đi qua điểm $A(2; 1)$ nên ta có $1 = 4 + m \Rightarrow m = -3$.Vậy hàm số cần tìm là $y = 2x - 3$.

Chọn đáp án (A)

□

A

Câu 207. Cho điểm $M(1; 5)$ và đường thẳng $d: y = -3x + 1$. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.A. Đường thẳng qua M và song song với d có phương trình $y = -3x + 8$.B. Đường thẳng qua M và vuông góc với d có phương trình $y = \frac{1}{3}x + \frac{14}{3}$.

C. Đường thẳng qua M và song song với Oy có phương trình $y = 5$.

D. Tọa độ giao điểm của d với Ox là $\left(\frac{1}{3}; 0\right)$.

Lời giải.

Ta có điểm $M(1; 5)$ thuộc đường thẳng $y = -3x + 8$ nên mệnh đề "Đường thẳng qua M và song song với d có phương trình $y = -3x + 8$ " là đúng.

Ta có điểm $M(1; 5)$ thuộc đường thẳng $y = \frac{1}{3}x + \frac{14}{3}$ nên mệnh đề "Đường thẳng qua M và vuông góc với d có phương trình $y = \frac{1}{3}x + \frac{14}{3}$ " là đúng.

Đường thẳng đi qua điểm $M(1; 5)$ song song với trục Oy có phương trình $x = 1$. Do đó mệnh đề "Đường thẳng qua M và song song với Oy có phương trình $y = 5$ " là mệnh đề **sai**.

Chọn đáp án **C**

□

C

Câu 208. Cho đường thẳng $d: y = 2x + 1$. Tìm a, b để đường thẳng $y = ax + b$ song song với d và đi qua điểm $M(1; -3)$.

A. $a = -1, b = 2$.

B. $a = 2, b = -5$.

C. $a = -5, b = 2$.

D. $a = 2, b = -1$.

Lời giải.

Đường thẳng $y = ax + b$ song song với d nên có dạng $y = 2x + b$.

Đi qua điểm $M(1; -3)$ nên ta có $-3 = 2 + b \Rightarrow b = -5$.

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình là $y = 2x - 5$.

Chọn đáp án **B**

□

B

Câu 209. Cho đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua hai điểm $M(2; -2)$ và $N(-1; 4)$. Khi đó tổng $a + b$ là

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 0.

Lời giải.

Đồ thị $y = ax + b$ đi qua điểm $M(2; -2)$ nên ta có $2a + b = -2$. (1)

Đồ thị $y = ax + b$ đi qua điểm $N(-1; 4)$ nên ta có $-a + b = 4$. (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ
$$\begin{cases} 2a + b = -2 \\ -a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases}.$$

Do đó $a + b = 0$.

Chọn đáp án **D**

□

D

Câu 210. Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(-1; -1)$ và $B(4; -3)$ là

A. $y = -\frac{2}{5}x$.

B. $y = -\frac{2}{5}x - \frac{7}{5}$.

C. $y = -\frac{7}{5}x + \frac{2}{5}$.

D. $y = -\frac{7}{5}x - \frac{2}{5}$.

Lời giải.

Gọi phương trình đường thẳng d cần tìm là $y = ax + b$.

Ta có d qua $A(-1; -1)$ nên ta có $-a + b = -1$. (1)

d qua $B(4; -3)$ nên ta có $4a + b = -3$. (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ $\begin{cases} -a + b = -1 \\ 4a + b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{5} \\ b = -\frac{7}{5} \end{cases}.$

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A và B là $y = -\frac{2}{5}x - \frac{7}{5}.$

Chọn đáp án **(B)**

□

B

Câu 211. Đường thẳng $y = kx + b$ đi qua điểm $M(2; -2)$ và song song với đường thẳng $y = \frac{x}{4} + 2$ khi

A. $k = \frac{1}{4}, b = -\frac{5}{2}.$ B. $k = \frac{1}{4}, b = \frac{5}{2}.$ C. $k = -\frac{1}{4}, b = -\frac{5}{2}.$ D. $k = 2, b = -6.$

Lời giải.

Vì đường thẳng $y = kx + b$ đi qua điểm $M(2; -2)$ và song song với đường thẳng $y = \frac{x}{4} + 2$ nên ta có

$$\begin{cases} 2k + b = -2 \\ k = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{4} \\ b = -\frac{5}{2} \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

A

Câu 212. Đường thẳng đi qua điểm $M(-1; 4)$ và vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{x}{2} + 2$ có phương trình là

A. $y = -2x + 6.$ B. $y = 2x + 6.$ C. $y = 2x - 6.$ D. $y = -2x - 6.$

Lời giải.

Giả sử đường thẳng cần tìm là Δ có dạng $y = ax + b$. Vì đường thẳng đi qua điểm $M(-1; 4)$ và vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{x}{2} + 2$ nên ta có

$$\begin{cases} a \cdot (-1) + b = 4 \\ a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = 4 \\ a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 6. \end{cases}$$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $y = 2x + 6.$

Chọn đáp án **(B)**

□

B

Câu 213. Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ đi qua các điểm $A(0; -1), B\left(\frac{1}{5}; 0\right)$. Tính $P = a + 5b$.

A. $P = 0.$ B. $P = 4.$ C. $P = -6.$ D. $P = 3.$

Lời giải.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} b = -1 \\ \frac{1}{5}a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow P = a + 5b = 0.$

Chọn đáp án **(A)**

□

A

Câu 214. Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(3; 1)$, $B(-2; 6)$ là

- A. $y = -x + 4$. B. $y = -x + 6$. C. $y = 2x + 2$. D. $y = x - 4$.

Lời giải.

Giả sử $\Delta: y = ax + b$ là đường thẳng cần tìm.

$$\text{Ta có hệ phương trình } \begin{cases} 3a + b = 1 \\ -2a + b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 215. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng d có phương trình $y = mx + m^2 - 3$. Tìm m để đường thẳng d đi qua gốc tọa độ là

- A. $m = \sqrt{3}$. B. $m = \sqrt{2}$. C. $m = -\sqrt{2}$. D. $m = \pm\sqrt{3}$.

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua gốc tọa độ khi $m^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{3}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 216. Đường thẳng $y = ax + b$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 3, cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2. Tính $P = -3a + b$.

- A. $P = -2$. B. $P = 4$. C. $P = 0$. D. $P = 9$.

Lời giải.

Đường thẳng $y = ax + b$ đi qua điểm $A(0; 2)$ và $B(3; 0)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b = 2 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow P = -3a + b = 4.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 217. Phương trình đường thẳng đi qua giao điểm 2 đường thẳng $y = 2x + 1$, $y = 3x - 4$ và song song với đường thẳng $y = \sqrt{2}x + 15$ là

- A. $y = \sqrt{2}x + 11 - 5\sqrt{2}$. B. $y = x + 5\sqrt{2}$.
C. $y = \sqrt{2}(\sqrt{3}x - 5)$. D. $y = 4x + \sqrt{2}$.

Lời giải.

PT đường thẳng có dạng $d: y = \sqrt{2}x + b$.

$$\text{Giao điểm của 2 đường thẳng là nghiệm của hệ phương trình } \begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = 3x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 11 \end{cases}.$$

Mặt khác, đường thẳng d đi qua giao điểm này nên $11 = 5\sqrt{2} + b \Leftrightarrow b = 11 - 5\sqrt{2}$.

Vậy $d: y = \sqrt{2}x + 11 - 5\sqrt{2}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 218. Xét hàm số $y = x + |x - 1| - 1$, lấy hai điểm A và B trên đồ thị hàm số lần lượt có hoành độ là 2 và -3 . Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A và B là

A. $y = \frac{8}{5}x - \frac{6}{5}$.

B. $y = \frac{2}{5}x - \frac{6}{5}$.

C. $y = \frac{2}{5}x + \frac{6}{5}$.

D. $y = \frac{8}{5}x + \frac{6}{5}$.

Lời giải.

Ta có tọa độ $A(2; 2)$, $B(-3; 0)$. Giả sử d là đường thẳng qua A, B và có phương trình $y = kx + m$. Vì các điểm A, B thuộc d nên ta có

$$\begin{cases} 2 = 2k + m \\ 0 = -3k + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2}{5} \\ m = \frac{6}{5} \end{cases}.$$

Vậy phương trình đường thẳng qua hai điểm A, B là $y = \frac{2}{5}x + \frac{6}{5}$.

Chọn đáp án **C**

□

C

Câu 219. Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số bậc nhất đồng biến trên $\mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đúng?

A. $f(x) - g(x)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.B. $f(x) + g(x)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.C. $f(x) \cdot g(x)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.D. $f^2(x) + g^2(x)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.**Lời giải.**

Mệnh đề “ $f(x) + g(x)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ ” là mệnh đề đúng.

Chọn đáp án **B**

□

B

Câu 220. Đường thẳng $d: y = 2x + m$ đi qua điểm $A(1; 2)$ khi m nhận giá trị nào sau đây?

A. $m = 1$.B. $m = -2$.C. $m = -3$.D. $m = 0$.**Lời giải.**

Vì d đi qua $A \Rightarrow 2 = 2 \cdot 1 + m \Leftrightarrow m = 0$.

Chọn đáp án **D**

□

D

Câu 221. Hàm số bậc nhất có đồ thị đi qua điểm $(-4; 3)$ và tạo với trục hoành một góc bằng góc giữa đường thẳng $y = -2x + 7$ và trục hoành là

A. $y = 2x + 5$.B. $y = -2x - 5$.C. $y = 2x - 1$.D. $y = -2x + 1$.

B

Câu 222. Biết đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua điểm $(1; 4)$ và có hệ số góc bằng -3 . Tích $P = ab$?

A. $P = 13$.B. $P = 21$.C. $P = 4$.D. $P = -21$.**Lời giải.**

Vì $y = ax + b$ có hệ số góc bằng -3 nên $a = -3$.

Mà $y = ax + b$ đi qua nên $y = -3x + b \Leftrightarrow 4 = -3 \cdot 1 + b \Leftrightarrow b = 7$.

Do đó $P = a \cdot b = -3 \cdot 7 = -21$.

Chọn đáp án **D**

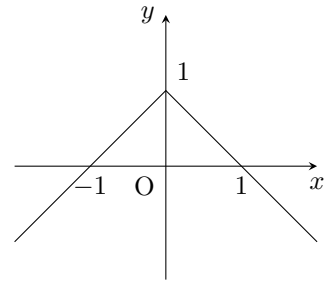
□

D

Câu 223.

Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

- A. $y = |x|$.
 B. $y = |x| + 1$.
 C. $y = 1 - |x|$.
 D. $y = |x| - 1$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số trên bao gồm $\begin{cases} 1 - x & \text{với } x \geq 1 \\ 1 + x & \text{với } x \leq 1 \end{cases}$. Đây chính là đồ thị của hàm số $y = 1 - |x|$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 224. Cho hai hàm số $y = (a - 1)x - 2$; $y = -4x + 1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. Hai đồ thị của các hàm số đã cho là hai đường thẳng cắt nhau tại điểm $\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ khi $a = 6$.
 B. Hàm số $y = (a - 1)x - 2$ đồng biến khi $a > 1$.
 C. Hàm số $y = -4x + 1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
 D. Đồ thị của hai hàm số đã cho song song với nhau khi và chỉ khi $a \neq -3$.

Lời giải.

Đồ thị của hai hàm số đã cho song song với nhau khi

$$\begin{cases} a - 1 = -4 \\ -2 \neq 1 \end{cases} \quad (\text{luôn đúng}) \Leftrightarrow a = -3.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 225. Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt có phương trình

$$mx + (m - 1)y - 2(m + 2) = 0 \text{ và } 3mx - (3m + 1)y - 5m - 4 = 0$$

Khi $m = \frac{1}{3}$ thì d_1 và d_2

- A. song song với nhau.
 B. cắt nhau tại một điểm.
 C. vuông góc nhau.
 D. trùng nhau.

Lời giải.

$$\text{Khi } m = \frac{1}{3} \Rightarrow d_1 : \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{14}{3} = 0 \text{ và } d_2 : x - 2y - \frac{17}{3} = 0 \text{ nên ta có: } \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{-\frac{2}{3}}{-2} \neq \frac{\frac{14}{3}}{-\frac{17}{3}}.$$

$\Rightarrow d_1$ song song d_2

Chọn đáp án **A**

□

Câu 226. Cho ba điểm $A(3; 0)$, $B\left(-\frac{1}{2}; -\frac{5}{3}\right)$, $C\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{3}\right)$. Đồ thị của hàm số $y = \frac{2}{3}x - 2$ là

- A. đường thẳng AB .
C. đường thẳng BC .

- B. đường thẳng AC .
D. một đường thẳng khác ba đường thẳng trên.

Lời giải.

Thay lần lượt tọa độ các điểm $A(3; 0)$, $B\left(-\frac{1}{2}; -\frac{5}{3}\right)$, $C\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{3}\right)$ vào đường thẳng $d: y = \frac{2}{3}x - 2$ ta thấy

- $\frac{2}{3} \cdot 3 - 2 = 0 \Rightarrow A \in d$.
- $\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3} \neq -\frac{5}{3} \Rightarrow B \notin d$.
- $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{3} \neq \frac{5}{3} \Rightarrow C \notin d$.

Vậy đường thẳng d không phải là một trong các đường AB , AC , BC .

Chọn đáp án **(D)**

□

D

Câu 227. Điểm thuộc đường thẳng $y = (m - 2)x - 1$ với mọi m là

- A. $(2; -1)$. B. $(0; -1)$. C. $(0; 1)$. D. $(-1; 0)$.

Lời giải.

Ta có $y = (m - 2)x - 1 \Leftrightarrow mx - (2x + y + 1) = 0$. Do đó điểm $(x_0; y_0)$ thuộc đường thẳng $y = (m - 2)x - 1$ với mọi m khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ 2x_0 + y_0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = -1. \end{cases}$$

Điểm cần tìm có tọa độ $(0; -1)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

B

Câu 228. Gọi $M(a; b)$ là điểm thuộc đồng thời cả hai đồ thị của các hàm số $y = 3x - 1$ và $y = 4 - 5x$.

Khi đó, giá trị của tổng $a + b$ là

- A. -6 . B. $\frac{5}{2}$. C. $\frac{3}{2}$. D. $-\frac{7}{4}$.

Lời giải.

Điểm $M(a; b)$ thuộc hai đồ thị hàm số $y = 3x - 1$; $y = 4 - 5x$ suy ra

$$\begin{cases} b = 3a - 1 \\ b = 4 - 5a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{8} \\ b = \frac{7}{8} \end{cases}$$

Vậy $a + b = \frac{3}{2}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

C

Câu 229. Cho hàm số $y = ax + b$ với $a \neq 0$ có đồ thị là đường thẳng đi qua $M(-2, 1)$ và vuông góc với đồ thị của hàm số $y = 4 - 3x$. Giá trị của $a \cdot b$ là

- A. $\frac{5}{9}$. B. $\frac{1}{9}$. C. $\frac{5}{6}$. D. 2.

Lời giải.

Điểm $M(-2; 1) \in d: y = ax + b$ suy ra $-2a + b = 1$ (1).

Đường thẳng $y = ax + b$ vuông góc với đường thẳng $y = 4 - 3x$ suy ra $a = \frac{1}{3}$.

Thay vào (1) ta được $b = \frac{5}{3}$.

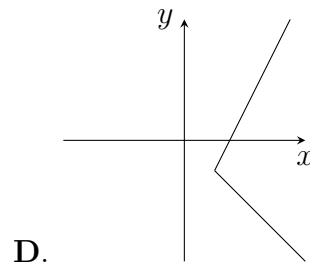
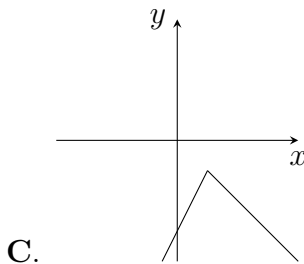
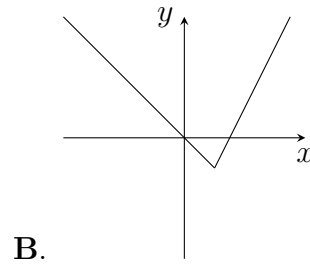
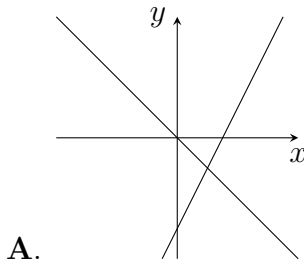
Vậy $a \cdot b = \frac{5}{9}$.

Chọn đáp án **A**

□

A

Câu 230. Đồ thị của hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{với } x \geq 1 \\ -x & \text{với } x < 1 \end{cases}$ là



Lời giải.

Đồ thị hàm số bị phân nhánh tại điểm $(1; -1)$. Nhánh bên phải điểm $(1; -1)$ ứng với đồ thị hàm số $y = 2x - 3$ hướng lên, nhánh bên trái điểm $(1; -1)$ ứng với đồ thị hàm số $y = -x$ hướng xuống và đi qua gốc tọa độ.

Chọn đáp án **B**

□

B

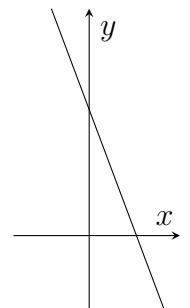
Câu 231. Đồ thị sau đây là đồ thị của hàm số $y = ax + b$. Kết luận nào sau đây đúng?

A. $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases}$.



Lời giải.

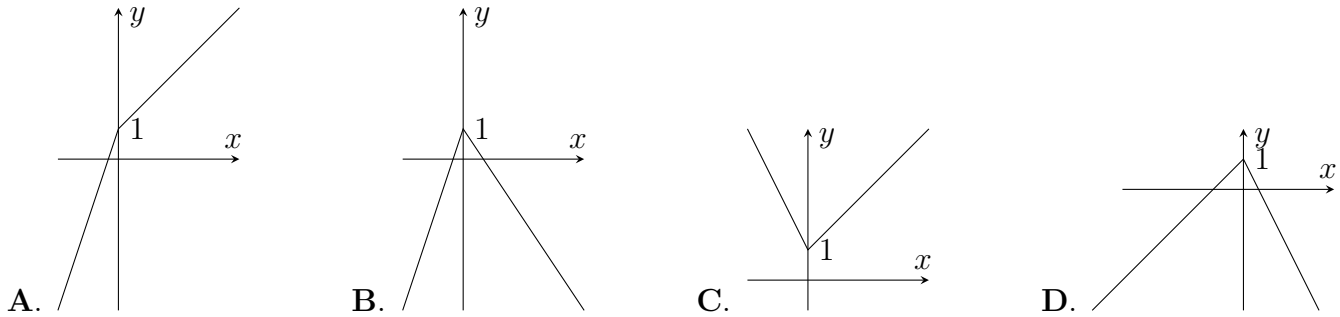
Từ hướng của đồ thị ta thấy hàm số nghịch biến, suy ra $a < 0$. Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên ta có $b > 0$.

Chọn đáp án **B**

□

B

Câu 232. Trong các đồ thị sau, đâu là đồ thị của hàm số $y = \begin{cases} -2x + 1 & \text{với } x \geq 0 \\ x + 1 & \text{với } x < 0 \end{cases}$?



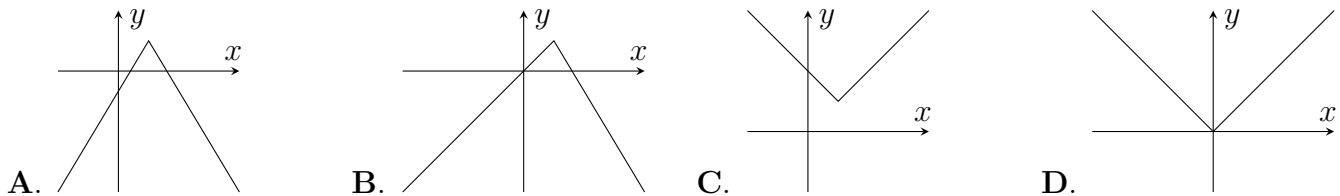
Lời giải.

Hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$ nên loại 2 phương án. Nhánh phải cắt Ox tại điểm có hoành độ $\frac{1}{2}$, nhánh trái cắt Ox tại điểm có hoành độ -1 .

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 233. Trong các đồ thị sau, đâu là đồ thị của hàm số $y = |x - 1| + 1$?



Lời giải.

Từ $y = |x - 1| + 1$, cho $x = 0$ ta được $y = 2$. Đồ thị hàm số phải đi qua điểm $(0; 2)$.

Chọn đáp án **(C)**

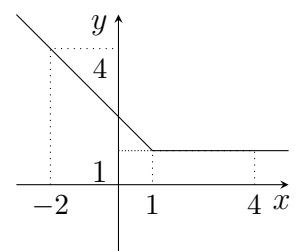
□

Câu 234.

Biết rằng một trong bốn hàm số được cho ở các phương án **A, B, C, D** có đồ thị như hình bên. Hỏi đó là hàm số nào?

A. $y = \begin{cases} -x + 2 & \text{nếu } x \leq 1 \\ 1 & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$. B. $y = \begin{cases} x + 2 & \text{nếu } x \leq 1 \\ 1 & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$.

C. $y = \begin{cases} -x + 2 & \text{nếu } x \leq 1 \\ 1 & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$. D. $y = \begin{cases} x - 2 & \text{nếu } x \geq 1 \\ 1 & \text{nếu } x < 1 \end{cases}$.



Lời giải.

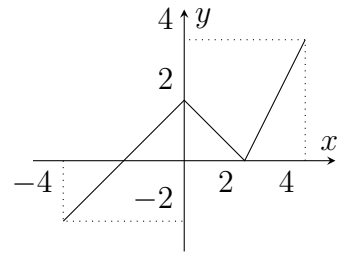
Từ đồ thị ta thấy $y = 1, \forall x > 1$. Cũng từ đồ thị, nhánh trái có hệ số góc âm. Do đó, $y = \begin{cases} -x + 2 & \text{nếu } x \leq 1 \\ 1 & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 235. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $[-4; 4]$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt.
 B. Hàm số nghịch biến trên $(0; 1)$.
 C. Hàm số đồng biến trên $(-2; 2)$.
 D. Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-4; 2]$ là 2.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị, hàm số đồng biến trên $(-2; 0)$ và nghịch biến trên $(0; 2)$.

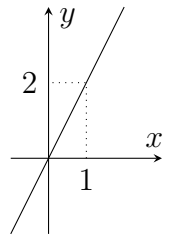
Chọn đáp án **C**

□

Câu 236.

Gọi S là tập hợp tất cả những giá trị thực của m để đồ thị hàm số $y = (m - 1)x + m(m + 1) - 12$ song song với đường thẳng được cho ở đồ thị bên dưới. Khi đó

- A. $S = \{1\}$.
 B. $S = \{2\}$.
 C. $S = \{3\}$.
 D. $S = \emptyset$.



Lời giải.

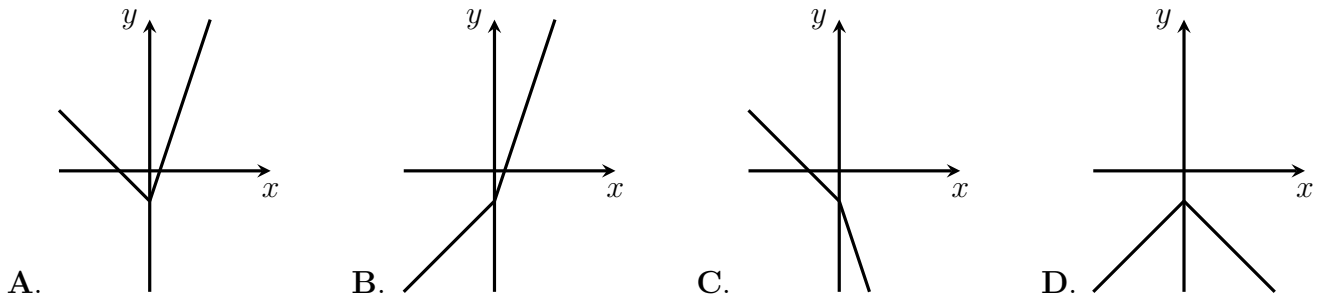
Đường thẳng cho ở hình vẽ bên có phương trình $y = 2x$. Từ đó suy ra $m - 1 = 2 \Leftrightarrow m = 3$. Thay lại ta được $y = 2x$ trùng với đường thẳng cho sẵn trong hình vẽ. Vậy không có m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn đáp án **D**

□

D

Câu 237. Đồ thị của hàm số $y = \sqrt{x^2} + 2x - 1$ là hình nào dưới đây?



Lời giải.

$$\text{Ta có } y = \sqrt{x^2} + 2x - 1 = |x| + 2x - 1 = \begin{cases} 3x - 1 & \text{với } x \geq 0 \\ x - 1 & \text{với } x < 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án **B**

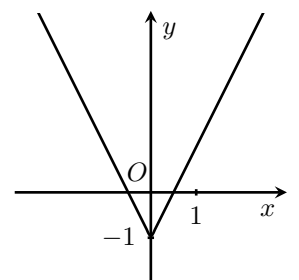
□

B

Câu 238.

Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

- A. $y = |2x + 1|$.
 B. $y = |x| + 1$.
 C. $y = 2|x| - 1$.
 D. $y = 2|x - 1|$.



Lời giải.

Từ đồ thị ta thấy hàm số đi qua điểm $(0; -1)$ nên suy ra nó là đồ thị của hàm số $y = 2|x| - 1$.

Chọn đáp án **C**

□

C

Câu 239. Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng $(d_1) : y = x + 2$ và $(d_2) : y = 2x - 3$ là

- A. $(-5; 7)$. B. $(5; -7)$. C. $(5; 7)$. D. $(-5; -7)$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là $x + 2 = 2x - 3 \Leftrightarrow x = 5 \Rightarrow y = 7$.

Vậy tọa độ giao điểm của hai đường thẳng là $(5; 7)$.

Chọn đáp án **C**

□

C

Câu 240. Cho hàm số $y = 2x + 4$ có đồ thị là đường thẳng Δ . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. B. Δ cắt trục Ox tại điểm $A(2; 0)$.
C. Δ cắt trục tung tại điểm $B(0; 4)$. D. Hệ số góc của Δ bằng 2.

Lời giải.

Vì $a = 2 > 0$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0; 4)$, cắt trục hoành tại điểm $(-2; 0)$.

Hệ số góc của đường thẳng bằng 2.

Vậy kết luận Δ cắt trục Ox tại điểm $A(2; 0)$ là **sai**.

Chọn đáp án **B**

□

B

Câu 241. Giá trị của m để hai đường thẳng $d_1 : y = 2x - 3$ và $d_m : y = -x + 2m - 1$ cắt nhau tại một điểm trên trục Oy là

- A. $m = -1$. B. $m = 1$. C. $m = 2$. D. $m = 0$.

Lời giải.

Đường thẳng (d_1) cắt trục tung tại điểm $A(0; -3)$.

(d_m) cắt (d_1) tại A khi và chỉ khi $-3 = -0 + 2m - 1 \Rightarrow m = -1$.

Chọn đáp án **A**

□

A

Câu 242. Đồ thị hai hàm số $y = x - 1$ và $y = -\frac{1}{2}x + 2$ cắt nhau tại điểm có tọa độ

- A. $(2; 2)$. B. $(1; 1)$. C. $(2; 1)$. D. $(1; 2)$.

Lời giải.

Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình $x - 1 = -\frac{1}{2}x + 2 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 1$.

Vậy tọa độ giao điểm là $(2; 1)$.

Chọn đáp án **C**

□

C

Câu 243. Điểm đồng quy của ba đường thẳng $y = 3 - x$, $y = x + 1$, $y = 2$ có tọa độ là

- A. $(1; -2)$. B. $(1; 2)$. C. $(-1; 2)$. D. $(-1; -2)$.

Lời giải.

Tọa độ điểm đồng quy của ba đường thẳng $y = 3 - x$, $y = x + 1$, $y = 2$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = 3 - x \\ y = x + 1 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(B)** □

B

Câu 244. Với giá trị nào của m thì các đường thẳng $y = 3x + (m - 1)$ và $y = 2x - (m - 3)$ cắt nhau tại một điểm trên trục tung?

- A. $m = 1$. B. $m = -3$. C. $m = 2$. D. $m = 4$.

Lời giải.

Hai đường thẳng $y = 3x + (m - 1)$ và $y = 2x - (m - 3)$ cắt nhau tại một điểm trên trục tung khi và chỉ khi các tung độ gốc của chúng bằng nhau, tức là $m - 1 = -(m - 3) \Leftrightarrow 2m = 4 \Leftrightarrow m = 2$.

Chọn đáp án **(C)** □

C

Câu 245. Tìm m để đường thẳng $(d_1): y = x - 2$ và đường thẳng $(d_2): y = 2x - m + 1$ cắt nhau tại một điểm trên trục Oy .

- A. $m = -2$. B. $m = 2$. C. $m = 5$. D. $m = 3$.

Lời giải.

+ (d_1) cắt Oy tại $A(0; -2)$.

+ Vì (d_1) cắt (d_2) tại A nên $A \in (d_2): -2 = -m + 1 \Leftrightarrow m = 3$.

Chọn đáp án **(D)** □

D

Câu 246. Cho hàm số $y = (m^2 + 1)x - 2m$ với $m > 0$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. Đồ thị của hàm số là một đường thẳng đi lên theo chiều từ trái sang phải.
B. Đồ thị của hàm số luôn cắt hai trục tọa độ tại hai điểm phân biệt.
C. Tung độ giao điểm của đồ thị hàm số với Oy luôn dương với mọi $m > 0$.
D. Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số với Ox luôn bé hơn 2 với mọi $m > 0$.

Lời giải.

Từ biểu thức của hàm số, cho $x = 0$, ta được $y = -2m$. Do đó, đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm $M(0; -2m)$. Do $m > 0$ nên ung độ $-2m$ âm.

Chọn đáp án **(C)** □

C

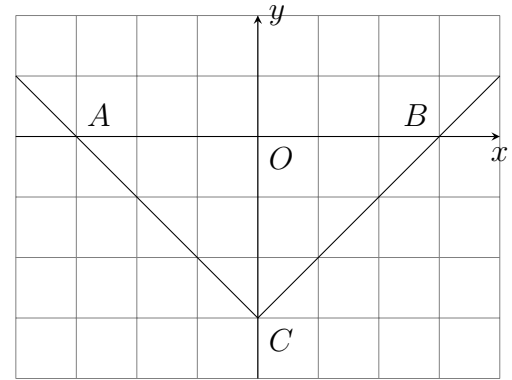
Câu 247. Cho hàm số $y = |x| - 3$, đồ thị hàm số tạo với trục hoành một tam giác có diện tích là bao nhiêu?

- A. 18. B. 9. C. $9\sqrt{2}$. D. $18\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $y = |x| - 3 = \begin{cases} x - 3 & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x - 3 & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$

Đồ thị hàm số $y = |x| - 3$ cắt trục hoành tại 2 điểm $A(-3; 0)$ và $B(3; 0)$; cắt trục tung tại $C(0; -3)$. Tam giác ABC có OC là đường cao kẻ từ C . Ta có $AB = 6$, $OC = 3$. Diện tích tam giác ABC là $\frac{1}{2}AB \cdot OC = 9$.



Chọn đáp án **B**

□

B

Câu 248. Cho hàm số $y = (3m - 2)x + 2m^2 - 2m + 1$ có đồ thị là đường thẳng vuông góc với đường thẳng $y = 1 - x$. Khi đó, giá trị của $A = m^2 - 3m + 1$ là

A. 2.

B. 5.

C. -1.

D. không xác định được.

Lời giải.

Hai đường thẳng đã cho vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$-1 \cdot (3m - 2) = -1 \Leftrightarrow m = 1.$$

Khi đó $m^2 - 3m + 1 = -1$.

Chọn đáp án **C**

□

C

Câu 249. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. Đồ thị của hàm số bậc nhất luôn cắt trục hoành.

B. Đồ thị của hàm số bậc nhất luôn cắt trục tung.

C. Có đúng một hàm số bậc nhất có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.

D. Từ đồ thị của hàm số bậc nhất ta có thể thấy được chiều biến thiên của hàm số đó.

Lời giải.

- Đồ thị hàm số bậc nhất dạng $y = ax + b$, với $a \neq 0$ luôn cắt trục hoành tại $\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$.
- Đồ thị hàm số bậc nhất dạng $y = ax + b$, với $a \neq 0$ luôn cắt trục tung tại $(0; b)$.
- Có vô số hàm số bậc nhất dạng $y = ax$ (với a tùy ý khác 0) là hàm lẻ và có đồ thị nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.
- Từ hướng của đồ thị hoàn toàn có thể suy ra chiều biến thiên của hàm số bậc nhất.

Chọn đáp án **C**

□

C

Câu 250. Đồ thị hàm số $y = 2 - x$ chắn hai trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng bao nhiêu?

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. $4 + 2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = 2 - x$ cắt trục tung tại $A(0; 2)$ và cắt trục hoành tại $B(2; 0)$. Do đó diện tích tam giác OAB là $\frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = 2$.

Chọn đáp án **(B)**

□

B

Câu 251. Cho đồ thị hàm số $y = ax + b$ song song với đồ thị hàm số $y = x$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ âm. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào có thể **sai**?

A. $a + b > 0$.

B. $a + b \neq 0$.

C. $a \cdot b > 0$.

D. $a - b > 0$.

Lời giải.

Vì đồ thị hàm số $y = ax + b$ song song với đồ thị hàm số $y = x$ nên ta có $a = 1$. Ta có đồ thị hàm số $y = x + b$ cắt trục hoành tại điểm $(-b; 0)$ có hoành độ âm, suy ra $b > 0$. Khi đó, $1 - b > 0$ có thể sai vì chưa chắc $a = 1 > b$.

Chọn đáp án **(D)**

□

D

Câu 252. Gọi m_0 là giá trị của m để $d_1: y = x + 2m$, $d_2: y = 3x + 2$, $d_3: y = -mx + 2$ phân biệt và đồng quy. Khi đó m_0 gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. -3 .

B. 0 .

C. 3 .

D. 6 .

Lời giải.

Giả sử 3 đường thẳng đã cho đồng quy tại $I(x_0; y_0)$. Vì I thuộc d_1 và d_2 nên ta có

$$\begin{cases} y_0 = x_0 + 2m \\ y_0 = 3x_0 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = m - 1 \\ y_0 = 3m - 1. \end{cases}$$

Mặt khác I cũng thuộc d_3 nên

$$3m - 1 = -m(m - 1) + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3. \end{cases}$$

- Với $m = 1$ thì hệ số góc của 3 đường khác nhau đôi một. Do đó nhận $m = 1$.
- Với $m = -3$ thì d_2 và d_3 trùng nhau. Do đó loại $m = -3$.

Chọn đáp án **(B)**

□

B

Câu 253. Cho đồ thị hàm số $y = -x + 2$ cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại A và B . Tính diện tích S của tam giác OAB , với O là gốc toạ độ.

A. $S = 4$.

B. $S = 8$.

C. $S = 2$.

D. $S = 6$.

Lời giải.

Giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x + 2$ và trục hoành là $A(2; 0) \Rightarrow OA = 2$.

Giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x + 2$ và trục tung là $B(0; 2) \Rightarrow OB = 2$.

Diện tích của tam giác OAB là $S = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$.

Chọn đáp án **(C)**

□

C

Câu 254. Giá trị của a để các đường thẳng $y = -5(x + 1)$, $y = ax + 3$, $y = 3x + a$ đồng quy là
A. -10 . **B.** -11 . **C.** -12 . **D.** -13 .

Lời giải.

Vì $a = 3$ thì hai đường thẳng $y = ax + 3$; $y = 3x + a$ trùng nhau nên $a \neq 3$.

Gọi A là giao điểm của đường thẳng $y = -5(x + 1)$ và $y = 3x + a$.

Khi đó hoành độ điểm A là nghiệm của phương trình $-5x - 5 = 3x + a \Leftrightarrow x = \frac{-a - 5}{8}$.

Suy ra $A\left(\frac{-a - 5}{8}, \frac{5a - 15}{8}\right)$.

Vì ba đường thẳng đồng quy nên A thuộc đường thẳng $y = ax + 3$.

Suy ra $\frac{5a - 15}{8} = a \cdot \frac{-a - 5}{8} + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 & (\text{loại}) \\ a = -13 & (\text{nhận}) \end{cases}$.

Vậy $a = -13$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 255. Tìm m để Parabol $(P): y = x^2 - 2(m + 1)x + m^2 - 3$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1 \cdot x_2 = 1$.

A. $m = 2$. **B.** Không tồn tại m . **C.** $m = -2$. **D.** $m = \pm 2$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) với trục hoành: $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 - 3 = 0$ (1).

Parabol (P) cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1 \cdot x_2 = 1$.

$\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1 \cdot x_2 = 1$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m + 1)^2 - (m^2 - 3) > 0 \\ m^2 - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 256. Cho hàm số bậc nhất $y = (m^2 - 4m - 4)x + 3m - 2$ có đồ thị là (d) . Tìm số giá trị nguyên dương của m để đường thẳng (d) cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB là tam giác cân (O là gốc tọa độ).

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải.

Đường thẳng (d) tạo với trục hoành và trục tung một tam giác OAB là tam giác vuông cân

$\Rightarrow$ đường thẳng (d) tạo với chiều dương trục hoành bằng 45° hoặc 135° .

$\Leftrightarrow$ hệ số góc tạo của (d) bằng 1 hoặc -1 .

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m - 4 = 1 \\ m^2 - 4m - 4 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m - 3 = 0 \\ m^2 - 4m - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 5 \\ m = 2 \pm \sqrt{7} \end{cases}$.

Thử lại với $m = 5$ thì (d) không đi qua O .

Vậy có duy nhất một giá trị $m = 5$ nguyên dương thỏa ycbt.

Chọn đáp án **(B)**

□

B

Câu 257. Đường thẳng $d: y = (m - 3)x - 2m + 1$ cắt hai trục tọa độ tại hai điểm A và B sao cho tam giác OAB cân. Khi đó, số giá trị của m thỏa mãn là

- A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Lời giải.

Vì $A = d \cap Ox$ nên tọa độ A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = (m - 3)x - 2m + 1 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2m - 1}{m - 3} \\ y = 0 \end{cases} \text{ nên } A\left(\frac{2m - 1}{m - 3}; 0\right).$$

Vì $B = d \cap Oy$ nên tọa độ B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = (m - 3)x - 2m + 1 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2m + 1 \end{cases} \text{ nên } B(0; -2m + 1).$$

$$\text{Ta có } OA = OB \Leftrightarrow \left| \frac{2m - 1}{m - 3} \right| = |-2m + 1| \Leftrightarrow |2m - 1| \left(\frac{1}{|m - 3|} - 1 = 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 1 = 0 \\ |m - 3| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ m = 4, m = 2. \end{cases}$$

Nhận xét: Với $m = \frac{1}{2}$ thì $A \equiv B \equiv O(0; 0)$ nên không thỏa mãn.

Vậy $m = 4, m = 2$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 258. Các đường thẳng $y = -5(x + 1)$; $y = 3x + a$; $y = ax + 3$ đồng quy với giá trị của a là

- A. -11. B. -10. C. -12. D. -13.

Lời giải.

Gọi $d_1: y = -5x - 5$, $d_2: y = 3x + a$, $d_3: y = ax + 3$ ($a \neq 3$).

Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và d_2 : $-5x - 5 = 3x + a \Leftrightarrow x = \frac{-a - 5}{8}$.

Giao điểm của d_1 và d_2 là $A\left(\frac{-a - 5}{8}; \frac{5a - 15}{8}\right)$.

Đường thẳng d_1 , d_2 và d_3 đồng qui khi và chỉ khi

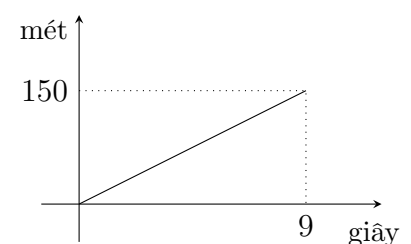
$$A \in d_3 \Leftrightarrow \frac{5a - 15}{8} = a \cdot \frac{-a - 5}{8} + 3 \Leftrightarrow a^2 + 10a - 39 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -13 \end{cases} \Rightarrow a = -13 \text{ (vì } a \neq 3).$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 259.

Đồ thị bên thể hiện quãng đường đi được của một ô tô đang chuyển động thẳng đều trong khoảng thời gian 9 giây từ lúc quan sát. Hỏi kể từ lúc quan sát tại thời điểm giây thứ 6, ô tô đã đi được bao nhiêu mét?



- A. 60 mét. B. 90 mét. C. 100 mét. D. 120 mét.

Lời giải.

Đường thẳng trong hình vẽ có phương trình dạng $y = ax$. Đường thẳng này qua điểm $(9; 150)$ nên $150 = 9a \Leftrightarrow a = \frac{50}{3}$. Ta có $y = \frac{50}{3}x$. Cho $x = 6$ ta được $y = 100$.

Chọn đáp án **C**

□

C

Câu 260. Một người vay 100 triệu đồng tại một ngân hàng với lãi suất 0,8%/tháng. Người đó lên kế hoạch trả hết nợ trong thời gian 2 năm (bao gồm cả vốn và lãi suất phải trả cho ngân hàng). Số tiền mỗi tháng người đó trả cho ngân hàng là như nhau. Hỏi số tiền mỗi tháng người này phải trả cho ngân hàng là bao nhiêu (đồng)?

- A. 4.596.050 đồng. B. 4.815.620 đồng. C. 4.632.820 đồng. D. 4.854.150 đồng.

Lời giải.

- Gọi X là số tiền phải trả hàng tháng, r là lãi suất hàng tháng, A là số tiền vay ban đầu. Khi đó, tổng số tiền phải trả là $S_n = A(1 + r)^n$.
- Tổng số tiền trả sau n tháng là

$$T_n = X(1 + (1 + r) + (1 + r)^2 + \dots + (1 + r)^{n-1}) = X \cdot \frac{(1 + r)^n - 1}{(1 + r) - 1} = X \cdot \frac{(1 + r)^n - 1}{r}.$$

- Sau n tháng trả hết nợ nên $S_n = T_n \Leftrightarrow A(1 + r)^n = X \cdot \frac{(1 + r)^n - 1}{r} \Leftrightarrow X = \frac{A(1 + r)^n r}{(1 + r)^n - 1}$.
- Áp dụng với $n = 24$ (tháng), $r = 0,8\%/tháng$, $A = 100$ (triệu đồng) ta có

$$X = \frac{100(1 + 0,008)^{24} \cdot 0,008}{(1 + 0,008)^{24} - 1} \approx 4,59605 \text{ (triệu đồng)}.$$

Chọn đáp án **A**

□

A

Câu 261. Tìm tất cả giá trị của m để hàm số $y = mx + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m \leq 1$. B. $m \leq 0$. C. $m < 1$. D. $m < 0$.

Lời giải.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m < 0$.

Chọn đáp án **D**

□

D

Câu 262. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = 3 - 2x$. B. $y = 3x + 1$. C. $y = -3$. D. $y = 2 - \frac{x}{2}$.

Lời giải.

Ta có $y = 3x + 1$ là hàm bậc nhất có $a = 3 > 0$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án **B**

□

B

Câu 263. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên tập xác định của nó?

- A. $y = 1 - x$. B. $y = 2x + 3$. C. $x + y - 2 = 0$. D. $3x + 5y + 1 = 0$.

Lời giải.

$y = 2x + 3$ là hàm số bậc nhất có hệ số $a = 2 > 0$. Vậy hàm số đồng biến trên tập xác định của nó.

Chọn đáp án **(B)**

□

B

Câu 264. Cho hàm số $y = -3x + 1$. Hãy chọn khẳng định **đúng**.

- A. Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ và nghịch biến trên $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.
 B. Hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ và đồng biến trên $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.
 C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
 D. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Vì $-3 < 0$ nên hàm số $y = -3x + 1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

D

Câu 265. Tất cả các giá trị của m để hàm số $y = (2 - m)x + 5m$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m > 2$. B. $m \neq 2$. C. $m = 2$. D. $m < 2$.

Lời giải.

- Nếu $m = 2$ thì $y = 10$ là hàm số hằng.
- Nếu $m \neq 2$ thì hàm số đã cho là hàm số bậc nhất, do đó hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 2 - m < 0 \Leftrightarrow m > 2.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

A

Câu 266. Cho hàm số $y = 3x + 6$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên $(-2; +\infty)$. B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
 C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. D. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -2)$.

Lời giải.

Hàm số $y = 3x + 6$ có $a = 3 > 0$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

C

Câu 267. Tìm m để hàm số $y = (3 - m)x + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m > 0$. B. $m = 3$. C. $m > 3$. D. $m < 3$.

Lời giải.

Hàm số $y = (3 - m)x + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $3 - m < 0$ hay $m > 3$.

Chọn đáp án **(C)**

□

C

Câu 268. Khẳng định nào về hàm số $y = 3x + 5$ là **sai**?

- A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. B. Đồ thị cắt Ox tại $\left(-\frac{5}{3}; 0\right)$.
 C. Đồ thị cắt Oy tại $(0; 5)$. D. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số $y = 3x + 5$ có hệ số $a = 3 > 0$ nên đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

D

Câu 269. Cho hàm số $y = (m + 2)x + \sqrt{2 - m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m + 2 > 0 \\ 2 - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m \leq 2. \end{cases}$

Mặt khác do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-1; 0; 1; 2\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m .

Chọn đáp án **(C)**

□

C

Câu 270. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc nhất?

A. $y = \frac{3}{x - 2}$.

B. $y = 2x - 4$.

C. $y = (x + 1)(3 - x)$.

D. $y = x^2 - 3x + 2$.

Lời giải.

$y = 2x - 4$ là hàm số bậc nhất.

Chọn đáp án **(B)**

□

B

Câu 271. Hàm số $f(x) = (m - 1)x + 2m + 2$ là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi

A. $m \neq -1$.

B. $m > 1$.

C. $m \neq 1$.

D. $m \neq 0$.

Lời giải.

Hàm số $f(x) = (m - 1)x + 2m + 2$ là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.

Chọn đáp án **(C)**

□

C

Câu 272. Hệ số góc của đồ thị hàm số $y = 2018x - 2019$ bằng

A. $-\frac{2019}{2018}$.

B. 2018.

C. -2019.

D. $-\frac{2018}{2019}$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(B)**

□

B

Câu 273. Điểm nào trong các điểm dưới đây **không** thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x - 2$?

A. (3; 1).

B. $\left(5; -\frac{1}{3}\right)$.

C. (-15; -7).

D. (66; 20).

Lời giải.

Ta có $\frac{1}{3} \cdot 3 - 2 = -1 \neq 1$ nên (3; 1) không thuộc đồ thị hàm số.

Chọn đáp án **(A)**

□

A

Câu 274.

Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình vẽ?

A. $y = |x| - 1$.

B. $y = |x - 1|$.

C. $y = x - 1$.

D. $y = -x + 1$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên nhận thấy giá trị $y \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó chỉ có $y = |x - 1|$ thỏa mãn yêu cầu.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 275.

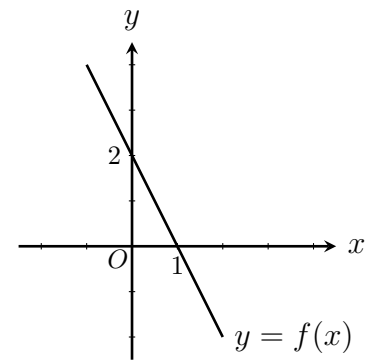
Hàm số nào cho dưới đây có đồ thị như hình bên?

A. $y = -2x + 2$.

B. $y = x + 2$.

C. $y = -x + 2$.

D. $y = 2x + 2$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số đã cho dạng $y = ax + b$ đi qua hai điểm $A(1; 0), B(0; 2)$, do đó

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 0a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2. \end{cases}$$

Vậy $y = -2x + 2$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 276. Đồ thị của hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{khi } x \leq 2 \\ -3 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ đi qua điểm nào sau đây?

A. $(0; -3)$.

B. $(3; 7)$.

C. $(2; -3)$.

D. $(0; 1)$.

Lời giải.

Thử lần lượt từng phương án A,B,C,D với chú ý về điều kiện ta được:

$f(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1 \neq -3$, đồ thị không đi qua điểm $(0; -3)$.

$f(3) = -3 \neq 7$, đồ thị không đi qua điểm $(3; 7)$.

$f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5 \neq -3$, đồ thị không đi qua điểm $(2; -3)$.

$f(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$, đồ thị không đi qua điểm $(0; 1)$.

Chọn đáp án **D**

□

D

Câu 277.

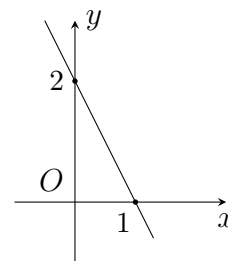
Hàm số nào cho dưới đây có đồ thị như hình vẽ bên

A. $y = -2x + 2$.

B. $y = x + 2$.

C. $y = -x + 2$.

D. $y = 2x + 2$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số cắt Ox và Oy lần lượt tại $A(1; 0)$ và $B(0; 2)$.

Chọn đáp án **A**

□

A

Câu 278. Đường thẳng nào sau đây song song với đường thẳng $y = \sqrt{2}x$?

A. $y = \frac{2}{\sqrt{2}}x - 5$.

B. $y = 1 - \sqrt{2}x$.

C. $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x - 3$.

D. $y = -\sqrt{2}x + 2$.

Lời giải.

Hai đường thẳng song song khi hai hệ số góc bằng nhau.

Chọn đáp án **A**

□

A

ĐÁP ÁN

1. D	2. C	3. B	4. D	5. A	6. D	7. C	8. C	9. A	10. D
11. B	12. A	13. D	14. C	15. B	16. D	17. B	18. C	19. A	20. A
21. B	22. D	23. C	24. D	25. C	26. A	27. B	28. B	29. C	30. D
31. D	32. A	33. D	34. D	35. C	36. B	37. B	38. B	39. B	40. C
41. D	42. D	43. A	44. B	45. C	46. C	47. A	48. B	49. B	50. D
51. B	52. D	53. D	54. B	55. B	56. D	57. A	58. A	59. B	

§3 HÀM SỐ BẬC HAI

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 HÀM SỐ BẬC HAI

Định nghĩa. Hàm số bậc hai được cho bởi công thức $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

Tập xác định của hàm số này là $D = \mathbb{R}$.

2 ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC HAI

Định nghĩa. Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) là một đường parabol có đỉnh là điểm $I\left(-\frac{b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$, có trục đối xứng là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$. Parabol này quay bề lõm lên trên nếu $a > 0$, xuống dưới nếu $a < 0$.

* Cách vẽ đồ thị hàm số bậc hai.

- Xác định tọa độ của đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$.
- Vẽ trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$.
- Lập bảng giá trị

x	x_1	x_2	$-\frac{b}{2a}$	x_3	x_4
y	$y(x_1)$	$y(x_2)$	$\frac{-\Delta}{4a}$	$y(x_3)$	$y(x_4)$

Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) cắt trục tung tại điểm $(0; c)$.

! Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) cắt trục hoành (nếu có) tại điểm có tọa độ $(x_0; 0)$ với x_0 là nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.

- Vẽ Parabol

! Khi vẽ cần chú ý đến dấu của hệ số a ($a > 0$ bề lõm quay lên trên, $a < 0$ bề lõm quay xuống dưới).

3 CHIỀU BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ BẬC HAI

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), ta có bảng biến thiên của nó trong hai trường hợp $a > 0$ và $a < 0$ như sau

+ Với $a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\frac{-\Delta}{4a}$	$+\infty$

+ Với $a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$-\infty$	$\frac{-\Delta}{4a}$	$-\infty$

Từ đó ta có định lí sau

Định lí 1. Nếu $a > 0$ thì hàm số $y = ax^2 + bx + c$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$, đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

Nếu $a < 0$ thì hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

4 PHƯƠNG TRÌNH HOÀNH ĐỘ GIAO ĐIỂM

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là (C_1) và hàm số $y = g(x)$ có đồ thị là (C_2) . Khi đó, nếu $M(x; y)$ là giao điểm của (C_1) và (C_2) thì tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \Rightarrow f(x) = g(x). (*)$$

Phương trình (*) được gọi là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị (C_1) và (C_2) . Và nếu giao điểm M có mang những đặc điểm, tính chất nào đó thì phương trình (*) cũng sẽ tồn tại những đặc điểm tương ứng với các đặc tính đó. Từ đây suy ra, để giải một bài toán về tính chất giao điểm của hai đồ thị (C_1) và (C_2) , ta có thể tiến hành theo các bước sau:

- Lập phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị (C_1) và C_2 (tức là phương trình (*)).
- Biến đổi phương trình về dạng bậc hai đơn giản.
- Dựa vào điều kiện ban đầu của bài toán để chuyển về điều kiện cho phương trình hoành độ giao điểm.

5 ĐỊNH LÝ VI-ÉT

Định lí 2. Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

- Nếu phương trình bậc hai có hai nghiệm x_1 và x_2 thì ta có:
$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$
- Phương trình có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $P < 0$.

c) Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi:
$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$$

d) Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi:
$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$$

e) Phương trình có hai nghiệm phân biệt khác x_0 khi và chỉ khi:
$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ ax_0^2 + bx_0 + c \neq 0 \end{cases}$$

6 MỘT VÀI CÔNG THỨC CẦN NHỚ

! Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) là một đường parabol có đỉnh là điểm $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

! Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) cắt trục tung tại điểm $(0; c)$ (lấy $x = 0$ thế vào hàm số).

! Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) cắt trục hoành (nếu có) tại điểm có tọa độ $(x_0; 0)$ với x_0 là nghiệm của phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ (1). Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị với trục hoành.

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Vẽ đồ thị và lập bảng biến thiên của hàm số bậc hai

Vẽ đồ thị của hàm số bậc hai ta thực hiện theo bốn bước như trên.

Để lập bảng biến thiên của hàm số bậc hai ta cần xem xét dấu của hệ số a , tính tọa độ của đỉnh và điền vào bảng thích hợp.

🔗🔗🔗 BÀI TẬP DẠNG 1 🔗🔗🔗

Ví dụ 1. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x$.

Lời giải.

Ta có $a = 1, b = -2, c = 0$. Suy ra tọa độ đỉnh là $I(1; -1)$.

Vậy bảng biến thiên là

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$+\infty$	-1	$+\infty$

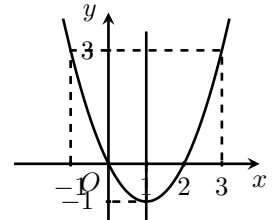
Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

*Vẽ đồ thị: Ta có đỉnh là $I(1; -1)$ và trục đối xứng là $x = 1$.

Bảng giá trị

x	-1	0	1	2	3
y	3	0	-1	0	3

Ta có đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x$ là



Ví dụ 2. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$.

Lời giải.

Ta có $a = -\frac{1}{2}$, $b = 2$, $c = -2$. Suy ra tọa độ đỉnh là $I(2; 0)$.

Vậy bảng biến thiên là

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$-\infty$	0	$-\infty$

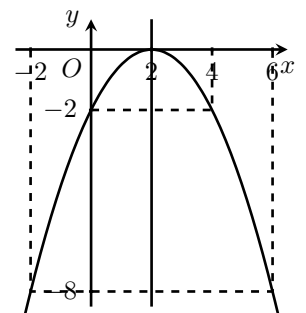
Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

*Vẽ đồ thị: Ta có đỉnh là $I(2; 0)$ và trục đối xứng là $x = 2$.

Bảng giá trị

x	-2	0	2	4	6
y	-8	-2	0	-2	-8

Ta có đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$ là



Ví dụ 3. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -3x^2 + 2x - 1$.

Lời giải.

Ta có $a = -3, b = 2, c = -1$. Suy ra tọa độ đỉnh là $I\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

Vậy bảng biến thiên là

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
y	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$-\infty$

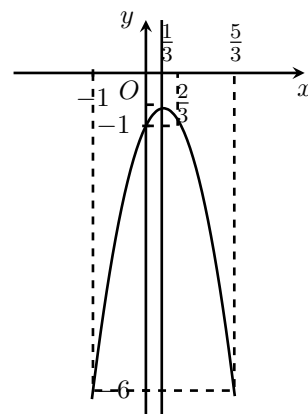
Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

*Vẽ đồ thị: Ta có đỉnh là $I\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ và trục đối xứng là $x = \frac{1}{3}$.

Bảng giá trị

x	-1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$
y	-6	-1	$-\frac{2}{3}$	-1	-6

Ta có đồ thị của hàm số $y = -3x^2 + 2x - 1$ là



□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = -x^2 + 2x + 3$.

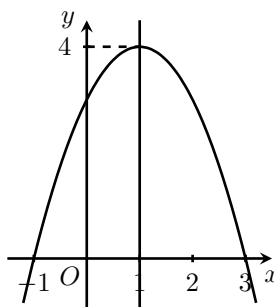
c) $y = 3x^2 - 2x + 1$.

b) $y = -x^2 + 2x - 2$.

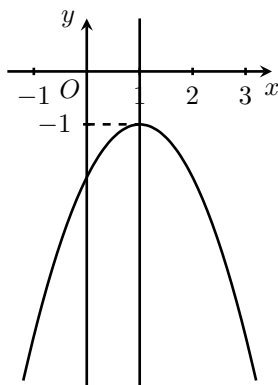
d) $y = -3x^2 + 2x - 1$.

Lời giải.

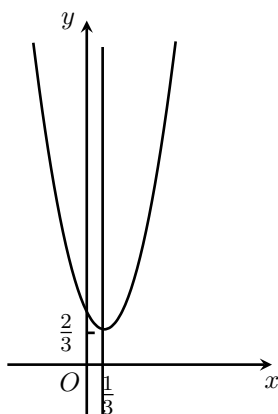
a) Đồ thị



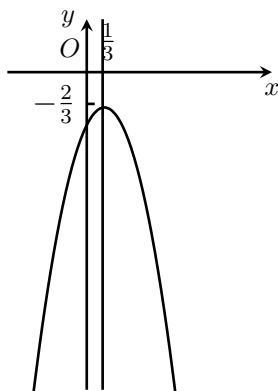
b) Đồ thị



c) Đồ thị



d) Đồ thị



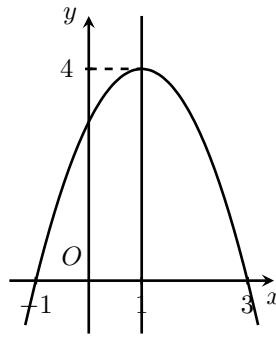
□

Bài 2. Cho hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$.

- Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P) của hàm số.
- Tìm các giá trị của x để $y > 0$ và $y < 0$.

Lời giải.

- Đồ thị



b) Để $y > 0$ thì $x \in (-1; 3)$ và $y < 0$ thì $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

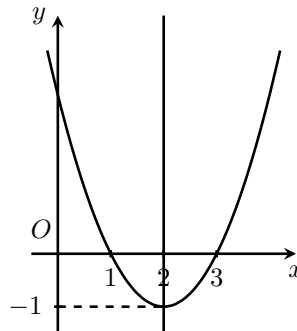
□

Bài 3. Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$.

- Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P) của hàm số.
- Tìm các giá trị của x để $y > 0$ và $y < 0$.

Lời giải.

a) Đồ thị



b) Để $y > 0$ thì $x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$ và $y < 0$ thì $x \in (1; 3)$.

□

Dạng 2. Tìm tọa độ của đỉnh và các giao điểm của parabol với các trục tọa độ. Tọa độ giao điểm giữa parabol (P) và một đường thẳng.

Phương pháp:

- Dựa vào các công thức cần nhớ để tìm tọa độ của đỉnh, giao điểm của parabol với các trục tọa độ. Tuy nhiên, khi tìm tọa độ của đỉnh I thì ta chỉ cần tìm hoành độ $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Rồi sau đó thế x_0 vào hàm số ban đầu để tìm $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$ là tung độ của đỉnh I .
- Dựa vào phương trình hoành độ giao điểm để xác định giao điểm của parabol (P) với đường thẳng.

BÀI TẬP DẠNG 2

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ có đồ thị là parabol (P). Tìm tọa độ của đỉnh, giao điểm của đồ thị với trục tung và trục hoành.

Lời giải.

Từ đề ta có: $a = 1, b = -4, c = 3$. Vậy hoành độ của đỉnh I là: $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2.1} = 2$.
 $\Rightarrow y_0 = 2^2 - 4.2 + 3 = -1$. Vậy đỉnh $I(2; -1)$.

Giao điểm của (P) và trục Oy : Cho $x = 0 \Rightarrow y = 3$. Vậy (P) cắt trục Oy tại điểm $A(0; 3)$.

Giao điểm của (P) với trục Ox : Xét phương trình: $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$. Vậy (P) cắt trục Ox tại hai điểm $B(1; 0)$ và $C(3; 0)$. □

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = -x^2 - 3x + 1$ có đồ thị là parabol (P) . Tìm tọa độ của đỉnh, giao điểm của đồ thị với trục tung và trục hoành.

Lời giải.

Từ đề ta có: $a = -1, b = -3, c = 1$. Vậy hoành độ của đỉnh I là: $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{-2 \cdot 1} = -\frac{3}{2}$.

$\Rightarrow y_0 = -\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 1 = \frac{13}{4}$. Vậy đỉnh $I\left(-\frac{3}{2}; \frac{13}{4}\right)$.

Giao điểm của (P) và trục Oy : Cho $x = 0 \Rightarrow y = 1$. Vậy (P) cắt trục Oy tại điểm $A(0; 1)$.

Giao điểm của (P) với trục Ox : Xét phương trình: $-x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2} \end{cases}$. Vậy (P) cắt

trục Ox tại hai điểm $B\left(\frac{-3 + \sqrt{13}}{2}; 0\right)$ và $C\left(\frac{-3 - \sqrt{13}}{2}; 0\right)$. □

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = -x^2 + x + 2$ có đồ thị (P) và đường thẳng $d: 4x + y - 3 = 0$. Tìm giao điểm của đồ thị (P) và đường thẳng d .

Lời giải.

Đường thẳng $d: y = -4x + 3$. Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$-x^2 + x + 2 = -4x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = 5 \Rightarrow y = 11 \end{cases}$. Vậy đồ thị (P) và đường thẳng d cắt nhau

tại hai điểm: $A(0; 1)$ và $B(5; 11)$. □

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = -x^2 - x + 2$ có đồ thị (P) và đường thẳng $d: x - y + 3 = 0$. Tìm giao điểm của đồ thị (P) và đường thẳng d .

Lời giải.

Đường thẳng $d: y = x + 3$. Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$-x^2 - x + 2 = x + 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = 2$. Vậy (P) và d tiếp xúc với nhau tại điểm $A(-1; 2)$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm tọa độ đỉnh, giao điểm với trục tung, trục hoành (nếu có) của các parabol sau:

a) $y = x^2 + 4x - 1$.

b) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 4$.

Lời giải.

- a) Đáp số: Tọa độ đỉnh $I(-2; -5)$; giao điểm của parabol (P) với trục tung và trục hoành lần lượt là: $A(0; -1)$; $B(-2 + \sqrt{5}; 0)$; $C(-2 - \sqrt{5}; 0)$.
- b) Đáp số: Tọa độ đỉnh $I(2; -2)$; giao điểm của parabol (P) với trục tung là: $A(0; -4)$; đồ thị không cắt trục hoành.

□

Bài 2. Tìm giao điểm của parabol (P) và đường thẳng d trong các trường hợp sau:

- a) $y = -x^2$ và $y = x - 2$.
 b) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$ và $y = -3x + 3$.
- c) $y = x^2 - x - 3$ và $y = x - 4$.
 d) $y = x^2 + 6x + 4$ và $y = -x + 1$.

Lời giải.

- a) Số giao điểm của (P) và d là số nghiệm của phương trình:

$$-x^2 = x - 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = -1 \\ x = -2 \Rightarrow y = -4 \end{cases}. \text{ Vậy } (P) \text{ và } d \text{ cắt nhau tại 2 điểm } A(1; -1)$$

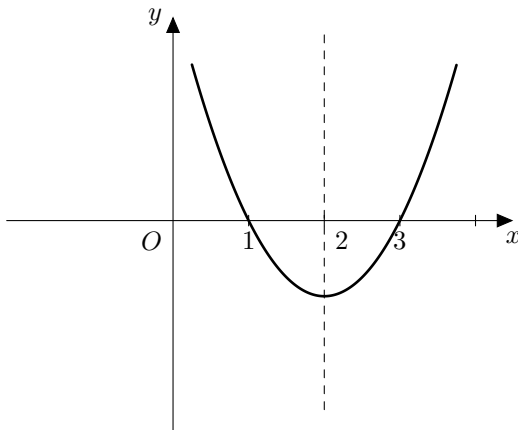
và $B(-2; -4)$.

- b) (P) và d không cắt nhau.
 c) (P) và d tiếp xúc với nhau tại $A(1; -3)$.
 d) (P) và d không cắt nhau.

□

Bài 3. Cho parabol (P) : $y = x^2 - 4x + 3$. Dùng (P) tìm tập hợp các giá trị của x để $y \leq 0$.

Lời giải.



Đáp số: Từ hình vẽ ta có: $1 \leq x \leq 3$.

□

Dạng 3. Dựa vào đồ thị biện luận theo m số giao điểm của parabol (P) và đường thẳng.

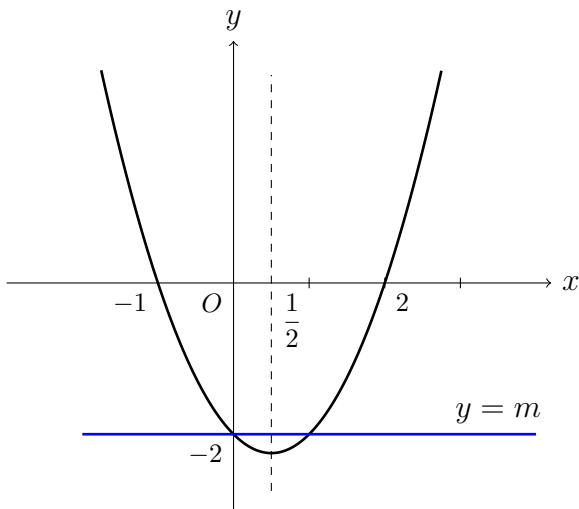
CÂU DẪN

- Sử dụng đồ thị để biện luận số nghiệm của phương trình.
- Sử dụng phương trình hoành độ giao điểm để đưa bài toán tìm giao điểm về bài toán biện luận số nghiệm của phương trình.

❖❖❖ **BÀI TẬP DẠNG 3** ❖❖❖

Ví dụ 1. Cho parabol $(P): y = x^2 - x - 2$. Dùng đồ thị (P) , biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $x^2 - x - (m - 2) = 0$.

Lời giải.



Xét phương trình: $x^2 - x - (m - 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = m$ (1).

Nghiệm số của phương trình là hoành độ giao điểm của 2 đường parabol $(P): y = x^2 - x - 2$ và đường thẳng $\Delta: y = m$. Theo đồ thị ta có kết quả:

- $m < -\frac{9}{4}$: (Δ) và (P) không có điểm chung $\Rightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm.
- $m = -\frac{9}{4}$: (Δ) tiếp xúc với $(P) \Rightarrow$ phương trình (1) có nghiệm kép.
- $m > -\frac{9}{4}$: (Δ) cắt (P) tại 2 điểm $\Rightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt.

□

Ví dụ 2. Cho parabol $(P): y = x(2 - x) + 3$ và đường thẳng $d: y = -x + m$. Định m để:

- a) d cắt (P) tại hai điểm phân biệt.
- b) d và (P) tiếp xúc.
- c) d và (P) không có điểm chung.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) :

$$x(2 - x) + 3 = -x + m \Leftrightarrow x^2 - 3x + m - 3 = 0 \quad (1).$$

$$\Delta = 9 - 4(m - 3) = -4m + 21$$

- a) d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt:

$$\Leftrightarrow \Delta = -4m + 21 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{21}{4}.$$

- b) d và (P) tiếp xúc $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có nghiệm kép: $\Leftrightarrow \Delta = -4m + 21 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{21}{4}.$

- c) d và (P) không có điểm chung $\Leftrightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm: $\Leftrightarrow \Delta = -4m + 21 < 0 \Leftrightarrow m > \frac{21}{4}.$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hàm số: $y = x^2 - 2x - 3$ có đồ thị là parabol (P) và đường thẳng $d: y = 4x + m$. Biện luận theo m số giao điểm của d và (P).

Lời giải.

HD: Sử dụng phương trình hoành độ giao điểm để đưa bài toán về biện luận theo m số nghiệm của phương trình.

Đáp số: $m > -12$: d cắt (P) tại hai điểm phân biệt; $m = -12$: d tiếp xúc với (P); $m < -12$: d và (P) không có điểm chung. $\square$

Bài 2. Cho parabol $y = -\frac{1}{4}x^2$ và đường thẳng $y = x + m$. Với giá trị nào của m thì parabol và đường thẳng cắt nhau tại hai điểm phân biệt?

Lời giải.

$m < 1$ thì parabol và đường thẳng cắt nhau tại hai điểm phân biệt. $\square$

Bài 3. Cho parabol $y = \frac{1}{2}x^2$. Tìm giá trị của m và n để đường thẳng $y = mx + n$ đi qua điểm $(0; -1)$ và tiếp xúc với parabol.

Lời giải.

Đáp số: $m = \sqrt{2}; n = -1$ và $m = -\sqrt{2}; n = -1$. $\square$

Bài 4. Cho hai parabol $y = -x^2 + 2x + 3$ và $y = \frac{x^2}{2} - 4x + 3$. Tìm m để đường thẳng $y = m$ cắt cả hai parabol.

Lời giải.

HD: vẽ hai parabol trên 1 hệ trục tọa độ.

Đáp số: $-5 \leq m \leq 4$. $\square$

Dạng 4. Xác định hàm số bậc hai khi biết các yếu tố liên quan.

Ta thực hiện theo các bước sau.

Bước 1: Giả sử parabol (P): $y = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$.

Bước 2: Dựa vào giả thiết đề bài để xác định a, b, c .

Một số giả thiết thường gặp ở bước này và cách xử lí.

- Parabol đi qua điểm $M(x_0; y_0) \Rightarrow y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$.
- Parabol có trục đối xứng $x = x_0 \Rightarrow x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Parabol có đỉnh $I(x_0; y_0) \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{b}{2a} \\ y_0 = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases}$.
- Parabol có giá trị nhỏ nhất (hoặc giá trị lớn nhất) bằng $y_0 \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ y_0 = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases}$
 (hoặc $\begin{cases} a < 0 \\ y_0 = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases}$).

Bước 3: Kết luận.

BÀI TẬP DẠNG 4

Ví dụ 1. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + 3$, biết rằng parabol đi qua hai điểm $A(1; 2)$ và $B(-2; 11)$.

Lời giải.

Parabol $(P) : y = ax^2 + bx + 3$ ($a \neq 0$). Ta có $c = 3$.

Vì (P) đi qua $A(1; 2)$ nên $2 = a + b + 3 \Leftrightarrow a + b = -1$ (1).

Vì (P) đi qua $B(-2; 11)$ nên $11 = 4a - 2b + 3 \Leftrightarrow 4a - 2b = 8$ (2).

Từ (1) và (2) ta có
$$\begin{cases} a + b = -1 \\ 4a - 2b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}.$$

Vậy parabol $(P) : y = x^2 - 2x + 3$. □

Ví dụ 2. Cho parabol $(P) : y = -x^2 + bx + c$. Xác định b, c biết (P) đi qua điểm $M(-2; 4)$ và có trục đối xứng $x = -2$.

Lời giải.

Parabol $(P) : y = -x^2 + bx + c$. Ta có $a = -1$.

Vì (P) có trục đối xứng $x = -2$ nên $-\frac{b}{2a} = -2 \Leftrightarrow b = 4a = 4 \cdot (-1) = -4$.

Vì $M(-2; 4) \in (P)$ nên $4 = -(-2)^2 + b \cdot (-2) + c \Leftrightarrow 4 = -4 - 2b + c \Leftrightarrow -2b + c = 8$. Mà $b = -4$ nên $8 + c = 8 \Leftrightarrow c = 0$.

Vậy $(P) : y = -x^2 - 4x$. □

Ví dụ 3. Cho parabol $(P) : y = ax^2 - 2x + c$. Xác định parabol (P) biết (P) có đỉnh $I(1; -3)$.

Lời giải.

Parabol $(P) : y = ax^2 - 2x + c$. Ta có $b = -2$.

Cách 1: Vì (P) có đỉnh $I(1; -3)$ nên (P) có trục đối xứng $x = 1$.

Khi đó $-\frac{b}{2a} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{2a} = 1 \Leftrightarrow a = 1$.

Hơn nữa, vì đỉnh $I(1; -3) \in (P)$ nên $-3 = 1 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + c \Leftrightarrow c = -2$. Vậy $(P) : y = x^2 - 2x - 2$.

Cách 2: Vì (P) có đỉnh $I(1; -3)$ nên
$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1 \\ -\frac{\Delta}{4a} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ b^2 - 4ac = 12a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 = -2a \\ (-2)^2 - 4ac = 12a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 4 - 4c = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = -2 \end{cases}.$$
 Vậy $(P) : y = x^2 - 2x - 2$. □

Ví dụ 4. Cho parabol $(P) : y = ax^2 + bx + c$. Xác định a, b, c biết (P) có giá trị nhỏ nhất bằng -5 và đi qua hai điểm $M(1; -1)$, $N(0; 4)$.

Lời giải.

Parabol $(P) : y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

Vì $M(1; -1) \in (P)$ nên $-1 = a + b + c$ (1).

Vì $N(0; 4) \in (P)$ nên $4 = c$ (2).

Vì (P) có giá trị nhỏ nhất bằng -5 nên $\begin{cases} a > 0 \\ -\frac{\Delta}{4a} = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 4ac = 20a \end{cases} \quad (3)$.

Từ (1), (2) và (3), ta có $\begin{cases} a + b + 4 = -1 \\ b^2 - 16a = 20a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -5 \\ b^2 - 36a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 - b \\ b^2 - 36(-5 - b) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 - b \\ b^2 + 36b + 180 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -6 \\ a = 1 \text{ (nhận)} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} b = -30 \\ a = 25 \text{ (nhận)} \end{cases}$.

Vậy $(P_1) : y = x^2 - 6x + 4$ và $(P_2) : y = 25x^2 - 30x + 4$. □

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = x^2 - mx + m + 1$ với $m \in \mathbb{R}$. Xác định m để đồ thị hàm số là parabol có đỉnh nằm trên đường thẳng $y = x$ sao cho hoành độ đỉnh không âm.

Lời giải.

Với giá trị m cố định, gọi $I(x_0; y_0)$ là đỉnh của parabol ($x_0 \geq 0$).

Khi đó $\begin{cases} x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{m}{2} \\ y_0 = x_0^2 - mx_0 + m + 1 \end{cases}$. Suy ra $y_0 = \frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{2} + m + 1$.

Vì đỉnh I nằm trên đường thẳng $y = x$ nên $y_0 = x_0 \Leftrightarrow \frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{2} + m + 1 = \frac{m}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 + \sqrt{5} \\ m = 1 - \sqrt{5} \end{cases}$.

Vì $x_0 \geq 0$ nên $m \geq 0$, do đó $m = 1 + \sqrt{5}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho parabol $(P) : y = ax^2 + bx + 4$. Xác định a, b biết:

- (P) đi qua hai điểm $M(-1; 7)$ và $N(-4; 4)$.
- (P) có trục đối xứng $x = 3$ và đi qua điểm $A(2; -4)$.
- (P) có tung độ đỉnh bằng $\frac{9}{2}$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 4.

Lời giải.

a) Thay tọa độ điểm M, N vào (P) ta có hệ phương trình $\begin{cases} a - b = 3 \\ 16a - 4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -4 \end{cases}$.

b) (P) có trục đối xứng $x = 3$ nên $b = -6a$.

Mà $A(2; -4) \in (P)$ nên $-4 = 4a + 2b + 4 \Leftrightarrow -8a = -8 \Leftrightarrow a = 1$. Suy ra $b = -6$.

c) Hoành độ đỉnh $x = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow b^2 - 4ac = -18a \Leftrightarrow b^2 = -2a \Leftrightarrow a = -\frac{b^2}{2}$.

(P) cắt Ox tại điểm có tọa độ $(4; 0)$ nên $0 = 16a + 4b + 4 \Leftrightarrow -8b^2 + 4b + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Với $b = 1$ thì $a = -\frac{1}{2}$. Với $b = -\frac{1}{2}$ thì $a = -\frac{1}{8}$. □

Bài 2. Cho parabol $(P) : y = -x^2 + bx + c$. Xác định b, c biết:

- (P) có đỉnh $I(1; 4)$.
- (P) đối xứng qua trục tung và có giá trị lớn nhất bằng 3.
- (P) có hoành độ đỉnh bằng tung độ đỉnh và đi qua gốc tọa độ O .

Lời giải.

$$\text{a) Vì } (P) \text{ có đỉnh } I(1; 4) \text{ nên } \begin{cases} -\frac{b}{2 \cdot (-1)} = 1 \\ 4 = -1 + b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = 3 \end{cases}.$$

$$\text{b) Vì } (P) \text{ đối xứng qua trục tung nên } -\frac{b}{-2} = 0 \Leftrightarrow b = 0.$$

$$\text{Mà } (P) \text{ có giá trị lớn nhất bằng 3 nên } b^2 - 4ac = -12a \Leftrightarrow 4c = 12 \Leftrightarrow c = 3.$$

$$\text{c) Vì } (P) \text{ đi qua gốc tọa độ } O \text{ nên } c = 0.$$

$$\text{Mà hoành độ đỉnh bằng tung độ đỉnh nên } -\frac{b}{-2} = -\frac{b^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0}{-4} \Leftrightarrow 2b = b^2 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = 2 \end{cases}.$$

□

Bài 3. Cho parabol $(P) : y = ax^2 + 3x + c$. Xác định a, c biết:

$$\text{a) } (P) \text{ có hoành độ đỉnh bằng } -1 \text{ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 4.}$$

$$\text{b) } (P) \text{ có tung độ đỉnh gấp 2 lần hoành độ đỉnh và đi qua điểm } A(1; 4).$$

$$\text{c) } (P) \text{ đạt giá trị nhỏ nhất bằng } -\frac{9}{2} \text{ và đi qua gốc tọa độ } O.$$

Lời giải.

$$\text{a) Vì } (P) \text{ cắt trục tung tại điểm } (0; 4) \text{ nên } c = 4.$$

$$\text{Mà } (P) \text{ có hoành độ đỉnh bằng } -1 \text{ nên } -\frac{3}{2a} = -1 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}.$$

$$\text{b) Vì } A(1; 4) \in (P) \text{ nên } a + 3 + c = 4 \Leftrightarrow a + c = 1 \Leftrightarrow a = 1 - c \text{ (1).}$$

$$\text{Mà } (P) \text{ có tung độ đỉnh gấp 2 lần hoành độ đỉnh nên } \frac{-\Delta}{4a} = 2 \cdot \frac{-b}{2a} \Leftrightarrow \frac{9 - 4ac}{4a} = \frac{3}{a}$$

$$\Leftrightarrow 9a - 4a^2c = 12a \Leftrightarrow 4a^2c = -3a \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ (loại)} \\ 4ac = -3 \text{ (2)} \end{cases}.$$

$$\text{Thay (1) vào (2) ta có } 4(1 - c)c = -3 \Leftrightarrow 4c^2 - 4c - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{2} \\ c = \frac{3}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{c) Vì } O \in (P) \text{ nên } c = 0.$$

$$\text{Mà } (P) \text{ đạt giá trị nhỏ nhất bằng } -\frac{9}{2} \text{ nên } \begin{cases} -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{9}{2} \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

□

Bài 4. Xác định parabol (P) biết:

$$\text{a) } (P) \text{ đi qua ba điểm } A(1; 7), B(0; 5) \text{ và } C(4; 1). \text{ } (-x^2 + 3x + 5)$$

$$\text{b) } (P) \text{ có trục đối xứng } x = 3 \text{ và đi qua hai điểm } M(-1; 0), N(0; 7).$$

$$\text{c) } (P) \text{ có đỉnh nằm trên trục hoành và đi qua hai điểm } H(-2; 1), K(0; 9).$$

Lời giải.

$$\text{a) } (P) \text{ đi qua ba điểm } A(1; 7), B(0; 5) \text{ và } C(4; 1) \text{ nên ta có hệ phương trình}$$

$$\begin{cases} a + b + c = 7 \\ c = 5 \\ 16a + 4b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \\ c = 5 \end{cases}.$$

b) (P) có trục đối xứng $x = 3$ nên $b = -6a$.

Mà (P) đi qua hai điểm $M(-1; 0)$, $N(0; 7)$ nên $\begin{cases} a - b + c = 0 \\ c = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 7 \\ 7a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 7 \\ a = -1 \end{cases}$. Suy ra $b = 6$.

c) Vì (P) có đỉnh nằm trên trục hoành nên $-\frac{\Delta}{4a} = 0 \Leftrightarrow b^2 - 4ac = 0$.

Mà (P) đi qua $H(-2; 1)$, $K(0; 9)$ nên $\begin{cases} 4a - 2b + c = 1 \\ c = 9 \end{cases}$.

Do đó ta có $\begin{cases} b^2 - 36a = 0 \\ 4a - 2b = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{b-4}{2} \\ b^2 - 18b + 72 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 12 \\ a = 4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} b = 6 \\ a = 1 \end{cases}$.

□

Bài 5. Cho parabol $(P) : y = ax^2 - 2ax + 2a$ với $(a \neq 0)$. Xác định a để (P) có đỉnh nằm trên đường thẳng $2x - y = 0$.

Lời giải.

(P) có đỉnh $I(1; a)$. Vì I nằm trên đường thẳng $2x - y = 0$ nên $2 - a = 0 \Leftrightarrow a = 2$.

□

Bài 6. Xác định parabol (P) biết (P) có đỉnh I cách đều hai trục tọa độ, đi qua gốc tọa độ $O(0; 0)$ và nhận $x = \frac{1}{2}$ làm trục đối xứng.

Lời giải.

Giả sử $(P) : y = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$.

Vì (P) đi qua điểm O nên $c = 0$.

Vì (P) nhận $x = \frac{1}{2}$ làm trục đối xứng nên $-\frac{b}{2a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b = -a$.

Vì (P) cách đều hai trục tọa độ nên $\left| -\frac{b}{2a} \right| = \left| -\frac{\Delta}{4a} \right| \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{|b|}{4} \Leftrightarrow |b| = 2 \Leftrightarrow b = \pm 2$.

Với $b = 2$ thì $a = -2$, với $b = -2$ thì $a = 2$.

□

Bài 7. Xác định parabol (P) biết (P) đi qua điểm $A(0; 1)$ và có đỉnh I thuộc đường thẳng $x + y - 3 = 0$ sao cho độ dài đoạn IM ngắn nhất, biết $M(-1; 3)$.

Lời giải.

Giả sử $(P) : y = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$.

Gọi $I(x_0; y_0)$ là đỉnh của parabol. Vì I thuộc đường thẳng $x + y - 3 = 0$ nên $y_0 = 3 - x_0$. Do đó

$$IM = \sqrt{(x_0 + 1)^2 + (y_0 - 3)^2} = \sqrt{(x_0 + 1)^2 + (-x_0)^2} = \sqrt{2x_0^2 + 2x_0 + 1}.$$

Vì $2x_0^2 + 2x_0 + 1 = 2\left(x_0 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$ với mọi $x_0 \in \mathbb{R}$, nên IM ngắn nhất khi $x_0 = -\frac{1}{2}$.

Suy ra $y_0 = \frac{7}{2}$. Nên (P) có đỉnh $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$.

Vì $A(0; 1) \in (P)$ nên $c = 1$. Hơn nữa ta có $\begin{cases} -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2} \\ -\frac{\Delta}{4a} = \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a \\ b^2 - 4a = -14a \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = a \\ b^2 = -10b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 0 \text{ (loại)} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} b = -10 \\ a = -10 \end{cases}$.

□

Dạng 5. Các bài toán liên quan đồ thị hàm số trị tuyệt đối của một hàm bậc hai

Xét hàm số $y = |ax^2 + bx + c|$ có đồ thị là (P_1) . Để ý rằng

$$y = |ax^2 + bx + c| = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{nếu } ax^2 + bx + c \geq 0 \\ -(ax^2 + bx + c) & \text{nếu } ax^2 + bx + c \leq 0, \end{cases}$$

nên để vẽ (P_1) , ta làm như sau.

- Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = ax^2 + bx + c$.
- Giữ nguyên phần của (P) mà ở phía trên trục hoành.
- Lấy đối xứng qua trục hoành đối với phần của (P) mà ở dưới trục hoành (sau đó bỏ đi phần của (P) mà ở dưới trục hoành).

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 5 ❖❖❖

Ví dụ 1. Biện luận theo tham số m số nghiệm của phương trình $|x^2 - 4x + 3| = m$.

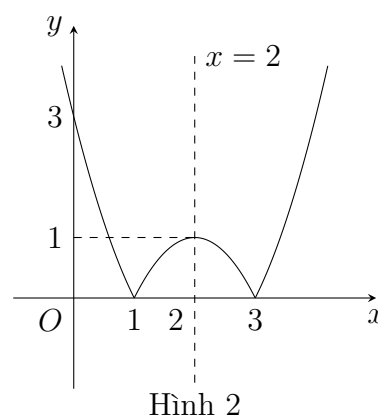
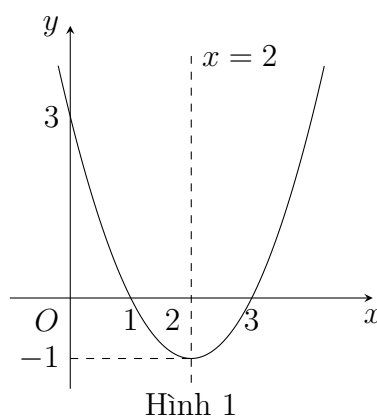
Lời giải.

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |x^2 - 4x + 3|$ với đường thẳng (nằm ngang) $y = m$.

Ta vẽ $(P) : y = x^2 - 4x + 3$ (Hình 1). Từ đó, ta suy ra đồ thị (P_1) của hàm số $y = |x^2 - 4x + 3|$ (Hình 2).

Từ đồ thị (P_2) , ta có kết luận như sau.

- $m < 0$: phương trình vô nghiệm.
- $m = 0$ hoặc $m > 1$: hai nghiệm.
- $0 < m < 1$: 4 nghiệm.
- $m = 1$: 3 nghiệm.



□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $|x^2 + 3x| = m$.

Lời giải.

Giải tương tự ví dụ 1.

Đáp số:

- a) $m < 0$: phương trình vô nghiệm.
- b) $m = 0$ hoặc $m > \frac{9}{4}$: hai nghiệm.
- c) $0 < m < \frac{9}{4}$: 4 nghiệm.
- d) $m = \frac{9}{4}$: 3 nghiệm.

□

Dạng 6. Các bài toán liên quan đồ thị hàm số đối với trị tuyệt đối của biến

Xét hàm số $y = ax^2 + b|x| + c$. Khi $x \geq 0$ hoặc $x \leq 0$, hàm số trở thành hàm số bậc hai. Hơn nữa, hàm số đã cho là hàm số chẵn, nên đồ thị của nó nhận trục tung làm trục đối xứng.

Do đó, ta có thể vẽ đồ thị (P_2) của hàm số $y = ax^2 + b|x| + c$ như sau.

- a) Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = ax^2 + bx + c$.
- b) Bỏ phần của (P) ở bên trái trục tung. Sau đó lấy đối xứng qua trục tung đối với phần của (P) mà ở bên phải trục tung.

Lưu ý: Ta có thể vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2 + b|x| + c$ từ đồ thị hàm số $y = ax^2 - bx + c$.

BÀI TẬP DẠNG 6

Ví dụ 1. a) Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$.

b) Tìm m để phương trình $x^2 - 4|x| + 3 = m$ có 4 nghiệm phân biệt.

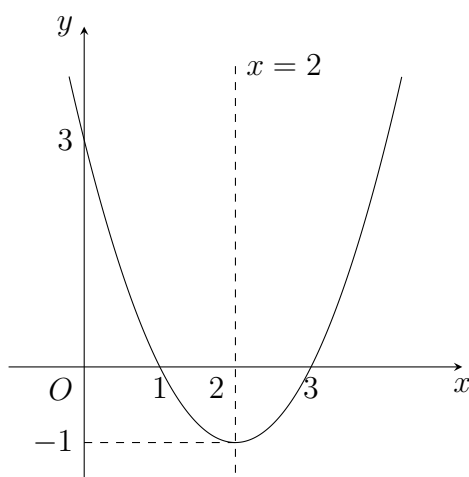
Lời giải.

a) Xem hình 3.

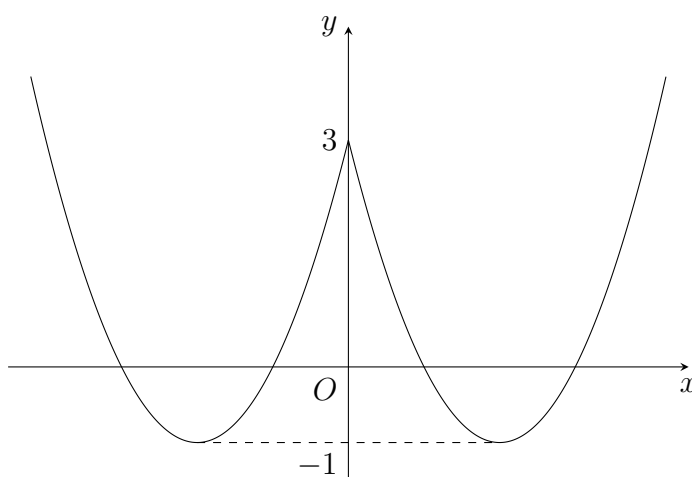
b) Phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = x^2 - 4|x| + 3$ và đường thẳng $y = m$.

Từ đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ ở câu a), ta suy ra đồ thị của hàm số $y = x^2 - 4|x| + 3$ như ở hình 4.

Từ đó, ta suy ra tất cả các giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $-1 < m < 3$.



Hình 3



Hình 4

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm m để phương trình $2x^2 - |x| = m$ có đúng 3 nghiệm.

Lời giải.

Giải tương tự ví dụ 2.

Đáp số: $m = 0$.

□

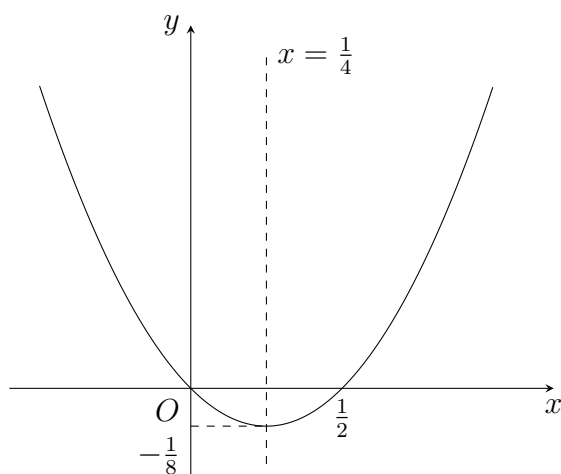
Bài 2. Hỏi phương trình $|2x^2 - |x|| = m$ có tối đa bao nhiêu nghiệm?

Lời giải.

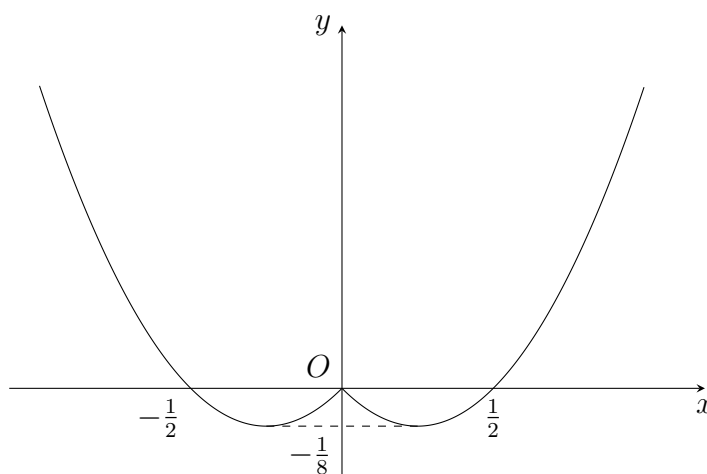
Ta vẽ đồ thị hàm số $y = |2x^2 - |x||$.

Trước hết, vẽ đồ thị hàm số $y = 2x^2 - x$ (hình 5), rồi suy ra đồ thị hàm số $y = 2x^2 - |x|$ (hình 6), từ đó, vẽ được đồ thị hàm số $y = |2x^2 - |x||$ (hình 7).

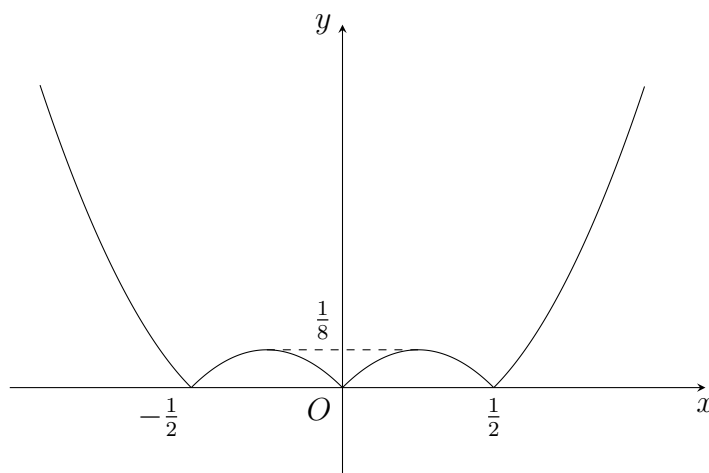
Đáp số: phương trình đã cho có tối đa 6 nghiệm.



Hình 5



Hình 6



Hình 7

□

Dạng 7. Tính đơn điệu của hàm bậc hai

Sự biến thiên của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Nếu $a > 0$ thì hàm số nghịch biến (*giảm*) trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ và đồng biến (*tăng*) trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$+\infty$

- Nếu $a < 0$ thì hàm số đồng biến (*tăng*) trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ và nghịch biến (*giảm*) trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$-\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$-\infty$

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 7 ❖❖❖

Ví dụ 1. Xét sự biến thiên của hàm số $y = x^2 - 2x + 3$.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Ta có $x = -\frac{b}{2a} = 1$ và $y = -\frac{\Delta}{4a} = -4$.
- Do $a = 1 > 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$+\infty$	-4	$+\infty$

□

Ví dụ 2. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = -x^2 + 2x - 3$.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Ta có $x = -\frac{b}{2a} = 1$.
- Do $a = -1 < 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$. □

Ví dụ 3. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = x^2 + 2|x|$.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Ta có $y = x^2 + 2|x| = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{khi } x < 0 \\ x^2 + 2x & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$
- Mặt khác, hàm số $y = x^2 - 2x$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$, hàm số $y = x^2 + 2x$ nghịch biến trên $(-\infty; -1)$ và đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.
- Từ đó suy ra hàm số $y = x^2 + 2|x|$ nghịch biến khi $x < 0$ và đồng biến khi $x \geq 0$.

□

Ví dụ 4. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^2 + (m-3)x + m$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Ta có $x = -\frac{b}{2a} = \frac{3-m}{2}$.
- Để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$\frac{3-m}{2} \leq 1 \Leftrightarrow 3-m \leq 2 \Leftrightarrow m \geq 1.$$

- Vậy $m \geq 1$. □

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = (m - 1)x^2 + 4x - 5$ với $m \neq 1$. Tìm m sao cho hàm số đồng biến trên $(1; 7)$.

Lời giải.

- Với $m > 1$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{-2}{m-1}; +\infty\right)$. Vậy, để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 7)$ thì $1 \geq \frac{-2}{m-1} \Leftrightarrow m \geq -1$. Kết hợp điều kiện ta được $m > 1$.
- Với $m < 1$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{-2}{m-1}\right)$. Vậy, để hàm số đồng biến trên $(1; 7)$ thì $7 \leq \frac{-2}{m-1} \Leftrightarrow 7m - 7 \geq -2 \Leftrightarrow m \geq \frac{5}{7}$.

Tóm lại $m \in \left[\frac{5}{7}; 1\right) \cup (1; +\infty)$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Xét sự biến thiên của hàm số $y = x^2 - 6x - 5$.

Lời giải.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 3)$ và đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$. □

Bài 2. Xét tính đơn điệu của hàm số $y = -x^2 + 2017$.

Lời giải.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$. □

Bài 3. Xác định các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = x|x - 2|$.

Lời giải.

- Ta có $y = x|x - 2| = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{khi } x < 2 \\ x^2 - 2x & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$.

- Mặt khác, hàm số $y = -x^2 + 2x$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$, hàm số $y = x^2 - 2x$ nghịch biến trên $(-\infty; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Từ đó suy ra

+ Hàm số $y = x|x - 2|$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$, $[2; +\infty)$.

+ Hàm số $y = x|x - 2|$ nghịch biến trên các khoảng $(1; 2)$. □

Bài 4. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -x^2 + (2m - 3)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -5)$.

Lời giải.

- Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

- Ta có $x = -\frac{b}{2a} = \frac{2m - 3}{2}$.

- Do $a = -1 < 0$, nên để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -5)$ khi và chỉ khi

$$-\frac{b}{2a} = \frac{2m - 3}{2} \geq -5 \Leftrightarrow m \geq -\frac{7}{2}.$$

- Vậy $m \geq -\frac{7}{2}$. □

Bài 5. Cho hàm số $y = (m-1)x^2 + 4x - 5$ với $m \neq 1$. Tìm m sao cho hàm số nghịch biến trên $(-5; 2)$.

Lời giải.

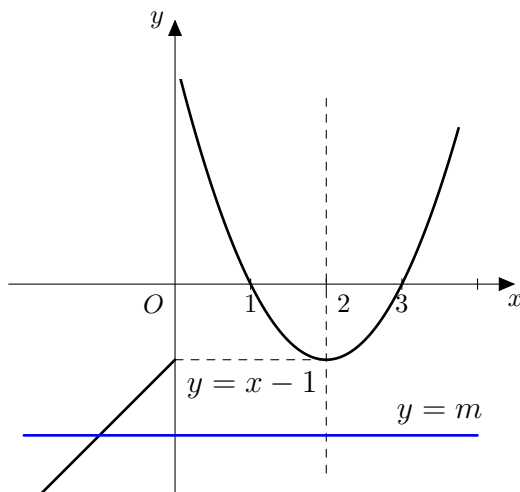
- Với $m < 1$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{-2}{m-1}; +\infty\right)$. Vậy, để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-5; 2)$ thì $-5 \geq \frac{-2}{m-1} \Leftrightarrow -5m + 5 \leq -2 \Leftrightarrow m \geq \frac{7}{5}$, điều này mâu thuẫn với điều kiện.
- Với $m > 1$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{-2}{m-1}\right)$. Vậy, để hàm số nghịch biến trên $(-5; 2)$ thì $2 \leq \frac{-2}{m-1} \Leftrightarrow 2m - 2 \leq -2 \Leftrightarrow m \leq 0$, điều này mâu thuẫn với điều kiện.

Vậy không tồn tại giá trị của m . □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 6. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{khi } x \geq 0 \\ x - 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $f(x) = m$.

Lời giải.



Dựa vào hình vẽ ta có: $m \leq -1$: phương trình có 1 nghiệm; $m > -1$: phương trình có 2 nghiệm phân biệt. □

Bài 7. Cho hàm số $y = x^2 - 2mx + m^2 - 1$ có đồ thị là (C_m) . Chứng minh rằng (C_m) luôn cắt xx' tại 2 điểm phân biệt A, B . Tìm m để A, B đối xứng nhau qua gốc tọa độ O .

Lời giải.

Để (C_m) luôn cắt Ox tại 2 điểm phân biệt thì $\Delta > 0, \forall m$. Để A, B đối xứng nhau qua gốc tọa độ O thì $m = 0$. □

Bài 8. Cho hàm số $y = x^2 - 4mx + 4m + 3$ (P_m) với $m \in \mathbb{R}$. Viết phương trình đường thẳng d vuông góc với đường thẳng $\Delta: y = x - 1$ và đi qua điểm cố định của họ parabol (P_m) .

Lời giải.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà họ parabol (P_m) luôn đi qua.

Khi đó $y_0 = x_0^2 - 4mx_0 + 4m + 3$, với mọi m .

Suy ra $y_0 - x_0^2 - 3 = 4m(1 - x_0)$, với mọi m .

$$\text{Nên } \begin{cases} 1 - x_0 = 0 \\ y_0 - x_0^2 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 4 \end{cases}. \text{ Vậy } M(1; 4).$$

Vì d vuông góc với đường thẳng $\Delta: y = x - 1$ nên $d: y = -x + b$, với $b \neq -1$. Mà $M(1; 4) \in d$ nên $4 = -1 + b \Leftrightarrow b = 5$. Vậy $d: y = -x + 5$. $\square$

Bài 9. Cho hàm số $y = x^2 - (m-1)x + m - 2$ (P_m) với $m \in \mathbb{R}$. Tìm tất cả các giá trị của m để khoảng cách từ đỉnh của (P_m) đến trục hoành bằng $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Với m tùy ý, gọi $I(x_0; y_0)$ là đỉnh của (P_m).

Khi đó khoảng cách từ đỉnh của (P_m) đến trục hoành bằng $|y_0| = \left| \frac{(m-1)^2 - 4(m-2)}{4} \right|$.

Theo giả thiết $|y_0| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left| \frac{(m-1)^2 - 4(m-2)}{4} \right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |m^2 - 6m + 9| = 2 \Leftrightarrow m = 7$ hoặc $m = -1$. $\square$

Bài 10. a) Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 + 4x + 3$.

b) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $x^2 - 4|x| + 3 = m$.

Lời giải.

Gợi ý câu b). Ở bên trái trục tung, đồ thị hàm số $y = x^2 - 4|x| + 3$ cũng chính là đồ thị của hàm số $y = x^2 + 4x + 3$. Hơn nữa, đồ thị hàm số $y = x^2 - 4|x| + 3$ nhận trục tung làm trục đối xứng. $\square$

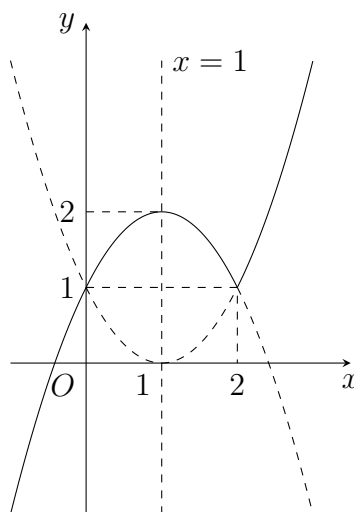
Bài 11. Tìm m để phương trình $x|x-1| = m$ có đúng 2 nghiệm.

Lời giải.

Số nghiệm của phương trình bằng với số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x|x-2| + 1$ và đường thẳng $y = m$.

Đồ thị hàm số $y = x|x-1|$ bao gồm hai phần: phần của parabol $y = x(x-2) + 1$ với $x \geq 2$, và phần của parabol $y = x(2-x) + 1$ với $x \leq 2$ (đường nét liền trong hình 6).

Từ đó, ta suy ra giá trị m phải tìm là $m = 1$ hoặc $m = 2$.



Hình 8

$\square$

C CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Hàm số $y = 2x^2 + 4x - 1$

- A. đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và nghịch biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.
- B. nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.
- C. đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.
- D. nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số $y = ax^2 + bx + c$ với $a > 0$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$.

Áp dụng: Ta có $-\frac{b}{2a} = -1$.

Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 2. Cho hàm số $y = -x^2 + 4x + 1$. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(4; +\infty)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty; 4)$.
- C. Trên khoảng $(-\infty; -1)$ hàm số đồng biến.
- D. Trên khoảng $(3; +\infty)$ hàm số nghịch biến.

Lời giải.

Hàm số $y = ax^2 + bx + c$ với $a < 0$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$, đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$.

Áp dụng: Ta có $-\frac{b}{2a} = 2$.

Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$. Do đó A đúng, B sai.

Đáp án C đúng vì hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ thì đồng biến trên khoảng con $(-\infty; -1)$.

Đáp án D, đúng vì hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$ thì nghịch biến trên khoảng con $(3; +\infty)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 3. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$?

- A. $y = \sqrt{2}x^2 + 1$.
- B. $y = -\sqrt{2}x^2 + 1$.
- C. $y = \sqrt{2}(x + 1)^2$.
- D. $y = -\sqrt{2}(x + 1)^2$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \sqrt{2}x^2 + 1$, ta có $-\frac{b}{2a} = 0$ và có $a > 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 4. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$?

- A. $y = \sqrt{2}x^2 + 1$.
- B. $y = -\sqrt{2}x^2 + 1$.
- C. $y = \sqrt{2}(x + 1)^2$.
- D. $y = -\sqrt{2}(x + 1)^2$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = -\sqrt{2}(x+1)^2$, ta có $y = -\sqrt{2}(x+1)^2 = -\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{2}x - \sqrt{2}$ nên $-\frac{b}{2a} = -1$ và có $a < 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 5. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$). Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$.
- C. Đồ thị của hàm số có trục đối xứng là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$.
- D. Đồ thị của hàm số luôn cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.

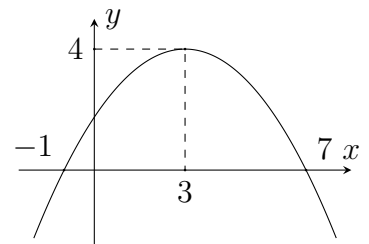
Lời giải.

Ví dụ trường hợp đồ thị có đỉnh nằm phía trên trục hoành thì khi đó đồ thị hàm số không cắt trục hoành (hoặc xét phương trình hoành độ giao điểm $ax^2 + bx + c = 0$, phương trình này không phải lúc nào cũng có hai nghiệm).

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 6.

Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị (P) như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây là **sai**?



- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.
- B. (P) có đỉnh là $I(3; 4)$.
- C. (P) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1.
- D. (P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đi lên trên khoảng $(-\infty; 3)$ nên đồng biến trên khoảng đó. Do đó A đúng.

Dựa vào đồ thị ta thấy (P) có đỉnh có tọa độ $(3; 4)$. Do đó B đúng.

(P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ -1 và 7 . Do đó D đúng.

Dùng phương pháp loại trừ thì C là đáp án sai.

Cách giải tự luận.

Gọi parabol cần tìm là $(P): y = ax^2 + bx + c$. Do bề lõm quay xuống nên $a < 0$.

Vì (P) cắt trục hoành tại hai điểm $(-1; 0)$ và $(7; 0)$ nên
$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ 49a + 7b + c = 0. \end{cases}$$

Mặt khác (P) có trục đối xứng $x = 3 \rightarrow -\frac{b}{2a} = 3 \Leftrightarrow -b = 6a$ và đi qua điểm $(3; 4)$ nên $9a + 3a + c = 4$.

Kết hợp các điều kiện ta tìm được $I\left(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

Vậy $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4} \Rightarrow P \cap Oy = \left(0; \frac{7}{4}\right)$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 7. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị (P) . Tọa độ đỉnh của (P) là

- A. $I\left(-\frac{b}{2a}; \frac{\Delta}{4a}\right)$.
- B. $I\left(-\frac{b}{a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.
- C. $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.
- D. $I\left(\frac{b}{2a}; \frac{\Delta}{4a}\right)$.

Lời giải.

Hoành độ đỉnh $x = -\frac{b}{2a}$; tung độ đỉnh $y = -\frac{\Delta}{4a}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 8. Trục đối xứng của parabol $(P): y = 2x^2 + 6x + 3$ là

- A. $x = -\frac{3}{2}$. B. $y = -\frac{3}{2}$. C. $x = -3$. D. $y = -3$.

Lời giải.

Trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 9. Trục đối xứng của parabol $(P): y = -2x^2 + 5x + 3$ là

- A. $x = -\frac{5}{2}$. B. $x = -\frac{5}{4}$. C. $x = \frac{5}{2}$. D. $x = \frac{5}{4}$.

Lời giải.

Trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a} = \frac{5}{4}$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 10. Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị nhận đường $x = 1$ làm trục đối xứng?

- A. $y = -2x^2 + 4x + 1$. B. $y = 2x^2 + 4x - 3$. C. $y = 2x^2 - 2x - 1$. D. $y = x^2 - x + 2$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = -2x^2 + 4x + 1$, ta có $-\frac{b}{2a} = 1$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 11. Đỉnh của parabol $(P): y = 3x^2 - 2x + 1$ là

- A. $I\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$. B. $I\left(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$. C. $I\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$. D. $I\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Lời giải.

Ta có công thức $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 12. Hàm số nào sau đây có đồ thị là parabol có đỉnh $I(-1; 3)$?

- A. $y = 2x^2 - 4x - 3$. B. $y = 2x^2 - 2x - 1$. C. $y = 2x^2 + 4x + 5$. D. $y = 2x^2 + x + 2$.

Lời giải.

Ta có công thức $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ nên nhận hàm số $y = 2x^2 + 4x + 5$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 13. Tìm giá trị nhỏ nhất $y_{\min}$ của hàm số $y = x^2 - 4x + 5$.

- A. $y_{\min} = 0$. B. $y_{\min} = -2$. C. $y_{\min} = 2$. D. $y_{\min} = 1$.

Lời giải.

Cách 1.

Ta có $y = x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow y_{\min} = 1$.

Dấu bằng xảy ra khi $x = 2$.

Cách 2.

Hoành độ đỉnh $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2} = 2$.

Vì hệ số $a > 0$ nên hàm số có giá trị nhỏ nhất $y_{\min} = y(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 5 = 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 14. Tìm giá trị lớn nhất $y_{\max}$ của hàm số $y = -\sqrt{2}x^2 + 4x$.

- A. $y_{\max} = \sqrt{2}$. B. $y_{\max} = 2\sqrt{2}$. C. $y_{\max} = 2$. D. $y_{\max} = 4$.

Lời giải.

Cách 1.

Ta có $y = -\sqrt{2}x^2 + 4x = -\sqrt{2}(x - \sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} \leq 2\sqrt{2} \Rightarrow y_{\max} = 2\sqrt{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi $x = \sqrt{2}$.

Cách 2.

Hoành độ đỉnh $x = -\frac{b}{2a} = \sqrt{2}$.

Vì hệ số $a < 0$ nên hàm số có giá trị lớn nhất $y_{\max} = y(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 15. Hàm số nào sau đây đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \frac{3}{4}$?

- A. $y = 4x^2 - 3x + 1$. B. $y = -x^2 + \frac{3}{2}x + 1$. C. $y = -2x^2 + 3x + 1$. D. $y = x^2 - \frac{3}{2}x + 1$.

Lời giải.

Ta cần có hệ số $a > 0$ và $-\frac{b}{2a} = \frac{3}{4}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 16. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = f(x) = x^2 - 3x$ trên đoạn $[0; 2]$.

- A. $M = 0; m = -\frac{9}{4}$. B. $M = \frac{9}{4}; m = 0$. C. $M = -2; m = -\frac{9}{4}$. D. $M = 2; m = -\frac{9}{4}$.

Lời giải.

Hàm số $y = x^2 - 3x$ có $a = 1 > 0$ nên bề lõm hướng lên. Hoành độ đỉnh $x = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} \in [0; 2]$. Vậy

$$\begin{cases} m = \min y = f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4} \\ M = \max y = \max\{f(0), f(2)\} = \max\{0, -2\} = 0 \end{cases}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 17. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = f(x) = -x^2 - 4x + 3$ trên đoạn $[0; 4]$.

- A. $M = 4; m = 0$. B. $M = 29; m = 0$. C. $M = 3; m = -29$. D. $M = 4; m = 3$.

Lời giải.

Hàm số $y = -x^2 - 4x + 3$ có $a = -1 < 0$ nên bề lõm hướng xuống.

Hoành độ đỉnh $x = -\frac{b}{2a} = -2 \notin [0; 4]$.

Ta có $\begin{cases} f(4) = -29 \\ f(0) = 3 \end{cases} \Rightarrow m = \min y = f(4) = -29; M = \max y = f(0) = 3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = f(x) = x^2 - 4x + 3$ trên đoạn $[-2; 1]$.

- A. $M = 15; m = 1$. B. $M = 15; m = 0$. C. $M = 1; m = -2$. D. $M = 0; m = -15$.

Lời giải.

Hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ có $a = 1 > 0$ nên bề lõm hướng lên.

Hoành độ đỉnh $x = -\frac{b}{2a} = 2 \notin [-2; 1]$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(-2) = 15 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow m = \min y = f(1) = 0; M = \max y = f(-2) = 15.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 19. Tìm giá trị thực của tham số $m \neq 0$ để hàm số $y = mx^2 - 2mx - 3m - 2$ có giá trị nhỏ nhất bằng -10 trên $\mathbb{R}$.

A. $m = 1$.

B. $m = 2$.

C. $m = -2$.

D. $m = -1$.

Lời giải.

Ta có $x = -\frac{b}{2a} = \frac{2m}{2m} = 1$, suy ra $y = -4m - 2$.

$$\text{Để hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng } -10 \text{ khi và chỉ khi } \begin{cases} m > 0 \\ -\frac{\Delta}{4a} = -10 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy ta có } \begin{cases} m > 0 \\ -4m - 2 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 20. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = 4x^2 - 4mx + m^2 - 2m$ trên đoạn $[-2; 0]$ bằng 3. Tính tổng T các phần tử của S .

A. $T = -\frac{3}{2}$.

B. $T = \frac{1}{2}$.

C. $T = \frac{9}{2}$.

D. $T = \frac{3}{2}$.

Lời giải.

Parabol có hệ số theo x^2 là $4 > 0$ nên bề lõm hướng lên. Hoành độ đỉnh $x_I = \frac{m}{2}$.

- Nếu $\frac{m}{2} < -2 \Leftrightarrow m < -4$ thì $x_I < -2 < 0$. Suy ra $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[-2; 0]$.

Do đó $\min_{[-2; 0]} f(x) = f(-2) = m^2 + 6m + 16$.

Theo yêu cầu bài toán $m^2 + 6m + 16 = 3$ (vô nghiệm).

- Nếu $-2 \leq \frac{m}{2} \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 0$ thì $x_I \in [0; 2]$. Suy ra $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại đỉnh.

Do đó $\min_{[-2; 0]} f(x) = f\left(\frac{m}{2}\right) = -2m$.

Theo yêu cầu bài toán $-2m = 3 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$ (thỏa mãn $-4 \leq m \leq 0$).

- Nếu $\frac{m}{2} > 0 \Leftrightarrow m > 0$ thì $x_I > 0 > -2$.

Suy ra $f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[-2; 0]$. Do đó $\min_{[-2; 0]} f(x) = f(0) = m^2 - 2m$.

Theo yêu cầu bài toán: $m^2 - 2m = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \text{ (loại)} \\ m = 3 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}.$

$$\text{Vậy } S = \left\{-\frac{3}{2}; 3\right\} \Rightarrow T = -\frac{3}{2} + 3 = \frac{3}{2}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 21. Bảng biến thiên ở dưới là bảng biến thiên của hàm số nào trong các hàm số được cho ở bốn phương án A, B, C, D sau đây?

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$+\infty$	-5	$+\infty$

A. $y = -x^2 + 4x - 9$. B. $y = x^2 - 4x - 1$. C. $y = -x^2 + 4x$. D. $y = x^2 - 4x - 5$.

Lời giải.

Bảng biến thiên có bề lõm hướng lên.

Đỉnh của parabol có tọa độ là $(2; -5)$. Chỉ có hàm số $y = x^2 - 4x - 1$ thỏa mãn.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 22. Bảng biến thiên ở dưới là bảng biến thiên của hàm số nào trong các hàm số được cho ở bốn phương án A, B, C, D sau đây?

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
y	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$-\infty$

A. $y = 2x^2 + 2x - 1$. B. $y = 2x^2 + 2x + 2$. C. $y = -2x^2 - 2$. D. $y = -2x^2 - 2x + 1$.

Lời giải.

Bảng biến thiên có bề lõm hướng xuống. Loại đáp án A và B.

Đỉnh của parabol có tọa độ là $\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. Chỉ có hàm số $y = -2x^2 - 2x + 1$ thỏa mãn.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 23. Bảng biến thiên của hàm số $y = -2x^2 + 4x + 1$ là bảng nào trong các bảng được cho sau đây ?

A.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$+\infty$	1	$+\infty$

C.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	3	$-\infty$

B.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$-\infty$	1	$-\infty$

D.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
y	$+\infty$	1	$+\infty$

Lời giải.

Hệ số $a = -2 < 0 \Rightarrow$ bề lõm hướng xuống. Loại B, D.

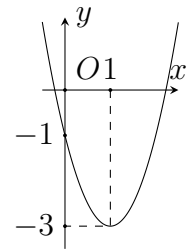
Ta có $-\frac{b}{2a} = 1$ và $y(1) = 3$. Do đó C thỏa mãn.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 24.

Đồ thị hình vẽ là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = x^2 - 4x - 1.$

B. $y = 2x^2 - 4x - 1.$

C. $y = -2x^2 - 4x - 1.$

D. $y = 2x^2 - 4x + 1.$

Lời giải.

Parabol có bề lõm hướng lên.

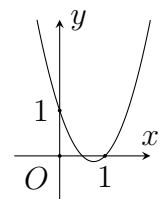
Đỉnh của parabol là điểm $(1; -3)$. Chỉ có hàm số $y = 2x^2 - 4x - 1$ thỏa mãn.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 25.

Đồ thị hình vẽ là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = -x^2 + 3x - 1.$

B. $y = -2x^2 + 3x - 1.$

C. $y = 2x^2 - 3x + 1.$

D. $y = x^2 - 3x + 1.$

Lời giải.

Parabol có bề lõm hướng lên.

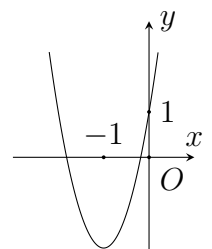
Parabol cắt trục hoành tại điểm $(1; 0)$. Chỉ có hàm số $y = 2x^2 - 3x + 1$ thỏa mãn.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 26.

Đồ thị hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = -3x^2 - 6x.$

B. $y = 3x^2 + 6x + 1.$

C. $y = x^2 + 2x + 1.$

D. $y = -x^2 - 2x + 1.$

Lời giải.

Parabol có bề lõm hướng lên.

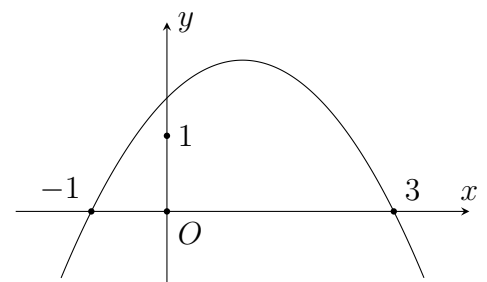
Parabol cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ âm. Chỉ có hàm số $y = 3x^2 + 6x + 1$ thỏa mãn.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 27.

Đồ thị hình vẽ là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = x^2 - 2x + \frac{3}{2}.$

B. $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{5}{2}.$

C. $y = x^2 - 2x.$

D. $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}.$

Lời giải.

Parabol có bề lõm hướng xuống.

Parabol cắt trục hoành tại 2 điểm $(3; 0)$ và $(-1; 0)$. Chỉ có hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$ thỏa mãn.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 28.

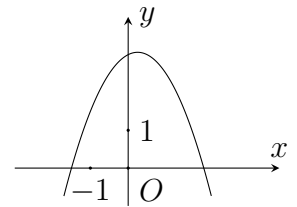
Đồ thị hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = -2x^2 + x - 1$.

B. $y = -2x^2 + x + 3$.

C. $y = x^2 + x + 3$.

D. $y = -x^2 + \frac{1}{2}x + 3$.



Lời giải.

Bề lõm quay xuống nên loại C. Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt nên loại A.

Vì phương trình hoành độ giao điểm của đáp án A là $-2x^2 + x - 1 = 0$ vô nghiệm.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đáp án B, ta có $-2x^2 + x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$.

Quan sát đồ thị ta thấy đồ thị hàm số không cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -1 . Do đó đáp án B không phù hợp.

Dùng phương pháp loại trừ, thì D là đáp án đúng.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 29.

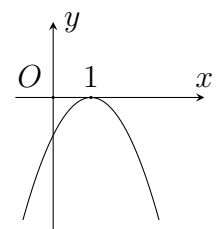
Đồ thị hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = -x^2 + 2x$.

B. $y = -x^2 + 2x - 1$.

C. $y = x^2 - 2x$.

D. $y = x^2 - 2x + 1$.



Lời giải.

Bề lõm quay xuống nên loại C, D.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(1; 0)$ nên chỉ có B phù hợp.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 30.

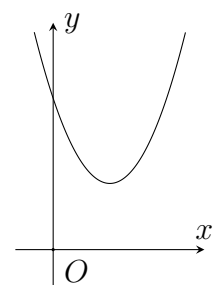
Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a > 0, b < 0, c < 0$.

B. $a > 0, b < 0, c > 0$.

C. $a > 0, b > 0, c > 0$.

D. $a < 0, b < 0, c > 0$.



Lời giải.

Bề lõm hướng lên nên $a > 0$. Hoành độ đỉnh parabol $x = -\frac{b}{2a} > 0$ nên $b < 0$.

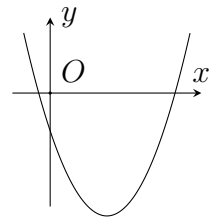
Parabol cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $c > 0$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 31.

Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?



- A. $a > 0, b < 0, c < 0$. B. $a > 0, b < 0, c > 0$.
C. $a > 0, b > 0, c > 0$. D. $a < 0, b < 0, c > 0$.

Lời giải.

Bề lõm hướng lên nên $a > 0$. hoành độ đỉnh parabol $x = -\frac{b}{2a} > 0$ nên $b < 0$.

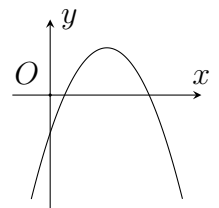
Parabol cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $c < 0$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 32.

Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?



- A. $a > 0, b > 0, c < 0$. B. $a > 0, b < 0, c > 0$.
C. $a < 0, b > 0, c < 0$. D. $a < 0, b > 0, c > 0$.

Lời giải.

Bề lõm hướng xuống nên $a < 0$. Hoành độ đỉnh parabol $x = -\frac{b}{2a} > 0$ nên $b > 0$.

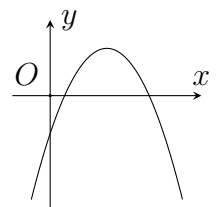
Parabol cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $c < 0$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 33.

Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?



- A. $a > 0, b < 0, c > 0$. B. $a < 0, b < 0, c < 0$.
C. $a < 0, b > 0, c > 0$. D. $a < 0, b < 0, c > 0$.

Lời giải.

Bề lõm hướng xuống nên $a < 0$. Hoành độ đỉnh parabol $x = -\frac{b}{2a} < 0$ nên $b < 0$.

Parabol cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $c > 0$.

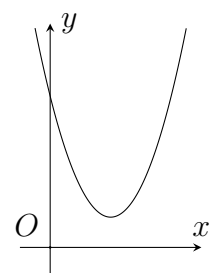
Chọn đáp án **D**

□

Câu 34.

Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$. Xét dấu hệ số a và biệt thức Δ khi (P) hoàn toàn nằm phía trên trục hoành.

- A. $a > 0, \Delta > 0$. B. $a > 0, \Delta < 0$. C. $a < 0, \Delta < 0$. D. $a < 0, \Delta > 0$.

**Lời giải.**

(P) hoàn toàn nằm phía trên trục hoành khi bề lõm hướng lên và đỉnh có tung độ dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ -\frac{\Delta}{4a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 35. Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$. Xét dấu hệ số a và biệt thức Δ khi cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và có đỉnh nằm phía trên trục hoành.

- A.** $a > 0, \Delta > 0$. **B.** $a > 0, \Delta < 0$. **C.** $a < 0, \Delta < 0$. **D.** $a < 0, \Delta > 0$.

Lời giải.

(P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt khi $\Delta > 0$.

Đỉnh của (P) nằm phía trên trục hoành khi $-\frac{\Delta}{4a} > 0 \Rightarrow a < 0$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 36. Tìm parabol $(P): y = ax^2 + 3x - 2$, biết rằng parabol cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 2.

- A.** $y = x^2 + 3x - 2$. **B.** $y = -x^2 + x - 2$. **C.** $y = -x^2 + 3x - 3$. **D.** $y = -x^2 + 3x - 2$.

Lời giải.

Vì (P) cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 2 nên điểm $A(2; 0)$ thuộc (P) .

Thay $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ vào (P) , ta được $0 = 4a + 6 - 2 \Leftrightarrow a = -1$.

Vậy $(P): y = -x^2 + 3x - 2$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 37. Tìm parabol $(P): y = ax^2 + 3x - 2$, biết rằng parabol có trục đối xứng $x = -3$.

- A.** $y = x^2 + 3x - 2$. **B.** $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 2$. **C.** $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 3$. **D.** $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$.

Lời giải.

Vì (P) có trục đối xứng $x = -3$ nên $-\frac{b}{2a} = -3 \Leftrightarrow -\frac{3}{2a} = -3 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$.

Vậy $(P): y = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 38. Tìm parabol $(P): y = ax^2 + 3x - 2$, biết rằng parabol có đỉnh $I\left(-\frac{1}{2}; -\frac{11}{4}\right)$.

- A.** $y = x^2 + 3x - 2$. **B.** $y = x^2 + x - 4$. **C.** $y = 3x^2 + x - 1$. **D.** $y = 3x^2 + 3x - 2$.

Lời giải.

Vì (P) có đỉnh $I\left(-\frac{1}{2}; -\frac{11}{4}\right)$ nên ta có $\begin{cases} -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2} \\ -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{11}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a \\ \Delta = 11a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = a \\ 9 + 8a = 11a \end{cases} \Leftrightarrow a = 3$.

Vậy $(P): y = 3x^2 + 3x - 2$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 39. Tìm giá trị thực của tham số m để parabol $(P): y = mx^2 - 2mx - 3m - 2$, $(m \neq 0)$ có đỉnh thuộc đường thẳng $y = 3x - 1$.

- A.** $m = 1$. **B.** $m = -1$. **C.** $m = -6$. **D.** $m = 6$.

Lời giải.

Hoành độ đỉnh của (P) là $x = -\frac{b}{2a} = \frac{2m}{2m} = 1$. Suy ra tung độ đỉnh $y = -4m - 2$.

Do đó tọa độ đỉnh của (P) là $I(1; -4m - 2)$.

Theo giả thiết, đỉnh I thuộc đường thẳng $y = 3x - 1$ nên $-4m - 2 = 3 \times 1 - 1 \Leftrightarrow m = -1$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 40. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m sao cho parabol $(P): y = x^2 - 4x + m$ cắt Ox tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn $OA = 3OB$. Tính tổng T các phần tử của S .

- A. $T = 3$. B. $T = -15$. C. $T = \frac{3}{2}$. D. $T = -9$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 4x + m = 0$. (*)

Để (P) cắt Ox tại hai điểm phân biệt A, B thì (*) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = 4 - m > 0 \Leftrightarrow m < 4.$$

Theo giả thiết $OA = 3OB \Rightarrow |x_A| = 3|x_B| \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 3x_B \\ x_A = -3x_B \end{cases}$.

$$\text{TH1. } x_A = 3x_B \Rightarrow \begin{cases} x_A = 3x_B \\ x_A + x_B = 4 \Rightarrow m = x_A \times x_B = 3. \\ x_A \times x_B = m \end{cases}$$

$$\text{TH2. } x_A = -3x_B \Rightarrow \begin{cases} x_A = -3x_B \\ x_A + x_B = 4 \Rightarrow m = x_A \times x_B = -12, \text{ thỏa mãn } (*). \\ x_A \times x_B = m \end{cases}$$

Do đó $S = \{-12; 3\} \Rightarrow (-12) + 3 = -9$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 41. Xác định parabol $(P): y = ax^2 + bx + 2$, biết rằng (P) đi qua hai điểm $M(1; 5)$ và $N(-2; 8)$.

- A. $y = 2x^2 + x + 2$. B. $y = x^2 + x + 2$. C. $y = -2x^2 + x + 2$. D. $y = -2x^2 - x + 2$.

Lời giải.

Vì (P) đi qua hai điểm $M(1; 5)$ và $N(-2; 8)$ nên ta có hệ $\begin{cases} a + b + 2 = 5 \\ 4a - 2b + 2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1. \end{cases}$

Vậy $(P): y = 2x^2 + x + 2$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 42. Xác định parabol $(P): y = 2x^2 + bx + c$, biết rằng (P) có đỉnh $I(-1; -2)$.

- A. $y = 2x^2 - 4x + 4$. B. $y = 2x^2 - 4x$. C. $y = 2x^2 - 3x + 4$. D. $y = 2x^2 + 4x$.

Lời giải.

Trục đối xứng $-\frac{b}{2a} = -1 \Rightarrow b = 4$. Do $I \in P \Rightarrow -2 = 2 \times (-1)^2 - 4 + c \Rightarrow c = 0$.

Vậy $(P): y = 2x^2 + 4x$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 43. Xác định parabol $(P): y = 2x^2 + bx + c$, biết rằng (P) đi qua điểm $M(0; 4)$ và có trục đối xứng $x = 1$.

- A. $y = 2x^2 - 4x + 4$. B. $y = 2x^2 + 4x - 3$. C. $y = 2x^2 - 3x + 4$. D. $y = 2x^2 + x + 4$.

Lời giải.

Ta có $M \in P \Rightarrow c = 4$. Trục đối xứng $-\frac{b}{2a} = 1 \Rightarrow b = -4$.

Vậy $(P): y = 2x^2 - 4x + 4$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 44. Biết rằng $(P): y = ax^2 - 4x + c$ có hoành độ đỉnh bằng -3 và đi qua điểm $M(-2; 1)$. Tính tổng $S = a + c$.

A. $S = 5$.

B. $S = -5$.

C. $S = 4$.

D. $S = 1$.

Lời giải.

Vì (P) có hoành độ đỉnh bằng -3 và đi qua $M(-2; 1)$ nên ta có hệ
$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = -3 \\ 4a + 8 + c = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 = 6a \\ 4a + c = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ c = -\frac{13}{3} \end{cases} \Rightarrow S = a + c = -5.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 45. Biết rằng $(P): y = ax^2 + bx + 2$ ($a > 1$) đi qua điểm $M(-1; 6)$ và có tung độ đỉnh bằng $-\frac{1}{4}$. Tính tích $T = ab$.

A. $P = -3$.

B. $P = -2$.

C. $P = 192$.

D. $P = 28$.

Lời giải.

Vì (P) đi qua điểm $M(-1; 6)$ và có tung độ đỉnh bằng $-\frac{1}{4}$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} a - b + 2 = 6 \\ -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 4 \\ b^2 - 4ac = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 + b \\ b^2 - 8(4 + b) = 4 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 + b \\ b^2 - 9b - 36 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 16 \\ b = 12 \end{cases} \text{ (thỏa mãn } a > 1) \text{ hoặc } \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases} \text{ (loại). Suy ra } T = ab = 16 \times 12 = 192.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 46. Xác định parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$, biết rằng (P) đi qua ba điểm $A(1; 1)$, $B(-1; -3)$ và $O(0; 0)$.

A. $y = x^2 + 2x$.

B. $y = -x^2 - 2x$.

C. $y = -x^2 + 2x$.

D. $y = x^2 - 2x$.

Lời giải.

Vì (P) đi qua ba điểm $A(1; 1)$, $B(-1; -3)$, $O(0; 0)$ nên có hệ
$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ a - b + c = -3 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Vậy $(P): y = -x^2 + 2x$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 47. Xác định parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$, biết rằng (P) cắt trục Ox tại hai điểm có hoành độ lần lượt là -1 và 2 , cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng -2 .

A. $y = -2x^2 + x - 2$.

B. $y = -x^2 + x - 2$.

C. $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 2$.

D. $y = x^2 - x - 2$.

Lời giải.

Gọi A và B là hai giao điểm của (P) với trục Ox có hoành độ lần lượt là -1 và 2 .

Suy ra $A(-1; 0)$, $B(2; 0)$.

Gọi C là giao điểm của (P) với trục Oy có tung độ bằng -2 . Suy ra $C(0; -2)$.

Theo giả thiết, (P) đi qua ba điểm A, B, C nên ta có
$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 0 \\ c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -2 \end{cases}$$

Vậy $(P): y = x^2 - x - 2$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 48. Xác định parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$, biết rằng (P) có đỉnh $I(-2; -1)$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -3 .

A. $y = x^2 - 2x - 3$.

B. $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 3$.

C. $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 3$.

D. $y = -x^2 - 2x - 3$.

Lời giải.

Vì (P) có đỉnh $I(-2; -1)$ nên ta có
$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = -2 \\ -\frac{\Delta}{4a} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4a \\ b^2 - 4ac = 4a \end{cases} \quad (1)$$

Gọi A là giao điểm của (P) với Oy tại điểm có tung độ bằng -3 . Suy ra $A(0; -3)$.

Theo giả thiết, $A(0; -3)$ thuộc (P) nên $a \times 0 + b \times 0 + c = -3 \Leftrightarrow c = -3$. (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ
$$\begin{cases} b = 4a \\ 16a^2 + 8a = 0 \\ c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ (loại)} \\ b = 0 \\ c = -3 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -2 \\ c = -3 \end{cases}$$

Vậy $(P): y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 3$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 49. Biết rằng $(P): y = ax^2 + bx + c$, đi qua điểm $A(2; 3)$ và có đỉnh $I(1; 2)$. Tính tổng $S = a^2 + b^2 + c^2$.

A. $S = 2$.

B. $S = 4$.

C. $S = 6$.

D. $S = 14$.

Lời giải.

Vì (P) đi qua điểm $A(2; 3)$ nên $4a + 2b + c = 3$. (1)

Và (P) có đỉnh $I(1; 2)$ nên
$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1 \\ a + b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -b = 2a \\ a + b + c = 2 \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ
$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 3 \\ -b = 2a \\ a + b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ b = -2 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow S = a^2 + b^2 + c^2 = 14.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 50. Xác định parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$, biết rằng (P) có đỉnh thuộc trục hoành và đi qua hai điểm $M(0; 1)$, $N(2; 1)$.

A. $y = x^2 - 2x + 1$.

B. $y = x^2 - 3x + 1$.

C. $y = x^2 + 2x + 1$.

D. $y = x^2 + 3x + 1$.

Lời giải.

Vì (P) có đỉnh nằm trên trục hoành nên $-\frac{\Delta}{4a} = 0 \Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow b^2 - 4ac = 0$.

Hơn nữa, (P) đi qua hai điểm $M(0; 1)$, $N(2; 1)$ nên ta có $\begin{cases} c = 1 \\ 4a + 2b + c = 1. \end{cases}$

$$\text{Từ đó ta có hệ } \begin{cases} b^2 - 4ac = 0 \\ c = 1 \\ 4a + 2b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 4a = 0 \\ c = 1 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ (loại)} \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases}.$$

Vậy $(P): y = x^2 - 2x + 1$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 51. Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$, biết rằng (P) đi qua $M(-5; 6)$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2 . Hệ thức nào sau đây đúng?

A. $a = 6b$.

B. $25a - 5b = 8$.

C. $b = -6a$.

D. $25a + 5b = 8$.

Lời giải.

Vì (P) qua $M(-5; 6)$ nên ta có $6 = 25a - 5b + c$. (1)

Lại có, (P) cắt Oy tại điểm có tung độ bằng -2 nên $-2 = a \times 0 + b \times 0 + c \Leftrightarrow c = -2$. (2)

Từ (1) và (2), ta có $25a - 5b = 8$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 52. Biết rằng hàm số $y = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$) đạt giá trị nhỏ nhất bằng 4 tại $x = 2$ và có đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0; 6)$. Tính tích $P = abc$.

A. $P = -6$.

B. $P = 6$.

C. $P = -3$.

D. $P = \frac{3}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 4 tại } x = 2 \text{ nên } \begin{cases} a > 0 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \\ -\frac{\Delta}{4a} = 4. \end{cases}$$

Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0; 6)$ nên ta có $c = 6$.

$$\begin{aligned} \text{Từ đó ta có hệ } \begin{cases} a > 0 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \\ -\frac{\Delta}{4a} = 4 \\ c = 6 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b = -4a \\ b^2 - 4ac = -16a \\ c = 6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b = -4a \\ 16a^2 - 8a = 0 \\ c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -2 \\ c = 6 \end{cases} \Rightarrow P = abc = -6. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 53. Biết rằng hàm số $y = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$) đạt giá trị lớn nhất bằng 3 tại $x = 2$ và có đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0; -1)$. Tính tổng $S = a + b + c$.

A. $S = -1$.

B. $S = 4$.

C. $S = 4$.

D. $S = 2$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Từ giả thiết ta có hệ } \begin{cases} a < 0 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \\ -\frac{\Delta}{4a} = 3 \\ c = -1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b = -4a \\ b^2 - 4ac = -12a \\ c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b = -4a \\ 16a^2 + 16a = 0 \\ c = -1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ (loại)} \\ b = 0 \\ c = -1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow S = a + b + c = 2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 54. Biết rằng hàm số $y = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$) đạt giá trị lớn nhất bằng 5 tại $x = -2$ và có đồ thị đi qua điểm $M(1; -1)$. Tính tổng $S = a^2 + b^2 + c^2$.

A. $S = -1$.

B. $S = 1$.

C. $S = 13$.

D. $S = 14$.

Lời giải.

$$\text{Từ giả thiết, ta có hệ } \begin{cases} -\frac{b}{2a} = -2 \\ 4a - 2b + c = 5 \\ a + b + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow a = -\frac{2}{3}; b = -\frac{8}{3}; c = \frac{7}{3} \Rightarrow S = a^2 + b^2 + c^2 = 13.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 55. Biết rằng hàm số $y = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$) đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$ tại $x = \frac{3}{2}$ và tổng lập phương các nghiệm của phương trình $y = 0$ bằng 9. Tính $P = abc$.

A. $P = 0$.

B. $P = 6$.

C. $P = 7$.

D. $P = -6$.

Lời giải.

Hàm số $y = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$) đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$ tại $x = \frac{3}{2}$ nên ta có $-\frac{b}{2a} = \frac{3}{2}$, ($a < 0$) và điểm $\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right)$ thuộc đồ thị $\Rightarrow \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = \frac{1}{4}$.

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $y = 0$.

Theo giả thiết, $x_1^3 + x_2^3 = 9 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 9 \Rightarrow \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\left(-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right) = 9$.

$$\text{Từ đó ta có } \begin{cases} -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = \frac{1}{4} \\ \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\left(-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3a \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = \frac{1}{4} \\ \frac{c}{a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \\ c = -2 \end{cases} \Rightarrow P = abc = 6.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 56. Tọa độ giao điểm của $(P): y = x^2 - 4x$ với đường thẳng $d: y = -x - 2$ là

A. $M(-1; -1), N(-2; 0)$.

B. $M(1; -3), N(2; -4)$.

C. $M(0; -2), N(2; -4)$.

D. $M(-3; 1), N(3; -5)$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$x^2 - 4x = -x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = -3 \\ x = 2 \Rightarrow y = -4. \end{cases}$$

Vậy tọa độ giao điểm là $M(1; -3)$, $N(2; -4)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 57. Gọi $A(a; b)$ và $B(c; d)$ là tọa độ giao điểm của $(P): y = 2x - x^2$ và $\Delta: y = 3x - 6$. Giá trị $b + d$ bằng :

- A. 7. B. -7. C. 15.. D. -15.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và Δ là

$$2x - x^2 = 3x - 6 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = 0 \\ x = -3 \Rightarrow y = -15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ d = -15 \end{cases} \Rightarrow b + d = -15.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 58. Đường thẳng nào sau đây tiếp xúc với $(P): y = 2x^2 - 5x + 3$?

- A. $y = x + 2$. B. $y = -x - 1$. C. $y = x + 3$. D. $y = -x + 1$.

Lời giải.

Xét các đáp án:

- Xét đáp án A.

Phương trình hoành độ giao điểm là $2x^2 - 5x + 3 = x + 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{7}}{2}$.

Vậy A sai.

- Xét đáp án B.

Phương trình hoành độ giao điểm là $2x^2 - 5x + 3 = -x - 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 4 = 0$ (vô nghiệm).

Vậy B sai.

- Xét đáp án C.

Phương trình hoành độ giao điểm là $2x^2 - 5x + 3 = x + 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$. Vậy C sai.

- Xét đáp án D.

Phương trình hoành độ giao điểm là $2x^2 - 5x + 3 = -x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Vậy D đúng.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 59. Parabol $(P): y = x^2 + 4x + 4$ có số điểm chung với trục hoành là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) với trục hoành là

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

Vậy (P) có 1 điểm chung với trục hoành.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 60. Giao điểm của hai parabol $y = x^2 - 4$ và $y = 14 - x^2$ là:

- A. $(2; 10)$ và $(-2; 10)$.
 B. $(\sqrt{14}; 10)$ và $(-14; 10)$.
 C. $(3; 5)$ và $(-3; 5)$.
 D. $(\sqrt{18}; 14)$ và $(-\sqrt{18}; 14)$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai parabol là

$$x^2 - 4 = 14 - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \Rightarrow y = 5 \\ x = 3 \Rightarrow y = 5. \end{cases}$$

Vậy có hai giao điểm là $(-3; 5)$ và $(3; 5)$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 61. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số b để đồ thị hàm số $y = -3x^2 + bx - 3$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.

- A. $\begin{cases} b < -6 \\ b > 6 \end{cases}$.
 B. $-6 < b < 6$.
 C. $\begin{cases} b < -3 \\ b > 3 \end{cases}$.
 D. $-3 < b < 3$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $-3x^2 + bx - 3 = 0$. (1)

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi (1) có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta = b^2 - 36 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b < -6 \\ b > 6. \end{cases}$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 62. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $-2x^2 - 4x + 3 = m$ có nghiệm.

- A. $1 \leq m \leq 5$.
 B. $-4 \leq m \leq 0$.
 C. $0 \leq m \leq 4$.
 D. $m \leq 5$.

Lời giải.

Xét phương trình: $-2x^2 - 4x + 3 - m = 0$. (1)

Để phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -2m + 10 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 5$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 63. Cho parabol $(P): y = x^2 + x + 2$ và đường thẳng $d: y = ax + 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của a để (P) tiếp xúc với d .

- A. $a = -1; a = 3$.
 B. $a = 2$.
 C. $a = 1; a = -3$.
 D. Không tồn tại a .

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) với d là $x^2 + x + 2 = ax + 1 \Leftrightarrow x^2 + (1 - a)x + 1 = 0$. (1)

Để (P) tiếp xúc với d khi và chỉ khi (1) có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta = (1 - a)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 3. \end{cases}$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 64. Cho parabol $(P): y = x^2 - 2x + m - 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để parabol không cắt Ox .

- A. $m < 2$.
 B. $m > 2$.
 C. $m \geq 2$.
 D. $m \leq 2$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và trục Ox là $x^2 - 2x + m - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 2 - m$. (1)
 Parabol không cắt Ox khi và chỉ khi (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow 2 - m < 0 \Leftrightarrow m > 2$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 65. Cho parabol $(P): y = x^2 - 2x + m - 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để parabol cắt Ox tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

A. $1 < m < 2$.

B. $m < 2$.

C. $m > 2$.

D. $m < 1$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và trục Ox là $x^2 - 2x + m - 1 = 0$. (1)

Parabol cắt Ox tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm dương phân

$$\text{biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 2 - m > 0 \\ S = 2 > 0 \\ P = m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 2.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 66. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = mx$ cắt đồ thị hàm số $(P): y = x^3 - 6x^2 + 9x$ tại ba điểm phân biệt.

A. $m > 0$ và $m \neq 9$.

B. $m > 0$.

C. $m < 18$ và $m \neq 9$.

D. $m > 18$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) với d là

$$x^3 - 6x^2 + 9x = mx \Leftrightarrow x(x^2 - 6x + 9 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 6x + 9 - m = 0. \end{cases} \quad (1)$$

(P) cắt d tại ba điểm phân biệt khi và chỉ (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 0^2 - 6 \cdot 0 + 9 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 9 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \neq 9. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 67. Tìm giá trị thực của m để phương trình $|2x^2 - 3x + 2| = 5m - 8x - 2x^2$ có nghiệm duy nhất.

A. $m = \frac{7}{40}$.

B. $m = \frac{2}{5}$.

C. $m = \frac{107}{80}$.

D. $m = \frac{7}{80}$.

Lời giải.

Ta thấy $2x^2 - 3x + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $|2x^2 - 3x + 2| = 2x^2 - 3x + 2$.

Do đó phương trình đã cho tương đương với $4x^2 + 5x + 2 - 5m = 0$. (*)

Khi đó phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi (*) có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 25 - 16(2 - 5m) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{7}{80}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 68. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $x^4 - 2x^2 + 3 - m = 0$ có nghiệm.

A. $m \geq 3$.

B. $m \geq -3$.

C. $m \geq 2$.

D. $m \geq -2$.

Lời giải.

Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$. Khi đó, phương trình đã cho trở thành: $t^2 - 2t + 3 - m = 0$. (*)

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi (*) có nghiệm không âm. Ta xét hai trường hợp

- Phương trình (*) vô nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m - 2 < 0 \Leftrightarrow m < 2$.
- Phương trình (*) có hai nghiệm âm khi và chỉ khi
$$\begin{cases} \Delta' = m - 2 \geq 0 \\ S = 2 < 0 \\ P = 3 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$$

Do đó, phương trình (*) có nghiệm không âm khi và chỉ khi $m \geq 2$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 69. Cho parabol $(P): y = x^2 - 4x + 3$ và đường thẳng $d: y = mx + 3$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\frac{9}{2}$.

- A. $m = 7$. B. $m = -7$. C. $m = -1, m = -7$. D. $m = -1$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$x^2 - 4x + 3 = mx + 3 \Leftrightarrow x(x - (m + 4)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = m + 4. \end{cases}$$

Để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B khi và chỉ khi $4 + m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -4$.

Với $x = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow A(0; 3) \in Oy$.

Với $x = 4 + m \Rightarrow y = m^2 + 4m + 3 \Rightarrow B(4 + m; m^2 + 4m + 3)$.

Gọi H là hình chiếu của B lên OA . Suy ra $BH = |x_B| = |4 + m|$.

Theo giả thiết bài toán, ta có

$$S_{\triangle OAB} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}OA \times BH = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \times 3 \times |m + 4| = \frac{9}{2} \Leftrightarrow |m + 4| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -7. \end{cases}$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 70. Cho parabol $(P): y = x^2 - 4x + 3$ và đường thẳng $d: y = mx + 3$. Tìm giá trị thực của tham số m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 = 8$.

- A. $m = 2$. B. $m = -2$. C. $m = 4$. D. Không có m .

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$x^2 - 4x + 3 = mx + 3 \Leftrightarrow x(x - (m + 4)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = m + 4. \end{cases}$$

d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B khi và chỉ khi $4 + m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -4$.

Khi đó, ta có $x_1^3 + x_2^3 = 8 \Leftrightarrow 0 + (4 + m)^3 = 8 \Leftrightarrow 4 + m = 2 \Leftrightarrow m = -2$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 71. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$+\infty$	-1	$+\infty$

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) - 1 = m$ có đúng hai nghiệm.

- A. $m > -1$. B. $m > 0$. C. $m > -2$. D. $m \geq -1$.

Lời giải.

Phương trình $f(x) - 1 = m \Leftrightarrow f(x) = m + 1$. Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = m + 1$ (song song hoặc trùng với trục hoành).

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm khi và chỉ khi $m + 1 > -1 \Leftrightarrow m > -2$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 72. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^2 - 5x + 7 + 2m = 0$ có nghiệm thuộc đoạn $[1; 5]$.

- A. $\frac{3}{4} \leq m \leq 7$. B. $-\frac{7}{2} \leq m \leq -\frac{3}{8}$. C. $3 \leq m \leq 7$. D. $\frac{3}{8} \leq m \leq \frac{7}{2}$.

Lời giải.

Ta có $x^2 - 5x + 7 + 2m = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 7 = -2m$. (*)

Phương trình (*) là phương trình hoành độ giao điểm của parabol $(P): y = x^2 - 5x + 7$ và đường thẳng $y = -2m$ (song song hoặc trùng với trục hoành).

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = x^2 - 5x + 7$ trên $[1; 5]$ như sau:

x	$-\infty$	1	$\frac{5}{2}$	5	$+\infty$
y	$+\infty$	3	$\frac{3}{4}$	7	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $x \in [1; 5]$ thì $y \in \left[\frac{3}{4}; 7\right]$.

Do đó để phương trình (*) có nghiệm $x \in [1; 5] \Leftrightarrow \frac{3}{4} \leq -2m \leq 7 \Leftrightarrow -\frac{7}{2} \leq m \leq -\frac{3}{8}$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 73. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) + m - 2018 = 0$ có duy nhất một nghiệm.

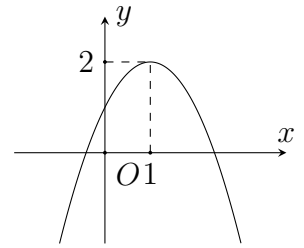
- A. $m = 2015$. B. $m = 2016$. C. $m = 2017$. D. $m = 2019$.

Lời giải.

Phương trình $f(x) + m - 2018 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2018 - m$.

Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 2018 - m$ (có phương song song hoặc trùng với trục hoành).

Dựa vào đồ thị, ta có yêu cầu bài toán $2018 - m = 2 \Leftrightarrow m = 2016$.



Chọn đáp án **C**

Câu 74.

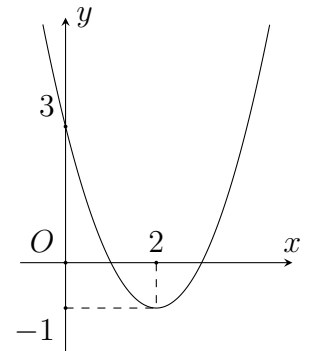
Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ đồ thị như hình. Hỏi với những giá trị nào của tham số thực m thì phương trình $|f(x)| = m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt.

A. $0 < m < 1$.

B. $m > 3$.

C. $m = -1, m = 3$.

D. $-1 < m < 0$.



Lời giải.

Ta có $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & ; f(x) \geq 0 \\ -f(x) & ; f(x) < 0 \end{cases}$. Từ đó suy ra cách vẽ đồ thị hàm số

(C) từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ như sau:

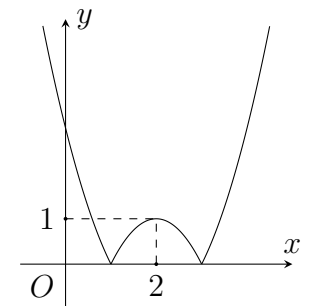
- Giữ nguyên đồ thị $y = f(x)$ phía trên trục hoành.
- Lấy đối xứng phần đồ thị $y = f(x)$ phía dưới trục hoành qua trục hoành (bỏ phần dưới).

Kết hợp hai phần ta được đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ như hình vẽ.

Phương trình $|f(x)| = m$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ và đường thẳng $y = m$ (song song hoặc trùng với trục hoành).

Dựa vào đồ thị, ta có yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 0 < m < 1$.

Chọn đáp án **A**



Câu 75.

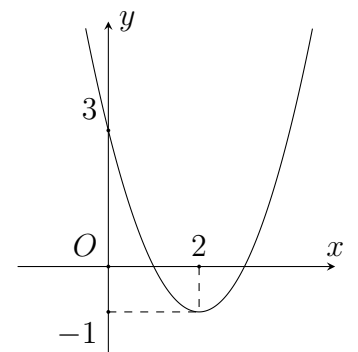
Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ đồ thị như hình bên. Hỏi với những giá trị nào của tham số thực m thì phương trình $f(|x|) - 1 = m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

A. $m = 3$.

B. $m > 3$.

C. $m = 2$.

D. $-2 < m < 2$.

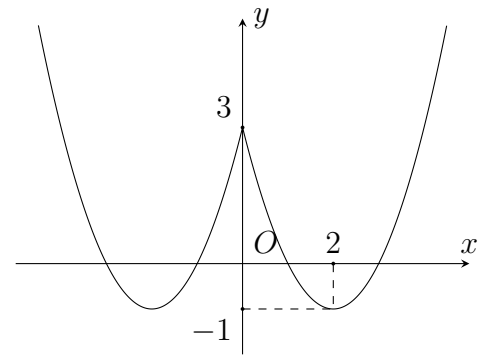


Lời giải.

Ta có $f(|x|) = f(x)$ nếu $x \geq 0$. Hơn nữa hàm $f(|x|)$ là hàm số chẵn. Từ đó suy ra cách vẽ đồ thị hàm số (C) từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ như sau:

- Giữ nguyên đồ thị $y = f(x)$ phía bên phải trục tung.
- Lấy đối xứng phần đồ thị $y = f(x)$ phía bên phải trục tung qua trục tung.

Kết hợp hai phần ta được đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ như hình vẽ.



Phương trình $f(|x|) - 1 = m \Leftrightarrow f(|x|) = m + 1$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ và đường thẳng $y = m + 1$ (song song hoặc trùng với trục hoành).

Dựa vào đồ thị, ta có yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m + 1 = 3 \Leftrightarrow m = 2$.

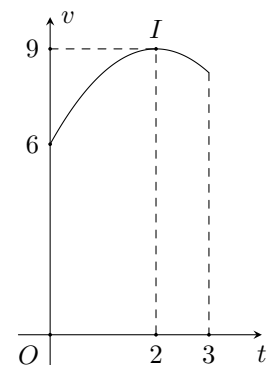
Chọn đáp án **A**

□

Câu 76.

Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2; 9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình vẽ. Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm 2 giờ 30 phút sau khi vật bắt đầu chuyển động gần bằng giá trị nào nhất trong các giá trị sau?

- A. 8,7(km/h). B. 8,8(km/h). C. 8,6(km/h). D. 8,5(km/h).



Lời giải.

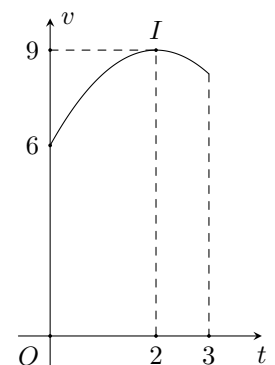
Giả sử vận tốc của vật chuyển động có phương trình là $v(t) = at^2 + bt + c$.

Ta có $v(2) = 9 \Leftrightarrow 4a + 2b + c = 9$; $v(0) = 6 \Leftrightarrow c = 6$.

$$\text{Lại có } \begin{cases} \frac{-b}{2a} = 2 \\ 4a + 2b + 6 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + b = 0 \\ 4a + 2b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-3}{4} \\ b = 3 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } v(t) = \frac{-3}{4}t^2 + 3t + 6.$$

$$\text{Vậy } v(2,5) = 8,8125.$$



Chọn đáp án **B**

□

Câu 77. Cho hàm số $y = x^2 - 2x - 3$, mệnh nào **sai**?

- A. Đồ thị hàm số có trục đối xứng $x = 2$. B. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.
C. Đồ thị hàm số nhận $I(1; -4)$ làm đỉnh. D. Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Lời giải.

Đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x - 3$ có trục đối xứng là đường thẳng $x = 1$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 78. Trong hệ tọa độ Oxy , biết rằng parabol $y = ax^2 + bx + c$ có đỉnh $I(1; 4)$ và đi qua điểm $D(3; 0)$. Khi đó giá trị của a , b và c là

- A. $a = -1$; $b = 1$; $c = -1$. B. $a = -2$; $b = 4$; $c = 6$.

C. $a = -1; b = 2; c = 3$.

D. $a = -\frac{1}{3}; b = -\frac{2}{3}; c = 5$.

Lời giải.

$$\text{Từ giả thiết ta có } \begin{cases} a + b + c = 4 \\ 9a + 3b + c = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 4 \\ 9a + 3b + c = 0 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 3. \end{cases}$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 79. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị (P). Biết đồ thị hàm số có đỉnh $I(1; 1)$ và đi qua điểm $A(2; 3)$. Tính tổng $S = a^2 + b^2 + c^2$.

A. 3.

B. 4.

C. 29.

D. 1.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đỉnh $I(1; 1)$ và đi qua điểm $A(2; 3)$ ta có

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ -\frac{b}{2a} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = 3 \end{cases}$$

Suy ra $a^2 + b^2 + c^2 = 29$.Chọn đáp án **C**

□

Câu 80. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$). Khẳng định nào sau đây **SAI**?

A. Hàm số đồng biến trên $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.B. Hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$.C. Đồ thị của hàm số có trục đối xứng là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$.

D. Đồ thị của hàm số luôn cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.

Lời giải.Tập xác định của hàm số $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.Tọa độ đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$. Trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$.Do $a > 0$ nên bề lõm của đồ thị quay lên.

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đồng biến trên $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ và nghịch biến trên $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$+\infty$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 81. Tìm giá trị lớn nhất $y_{\max}$ của hàm số $y = -\sqrt{2}x^2 + 4x$.

A. $y_{\max} = \sqrt{2}$.

B. $y_{\max} = 2\sqrt{2}$.

C. $y_{\max} = 2$.

D. $y_{\max} = 4$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Tọa độ đỉnh $I(\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$.

Ta có bảng biến thiên.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có giá trị lớn nhất là $y_{\max} = 2\sqrt{2}$.

x	$-\infty$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
y	$-\infty$	$2\sqrt{2}$	$-\infty$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 82. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = f(x) = x^2 - 3x$ trên đoạn $[0; 2]$.

A. $M = 0; m = -\frac{9}{4}$. B. $M = \frac{9}{4}; m = 0$. C. $M = -2; m = -\frac{9}{4}$. D. $M = 2; m = -\frac{9}{4}$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Tọa độ đỉnh $I\left(\frac{3}{2}; -\frac{9}{4}\right)$.

Ta có bảng biến thiên

Dựa vào bảng biến thiên, ta có giá trị lớn nhất $M = 0$ và giá trị nhỏ nhất $m = -\frac{9}{4}$.

x	0	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	0	$-\frac{9}{4}$	-2

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 83. Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Xét dấu hệ số a và biệt thức Δ khi (P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và có đỉnh nằm phía trên trục hoành.

A. $a > 0, \Delta > 0$. B. $a > 0, \Delta < 0$. C. $a < 0, \Delta < 0$. D. $a < 0, \Delta > 0$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và trục hoành là $ax^2 + bx + c = 0$ (*).

Do (P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt nên (*) có hai nghiệm phân biệt hay $\Delta > 0$.

Vì (P) có đỉnh nằm phía trên trục hoành và cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt nên bề lõm của đồ thị quay xuống. Do đó $a < 0$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 84. Tìm hàm số $(P): y = ax^2 + 3x - 2$, biết rằng đồ thị hàm số có trục đối xứng $x = -3$.

A. $y = x^2 + 3x - 2$. B. $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$.
C. $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$. D. $y = -x^2 + 3x - 2$.

Lời giải.

Do đồ thị hàm số có trục đối xứng $x = -3$ nên $-\frac{3}{2a} = -3 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$.

Vậy $(P): y = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 85.

Bảng biến thiên ở hình vẽ bên là của hàm số nào sau đây?

A. $y = -x^2 + 2x - 3$. B. $y = m, m$ là tham số.
C. $y = 2018x - 2019$. D. $y = -2018x + 1$.

x	$-\infty$	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\infty$

Lời giải.

Từ bảng biến thiên, ta nhận thấy hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên chỉ có hàm số $y = -2018x + 1$ thỏa mãn.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 86. Hàm số nào dưới đây có giá trị lớn nhất bằng $\frac{3}{4}$?

A. $y = -x^2 + \frac{3}{2}x + 1$. B. $y = x^2 - 3x + 3$. C. $y = -x^2 + x + \frac{1}{2}$. D. $y = -x^2 + 3x - 3$.

Lời giải.

Ta có $y = -x^2 + x + \frac{1}{2} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \leq \frac{3}{4}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Nên hàm số $y = -x^2 + x + \frac{1}{2}$ có giá trị lớn nhất bằng $\frac{3}{4}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 87. Parabol $y = ax^2 + bx + c$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 4 tại $x = -2$ và đi qua điểm $A(0; 6)$ có phương trình là

A. $y = x^2 + 4x + 12$. B. $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$. C. $y = x^2 + 2x + 6$. D. $y = \frac{1}{2}x^2 + 6x + 6$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} c = 6 \\ -\frac{b}{2a} = -2 \\ f(-2) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 6 \\ 4a - b = 0 \\ 4a - 2b + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 2 \\ c = 6. \end{cases}$$

Vậy $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 88. Giao điểm của parabol $y = x^2 - 3x + 2$ với đường thẳng $y = x - 1$ là điểm

A. $(2; 1); (0; -1)$. B. $(3; 2); (1; 0)$. C. $(-2; -3); (0; -1)$. D. $(2; 1); (-1; 2)$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - 3x + 2 = x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \begin{cases} x = 1 \\ x = 3. \end{cases}$

Với $x = 1 \Rightarrow y = 0$.

Với $x = 3 \Rightarrow y = 2$. Do đó tọa độ các giao điểm là $(1; 0)$ và $(3; 2)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 89. Parabol $y = ax^2 + bx + 2$ đi qua hai điểm $M(1; 5)$ và $N(-2; 8)$ có phương trình là

A. $y = 2x^2 + 2x + 2$. B. $y = x^2 + x + 2$. C. $y = x^2 + 2x$. D. $y = 2x^2 + x + 2$.

Lời giải.

Ta có hệ

$$\begin{cases} a + b + 2 = 5 \\ 4a - 2b + 2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ 2a - b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1. \end{cases}$$

Vậy parabol có phương trình $y = 2x^2 + x + 2$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 90. Parabol $y = ax^2 + bx + c$ đi qua $A(0; -1)$, $B(1; -1)$, $C(-1; 1)$ có phương trình là

- A. $y = x^2 - x - 1$. B. $y = x^2 + x - 1$. C. $y = x^2 + x + 1$. D. $y = x^2 - x + 1$.

Lời giải.

Ta có hệ

$$\begin{cases} c = -1 \\ a + b + c = -1 \\ a - b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1 \\ a + b = 0 \\ a - b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1 \\ a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

Vậy parabol có phương trình $y = x^2 - x - 1$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 91. Hàm số nào sau đây có giá trị nhỏ nhất tại $x = \frac{3}{4}$?

- A. $y = -x^2 + \frac{3}{2}x + 1$. B. $y = -2x^2 + 3x + 1$. C. $y = x^2 - \frac{3}{2}x + 1$. D. $y = 4x^2 - 3x + 1$.

Lời giải.

- Hàm số $y = -x^2 + \frac{3}{2}x + 1$ và hàm số $y = -2x^2 + 3x + 1$ có đồ thị là các parabol quay bề lõm xuống dưới nên không có giá trị nhỏ nhất.
- Hàm số $y = x^2 - \frac{3}{2}x + 1$ có giá trị nhỏ nhất tại $x = -\frac{b}{2a} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}$.
- Hàm số $y = 4x^2 - 3x + 1$ có giá trị nhỏ nhất tại $x = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{8}$.

Vậy $y = x^2 - \frac{3}{2}x + 1$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 92. Cho hàm số $y = x^2 - 2x - 1$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$. B. Đồ thị hàm số có đỉnh $I(1; -2)$.
C. Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$. D. Đồ thị hàm số có trục đối xứng $x = -2$.

Lời giải.

Hàm số $y = x^2 - 2x - 1$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, có đồ thị là parabol quay bề lõm lên trên, với tọa độ đỉnh $I(1; -2)$, trục đối xứng $x = 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$+\infty$	-2	$+\infty$

Suy ra hàm số đã cho nghịch biến trên $(-\infty; 1)$, đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Vậy mệnh đề “Đồ thị hàm số có trục đối xứng $x = -2$ ” sai.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 93. Parabol $y = x^2 + 5x - 6$ cắt trục tung tại điểm có tung độ là

- A. $-\frac{5}{2}$. B. $-\frac{49}{4}$. C. -6 . D. $-\frac{5}{4}$.

Lời giải.

Với $x = 0$ thì $y = -6$ nên parabol cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -6 .

Chọn đáp án **C**

□

Câu 94. Parabol $y = x^2 + 5x + 6$ có tọa độ đỉnh là

- A. $\left(5; \frac{1}{2}\right)$. B. $\left(-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$. C. $\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$. D. $\left(-\frac{5}{2}; -\frac{1}{4}\right)$.

Lời giải.

Ta có $-\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2}$ và $y\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{4}$. Vậy tọa độ đỉnh của parabol là $\left(-\frac{5}{2}; -\frac{1}{4}\right)$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 95. Cho hàm số $y = 2x^2 + 4x - 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên $(1; +\infty)$.
 B. Hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty; -1)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên $(-1; +\infty)$ và đồng biến trên $(-\infty; -1)$.
 D. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$ và đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số $y = 2x^2 + 4x + 1$ có tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, tọa độ của đỉnh là $I(-1; -3)$ và hệ số $a = 2 > 0$.

Ta suy ra hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$ và đồng biến trên $(-1; +\infty)$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 96. Hàm số $y = x^2 + 6x + 1$ có tập giá trị là

- A. $(8; +\infty)$. B. $[8; +\infty)$. C. $(-8; +\infty)$. D. $[-8; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số đã cho là parabol có đỉnh $I(-3; -8)$ và hệ số $a = 1 > 0$ ta có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
y	$+\infty$	-8	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $y \geq -8 \Rightarrow y \in [-8; +\infty)$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 97. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$, biết đồ thị hàm số có tọa độ đỉnh $I\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ và đi qua điểm $M(0; 1)$. Tìm hàm số đã cho.

- A. $y = -3x^2 + 2x + 1$. B. $y = 3x^2 - 2x + 1$. C. $y = 3x^2 - 2x - 1$. D. $y = 3x^2 + 2x + 1$.

Lời giải.

Vì $I\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ là đỉnh của parabol nên ta có $-\frac{b}{2a} = \frac{1}{3}$ và $\frac{a}{9} + \frac{b}{3} + c = \frac{2}{3}$.

Hơn nữa đồ thị hàm số đi qua $M(0; 1)$ nên ta có $c = 1$.

Ta có hệ $\begin{cases} 2a + 3b = 0 \\ a + 3b + 9c = 6 \\ c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases}$. Vậy hàm số cần tìm là $y = 3x^2 - 2x + 1$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 98. Cho hai Parabol có phương trình $y = 2x^2$ và $y = x^2 + x + 6$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt. Phương trình đường thẳng qua hai điểm phân biệt đó có dạng là

- A. $y = 2x + 1$. B. $y = 2x + 12$. C. $y = 2x - 18$. D. $y = 2x + 4$.

Lời giải.

$$\text{Xét phương trình } 2x^2 = x^2 + x + 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \Rightarrow y = 18 \\ x = -2 \Rightarrow y = 8 \end{cases}.$$

Suy ra hai Parabol cắt nhau tại $A(3; 18)$, $B(-2; 8)$.

Phương trình đường thẳng d có dạng $y = ax + b$.

Do d đi qua A nên ta có $3a + b = 18$.

Do d đi qua B nên ta có $-2a + b = 8$.

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} 3a + b = 18 \\ -2a + b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 12 \end{cases}.$$

Ta được phương trình đường thẳng d là $y = 2x + 12$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 99. Cho parabol $(P_m): y = f(x) = x^2 - x + 56m$ (m là tham số) và điểm $M(x_0; y_0) \in (P_m)$. Điểm nào sau đây cũng thuộc (P_m) ?

- A. $P(1 - x_0; y_0)$. B. $H(-1 + x_0; y_0)$. C. $K\left(\frac{1}{2} - x_0; y_0\right)$. D. $N\left(x_0 + \frac{1}{2}; y_0\right)$.

Lời giải.

Ta có $M(x_0; y_0) \in (P_m) \Rightarrow y_0 = x_0^2 - x_0 + 56m$.

Có $f(1 - x_0) = (1 - x_0)^2 - (1 - x_0) + 56m = x_0^2 - x_0 + 56m = y_0$. Do đó $P(1 - x_0; y_0) \in (P_m)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 100. Đỉnh của parabol $y = -x^2 + 2x + 3$ có tọa độ là

- A. $(4; -1)$. B. $(-4; 1)$. C. $(-1; 4)$. D. $(1; 4)$.

Lời giải.

$$\text{Gọi } I \text{ là đỉnh của parabol, khi đó } \begin{cases} x_I = -\frac{b}{2a} = 1 \\ y_I = -1^2 + 2 \cdot 1 + 3 = 4. \end{cases}$$

Vậy tọa độ đỉnh của parabol là $I(1; 4)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 101. Tọa độ các giao điểm của parabol $(P): y = x^2 - 3x + 2$ và đường thẳng $y = x - 1$ là

- A. $(1; 0); (3; 2)$. B. $(0; -1); (-2; -3)$. C. $(-1; 2); (2; 1)$. D. $(2; 1); (0; -1)$.

Lời giải.

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm: } x^2 - 3x + 2 = x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3. \end{cases}$$

Vậy tọa độ hai giao điểm là $(1; 0)$, $(3; 2)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 102. Đồ thị của hai hàm số $y = -x^2 - 2x + 3$ và $y = x^2 - m$ (với m là tham số) có điểm chung khi và chỉ khi m thỏa mãn

- A. $m \leq 3$. B. $m \geq -\frac{7}{2}$. C. $m \geq 3$. D. $m \geq 0$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $-x^2 - 2x + 3 = x^2 - m \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - m - 3 = 0$. (1)

Để hai đồ thị hàm số có điểm chung thì phương trình (1) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' = 1 - 2(-m - 3) \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{7}{2}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 103.

Cho hàm số $y = 2x^2 - 4x - 1$ có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình $|2x^2 - 4x - 1| = m$ (với m là tham số) có hai nghiệm khi và chỉ khi m thuộc tập hợp nào sau đây?

A. $m \in (-3; +\infty)$.

B. $m \in (3; +\infty) \cup \{0\}$.

C. $m \in [0; +\infty)$.

D. $m \in (3; +\infty)$.

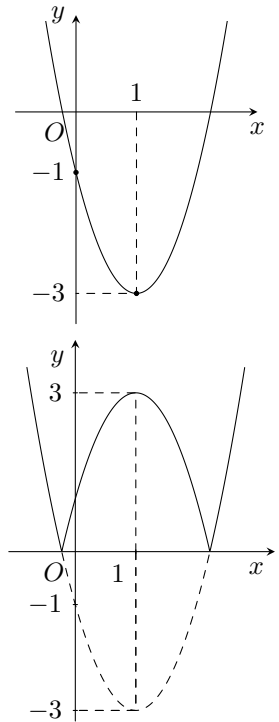
Lời giải.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = 2x^2 - 4x - 1$, ta nhận được đồ thị của hàm số $y = |2x^2 - 4x - 1|$ bằng cách giữ nguyên phần đồ thị của hàm số $y = 2x^2 - 4x - 1$ nằm phía trên trục hoành, phần đồ thị nằm phía dưới trục hoành thì ta lấy đối xứng qua trục hoành.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = |2x^2 - 4x - 1|$ ta thấy phương trình đã cho

$$|2x^2 - 4x - 1| = m \text{ có hai nghiệm khi } \begin{cases} m > 3 \\ m = 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án (B) □



Câu 104. Cho hàm số $y = x^2 - 5x + 3$. Chọn khẳng định đúng.

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$. B. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$. D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 3)$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = x^2 - 5x + 3$ là một parabol có:

Trục đối xứng $x = \frac{5}{2}$.

Tọa độ đỉnh $I\left(\frac{5}{2}; -\frac{13}{4}\right)$.

Hệ số $a = 1 > 0$ nên bề lõm quay lên.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\frac{13}{4}$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 105. Trục đối xứng của parabol $y = 2x^2 + 2x - 1$ là đường thẳng có phương trình

A. $x = 1$.

B. $x = \frac{1}{2}$.

C. $x = 2$.

D. $x = -\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Trục đối xứng của parabol $y = ax^2 + bx + c$ là đường thẳng có phương trình $x = -\frac{b}{2a}$.

Vậy phương trình cần tìm là $x = -\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 106. Tọa độ đỉnh I của parabol $y = x^2 - 2x + 7$ là

A. $I(-1; -4)$.

B. $I(1; 6)$.

C. $I(1; -4)$.

D. $I(-1; 6)$.

Lời giải.

Tọa độ đỉnh I của parabol $y = x^2 - 2x + 7$ là $\begin{cases} x_I = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1 \\ y_I = x_I^2 - 2x_I + 7 = 6. \end{cases}$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 107.

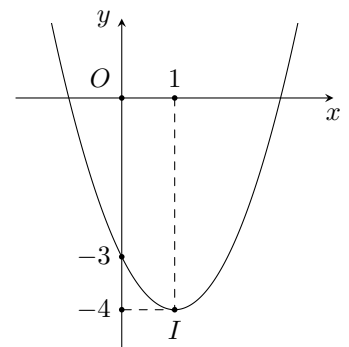
Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ. Khi đó $2a + b + 2c$ có giá trị là

A. -9 .

B. 9 .

C. -6 .

D. 6 .



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy parabol (P) có đỉnh $I(1; -4)$ và đi qua điểm $(0; -3)$. Do đó, ta được

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1 \\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = -4 \\ a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -3. \end{cases}$$

Vậy $2a + b + 2c = -6$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 108. Tọa độ giao điểm của đường thẳng $d: y = -x + 4$ và parabol $y = x^2 - 7x + 12$ là

A. $(-2; 6)$ và $(-4; 8)$.

B. $(2; 2)$ và $(4; 8)$.

C. $(2; -2)$ và $(4; 0)$.

D. $(2; 2)$ và $(4; 0)$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của 2 đồ thị đã cho là

$$-x + 4 = x^2 - 7x + 12 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = 2 \\ x = 4 \Rightarrow y = 0. \end{cases}$$

Vậy có 2 giao điểm cần tìm là (2; 2) và (4; 0).

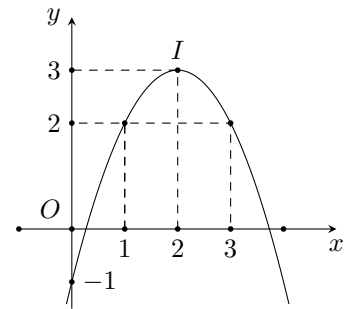
Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 109.

Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm các giá trị m để phương trình $|ax^2 + bx + c| = m$ có 4 nghiệm phân biệt.

- A. $-1 < m < 3$. B. $0 < m < 3$.
C. $0 \leq m \leq 3$. D. $0 \leq m \leq 3$.



Lời giải.

Yêu cầu bài toán tương đương đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = g(x) = |ax^2 + bx + c|$ tại 4 điểm phân biệt.

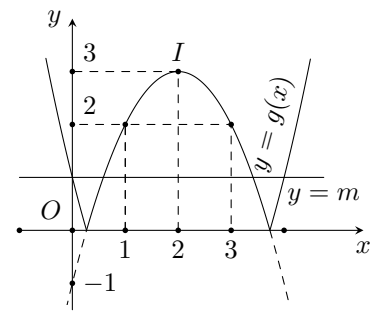
Từ đồ thị của (P) ta suy ra đồ thị của hàm số $y = g(x)$ gồm 2 phần:

- Phần 1. Là phần đồ thị của parabol (P) trên trục Ox ;
- Phần 2. Là phần đối xứng với đồ thị của parabol (P) dưới trục Ox qua Ox .

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = g(x)$, vậy $0 < m < 3$ thì thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **(B)**

□



Câu 110. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng $y = mx + 3 - 2m$ cắt parabol $y = x^2 - 3x - 5$ tại 2 điểm phân biệt có hoành độ trái dấu.

- A. $m < -3$. B. $-3 < m < 4$. C. $m < 4$. D. $m \leq 4$.

Lời giải.

Yêu cầu bài toán tương đương phương trình $mx + 3 - 2m = x^2 - 3x - 5 \Leftrightarrow x^2 - (m + 3)x + 2m - 8 = 0$ có 2 nghiệm trái dấu, hay $a \cdot c < 0 \Leftrightarrow 2m - 8 < 0 \Leftrightarrow m < 4$.

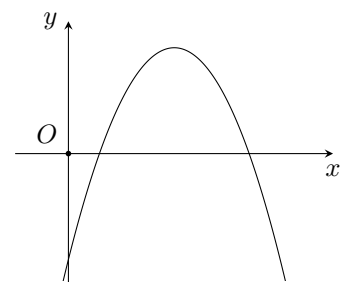
Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 111.

Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$. B. $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$.
C. $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$. D. $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy:

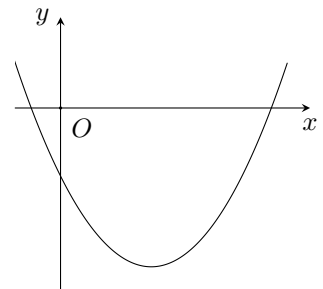
- Bề lõm của parabol hướng xuống nên $a < 0$;
- Parabol có đỉnh $I(x_I; y_I)$ với $x_I > 0, y_I > 0$ nên $-\frac{b}{2a} > 0 \Rightarrow b > 0$;
- Parabol cắt trục Oy tại điểm có tung độ âm nên $c < 0$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 112.

Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây đúng?



- A. $a > 0, b < 0, c < 0$. B. $a < 0, b < 0, c > 0$.
C. $a > 0, b < 0, c > 0$. D. $a > 0, b > 0, c < 0$.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số ta có $a > 0$, đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tung độ âm nên $c < 0$.

Đồ thị hàm số có trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a} > 0$, mà $a > 0$ nên $b < 0$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 113. Parabol dạng $y = ax^2 + bx + 2$ đi qua điểm $A(2; 4)$ và có trục đối xứng là đường thẳng $x = \frac{3}{2}$ có phương trình là

- A. $y = -x^2 - 3x + 2$. B. $y = x^2 - 3x + 2$. C. $y = -x^2 + 3x + 2$. D. $y = x^2 + 3x + 2$.

Lời giải.

$$\text{Theo bài ra ta có } \begin{cases} a \neq 0 \\ 4 = 4a + 2b + 2 \\ -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ 2a + b = 1 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3. \end{cases}$$

Vậy $y = -x^2 + 3x + 2$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 114. Cho hàm số $y = -x^2 - 2x + 1$. Chọn phương án **sai**?

- A. Hàm số không chẵn, không lẻ.
B. Đồ thị hàm số có trục đối xứng là đường thẳng có phương trình $x = -1$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
D. Đồ thị hàm số nhận điểm $I(-1; 4)$ làm đỉnh.

Lời giải.

- Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, $\begin{cases} y(1) = -1 \\ y(-1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(-1) \neq y(1) \\ y(-1) \neq -y(1) \end{cases}$ nên “Hàm số không chẵn, không lẻ” đúng.
- Parabol có trục đối xứng $x = -1$ nên “Đồ thị hàm số có trục đối xứng là đường thẳng có phương trình $x = -1$ ” đúng.
- Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và nghịch biến trên $(-1; +\infty)$ nên “Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ ” đúng.

- Đồ thị hàm số nhận điểm $I(-1; 2)$ làm đỉnh nên “Đồ thị hàm số nhận điểm $I(-1; 4)$ làm đỉnh” sai.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 115. Cho parabol $(P): y = x^2 - 4x + 3$ và đường thẳng $(d): y = mx + 3$. Biết rằng có hai giá trị của m là m_1, m_2 để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\frac{9}{2}$.

Tính giá trị biểu thức $P = m_1^2 + m_2^2$?

- A. $P = 5$. B. $P = 25$. C. $P = 10$. D. $P = 50$.

Lời giải.

Viết lại phương trình đường thẳng $(d): mx - y + 3 = 0$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm (P) và (d) ta có

$$x^2 - 4x + 3 = mx + 3 \Leftrightarrow x^2 - (m + 4)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = m + 4. \end{cases}$$

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B thì $m + 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -4$.

Ta có $A(0; 3), B(m + 4; m^2 + 4m + 3)$.

Theo bài ra

$$\begin{aligned} S_{\triangle OAB} &= \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}d(O, d) \cdot AB = \frac{9}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{|3|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} \cdot \sqrt{(m + 4)^2 + (m^2 + 4m)^2} &= 9 \\ \Leftrightarrow |m + 4| = 3 &\Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = -1 \\ m_2 = -7. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $P = m_1^2 + m_2^2 = 50$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 116.

Cho parabol $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có bảng biến thiên như hình bên. Đỉnh của parabol là điểm

- A. $I(5; 1)$. B. $I(-1; -5)$.
C. $I(-1; 0)$. D. $I(-1; 5)$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-5	$+\infty$

Lời giải.

Nhìn vào bảng biến thiên thì đỉnh của parabol là điểm $I(-1; -5)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 117. Cho đường thẳng $(d_1): y = 3x - 5$ và $(d_2): y = 4x - 9$ cắt nhau tại điểm M . Tìm hàm số bậc hai $y = 3x^2 + bx + c$ có đồ thị đi qua điểm $A(-2; 1)$ và M .

- A. $y = 3x^2 - 14x - 29$. B. $y = 3x^2 + 5x - 1$.
C. $y = 3x^2 - 5x - 21$. D. $y = 3x^2 + 15x + 19$.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của $(d_1): y = 3x - 5$ và $(d_2): y = 4x - 9$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = 3x - 5 \\ y = 4x - 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 7. \end{cases}$$

Vì $y = 3x^2 + bx + c$ có đồ thị đi qua điểm $A(-2; 1)$ và $M(4; 7)$ nên có

$$\begin{cases} 1 = 12 - 2b + c \\ 7 = 48 + 4b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -5 \\ c = -21. \end{cases}$$

Vậy $y = 3x^2 - 5x - 21$.

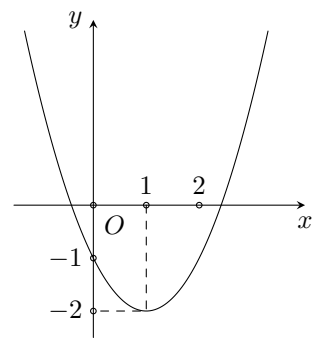
Chọn đáp án **C**

□

Câu 118.

Đồ thị hình bên là của hàm số nào?

- A. $y = 2x^2 - 4x - 1$. B. $y = x^2 - 2x - 1$.
C. $y = -x^2 - 2x + 1$. D. $y = x^2 + 2x - 1$.



Lời giải.

Nhìn vào đồ thị ta thấy

- Đồ thị là parabol dạng $y = ax^2 + bx + c$.
- Đỉnh $I(1; -2)$.
- Đi qua $(0; -1)$.

Ta sẽ chọn hàm số $y = x^2 - 2x - 1$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 119. Cho parabol $(P): y = x^2 - 3x + 2$ và đường thẳng $(d): y = x - 1$. Biết (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt A, B . Tính độ dài AB .

- A. $AB = 8$. B. $AB = 4$. C. $AB = 2$. D. $AB = 2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của parabol $(P): y = x^2 - 3x + 2$ và đường thẳng $(d): y = x - 1$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x + 2 \\ y = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ x^2 - 3x + 2 = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, y = 0 \\ x = 3, y = 2. \end{cases}$$

Khi đó $A(1; 0), B(3; 2)$ hay $AB = 2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 120. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = -3x^2 + 4x + 6$.

- A. -10 . B. 10 . C. 20 . D. -20 .

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $y = -x^2 + 4x + 6 = 10 - (x^2 - 4x + 4) = 10 - (x - 2)^2 \leq 10, \forall x \in \mathcal{D}$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 10 khi $x = 2$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 121. Tìm tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = -3x^2 + x + 3$ với đường thẳng $y = 3x - 2$.

A. $(1; 1)$ và $\left(-\frac{5}{7}; -7\right)$.

B. $(1; 1)$ và $(3; -7)$.

C. $(1; -1)$ và $(-3; 7)$.

D. $(-1; 1)$ và $\left(-\frac{5}{7}; 7\right)$.

Lời giải.

Tìm tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = -3x^2 + x + 3$ với đường thẳng $y = 3x - 2$ là nghiệm của hệ phương trình giao điểm

$$\begin{cases} y = -3x^2 + x + 3 \\ y = 3x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x^2 + x + 3 = 3x - 2 \\ y = 3x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{3} \\ y = -7 \\ x = 1 \\ y = 1. \end{cases}$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 122. Cho hàm số $y = -3x^2 - 2x + 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$.

B. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 2)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $(-1; +\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số $y = -3x^2 - 2x + 1$ có đỉnh $I\left(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$ và có $a = -3 < 0$ nên có bản biến thiên sau

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
y	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	$-\infty$

Từ bản biến thiên trên, suy ra hàm số đồng biến trên $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 123. Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ đi qua 3 điểm $A(-1; 0), B(0; -4), C(1; -6)$. Tính giá trị a, b, c .

A. 1; 3; -4.

B. -1; 3; -4.

C. 1; -3; 4.

D. 1; -3; -4.

Lời giải.

Vì parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ đi qua 3 điểm $A(-1; 0), B(0; -4), C(1; -6)$ nên ta có

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ c = -4 \\ a + b + c = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = -4. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 124. Parabol $y = -2x^2 - 4x$ có đỉnh là

- A. $I(-1; 2)$. B. $I(1; 6)$. C. $I\left(-\frac{1}{4}; \frac{7}{8}\right)$. D. $I\left(-\frac{1}{4}; -\frac{9}{8}\right)$.

Lời giải.

- Hoàn chỉnh đỉnh $x = -\frac{b}{2a} = -1$.
- Với $x = -1$, suy ra $y = 2$.

Vậy, tọa độ đỉnh là $I(-1; 2)$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 125. Parabol $y = ax^2 + bx + 2$ đi qua điểm $M(1; -1)$ và có trục đối xứng $x = 2$ là

- A. $y = x^2 - 4x + 2$. B. $y = 2x^2 + x + 2$. C. $y = -x^2 + 2x + 2$. D. $y = x^2 - 3x + 2$.

Lời giải.

$$\text{Theo giả thiết, ta được hệ } \begin{cases} a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 2 = -1 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -3 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases}$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 126. Tọa độ đỉnh I của parabol $(P) : y = 2x^2 - 4x + 1$ là

- A. $I(1; -1)$. B. $I(0; 1)$. C. $I(-1; -1)$. D. $I(2; 1)$.

Lời giải.

Xét parabol $(P) : y = 2x^2 - 4x + 1$, tọa độ đỉnh là $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow I(1; -1)$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 127. Phương trình parabol $(P) : y = ax^2 + bx + 2$ đi qua điểm $M(1; -1)$ và có trục đối xứng $x = 2$ là

- A. $y = x^2 - 3x + 2$. B. $y = -x^2 + 4x + 2$. C. $y = 2x^2 + x + 2$. D. $y = x^2 - 4x + 2$.

Lời giải.

Ta có (P) đi qua điểm $M(1; -1) \Rightarrow -1 = a + b + 2 \Leftrightarrow a + b = -3 \quad (1)$.

(P) nhận đường thẳng $x = 2$ làm trục đối xứng $\Rightarrow -\frac{b}{2a} = 2 \Leftrightarrow b = -4a$. Thay vào (1) ta được $a - 4a = -3 \Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow b = -4 \Rightarrow (P) : y = x^2 - 4x + 2$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 128. Parabol $y = x^2 + 1$ nhận điểm nào sau đây làm đỉnh của nó?

- A. $O(0; 0)$. B. $I(1; 0)$. C. $K(0; 1)$. D. $J(-1; 0)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } a = 1, b = 0, c = 1 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{2a} = 0 \\ f(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow K(0; 1) \text{ là đỉnh của parabol.}$$

Chọn đáp án **(C)**

□

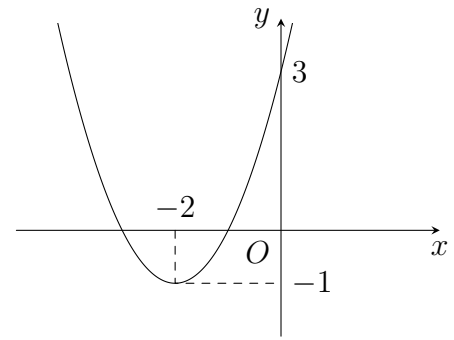
Câu 129. Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình vẽ bên?

A. $y = -2x^2 - 8x + 3$.

B. $y = -x^2 - 4x + 3$.

C. $y = 2x^2 + 8x + 3$.

D. $y = x^2 + 4x + 3$.

**Lời giải.**Parabol quay bề lõm lên trên $\Rightarrow a > 0$.Mặt khác parabol đi qua điểm có tọa độ $(-2; -1)$.Vậy hàm số có đồ thị hình bên là $y = x^2 + 4x + 3$.Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 130. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$?

A. $y = -x^2 - 2x - 1$.

B. $y = x^2 - 2x + 3$.

C. $y = x^2 + 2x - 3$.

D. $y = -x^2 + 2x$.

Lời giải.Hàm số $y = x^2 - 2x + 3$ nghịch biến trên $(-\infty; 1)$ và đồng biến trên $(1; +\infty)$.Chọn đáp án **(B)**

□

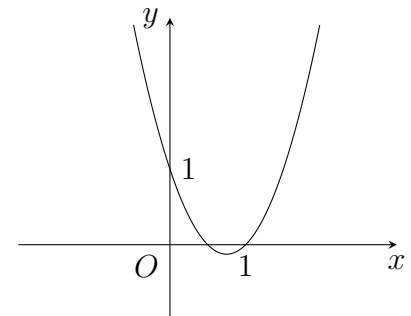
Câu 131.Cho đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a > 0, b < 0, c > 0$.

B. $a > 0, b > 0, c > 0$.

C. $a > 0, b < 0, c < 0$.

D. $a < 0, b < 0, c > 0$.

**Lời giải.**

Đồ thị của hàm số là parabol có bề lõm quay lên trên nên $a > 0$. Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $c > 0$. Đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương nên $-\frac{b}{a} > 0$, suy ra $b < 0$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 132. Giao điểm của parabol $y = -2x^2 + x + 6$ với đường thẳng $y = -2x + 1$ là

A. $P(-1; 3), N\left(\frac{5}{2}; -4\right)$.

B. $M(1; 3)$.

C. $P(-1; 3)$.

D. $N\left(\frac{5}{2}; -4\right)$.

Lời giải.Hoành độ giao điểm của parabol $y = -2x^2 + x + 6$ với đường thẳng $y = -2x + 1$ là nghiệm của phương trình

$$-2x^2 + x + 6 = -2x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Nếu $x = -1$ thì $y = (-2) \cdot (-1) + 1 = 3$.

Nếu $x = \frac{5}{2}$ thì $y = -2 \cdot \frac{5}{2} + 1 = -4$.

Vậy giao điểm của parabol $y = -2x^2 + x + 6$ với đường thẳng $y = -2x + 1$ là $P(-1; 3)$, $N\left(\frac{5}{2}; -4\right)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 133. Bảng biến thiên của hàm số $y = -2x^2 + 4x + 1$ là bảng nào sau đây?

A.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$-\infty$	1	$-\infty$

B.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$+\infty$	1	$+\infty$

C.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	3	$-\infty$

D.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$+\infty$	3	$+\infty$

Lời giải.

$y = -2x^2 + 4x + 1$ ($a = -2$; $b = 4$; $c = 1$).

Ta có $a < 0$; $-\frac{b}{2a} = 1$. Nên ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	3	$-\infty$

Chọn đáp án **C**

□

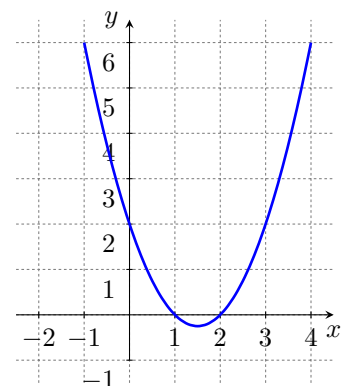
Câu 134. Đồ thị ở hình vẽ là của hàm số nào ?

A. $y = x^2 + 3x + 1$.

B. $y = -x^2 + 3x + 1$.

C. $y = x^2 - 3x + 2$.

D. $y = -x^2 - 3x + 2$.



Lời giải.

Vì parabol có bề lõm lên trên nên $a > 0 \Rightarrow$ loại đáp án B và D .

Điểm $(1; 0)$ không thuộc $y = x^2 + 3x + 1$ nên ta loại đáp án A .

Chọn đáp án **C**

□

Câu 135. Tìm tọa độ đỉnh của parabol $y = 2x^2 - 4x + 1$.

- A. $(-1; 7)$. B. $(2; 1)$. C. $(1; -1)$. D. $(-2; 17)$.

Lời giải.

Tọa độ đỉnh của parabol là $(1; -1)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 136. Parabol đi qua $A(0; -1)$, $B(1; -1)$, $C(-1; 1)$ có phương trình là

- A. $y = x^2 - x + 1$. B. $y = x^2 - x - 1$. C. $y = x^2 + x - 1$. D. $y = x^2 + x + 1$.

Lời giải.

$$\text{Parabol } y = ax^2 + bx + c \text{ đi qua } A(0; -1), B(1; -1), C(-1; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = c \\ a + b + c = -1 \\ a - b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1. \end{cases}$$

Vậy parabol có phương trình $y = x^2 - x - 1$.

Chọn đáp án **B**

□

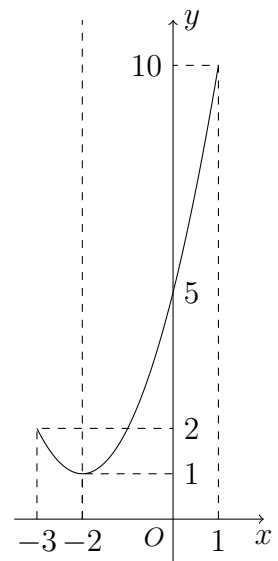
Câu 137. Giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = x^2 + 4x + 5$ trên đoạn $[-3; 1]$ là

- A. $m = 2$ và $M = 10$. B. $m = 1$ và $M = 17$. C. $m = 1$ và $M = 10$. D. $m = 2$ và $M = 17$.

Lời giải.

Khảo sát hàm số $y = x^2 + 4x + 5$ trên đoạn $[-3; 1]$ ta có đồ thị như hình bên.

Dựa vào đồ thị ta thấy giá trị nhỏ nhất $m = 1$ và giá trị lớn nhất $M = 10$.



Chọn đáp án **C**

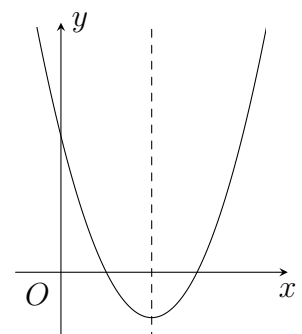
□

Câu 138.

Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị là một Parabol (P) như hình vẽ bên.

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

- A. $a > 0$, $b > 0$ và $c > 0$. B. $a < 0$, $b < 0$ và $c > 0$.
C. $a > 0$, $b > 0$ và $c < 0$. D. $a > 0$, $b < 0$ và $c > 0$.



Lời giải.

Chiều Parabol quay lên nên hệ số $a > 0$, đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm ở phía trên Ox nên $c > 0$, trục đối xứng nằm bên phải Oy nên a, b trái dấu.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 139. Tìm tất cả các số thực m để phương trình $|x^2 - 2x| - m = 0$ có bốn nghiệm phân biệt.

A. $0 < m < \frac{1}{2}$.

B. $0 < m < 1$.

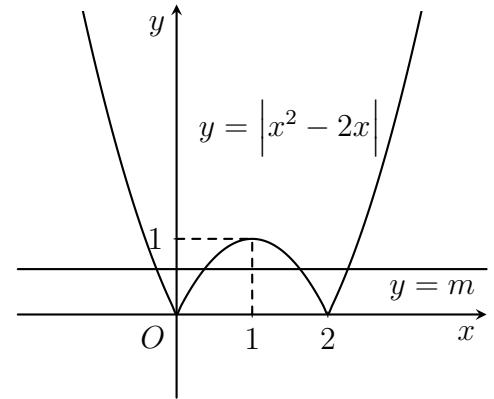
C. $0 < m \leq 1$.

D. $-1 < m < 1$.

Lời giải.

Ta có $|x^2 - 2x| - m = 0 \Leftrightarrow |x^2 - 2x| = m$. Vậy số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |x^2 - 2x|$ và đường thẳng $y = m$.

Từ đồ thị hình bên ta thấy phương trình đã cho có 4 nghiệm khi và chỉ khi $0 < m < 1$.



Chọn đáp án **(B)** □

Câu 140. Cho hàm số $y = f(x) = -x^2 + 2x + 1$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1.

B. $f(-2^{2017}) < f(-3^{2017})$.

C. Đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = -1$ làm trục đối xứng.

D. $f(2^{2017}) > f(3^{2017})$.

Lời giải.

Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $-3^{2017} < -2^{2017} < 1$ nên $f(-2^{2017}) < f(-3^{2017})$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 141. Tìm các số thực a, b và c để đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ là một Parabol có đỉnh là $I\left(\frac{1}{4}; \frac{5}{4}\right)$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2.

A. $a = -12, b = 6$ và $c = 2$.

B. $a = -\frac{20}{49}, b = \frac{10}{49}$ và $c = \frac{60}{49}$.

C. $a = 12, b = -6$ và $c = 2$.

D. $a = -2, b = 1$ và $c = 2$.

Lời giải.

- Vì parabol cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2 nên $c = 2 \Rightarrow (P): y = ax^2 + bx + 2$.
- Vì parabol có đỉnh là $I\left(\frac{1}{4}; \frac{5}{4}\right)$ nên ta có

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{16}a + \frac{1}{4}b + 2 = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b \\ a + 4b = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 12 \\ b = -6 \end{cases}$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 142.

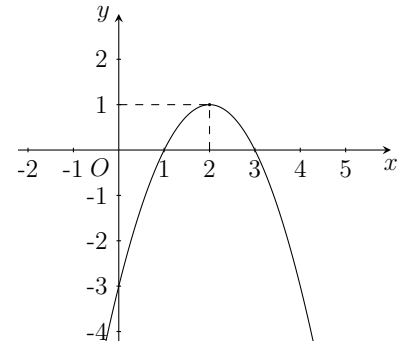
Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên?

A. $y = -x^2 + 2x - 3$.

B. $y = -x^2 + 4x - 3$.

C. $y = x^2 - 4x + 3$.

D. $y = x^2 - 2x - 3$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ cắt trục tung tại $(0; -3)$ nên $c = -3$.

Đỉnh $I(2; 1)$ nên $-\frac{b}{2a} = 1$ và $4a + 2b - 3 = 1$. Do đó $a = -1$ và $b = 4$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 143. Bảng biến thiên của hàm số $y = -2x^2 + 4x + 1$ là bảng nào sau đây?

A.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$ 1 $\nearrow$	$+\infty$

C.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$ 1 $\searrow$	$-\infty$

B.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$ 3 $\searrow$	$-\infty$

D.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$ 3 $\nearrow$	$+\infty$

Lời giải.

Tọa độ đỉnh $I(1; 3)$ và $a = -2 < 0$ nên bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$ 3 $\searrow$	$-\infty$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 144. Cho parabol $(P): y = 3x^2 - 2x + 1$. Điểm nào sau đây là đỉnh của (P) ?

A. $I(0; 1)$.

B. $I\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

C. $I\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

D. $I\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

Lời giải.

Đỉnh parabol là $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$. Do đó $I\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 145. Tọa độ giao điểm của $(P): y = x^2 + 2x - 1$ và đường thẳng $y = x - 1$ là

A. $(0; -1)$ và $(-1; 2)$.

B. $(0; 1)$ và $(-1; 2)$.

C. $(0; -1)$ và $(-1; -2)$.

D. $(-1; 0)$ và $(-1; -2)$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của $(P): y = x^2 + 2x - 1$ và đường thẳng $y = x - 1$ là

$$x^2 + 2x - 1 = x - 1 \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = -2 \\ x = 0 \Rightarrow y = -1. \end{cases}$$

Tọa độ các giao điểm là $(0; -1)$ và $(-1; -2)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 146. Hàm số $y = 2x^2 + 4x + 1$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-3; +\infty)$. B. $(-\infty; 1)$. C. $(-\infty; -1)$. D. $(1; +\infty)$.

Lời giải.

Bảng biến thiên của hàm số $y = 2x^2 + 4x + 1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y	$+\infty$	-1	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$ nên đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 147. Cho hàm số $y = -x^2 - 4x + 5$. Hãy chọn khẳng định **đúng**.

- A. Hàm số đạt giá trị lớn nhất khi $x = -2$. B. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = -2$.
C. Hàm số đạt giá trị lớn nhất khi $x = 9$. D. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = 9$.

Lời giải.

Bảng biến thiên của hàm số $y = -x^2 - 4x + 5$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y	$-\infty$	9	$-\infty$

Hàm số đạt giá trị lớn nhất là 9 khi $x = -2$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 148. Cho parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng (d) đi qua điểm $I(0; -1)$ và có hệ số góc k . Gọi A và B là các giao điểm của (P) và (d) . Giả sử A và B lần lượt có hoành độ là x_1, x_2 . Tìm các giá trị của k để trung điểm đoạn thẳng AB nằm trên trục tung.

- A. $k = 2$. B. $k = 0$. C. $k = 1$. D. $k = -1$.

Lời giải.

Đường thẳng (d) qua $I(0; -1)$ và có hệ số góc k có phương trình là $y = kx - 1$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là $-x^2 = kx - 1 \Leftrightarrow x^2 + kx - 1 = 0$. (*)

Để (d) cắt (P) tại hai điểm A, B sao cho trung điểm AB nằm trên Oy thì phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt $x_1 + x_2 = 0$ tức là $\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 + 4 > 0 (\forall k \in \mathbb{R}) \\ -k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow k = 0$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 149. Tìm tọa độ đỉnh I của $(P): y = -2x^2 + 4x$ là

- A. $I(-1; 2)$. B. $I(1; -2)$. C. $I(-1; -6)$. D. $I(1; 2)$.

Lời giải.

Tọa độ đỉnh của (P) là $I(1; 2)$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 150. Parabol (P) đi qua ba điểm $A(-1; 0)$, $B(0; -4)$, $C(1; -6)$, (P) có phương trình là

- A. $y = -x^2 + 3x - 4$. B. $y = x^2 + 3x - 4$. C. $y = x^2 - 3x - 4$. D. $y = x^2 - 3x + 4$.

Lời giải.

Gọi phương trình của parabol (P) : $y = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$).

$$(P) \text{ đi qua ba điểm } A(-1; 0), B(0; -4), C(1; -6) \text{ ta có hệ } \begin{cases} a - b + c = 0 \\ c = -4 \\ a + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = -4 \end{cases}$$

Vậy phương trình của parabol (P) là $y = x^2 - 3x - 4$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 151. Hàm số $y = x^2 + 2016$ đồng biến trên khoảng

- A. $(0; +\infty)$. B. $(-\infty; 0)$. C. $(-\infty; +\infty)$. D. $(-1; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có tọa độ đỉnh $I(0; 2016)$ và $a = 1 > 0$.

Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 152. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 2x + 3$ bằng

- A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

Lời giải.

Ta có $y = x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2 \geq 2$. Đẳng thức xảy ra khi $x = 1$. Vậy min $y = 2$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 153. Cho hàm số $f(x) = x^2 + mx + 4$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để $f(x)$ viết về dạng $f(x) = (ax + b)^2, \forall x (a, b \in \mathbb{R})$.

- A. $m = 4, m = -4$. B. Không tồn tại m . C. $m = 4$. D. $m = -4$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} f(x) = (ax + b)^2 &\Leftrightarrow x^2 + mx + 4 = (ax + b)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + mx + 4 = a^2x^2 + 2abx + b^2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ 2ab = m \\ b^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \pm 2 \\ m = 2ab \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $m = 4$ hoặc $m = -4$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 154. Tìm tọa độ đỉnh parabol $y = -2x^2 + 4x - 2$.

- A. $I(1; 1)$. B. $I(-2; 2)$. C. $I(1; 0)$. D. $I(2; 2)$.

Lời giải.

Tọa độ đỉnh là $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) = (1; 0)$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 155. Tìm trục đối xứng của parabol $y = 2x^2 + 4x - 1$.

- A. $x = 1$. B. $x = 2$. C. $x = -2$. D. $x = -1$.

Lời giải.

Parabol có trục đối xứng là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot 2} = -1$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 156. Parabol $y = ax^2 + bx + c$ đi qua ba điểm $A(0; 2)$, $B(1; 0)$, $C(-1; 6)$ là

- A. $y = -x^2 - 3x + 2$. B. $y = 2x^2 - 4x + 2$. C. $y = 2x^2 + x + 2$. D. $y = x^2 - 3x + 2$.

Lời giải.

Vì A , B , C nằm trên parabol nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} c = 2 \\ a + b + c = 0 \\ a - b + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ a + b = -2 \\ a - b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ a = 1 \\ b = -3 \end{cases}$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 157. Biết rằng đường thẳng $y = -x + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^2 + x + 2$ tại điểm duy nhất có tọa độ $(x_0; y_0)$. Tìm y_0 .

- A. $y_0 = 0$. B. $y_0 = 2$. C. $y_0 = -1$. D. $y_0 = 4$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^2 + x + 2 = -x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Với $x = -1 \Rightarrow y = 2$.

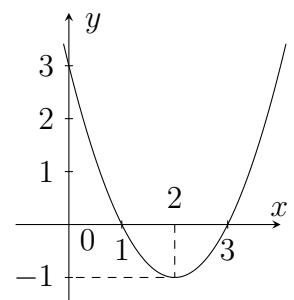
Chọn đáp án **B**

□

Câu 158.

Hàm số nào có đồ thị như hình vẽ bên?

- A. $y = -x^2 + 4x - 3$. B. $y = -x^2 + 4x + 3$.
C. $y = x^2 - 4x + 3$. D. $y = x^2 + 4x + 3$.



Lời giải.

Đồ thị hàm số có dạng parabol nên ta giả sử hàm số có dạng $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

Ta thấy tọa độ đỉnh là $(2; 0)$ nên $-\frac{b}{2a} = 2 \Rightarrow b = -4a$. (1)

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại $(0; 3) \Rightarrow c = 3$. (2)

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại $(1; 0)$ nên $a + b + c = 0$. (3)

Từ (1), (2), (3) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} b = -4a \\ c = 3 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4 \\ c = 3 \\ a = 1 \end{cases}$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 159. Cho hàm số $y = -3x^2 - 4x + 3$ có đồ thị (P) . Trục đối xứng của (P) là đường thẳng có phương trình

A. $x = \frac{4}{3}$.

B. $x = -\frac{4}{3}$.

C. $x = \frac{2}{3}$.

D. $x = -\frac{2}{3}$.

Lời giải.

Parabol $(P): y = -3x^2 - 4x + 3$ có trục đối xứng $x = -\frac{-4}{2 \cdot (-3)} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 160. Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và đồng biến trên khoảng $(-8; +\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Hoành độ đỉnh parabol $(P): y = x^2 - 4x + 3$ là $x = -\frac{-4}{2} = 2$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = x^2 - 4x + 3$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$+\infty$	-1	$+\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 161. Tọa độ đỉnh của parabol $(P): y = -x^2 + 4x + 5$ là

A. $I(4; 5)$.

B. $I(2; 9)$.

C. $I(0; 5)$.

D. $I(2; 0)$.

Lời giải.

Hoành độ đỉnh của parabol $(P): y = -x^2 + 4x + 5$ là $x_I = -\frac{4}{2(-1)} = 2$.

Từ đó đỉnh parabol $(P): y = -x^2 + 4x + 5$ là $I(2; 9)$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 162. Cho hàm số $y = -x^2 + 2x$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = -x^2 + 2x$ có hoành độ đỉnh $x_I = -\frac{2}{2(-1)} = 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	1	$-\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 163. Trong hệ tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2 + (3 - m)x + 3 - 2m$. Tìm m để (P) đi qua điểm $A(1; 3)$.

- A. $m = -\frac{4}{3}$. B. $m = \frac{4}{3}$. C. $m = -4$. D. $m = 4$.

Lời giải.

(P) đi qua điểm $A(1; 3) \Leftrightarrow 1 + (3 - m) + 3 - 2m = 3 \Leftrightarrow 7 - 3m = 3 \Leftrightarrow m = \frac{4}{3}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 164. Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$. Trục đối xứng của đồ thị hàm số là

- A. $x = 2$. B. $x = -2$. C. $x = 4$. D. $x = -4$.

Lời giải.

Trục đối xứng của đồ thị hàm số là $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2} = 2$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 165. Trong hệ tọa độ Oxy , parabol $y = 2x^2 + x + 2$ có đỉnh là

- A. $I\left(\frac{1}{4}; -\frac{15}{8}\right)$. B. $I\left(-\frac{1}{4}; \frac{15}{8}\right)$. C. $I\left(\frac{1}{4}; \frac{19}{8}\right)$. D. $I\left(-\frac{1}{4}; \frac{19}{8}\right)$.

Lời giải.

Hoành độ đỉnh của parabol là $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{4}$. Suy ra tung độ đỉnh là $y = 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} + 2 = \frac{15}{8}$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 166. Trong hệ tọa độ Oxy , biết rằng parabol $y = ax^2 + bx + c$ có đỉnh $I(1; 4)$ và đi qua điểm $D(3; 0)$. Khi đó giá trị của a , b và c là

- A. $a = -1; b = 1; c = -1$. B. $a = -2; b = 4; c = 6$.
C. $a = -1; b = 2; c = 3$. D. $a = -\frac{1}{3}; b = -\frac{2}{3}; c = 5$.

Lời giải.

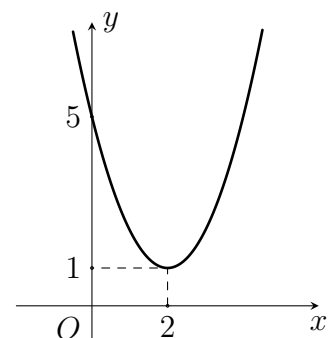
$$\text{Từ giả thiết ta có } \begin{cases} a + b + c = 4 \\ 9a + 3b + c = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 4 \\ 9a + 3b + c = 0 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases}$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 167.

Đồ thị ở hình bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

- A. $y = x^2 - 2x + 5$.
B. $y = x^2 - 4x + 5$.
C. $y = -x^2 + 4x + 5$.
D. $y = x^2 + 4x + 5$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy:

- Parabol quay bề lõm lên phía trên nên $a > 0$.
- Parabol cắt trục tung tại điểm $(0; 5)$ nên $c = 5$.
- Parabol có trục đối xứng $-\frac{b}{2a} = 2$.

Đối chiếu với các phương án đưa ra ta được đồ thị trong hình vẽ là của hàm số $y = x^2 - 4x + 5$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 168. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , đồ thị hàm số nào sau đây nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng?

- A. $y = 2x^3 - 5x$. B. $y = 4x^2$. C. $y = x^3 - 5$. D. $y = -3$.

Lời giải.

Hàm số có đồ thị nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng khi nó là hàm số lẻ. Theo các phương án đưa ra, ta thấy chỉ có hàm số $y = 2x^3 - 5x$ là hàm số lẻ.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 169. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi $A(a; b)$, $B(c; d)$ là tọa độ giao điểm của $(P): y = 2x - x^2$ và đường thẳng $d: y = 3x - 6$. Giá trị của $b + d$ bằng

- A. 7. B. -7. C. 15. D. -15.

Lời giải.

Xét phương trình

$$2x - x^2 = 3x - 6 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = 0 \\ x = -3 \Rightarrow y = -15. \end{cases}$$

Do đó tọa độ các giao điểm của (P) và d là $(2; 0)$ và $(-3; -15)$. Vậy $b + d = -15$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 170. Giao điểm của parabol $(P): y = x^2 - 3x - 4$ với trục tung là

- A. $(4; 0)$. B. $(0; -4)$. C. $(0; -1)$. D. $(-1; 0)$.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của parabol (P) với trục tung là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y = x^2 - 3x - 4 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -4 \end{cases}$.

Vậy tọa độ giao điểm là $(0; -4)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 171. Parabol $(P): y = ax^2 + 8x + c$ có hoành độ đỉnh là 4 và đi qua điểm $B(-1; -9)$ có phương trình là

- A. $y = -x^2 - 8x - 7$. B. $y = -x^2 - 8x$. C. $y = -x^2 + 8x - 9$. D. $y = -x^2 + 8x$.

Lời giải.

(P) có hoành độ đỉnh là 4 $\Rightarrow -\frac{8}{2a} = 4 \Rightarrow a = -1$.

$\Rightarrow (P): y = -x^2 + 8x + c$.

(P) đi qua $B(-1; -9) \Leftrightarrow -(-1)^2 + 8 \cdot (-1) + c = -9 \Leftrightarrow c = 0$.

$\Rightarrow (P): y = -x^2 - 8x$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 172. Gọi S là tổng hoành độ và tung độ đỉnh của parabol $(P): y = -x^2 + 4x$. Tính S .

- A. $S = -14$. B. $S = 6$. C. $S = 4$. D. $S = -6$.

Lời giải.

Tọa độ đỉnh của parabol (P) là $(2; 4)$.

$$\Rightarrow S = 2 + 4 = 6.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 173. Hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$ đồng biến trên

- A. $(-1; +\infty)$. B. $(-\infty; -1)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(-\infty; 1)$.

Lời giải.

Tọa độ đỉnh $I(1; 4)$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số đã cho như sau:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	4	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy, hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty; 1)$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 174. Số giao điểm của parabol $(P): y = x^2 + x + 3$ và đường thẳng $(d): y = x + 4$ là

- A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

Lời giải.

Số giao điểm của (P) và (d) là số nghiệm của phương trình: $x^2 = x + 3 = x + 4$ (1).

$$\text{Ta có: } (1) \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}.$$

$\Rightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

$\Rightarrow$ Số giao điểm của (P) và (d) là 2.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 175. Cho parabol $(P): y = x^2 - 6x + 3$ và đường thẳng $d: y = m$, với giá trị nào của m thì d cắt (P) tại hai điểm phân biệt?

- A. $m < -6$. B. $m > 3$. C. $m = -6$. D. $m > -6$.

Lời giải.

d cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $x^2 - 6x + 3 - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt, hay

$$9 - 1 \cdot (3 - m) = \Delta' > 0 \Leftrightarrow m > -6.$$

Vậy với $m > -6$ thì d cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 176. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^2 - 2x + 4$ là

- A. 5. B. 1. C. -1. D. 3.

Lời giải.

Ta có

$$-x^2 - 2x + 4 = -(x+1)^2 + 5 \leq 5, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = -1$. Vậy giá trị lớn nhất của hàm số đã cho là 5.

Chọn đáp án **A** □

Câu 177. Cho parabol $(P): y = x^2 - 2x + m - 2$. Giá trị m để (P) cắt Ox tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương là

- A. $m > 2$. B. $m < 3$. C. $2 < m < 3$. D. $2 < m \leq 3$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và Ox ta có: $x^2 - 2x + m - 2 = 0$ (1).

(P) cắt Ox tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương

$\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt đều dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m + 2 > 0 \\ 2 > 0 \\ m - 2 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2 < m < 3.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 178. Cho parabol (P) có phương trình $y = x^2 - x - m + 2$ và đường thẳng $d: y = x + 4$. Biết d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B . Tìm tọa độ trung điểm M của đoạn AB .

- A. $M(1; 5)$. B. $M(2; 5)$. C. $M(-1; 3)$. D. $M(-2; 2)$.

Lời giải.

d cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình sau có nghiệm

$$x^2 - x - m + 2 = x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - m - 2 = 0,$$

điều này tương đương $\Delta' > 0$, hay $m > -3$. Khi đó, theo định lý Viète, ta có $x_A + x_B = 2$. Suy ra $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = 1$ và

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{(x_A + 4) + (x_B + 4)}{2} = \frac{(x_A + x_B) + 8}{2} = 5.$$

Vậy $M(1; 5)$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 179. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ là

- A. 1. B. -3. C. -7. D. -1.

Lời giải.

Hàm $y = x^2 - 4x + 3$ có đỉnh $I(2; -1)$, ta có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$+\infty$	-1	$+\infty$

Dựa vào đồ thị, ta thấy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $y = -1$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 180. Parabol nào sau đây có đỉnh là $I(1; -1)$?

A. $(P): y = x^2 - 2x + 2$.

B. $(P): y = 2x^2 - 4x + 2$.

C. $(P): y = -x^2 + 2x + 2$.

D. $(P): y = 3x^2 - 6x + 2$.

Lời giải.

- Xét $(P): y = x^2 - 2x + 2$ có đỉnh $I(1; 1)$ nên loại đáp án này.
- Xét $(P): y = 2x^2 - 4x + 2$ có đỉnh $I(1; 0)$ nên loại đáp án này.
- Xét $(P): y = -x^2 + 2x + 2$ có đỉnh $I(1; 3)$ nên loại đáp án này.
- Xét $(P): y = 3x^2 - 6x + 2$ có đỉnh $I(1; -1)$ nên nhận đáp án này.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 181.

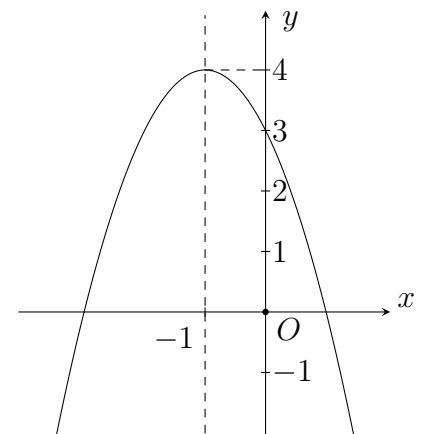
Đồ thị ở hình bên là của hàm số nào?

A. $y = -x^2 - 2x + 3$.

B. $y = -x^2 + 2x$.

C. $y = 2x^2 - 4x + 3$.

D. $y = x^2 - 2x + 3$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số

- Có trục đối xứng $x = -1$, đỉnh $I(-1; 4)$.
- Bề lõm hướng xuống.
- Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 182. Cho Parabol $(P): y = 2x^2 + bx + c$, (P) có trục đối xứng là đường thẳng $x = 1$ và cắt trục tung tại điểm $M(0; 4)$. Xác định b, c .

A. $b = 4; c = -4$.

B. $b = 4; c = 4$.

C. $b = -4; c = 4$.

D. $b = -4; c = -4$.

Lời giải.

Parabol (P) có trục đối xứng $x = 1 \Rightarrow \frac{-b}{2a} = 1 \Leftrightarrow \frac{-b}{2 \cdot 2} = 1 \Leftrightarrow b = -4$.

Parabol (P) cắt trục tung tại điểm $M(0; 4)$ suy ra $c = 4$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 183. Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 1$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
 B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
 C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
 D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Parabol $y = x^2 - 4x + 1$ có $a = 1 > 0$, nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 184. Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	2	$-\infty$

- A. $y = -x^2 - 2x + 5$. B. $y = -x^2 + x + 2$. C. $y = x^2 - 2x + 3$. D. $y = -x^2 + 2x + 1$.

Lời giải.

Nhìn vào bảng biến thiên ta suy ra hệ số $a < 0$, do đó loại phương án C.

Từ bảng biến thiên ta có tọa độ đỉnh của Parabol là $S(1; 2)$. Vì $S(1; 2)$ là tọa độ đỉnh của hàm số $y = -x^2 + 2x + 1$.

Do đó hàm số có bảng biến thiên như hình vẽ là $y = -x^2 + 2x + 1$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 185. Cho hàm số $y = \frac{-x^4 - 2x^2 + 4|x|}{9 - x^2}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

- A. Hàm số không chẵn, không lẻ. B. Hàm số chẵn.
 C. Hàm số lẻ. D. Hàm số vừa chẵn, vừa lẻ.

Lời giải.

- Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$.
- $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$.
- $f(-x) = \frac{-(-x)^4 - 2(-x)^2 + 4|-x|}{9 - (-x)^2} = \frac{-x^4 - 2x^2 + 4|x|}{9 - x^2} = f(x)$.

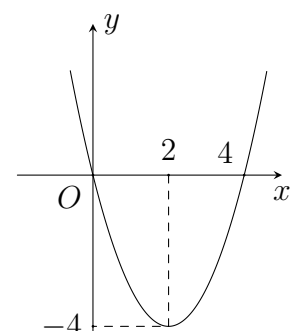
Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 186.

Cho hàm số $y = x^2 - 4x$ có đồ thị parabol (P) như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng $d: y = m$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

- A. $m < 0$. B. $m = -4$. C. $m > -4$. D. $-4 < m < 0$.



Lời giải.

Từ hình vẽ ta nhận thấy để $d: y = m$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương thì điều kiện là $-4 < m < 0$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 187.

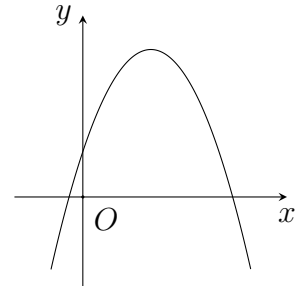
Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ.

A. $a < 0, b > 0, c > 0$.

B. $a > 0, b > 0, c < 0$.

C. $a < 0, b < 0, c > 0$.

D. $a > 0, b < 0, c < 0$.

**Lời giải.**

Bề lõm quay xuống nên $a < 0$ loại “ $a > 0, b > 0, c < 0$ ” và “ $a > 0, b < 0, c < 0$ ”.

Đồ thị cắt Oy tại điểm có tung độ dương nên $c > 0$.

Có $x = -\frac{b}{2a} > 0 \Rightarrow b > 0$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 188.

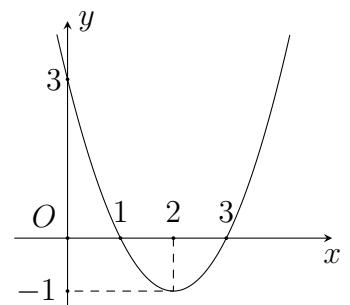
Cho hàm số bậc hai $y = f(x) = x^2 - 4x + 3$ có đồ thị là Parabol (P) như hình vẽ. Dựa vào đồ thị tìm tất cả các giá trị của x để $y \geq 0$.

A. $\begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 3 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x < 1 \\ x > 3 \end{cases}$.

C. $1 \leq x \leq 3$.

D. $1 < x < 3$.

**Lời giải.**

Để $y \geq 0$ là phần đồ thị hàm số nằm phía trên Ox khi và chỉ khi $\begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 3 \end{cases}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 189. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + 3$, ($a \neq 0$). Biết đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1; 0)$ và đạt giá trị lớn nhất khi $x = -1$. Tính giá trị của biểu thức $3a - 2b$.

A. $3a - 2b = -7$.

B. $3a - 2b = 1$.

C. $3a - 2b = -1$.

D. $3a - 2b = 7$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $\begin{cases} a + b + 3 = 0 \\ -\frac{b}{2a} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -3 \\ 2a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$. Vậy $3a - 2b = 1$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 190. Cho phương trình $2\sqrt{x-2} - 3\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2 - x - 2} - 6$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. Phương trình có hai nghiệm $x_1 < x_2 \leq 5$.

B. Phương trình có một nghiệm duy nhất $x \geq 2$.

C. Phương trình có một nghiệm duy nhất $x > 7$.

D. Phương trình có hai nghiệm $x_1 > x_2 \geq 2$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$.

Ta có

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x-2} - 3\sqrt{x+1} &= \sqrt{x^2 - x - 2} - 6 \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{x-2} - 3\sqrt{x+1} - \sqrt{(x-2)(x+1)} + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x-2} + 3)(2 - \sqrt{x+1}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x+1} &= 2 \\ \Leftrightarrow x &= 3. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 191. Trong mặt phẳng Oxy , cho $A(0; 1)$, $B(1; 3)$, $C(-2; 2)$. Gọi x là hoành độ của điểm M nằm trên trục hoành sao cho $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $x \in (4; 6)$.

B. $x \in (6; 8)$.

C. $x \in (1; 3)$.

D. $x \in (3; 5)$.

Lời giải.

Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{CA} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{BI}$.

Giả sử $I(x; y)$, ta có $\begin{cases} 2(x-1) = 2 \\ 2(y-3) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{5}{2} \end{cases}$. Vậy điểm $I\left(2; \frac{5}{2}\right)$.

Khi đó ta có $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MI}| = 2MI$ nhỏ nhất khi M là hình chiếu của I lên trục hoành.

Vậy $x = 2$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 192. Cho hàm số $y = x^2 + 5$. Chọn khẳng định **sai**.

A. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 5.

B. Hàm số là hàm chẵn.

C. Đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng.

D. Đồ thị hàm số là một đường thẳng.

Lời giải.

Đồ thị của hàm số $y = x^2 + 5$ là một parabol.

Chọn đáp án **(D)** □

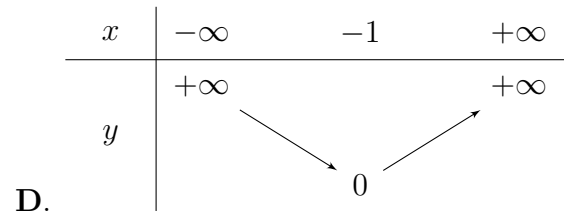
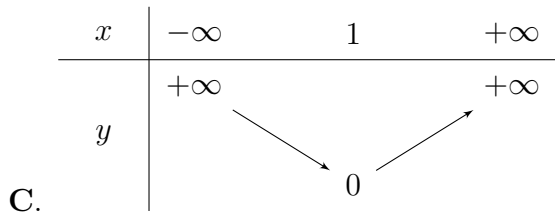
Câu 193. Bảng biến thiên của hàm số $y = -x^2 + 2x - 1$ là

A.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	0	$-\infty$

B.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y	$-\infty$	0	$-\infty$



Lời giải.

Đây là hàm số bậc hai có hệ số $a = -1 < 0$, tọa độ đỉnh $I(1; 0)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 194. Tìm tham số m để đỉnh của parabol $y = x^2 + x + m$ nằm trên đường thẳng $y = \frac{3}{4}$.

A. $m = 5$.

B. m tùy ý.

C. $m = 1$.

D. $m = 3$.

Lời giải.

Parabol $y = x^2 + x + m$ có đỉnh $I\left(-\frac{1}{2}; m - \frac{1}{4}\right)$.

I nằm trên đường thẳng $y = \frac{3}{4} \Rightarrow m - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow m = 1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 195. Cho hàm số $y = 2x^2 - x + 3$, điểm nào sau đây thuộc đồ thị hàm số đã cho?

A. $M(-1; 1)$.

B. $M(0; 3)$.

C. $M(2; 3)$.

D. $M(2; 1)$.

Lời giải.

Thay tọa độ điểm $M(0; 3)$ vào hàm số, ta có $3 = 2 \cdot 0^2 - 0 + 3$ (thỏa mãn).

Chọn đáp án (B) □

Câu 196. Trục đối xứng của parabol $(P): y = x^2 - 3x + 4$ là đường thẳng

A. $y = \frac{3}{2}$.

B. $x = 3$.

C. $x = \frac{3}{2}$.

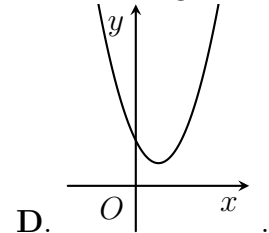
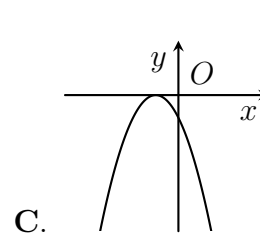
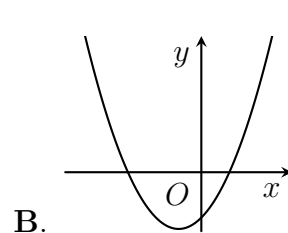
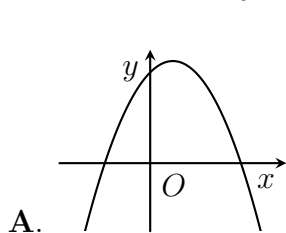
D. $x = -\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-3)}{2} = \frac{3}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 197. Hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có $a > 0$ và biệt thức $\Delta < 0$ thì đồ thị của nó có dạng là



Lời giải.

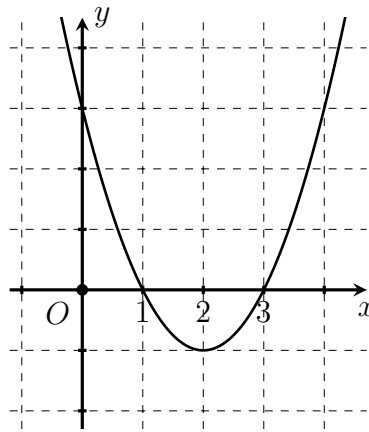
Có hệ số $a > 0$ nên bề lõm quay lên.

Biệt thức $\Delta < 0$ thì đồ thị không cắt trục hoành.

Chọn đáp án (D) □

Câu 198. Cho hàm số $f(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và đồ thị của nó được biểu diễn bởi hình bên dưới.

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?



- A. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất là 2.
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- C. Đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.
- D. Hàm số nhận giá trị dương trên khoảng $(0; 3)$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị, khẳng định đúng là “Đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt”.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 199. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{9}{4}$ tại $x = \frac{5}{2}$ và đồ thị của nó đi qua điểm $A(4; 0)$. Tìm a, b, c .

- A. $a = -1, b = 5, c = -4$.
- B. $a = -2, b = 10, c = -4$.
- C. $a = -1, b = -5, c = 4$.
- D. $a = 1, b = 5, c = -4$.

Lời giải.

Vì hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{9}{4}$ tại $x = \frac{5}{2}$ và đồ thị của nó đi qua điểm $A(4; 0)$ nên

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ -\frac{b}{2a} = \frac{5}{2} \\ \frac{25a}{4} + \frac{5b}{2} + c = \frac{9}{4} \\ 16a + 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ 5a + b = 0 \\ 25a + 10b + 4c = 9 \\ 16a + 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 5 \\ c = -4 \end{cases}$$

Vậy $a = -1, b = 5, c = -4$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 200. Parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ với $a < 0, \Delta = b^2 - 4ac$. Biết rằng (P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương, khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\Delta > 0, b < 0, c < 0$.
- B. $\Delta > 0, b > 0, c < 0$.
- C. $\Delta > 0, b > 0, c > 0$.
- D. $\Delta > 0, b < 0, c > 0$.

Lời giải.

(P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương nên phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có

hai nghiệm dương phân biệt. Kết hợp với $a < 0$ suy ra

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ b > 0 \\ c < 0 \end{cases}$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 201. Cho hàm số $y = x^2 + x + 1$ có đồ thị (P) . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{3}{4}$.
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.
- C. Đồ thị (P) cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt.
- D. Đồ thị (P) đi qua điểm $M(0; 1)$.

Lời giải.

Ta có $y = x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ nên hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$.

Có $a = 1 > 0$ và $-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Xét phương trình $x^2 + x + 1 = 0$ vô nghiệm.

Ta có $1 = 0^2 + 0 + 1$ nên $M(0; 1)$ thuộc (P) .

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 202. Cho hàm số $y = |-0,5x^2 + 3x - 2,5|$ có đồ thị (C) . Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $(d): y = 2m - 1$ cắt đồ thị (C) tại đúng hai điểm có hoành độ dương.

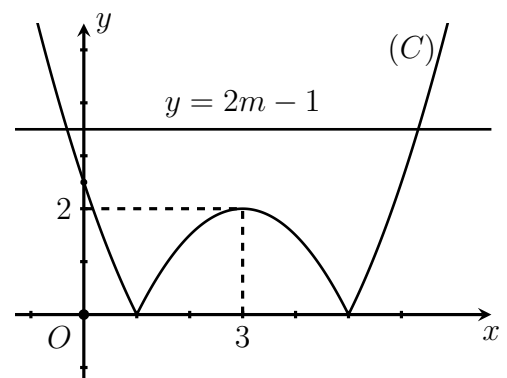
- A. $\frac{1}{2} \leq m < \frac{5}{4}$.
- B. $\frac{3}{2} < m < \frac{7}{4}$ hoặc $m = \frac{1}{2}$.
- C. $\frac{1}{2} \leq m < \frac{3}{2}$.
- D. $0 < m < \frac{5}{2}$.

Lời giải.

Giao điểm của đồ thị (C) với trục tung là $\left(0; \frac{5}{2}\right)$.

Dựa vào đồ thị, đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại hai điểm có hoành độ dương khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2 < 2m - 1 < \frac{5}{2} \\ 2m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} < m < \frac{7}{4} \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$$



Chọn đáp án **(B)** □

Câu 203. Tìm giao điểm của đường thẳng $(d): y = x + 1$ và parabol $(P): y = x^2 - 3x - 4$.

- A. $(-1; 0)$ và $(-5; 4)$.
- B. $(-1; 0)$ và $(5; 6)$.
- C. $(1; 0)$ và $(-5; 4)$.
- D. $(1; 0)$ và $(5; 6)$.

Lời giải.

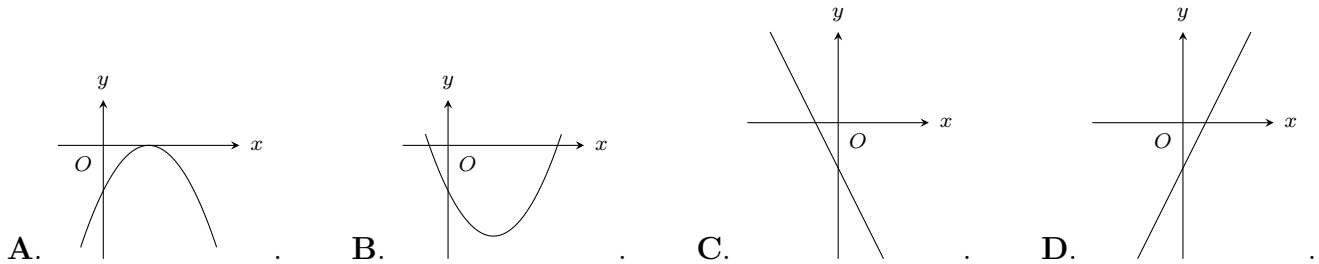
Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là

$$x^2 - 3x - 4 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 5. \end{cases}$$

Thay lần lượt $x = -1$, $x = 5$ vào phương trình (d) ta được $y = 0$ và $y = 6$. Vậy giao điểm của (d) và (P) là $(-1; 0)$ và $(5; 6)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 204. Hàm số $y = -x^2 + 2x - 1$ có đồ thị là một trong các đồ thị dưới đây. Hỏi đó là đồ thị nào?



Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = -x^2 + 2x - 1$ là một đường parabol và parabol này quay bề lõm xuống dưới (do $a = -1 < 0$).

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 205. Cho hàm số $y = 2x^2 - 4x + 5$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(1; 3)$. B. $(3; 4)$. C. $(2; 4)$. D. $(9; 11)$.

Lời giải.

Ta có $y = 2x^2 - 4x + 5 = 2(x - 1)^2 + 3 \geq 3, \forall x \in \mathbb{R}$.

Đẳng thức xảy ra khi $x = 1$ nên giá trị nhỏ nhất của hàm số là 3.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 206. Cho hàm số $y = 2x^2 + 6x + 3$ có đồ thị (P) . Trục đối xứng của (P) là

- A. $y = -3$. B. $x = -3$. C. $x = -\frac{3}{2}$. D. $y = -\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Trục đối xứng của (P) là $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 207. Tất cả các giá trị của tham số m để parabol $y = x^2 - 2x$ cắt đường thẳng $y = m$ tại hai điểm phân biệt là

- A. $m > -1$. B. $m < 0$. C. $m < 1$. D. $m > -2$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $y = x^2 - 2x$ và $y = m$ là

$$x^2 - 2x = m \Leftrightarrow x^2 - 2x - m = 0 \quad (*)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 1 + m > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 208. Cho hàm số $y = x^2 - 2x$ có đồ thị (P) . Tọa độ đỉnh của (P) là

- A. $(0; 0)$. B. $(2; 0)$. C. $(1; -1)$. D. $(-1; 3)$.

Lời giải.

$(P): y = x^2 - 2x$ có tọa độ đỉnh là $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) = (1; -1)$.

Chọn đáp án **C**

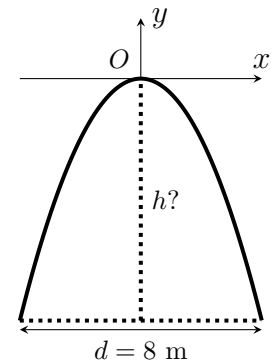
□

Câu 209.

Một chiếc cổng hình parabol dạng $y = -\frac{1}{2}x^2$ có chiều rộng chân cổng $d = 8$ m.

Hãy tính chiều cao h của cổng (xem hình minh họa bên cạnh).

- A. $h = 8$ m. B. $h = 9$ m. C. $h = 7$ m. D. $h = 5$ m.



Lời giải.

Từ đồ thị, ta có $d = 8 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \cdot 4^2 = -8$.

Vậy $h = 8$ m.

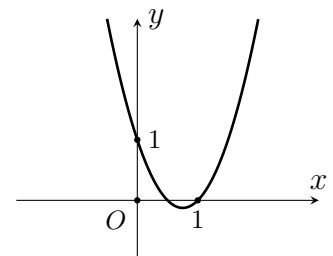
Chọn đáp án **A**

□

Câu 210.

Hàm số nào trong bốn phương án liệt kê ở A, B, C, D có đồ thị như hình bên?

- A. $y = -x^2 + 3x - 1$. B. $y = x^2 - 3x + 1$.
C. $y = 2x^2 - 3x + 1$. D. $y = -2x^2 + 3x - 1$.



Lời giải.

Từ dạng đồ thị, ta có hệ số $a > 0$ và đồ thị đi qua hai điểm $(0; 1)$, $(1; 0)$.

Trong các phương án ta thấy hàm số $y = 2x^2 - 3x + 1$ thỏa mãn các điều trên.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 211. Tọa độ giao điểm của $(P): y = x^2 - 4x$ với đường thẳng $d: y = -x - 2$ là

- A. $M(-1; -1)$, $N(-2; 0)$. B. $M(1; -3)$, $N(2; -4)$.
C. $M(-3; 1)$, $N(3; -5)$. D. $M(0; -2)$, $N(2; -4)$.

Lời giải.

Xét phương trình

$$x^2 - 4x = -x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = -3 \\ x = 2 \Rightarrow y = -4. \end{cases}$$

Vậy các giao điểm của (P) và d có tọa độ là $(1; -3)$, $(2; -4)$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 212. Xác định hàm số bậc hai $y = ax^2 - 4x + c$, biết đồ thị của nó đi qua hai điểm $A(1; -2)$ và $B(2; 3)$.

- A. $y = 3x^2 - 4x - 1$. B. $y = 3x^2 - 4x - 2$. C. $y = -x^2 - 4x + 3$. D. $y = x^2 - 4x + 5$.

Lời giải.

Vì đồ thị của hàm số bậc hai $y = ax^2 - 4x + c$ đi qua hai điểm $A(1; -2)$ và $B(2; 3)$ nên ta có

$$\begin{cases} a - 4 + c = -2 \\ 4a - 8 + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 2 \\ 4a + c = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ c = -1. \end{cases}$$

Vậy hàm số cần tìm là $y = 3x^2 - 4x - 1$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 213. Cho parabol $(P): y = x^2 - 2mx + m + 2$, $(m > 0)$. Tìm giá trị của tham số m để parabol có đỉnh nằm trên đường thẳng $y = x + 1$.

- A. $m = 1$. B. $m = 2$. C. $m = -1$. D. $m = 3$.

Lời giải.

Parabol (P) có đỉnh $I(m; -m^2 + m + 2)$. Vì I thuộc đường thẳng $y = x + 1$ nên

$$-m^2 + m + 2 = m + 1 \Leftrightarrow m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1. \end{cases}$$

Vì $m > 0$ nên $m = 1$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 214. Cho hàm số $(P): y = x^2 - 2x + 2$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. (P) có đỉnh $I(1; 1)$.
B. (P) nhận đường thẳng $x = 1$ làm trục đối xứng.
C. (P) có đồ thị bề lõm quay xuống dưới.
D. Đồ thị (P) đi qua điểm $A(-2; 10)$.

Lời giải.

Vì $a = 1 > 0$ nên parabol (P) có bề lõm quay lên. Do đó mệnh đề " (P) có đồ thị bề lõm quay xuống dưới" sai.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 215. Cho hàm số $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Trong các điểm sau đây, điểm nào không thuộc đồ thị hàm số đã cho?

- A. $M(0; 1)$. B. $N(-2; -1)$. C. $P(-4; 29)$. D. $D(2; -1)$.

Lời giải.

Thay $x = -2$ vào hàm số $f(x)$ ta có $f(-2) = (-2)^2 - 3 \cdot (-2) + 1 = 11 \neq -1$. Vậy điểm $N(-2; -1)$ không thuộc đồ thị hàm số đã cho.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 216. Tọa độ giao điểm của parabol $(P): y = x^2 - x + 2$ và đường thẳng $\Delta: y = x + 2$ là

- A. $(0; 2)$. B. $(2; 4)$. C. $(0; 2)$ và $(2; 4)$. D. $(1; 2)$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và đường thẳng Δ là

$$x^2 - x + 2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 2 \\ x = 2 \Rightarrow y = 4. \end{cases}$$

Vậy có hai giao điểm của (P) và (d) là $(0; 2)$ và $(2; 4)$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 217. Đường thẳng nào trong các đường thẳng sau đây là trục đối xứng của parabol $y = -2x^2 + 5x + 3$?

A. $x = \frac{5}{4}$.

B. $x = \frac{5}{2}$.

C. $x = -\frac{5}{2}$.

D. $x = -\frac{5}{4}$.

Lời giải.

Parabol có trục đối xứng là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 218. Cho parabol $(P): y = 3x^2 - 2x + 1$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. (P) đi qua điểm $M(-2; 9)$.

B. (P) có đỉnh $I\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

C. (P) có đỉnh $I\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

D. (P) có đỉnh $I\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

Lời giải.

Tọa độ đỉnh của parabol là $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 219. Với giá trị nào của a và c thì đồ thị của hàm số $y = ax^2 + c$ là parabol có đỉnh $I(0; -2)$ và một giao điểm của đồ thị với trục hoành là $A(-1; 0)$?

A. $a = 2$ và $c = -2$. B. $a = 1$ và $c = -1$. C. $a = 2$ và $c = -1$. D. $a = -2$ và $c = -2$.

Lời giải.

Giả sử $(P): y = ax^2 + c$. Vì $A(-1; 0)$ và $I(0; -2)$ thuộc (P) nên $\begin{cases} a + c = 0 \\ c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = -2 \end{cases}$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 220. Tìm hàm số bậc hai có bảng biến thiên dưới đây

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$+\infty$	1	$+\infty$

A. $y = x^2 - 4x - 5$.

B. $y = x^2 - 2x + 1$.

C. $y = -x^2 + 4x - 3$.

D. $y = x^2 - 4x + 5$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $a > 0$ nên ta loại $y = -x^2 + 4x - 3$. Mặt khác trục đối xứng là $x = 2$ nên ta loại $y = x^2 - 2x + 1$. Đồ thị hàm số đi qua điểm $I(2; 1)$ nên ta chọn $y = x^2 - 4x + 5$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 221. Cho hàm số bậc hai $y = x^2 - 4x + 3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$. B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$. D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-4; +\infty)$.

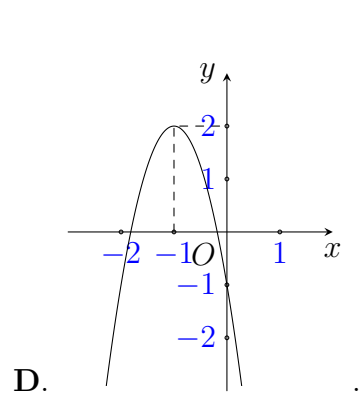
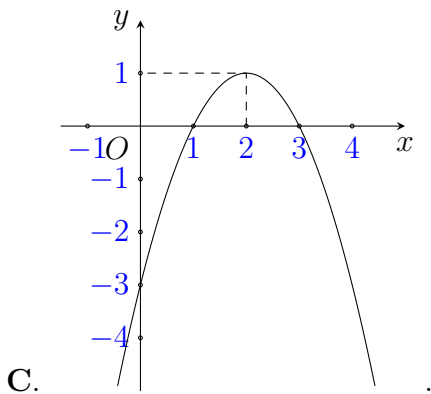
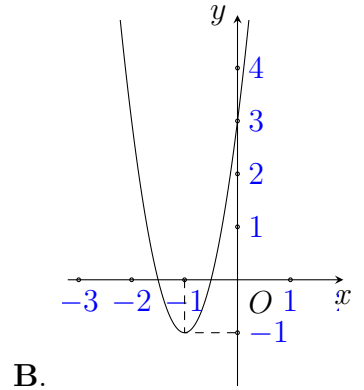
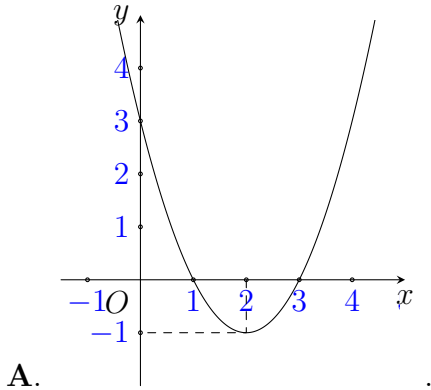
Lời giải.

Vì hệ số $a = 1 > 0$ và trục đối xứng là $x = 2$ nên hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 2)$.

Chọn đáp án **C**

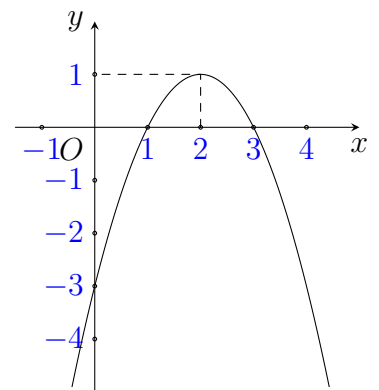
□

Câu 222. Đồ thị nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = -x^2 + 4x - 3$?



Lời giải.

Vì hệ số $a = -1 < 0$ và có trục đối xứng là $x = 2$ nên ta chọn đồ thị



Chọn đáp án **C**

□

Câu 223. Parabol $y = 2x^2 - 3x + 5$ có đỉnh là

- A. $I\left(-\frac{3}{4}; \frac{31}{8}\right)$. B. $I\left(\frac{3}{4}; \frac{31}{8}\right)$. C. $I\left(\frac{3}{2}; \frac{31}{8}\right)$. D. $I\left(-\frac{3}{4}; -\frac{31}{8}\right)$.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính tọa độ đỉnh của Parabol ta có

$$\begin{cases} x_I = \frac{-b}{2a} \\ y_I = \frac{-\Delta}{4a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_I = \frac{3}{4} \\ y_I = \frac{31}{8} \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 224. Tọa độ giao điểm của parabol $y = 3x^2 - 4x + 1$ với trục hoành là

- A. $\left(\frac{1}{3}; 0\right)$ và $(1; 0)$. B. $\left(1; \frac{1}{3}\right)$. C. $\left(\frac{1}{3}; 0\right)$. D. $(1; 0)$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $y = 3x^2 - 4x + 1$ với trục hoành $y = 0$ là

$$3x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 0 \\ x = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 0. \end{cases}$$

Vậy có hai giao điểm là $\left(\frac{1}{3}; 0\right)$ và $(1; 0)$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 225. Tọa độ giao điểm của parabol $y = 3x^2 - 4x + 1$ với trục tung là

- A. $\left(\frac{1}{3}; 0\right)$. B. $(0; 1)$. C. $(0; 3)$. D. $\left(0; \frac{1}{3}\right)$.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm là nghiệm hệ $\begin{cases} y = 3x^2 - 4x + 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1. \end{cases}$

Vậy tọa độ giao điểm của parabol với trục tung là $(0; 1)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 226. Tìm b và c biết đồ thị hàm số $y = 2x^2 + bx + c$ đi qua hai điểm $M(1; 7)$ và $N(-1; -1)$.

- A. $b = 4$ và $c = 1$. B. $b = 2$ và $c = 5$. C. $b = 1$ và $c = -1$. D. $b = 1$ và $c = 4$.

Lời giải.

Theo yêu cầu bài toán ta có

$$\begin{cases} 2 + b + c = 7 \\ 2 - b + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ c = 1. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 227. Cho hàm số $y = -x^2 + 3x + 1$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$. B. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 4)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} -1 < 0 \\ \frac{-3}{2 \cdot (-1)} = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Khi đó hàm số đã cho đồng biến trên $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$ và nghịch biến trên $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 228. Xác định a, b, c biết parabol $y = ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $A(-1; -2), B(1; 2), C(2; 7)$.

A. $a = 2, b = 3, c = 4$.

B. $a = 2, b = 1, c = -1$.

C. $a = 1, b = 2, c = -1$.

D. $a = -1, b = 1, c = -1$.

Lời giải.

Theo yêu cầu bài toán ta có

$$\begin{cases} a - b + c = -2 \\ a + b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -1. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 229. Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng $d: y = -2x - 4$ và Parabol $(P): y = x^2 + 4x + 5$.

A. $(-3; 1)$ và $(-2; 3)$.

B. $(-2; 0)$ và $(-3; 2)$.

C. $(-3; 2)$.

D. $(-2; 3)$.

Lời giải.

- Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) :

$$x^2 + 4x + 5 = -2x - 4 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \Rightarrow y = 2.$$

- Vậy tọa độ giao điểm của d và (P) là $(-3; 2)$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 230. Tìm số giao điểm của Parabol $(P_1): y = x^2 + 2x + 2$ và Parabol $(P_2): y = -x^2 - 2x + 2$.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

- Phương trình hoành độ giao điểm của (P_1) và (P_2) :

$$x^2 + 2x + 2 = -x^2 - 2x + 2 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2. \end{cases}$$

- Vậy (P_1) và (P_2) có 2 giao điểm.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 231. Cho $(P_m): y = x^2 - 2mx + m^2 + m$. Biết rằng (P_m) luôn cắt đường phân giác góc phần tư thứ nhất tại hai điểm A, B . Gọi A_1, B_1 lần lượt là hình chiếu của A, B lên Ox , A_2, B_2 lần lượt là hình chiếu của A, B lên Oy . Có bao nhiêu giá trị của tham số m khác 0; -1 để tam giác OB_1B_2 có diện tích gấp 4 lần diện tích tam giác OA_1A_2 .

A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - 2mx + m^2 + m = x \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m + 1. \end{cases}$

Trường hợp 1: $A(m; m) \Rightarrow A_1(m; 0)$ và $A_2(0; m)$.

$B(m + 1; m + 1) \Rightarrow B_1(m + 1; 0)$ và $B_2(0; m + 1)$.

$$\text{Khi đó } S_{OB_1B_2} = 4S_{OA_1A_2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(m + 1)^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot m^2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Trường hợp 2: $B(m; m) \Rightarrow B_1(m; 0)$ và $B_2(0; m)$.

$A(m + 1; m + 1) \Rightarrow A_1(m + 1; 0)$ và $A_2(0; m + 1)$.

$$\text{Khi đó } S_{OB_1B_2} = 4S_{OA_1A_2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}m^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (m + 1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = -\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Vậy có 4 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 232. Cho hàm số $f(x) = x^2 + (2m + 1)x + m^2 - 1$. Tất cả các giá trị m để hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 1 trên đoạn $[0; 1]$ thuộc tập hợp nào sau đây?

A. $(-\infty; -3)$.

B. $[-3; 1]$.

C. $[-2; 2]$.

D. $[0; +\infty)$.

Lời giải.

Hoành độ đỉnh của parabol $f(x) = x^2 + (2m + 1)x + m^2 - 1$ là $x_I = -m - \frac{1}{2}$. Ta có các trường hợp sau:

TH 1. Nếu $x_I \in [0; 1] \Leftrightarrow m \in \left[-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right]$ thì

$$\min_{[0;1]} f(x) = f(x_I) = 1 \Leftrightarrow -m - \frac{5}{4} = 1 \Leftrightarrow m = -\frac{9}{4} \text{ (không thỏa mãn)}$$

TH 2. Nếu $x_I < 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}$ thì

$$\min_{[0;1]} f(x) = f(0) = 1 \Leftrightarrow m^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$$

Do đó $m = \sqrt{2}$ thỏa mãn.

TH 3. Nếu $x_I > 1 \Leftrightarrow m < -\frac{3}{2}$ thì

$$\min_{[0;1]} f(x) = f(1) = 1 \Leftrightarrow (m + 1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -2. \end{cases}$$

Do đó $m = -2$ thỏa mãn.

Vậy có hai giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m = \sqrt{2}$ và $m = -2$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 233. Cho parabol $(P): y = x^2 + 2x - 3$ và đường thẳng $(d): y = x + m$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B nằm về hai phía của đường thẳng có phương trình $y = 1$?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 + 2x - 3 = x + m \Leftrightarrow x^2 + x - 3 - m = 0$. (1)

d cắt P tại hai điểm phân biệt $A, B \Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{13}{4}. \quad (2)$$

Giả sử $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của (1).

Ta phải có $(y_1 - 1)(y_2 - 1) < 0 \Leftrightarrow (x_1 + m - 1)(x_2 + m - 1) < 0$

$$\Leftrightarrow x_1x_2 + (m - 1)(x_1 + x_2) + m^2 - 2m + 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4m - 1 < 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{5} < m < 2 + \sqrt{5} \text{ (thỏa (2)).}$$

$$m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0; 1; 2; 3; 4\}.$$

Ý kiến phản biện: Học sinh chưa học về dấu tam thức bậc 2, do vậy khi cho đề nên để các bất phương trình bậc 2 có nghiệm hữu tỷ

Chọn đáp án  □

Câu 234. Cho hàm số $y = x^2 - 3x + 3m - 1$. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của m để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $x_1; x_2$ thỏa mãn: $(x_1 - m)\sqrt{x_2} + (x_2 - m)\sqrt{x_1} + 2m = 2\sqrt{3m - 1}$ (*). Khi đó tổng các phần tử của S là:

A. $\frac{23 - 6\sqrt{5}}{12}$. B. $\frac{23 + 6\sqrt{5}}{12}$. C. $\frac{41}{12}$. D. 3.

Lời giải.

$$\text{ĐK: } \begin{cases} m \geq \frac{1}{3} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Ta có phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - 3x + 3m - 1 = 0$. (**)

Đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $x_1; x_2 \geq 0$

$\Leftrightarrow$ phương trình (**) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 4(3m - 1) > 0 \\ 3 > 0 \\ 3m - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq m < \frac{13}{12}.$$

Và theo định lý Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1x_2 = 3m - 1 \end{cases}$. Ta có

$$(x_1 - m)\sqrt{x_2} + (x_2 - m)\sqrt{x_1} = x_1\sqrt{x_2} + x_2\sqrt{x_1} - m(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}) = (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1x_2} - m)$$

$$\text{Vì } \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2} = \sqrt{x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1x_2}} = \sqrt{3 + 2\sqrt{3m - 1}}$$

$$\text{Khi đó: } (x_1 - m)\sqrt{x_2} + (x_2 - m)\sqrt{x_1} = \sqrt{3 + 2\sqrt{3m - 1}}(\sqrt{3m - 1} - m)$$

$$\text{Ta có (*)} \Leftrightarrow \sqrt{3 + 2\sqrt{3m - 1}}(\sqrt{3m - 1} - m) = 2(\sqrt{3m - 1} - m) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3m - 1} = m \\ \sqrt{3 + 2\sqrt{3m - 1}} = 2. \end{cases}$$

• Nếu $\sqrt{3m - 1} = m$, với điều kiện trên ta có hai vế không âm nên phương trình $\Leftrightarrow m^2 - 3m + 1 =$

$$0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \\ m = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $m = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

• Nếu $\sqrt{3 + 2\sqrt{3m - 1}} = 2 \Leftrightarrow 3 + 2\sqrt{3m - 1} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{3m - 1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \frac{5}{12}$ (thỏa mãn điều

kiện)
 Vậy $S = \left\{ \frac{3 - \sqrt{5}}{2}; \frac{5}{12} \right\}$, nên tổng các phần tử của S là $\frac{3 - \sqrt{5}}{2} + \frac{5}{12} = \frac{23 - 6\sqrt{5}}{12}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 235. Cho hàm số $y = (m - 2)x^2 - (2m + 1)x + 3m - 3$ (C). Giả sử m là giá trị để đồ thị hàm số (C) cắt trục Ox tại 2 điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ sao cho $(2m + 1)x_1 + (m - 2)x_2^2 = m - 2$. Hỏi m gần với giá trị nào sau đây nhất?

A. Không tồn tại m .

B. 0,53.

C. 1.

D. 1,5.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục Ox là $(m - 2)x^2 - (2m + 1)x + 3m - 3 = 0$. (1)

Để đồ thị hàm số (C) cắt trục Ox tại 2 điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 \neq 0 \\ (2m + 1)^2 - 4(m - 2)(3m - 3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ -8m^2 + 40m - 23 > 0. \end{cases} \quad (*)$$

Theo hệ thức Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = \frac{2m + 1}{m - 2}$ và $x_1 x_2 = \frac{3m - 3}{m - 2}$.

Theo bài ra: $(2m + 1)x_1 + (m - 2)x_2^2 = m - 2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)x_1 + x_2^2 = 1$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2m + 1}{m - 2} \right)^2 - \frac{3m - 3}{m - 2} = 1 \Leftrightarrow 17m = 9 \Leftrightarrow m = \frac{9}{17} \text{ (Không thỏa mãn (*)).}$$

Vậy không có giá trị m thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 236. Cho hàm số $y = \sqrt{2x^2 - 2x - m} - x - 1$ có đồ thị (C). Gọi P là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để cho đồ thị (C) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt. Số phần tử của P là

A. 5.

B. 4.

C. 8.

D. 9.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \sqrt{2x^2 - 2x - m} - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 - 4x - 1 = m. \end{cases}$$

Xét hàm số $f(x) = x^2 - 4x - 1, x \geq -1$, ta có bảng biến thiên

x	-1	2	$+\infty$
$f(x)$	4	-5	$+\infty$

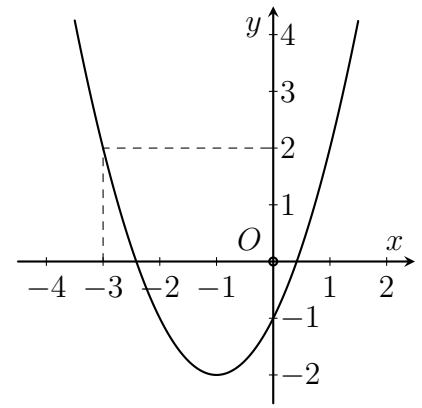
Dựa vào bảng biến thiên ta được $m \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 237.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình dưới. Tìm m để phương trình $f(|x| + m) = 2$ có 3 nghiệm phân biệt.

- A. $m = -3$. B. $m = -2$. C. $m = 2$. D. $m = 3$.



Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, vẽ đồ thị hàm số $y = f(|x| + m)$ gồm hai bước:

- Tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ sang trái m đơn vị nếu $m \geq 0$, hoặc tịnh tiến sang phải $|m|$ đơn vị nếu $m < 0$ được đồ thị hàm số $y = f(x + m)$.
- Giữ nguyên phần đồ thị trên trục Oy sang phải sau đó lấy đối xứng phần đồ thị đó qua trục Oy .

Do đó phương trình $f(|x| + m) = 2$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị $y = f(x + m)$ tại một điểm trên trục Oy và một điểm bên phải trục Oy khi và chỉ khi $m = -3$.

! Có thể giải trực tiếp theo cách khác: $f(|x| + m) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = -3 - m \\ |x| = 1 - m. \end{cases}$

Từ đó suy ra ngay giá trị $m = -3$ thỏa mãn.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 238. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đường thẳng $y = m$, $m > 0$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 2$ tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB vuông tại gốc tọa độ O .

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^4 - 3x^2 - 2 = m \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 2 - m = 0$

Với mọi $m > 0$ thì đường thẳng $y = m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt $A(x_A; m)$ và $B(x_B; m)$ đối xứng qua trục Oy , $x_A < x_B$.

Tam giác OAB vuông tại O nên $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow x_A \cdot x_B + m^2 = 0$.

Mà $x_A + x_B = 0$ nên $x_A = -m$; $x_B = m$.

Do đó $m^4 - 3m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow (m - 2)(m^3 + 2m^2 + m + 1) = 0 \Leftrightarrow m = 2$ (vì $m > 0$).

Chú ý: Bài toán sẽ được xét ở lớp 12 hơn nữa học sinh lớp 10 có thể chưa học đến tích vô hướng của 2 véc tơ nên có thể bổ sung lời giải theo lớp 10 như sau.

! Tam giác OAB vuông tại $O \Leftrightarrow OA^2 + OB^2 = AB^2$
 $\Leftrightarrow x_A^2 + m^2 + x_B^2 + m^2 = (x_A - x_B)^2$
 $\Leftrightarrow x_A \cdot x_B + m^2 = 0$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 239. Để đường thẳng $y = 3x + m$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x^2}{x-1}$ tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 và $|x_1 - x_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của tham số m thuộc khoảng nào dưới đây

- A. $(-2; 0)$. B. $(0; 2)$. C. $(2; 4)$. D. $(-4; -2)$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $\frac{x^2}{x-1} = 3x + m \Leftrightarrow 2x^2 + (m-3)x - m = 0, x \neq 1$.

Điều kiện để phương trình hoành độ giao điểm có 2 nghiệm phân biệt khác 1 là

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m + 9 > 0 \\ -1 \neq 0 \end{cases}, \text{ Đúng } \forall m.$$

$$\text{Ta có } |x_1 - x_2| = \left| \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{4} = \frac{\sqrt{m^2 + 2m + 9}}{4} = \frac{1}{4} \sqrt{(m+1)^2 + 8} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy giá trị $|x_1 - x_2|$ nhỏ nhất khi $m = -1$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 240. Cho hàm số $f(x) = 2(m-4)x + \frac{m(x-2)}{|x-2|}$ (m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số cắt Ox tại 1 điểm thuộc khoảng $(1; 2)$.

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải.

Vì x thuộc $(1; 2)$ nên $f(x) = 2(m-4)x - m$. Giả sử $A(1; m-8); B(2; 3m-16)$.

Để đồ thị hàm số cắt Ox tại 1 điểm thuộc khoảng $(1; 2)$ thì A, B nằm 2 phía với trục Ox . Nghĩa là

$$(I) \begin{cases} m-8 > 0 \\ 3m-16 < 0 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad (II) \begin{cases} m-8 < 0 \\ 3m-16 > 0 \end{cases}$$

Hệ (I) vô nghiệm. Hệ (II) $\Leftrightarrow \frac{16}{3} < m < 8 \Rightarrow m = 6; m = 7$.

Chú ý: Có thể mở rộng khoảng xác định $(1; 3)$

$$\text{Khi đó ta có } f(x) = \begin{cases} 2(m-4)x - m, & x \in (1; 2) \quad (1) \\ 2(m-4)x + m, & x \in (2; 3) \quad (2) \end{cases}$$

! TH 1: Tương tự trên.

TH 2: $C(2; 5m-6); D(3; 7m-24)$. Hai điểm C, D nằm 2 phía trục $Ox \Leftrightarrow \frac{16}{5} < m < \frac{24}{7}$. Không có giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 241. Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ có đồ thị (P) và đường thẳng $d: y = mx + 3$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng $\frac{9}{2}$.

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P)

$$\begin{aligned}x^2 - 4x + 3 &= mx + 3 \\ \Leftrightarrow x^2 - (4 + m)x &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = m + 4. \end{cases}\end{aligned}$$

Gọi $A(0; 3)$ và $B(m + 4; m^2 + 4m + 3)$, ta có OA thuộc Oy nên

$$\begin{aligned}S_{\Delta OAB} &= \frac{1}{2}OA \cdot d(B, Oy) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot |m + 4| = \frac{9}{2} \\ \Leftrightarrow |m + 4| &= 3 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -7. \end{cases}\end{aligned}$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 242. Cho hàm số bậc hai $y = 2x^2 - 3x - 5$ có đồ thị là (P) và đường thẳng $(d): y = mx + 2m^2 - 1$. Gọi S là tập gồm tất cả các giá trị thực của m sao cho (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B thỏa mãn cho A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $y = -3x + 5$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $S = \emptyset$.

B. Tổng của tất cả các phần tử của S là $-\frac{2}{3}$.

C. Tổng của tất cả các phần tử của S là $-\frac{11}{3}$.

D. Có đúng một phần tử.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d)

$$2x^2 - (m + 3)x - 2m^2 - 4 = 0 \quad (*)$$

Phương trình $(*)$ có $\Delta = (m + 3)^2 + 8(2m^2 + 4)$ luôn nhận giá trị dương nên phương trình $(*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt. Gọi 2 nghiệm đó là x_1, x_2 thì $x_1 + x_2 = \frac{m + 3}{2}$.

Như vậy, (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B lần lượt có hoành độ là x_1, x_2 .

Trung điểm của đoạn thẳng AB là

$$I\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; m\frac{x_1 + x_2}{2} + 2m^2 - 1\right) = \left(\frac{m + 3}{4}; \frac{m(m + 3)}{4} + 2m^2 - 1\right).$$

Hai điểm A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $y = -3x + 5$ khi và chỉ khi (d) cắt đường thẳng $y = -3x + 5$ tại I , tương đương $m \neq -3$ và I thuộc đường thẳng $y = -3x + 5$, tương đương $3m^2 + 2m - 5 = 0$.

Vậy S có hai phần tử và tổng của chúng là $-\frac{2}{3}$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 243. Cho đồ thị hàm số $(P): y = (m - 6)x^2 - 2$ và đường thẳng $(d): y = 2mx + 1$ trong đó x là ẩn, m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-2018; 2018]$ để (d) và (P) có điểm chung?

A. 4027.

B. 4029.

C. 4035.

D. 4031.

Lời giải.Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$(m-6)x^2 - 2 = 2mx + 1 \Leftrightarrow (m-6)x^2 - 2mx - 3 = 0. \quad (*)$$

- Nếu $m = 6$ thay vào phương trình $(*)$ ta được: $-12x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$.
- Nếu $m \neq 6$: Ta có $\Delta' = m^2 + 3(m-6) = m^2 + 3m - 18$

Đồ thị (P) và đường thẳng (d) có điểm chung $\Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ có nghiệm thực

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-6 \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 6 \\ m^2 + 3m - 18 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 6 \\ \begin{cases} m \leq -6 \\ m \geq 3. \end{cases} \end{cases} \quad (1)$$

Theo giả thiết: $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-2018; 2018]$. (2)Từ (1) và (2) suy ra: có 4029 giá trị m thỏa mãn YCBT.Chọn đáp án **(B)** □

Câu 244. Cho Parabol $(P): y = x^2 + 2mx + 3$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị (P) cắt trục Ox tại 2 điểm phân biệt A và B sao cho tam giác IAB là tam giác đều? (Với I là đỉnh của (P)).

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải.

- Đỉnh của (P) : $I(-m; 3 - m^2)$.
- Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và trục Ox là: $x^2 + 2mx + 3 = 0$. (*)
- Để (P) cắt Ox tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\sqrt{3} \\ m > \sqrt{3}. \end{cases}$$

- Khi đó phương trình $(*)$ có nghiệm: $x_1 = -m + \sqrt{m^2 - 3}, x_2 = -m + \sqrt{m^2 - 3}$
 $\Rightarrow A(-m + \sqrt{m^2 - 3}; 0), B(-m + \sqrt{m^2 - 3}; 0)$.
 $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2\sqrt{m^2 - 3}; 0), \overrightarrow{IA} = (\sqrt{m^2 - 3}; m^2 - 3)$.
- Do (P) nhận đường thẳng $x = -m$ làm trục đối xứng suy ra tam giác IAB cân tại I .
Để tam giác IAB đều $\Leftrightarrow AB = IA \Leftrightarrow m^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{6}$.

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn.Chọn đáp án **(B)** □

Câu 245. Cho hàm số $y = -x^2 + 2(m+1)x + 1 - m^2$ (1) có đồ thị (P) , (m là tham số). Gọi m_1, m_2 là giá trị của m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác KAB vuông tại K , trong đó $K(2; -2)$. Khi đó $m_1^2 + m_2^2$ bằng

A. 13.

B. 12.

C. 11.

D. 10.

Lời giải.

- Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và trục Ox là :
 $-x^2 + 2(m+1)x + 1 - m^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0 \quad (2)$
- Để (P) cắt Ox tại 2 điểm phân biệt A, B $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0$
 $\Leftrightarrow (m+1)^2 - m^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow 2m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > -1.$
- Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (2)
 $\Rightarrow A(x_1; 0), B(x_2; 0), \overrightarrow{KA} = (x_1 - 2; 2), \overrightarrow{KB} = (x_2 - 2; 2).$

$$\begin{aligned}
 KA \perp KB &\Leftrightarrow \overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{KB} = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x_1 - 2)(x_2 - 2) + 4 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 8 = 0. \\
 &\Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 3. \end{cases}
 \end{aligned}$$

- Kết hợp điều kiện $m > -1$, ta được $m = 1, m = 3.$

Ý kiến phản biện: HS chưa học tích vô hướng thì dùng định lý Pitago giải quyết tam giác vuông.



$$\begin{aligned}
 KA \perp KB &\Leftrightarrow KA^2 + KB^2 = AB^2 \\
 &\Leftrightarrow (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + 4 = (x_1 - x_2)^2 \\
 &\Leftrightarrow x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 8 = 0.
 \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(D)**



Câu 246. Biết Parabol $(P): y = m^2x^2 - 2(m+1)x - m^2 + 2m + 2$ luôn đi qua một điểm cố định A, đường thẳng (d) đi qua A và cắt $(\Delta): y = -\frac{1}{2}x - 1$ tại điểm có tung độ bằng -2 . Giả sử (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt A và B. Gọi $I(x_1; y_1)$ là trung điểm của AB. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để $OI = \frac{\sqrt{29}}{6}$. Khi đó tổng của tất cả các phần tử của S thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $\left(0; \frac{3}{2}\right)$. B. $\left(2; \frac{11}{4}\right)$. C. $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$. D. $\left(\frac{7}{4}; 2\right)$.

Lời giải.

Ta có : $y = m^2x^2 - 2(m+1)x - m^2 + 2m + 2 \Leftrightarrow (x^2 - 1)m^2 - 2(x-1)m - 2x + 2 - y = 0 \quad (*)$

A là điểm cố định của $(P) \Leftrightarrow$ Tọa độ A thỏa $(*), \forall m \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ Tọa độ A thỏa hệ $\begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ -2(x-1) = 0 \\ -2x + 2 - y = 0 \end{cases}$

Suy ra $A(1; 0)$ là điểm cố định của (P) . Gọi $M(x_M; -2)$ là giao điểm của (d) và (Δ) . $M \in (\Delta) \Leftrightarrow -2 = -\frac{1}{2}x_M - 1 \Leftrightarrow M(2; -2)$. Đường thẳng (d) đi qua A, M nên $(d): y = -2x + 2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là : $m^2x^2 - 2(m+1)x - m^2 + 2m + 2 = -2x + 2$

$$\Leftrightarrow m^2x^2 - 2mx - m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ m^2x + m^2 - 2m = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Để (P) và (d) cắt nhau tại 2 điểm phân biệt khi và chỉ khi (2) có nghiệm khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} x_1 = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1}{m} \\ y_I = -2x_I + 2 = -\frac{2}{m} + 2 \end{cases} \Rightarrow OI^2 = x_I^2 + y_I^2 = \frac{1}{m^2} + \frac{4}{m^2} - \frac{8}{m} + 4 = \frac{29}{36} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{6}{5} \\ m = \frac{30}{23} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } S = \frac{6}{5} + \frac{30}{23} \approx 2.5043478.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 247. Cho hàm số $y = \begin{cases} x^2 - 7x + 12 & \text{khi } x \geq 2 \\ x & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Gọi S là tập hợp gồm tất cả các giá trị

nguyên của tham số m để phương trình $|f(|x|)| = m$ có 6 nghiệm phân biệt. Số phần tử của S là

A. 0.

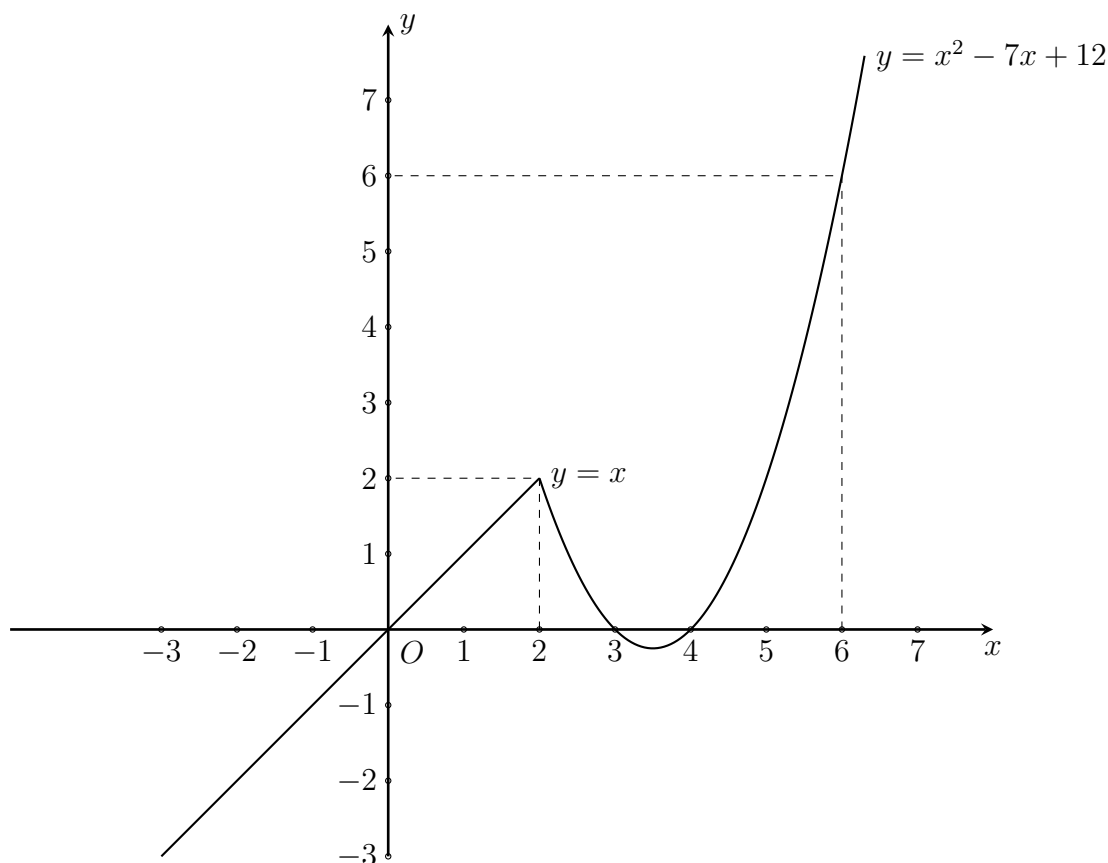
B. 1.

C. 2.

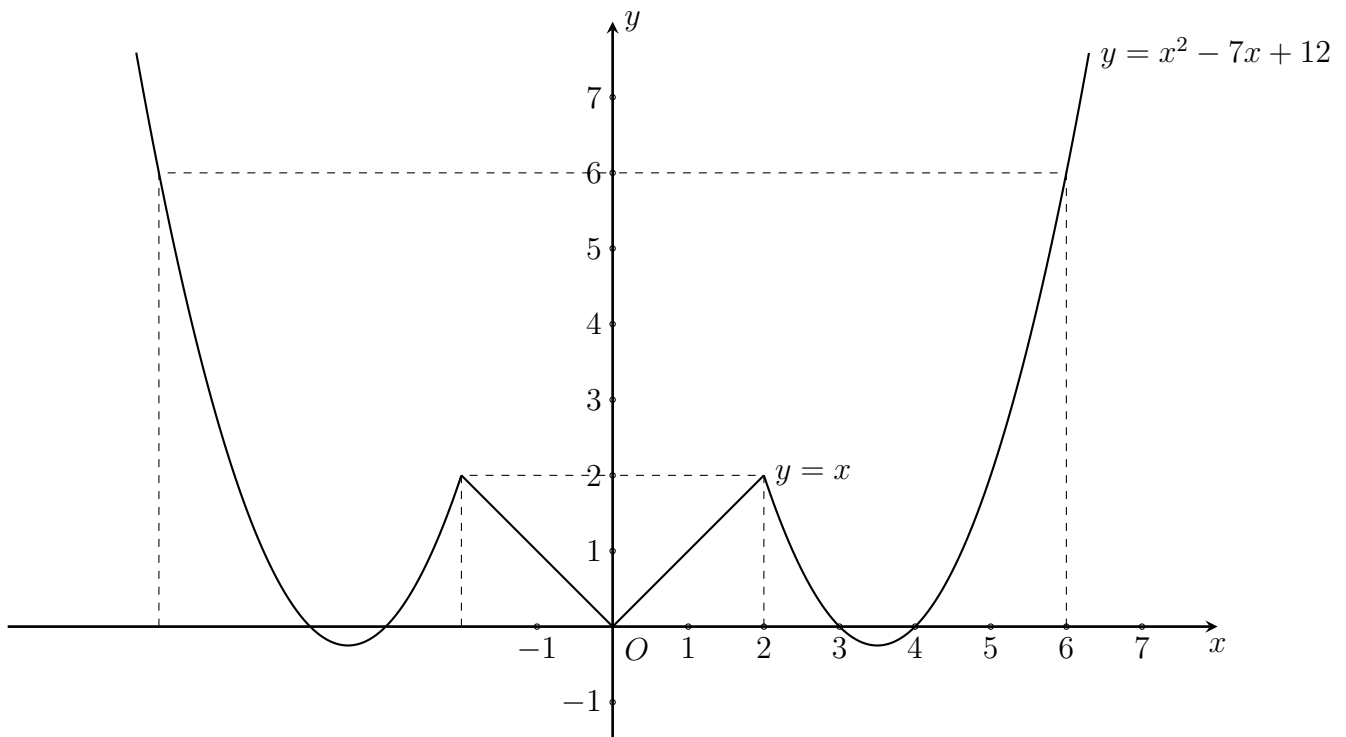
D. 3.

Lời giải.

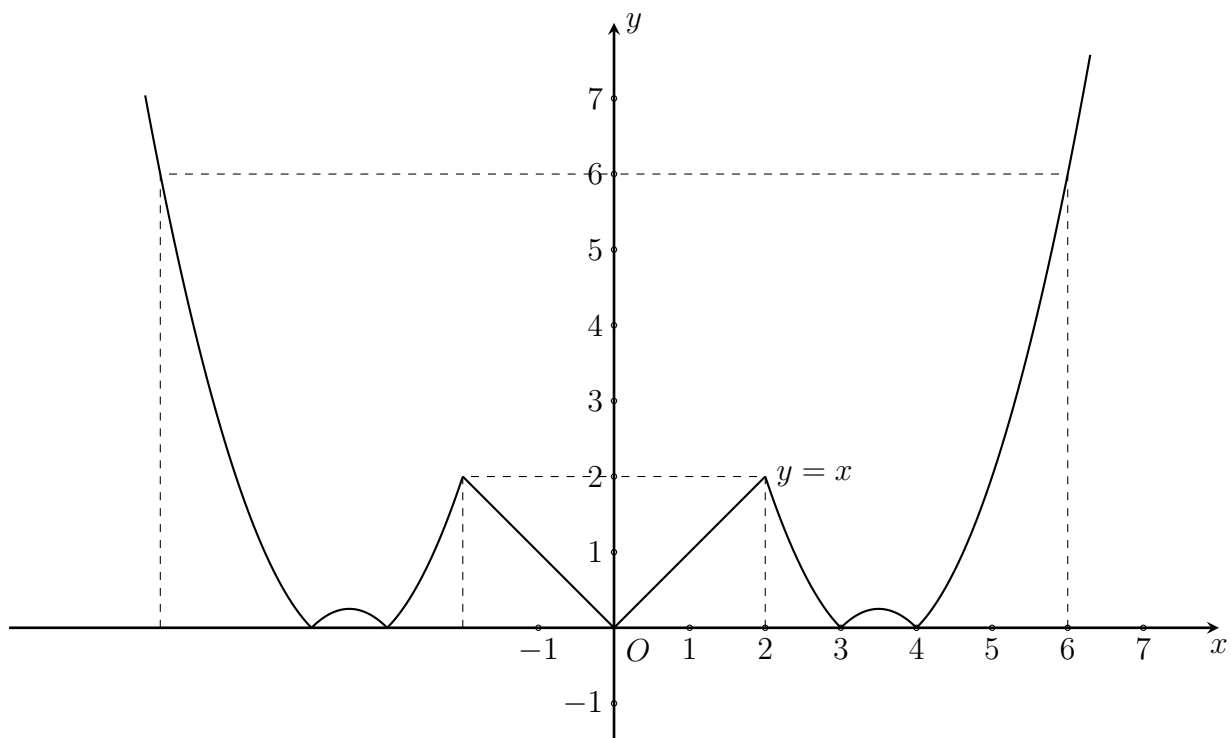
$$\text{Vẽ đồ hàm số } y = \begin{cases} x^2 - 7x + 12 & \text{khi } x \geq 2 \\ x & \text{khi } x < 2 \end{cases}$$



Suy ra đồ hàm số $y = f(|x|)$



Suy ra đồ hàm số $y = |f(|x|)|$



Phương trình $|f(|x|)| = m$ có 6 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m \in \left(\frac{1}{4}; 2\right)$ với tung độ đỉnh là $\frac{1}{4}$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 1$.

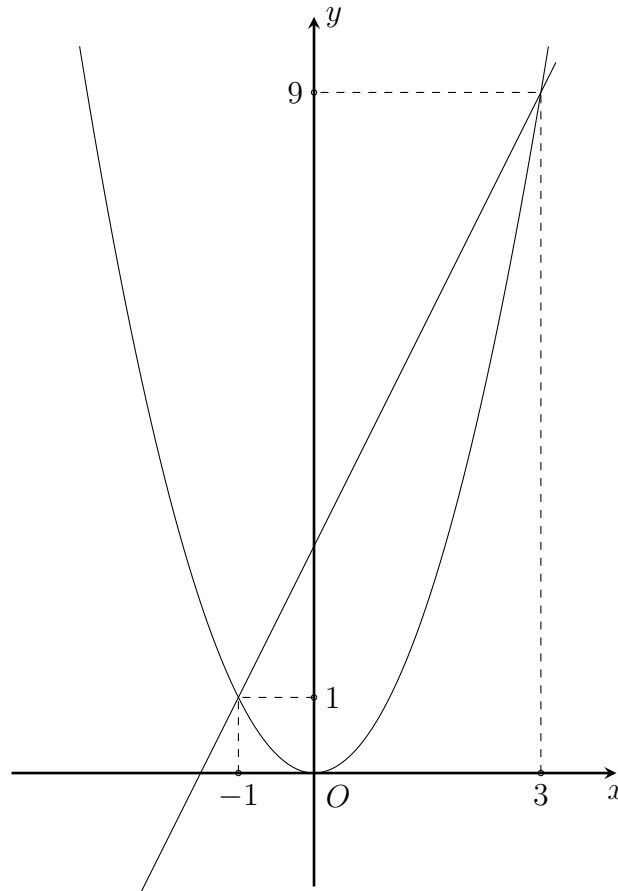
Chọn đáp án **B**

□

Câu 248. Cho parabol (P) có phương trình $y = f(x)$ và đường thẳng d có phương trình $y = g(x)$. Tập nghiệm của bất phương trình $f(x) - g(x) \leq 0$ là $[a; b]$. Giả sử $A(a; y_1), B(b; y_2)$ là giao điểm của (P) và d . Gọi $M(m; m^2)$ với $m \in [a; b]$. Tìm m để diện tích $\triangle MAB$ đạt giá trị lớn nhất.

- A. $m \in (-1; 0)$. B. $m \in \left(\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$. C. $m \in (2; 3)$. D. $m \in (0; 1)$.

Lời giải.



Tập nghiệm của bất phương trình $f(x) - g(x) \leq 0$ là hoành độ của những điểm thuộc (P) và nằm phía dưới hoặc thuộc đường thẳng d . Dựa vào đồ thị suy ra tập nghiệm $T = [-1; 3]$.

Suy ra $a = -1, b = 3$.

Do đó : $A(-1; 1), B(3; 9)$.

Vậy đường thẳng d có phương trình là $y = 2x + 3$.

$$S_{MAB} = |(x_B - x_A)(y_M - y_A) - (x_M - x_A)(y_B - y_A)| = \frac{1}{2} |4(m^2 - 1) - 8(m + 1)| = 2|m^2 - 2m - 3|$$

Suy ra để S_{MAB} đạt diện tích lớn nhất thì $|m^2 - 2m - 3|$ đạt GTLN.

Mặt khác: $m \in [a; b]$ hay $m \in [-1; 3]$ nên $|m^2 - 2m - 3| = -m^2 + 2m + 3 = 4 - (m - 1)^2 \leq 4$ Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow m = 1$.

Vậy $m = 1$ thì S_{MAB} đạt diện tích lớn nhất.

Ý kiến phản biện: Phương pháp giải sử dụng công thức tính diện tích tam giác học sinh lớp 10 chưa học đến. Phương pháp giải hơi dài, tính toán dài. Đề bài cho một số yếu tố không cần thiết như nghiệm của bất phương trình hay tọa độ điểm $M(m; m^2)$ thì lộ ngay phương trình parabol (P) .

Có thể giải nhanh hơn: Để S_{MAB} đạt diện tích lớn nhất khi và chỉ khi khoảng cách từ M tới đường thẳng AB lớn nhất hay khi tiếp tuyến của (P) tại M song song với AB . Vậy tiếp tuyến

! của (P) tại M có dạng $y = 2x + n$. Suy ra $n = -1$ và $M(1; 1)$ hay $m = 1$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 249. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2x + m$ (m là tham số). Gọi S là tập hợp các giá trị của m để đường thẳng d cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn $\triangle OAB$ vuông tại O . Khi đó số các phần tử thuộc S bằng

- A. 2. B. 0. C. 1. D. 9.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và $(P): x^2 = 2x + m \Leftrightarrow x^2 - 2x - m = 0$ (1)

- d cắt (P) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt
 $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 1 + m > 0 \Leftrightarrow m > -1$.
- Khi đó d cắt (P) tại 2 điểm phân biệt là: $A(x_A; x_A^2)$ và $B(x_B; x_B^2)$
 $\Rightarrow \overrightarrow{OA} = (x_A; x_A^2), \overrightarrow{OB} = (x_B; x_B^2)$, (đk O, A, B không thẳng hàng) $\Leftrightarrow x_A, x_B \neq 0$

Với x_A, x_B là các nghiệm của phương trình (1) nên theo Vi-ét: $\begin{cases} x_A + x_B = 2 \\ x_A \cdot x_B = -m \end{cases}$

- Theo giả thiết $\triangle OAB$ vuông tại $O \Leftrightarrow OA^2 + OB^2 = AB^2$
 $\Leftrightarrow x_A^2 + x_A^4 + x_B^2 + x_B^4 = (x_A - x_B)^2 + (x_A^2 - x_B^2)^2$
 $\Leftrightarrow 2x_A \cdot x_B + 2(x_A \cdot x_B)^2 = 0$
 $\Leftrightarrow -2m + 2m^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1. \end{cases}$

So sánh với các điều kiện ta thấy $m = 0$ loại, $m = 1$ thỏa mãn $\Rightarrow S = \{1\}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 250. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị là parabol (P) đỉnh $I(1; 2)$. Biết rằng đường thẳng $(d): y = 4$ cắt (P) tại hai điểm A, B và tam giác IAB đều. Tính $f(2)$.

- A. $f(2) = \frac{7}{2}$. B. $f(2) = \frac{8}{3}$. C. $f(2) = \frac{5}{2}$. D. $f(2) = 3$.

Lời giải.

$$f(x) = a(x - 1)^2 + 2.$$

Khoảng cách từ đỉnh I đến đường thẳng (d) bằng 2 do đó $AB = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và $(P): a(x - 1)^2 + 2 = 4 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{\frac{2}{a}}$.

Giả sử $A\left(1 - \sqrt{\frac{2}{a}}; 4\right), B\left(1 + \sqrt{\frac{2}{a}}; 4\right)$, ta có $AB = 2\sqrt{\frac{2}{a}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$.

Vậy $f(x) = \frac{3}{2}(x - 1)^2 + 2 \Rightarrow f(2) = \frac{7}{2}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 251. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - x + 2m = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + x + m - 2 = 0\}$. Giả sử các phần tử của A được sơn xanh, các phần tử của B được sơn đỏ. Người ta xếp các phần tử của A và

B lên một trục số. Tìm số giá trị nguyên của m để $A \cup B$ có 4 phần tử và 2 phần tử cùng màu không đứng kề nhau.

A. 9.

B. 6.

C. 5.

D. 10.

Lời giải.

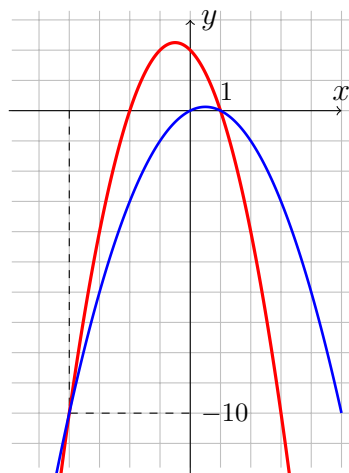
Yêu cầu bài toán tương đương với tìm m để phương trình $x^2 - x + 2m = 0$ (1) và $x^2 + x + m - 2 = 0$ (2) có nghiệm xen kẽ.

$$(1) \Leftrightarrow m = \frac{-1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

$$(2) \Leftrightarrow m = -x^2 - x + 2$$

Vẽ parabol $(P_1): y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$, parabol $(P_2): y = -x^2 - x + 2$ và đường thẳng $y = m$ trên cùng một hệ trục tọa độ.

Từ đó suy ra $-10 < m < 0$.



Chọn đáp án **A**

□

Câu 252. Cho các Parabol $(P_1): y = f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x$, $(P_2): y = g(x) = ax^2 - 4ax + b$ ($a > 0$) có các đỉnh lần lượt là I_1, I_2 . Gọi A, B là giao điểm của (P_1) và Ox . Biết rằng 4 điểm A, B, I_1, I_2 tạo thành tứ giác lồi có diện tích bằng 10. Tính diện tích S của tam giác IAB với I là đỉnh của Parabol $(P): y = h(x) = f(x) + g(x)$.

A. $S = 4$.B. $S = 6$.C. $S = 7$.D. $S = 9$.**Lời giải.**

Dễ dàng tìm được $A(0;0), B(4;0), I_1(2;-1), I_2(2;b-4a)$ với $b-4a > 0$ (vì tứ giác I_1AI_2B lồi).

Khi đó tứ giác I_1AI_2B có hai đường chéo vuông góc nên

$$S_{I_1AI_2B} = \frac{1}{2}AB \cdot I_1I_2 = \frac{1}{2}4 \cdot (1 + b - 4a) = 2(1 + b - 4a) = 10 \Leftrightarrow b = 4a + 4.$$

Ta có $h(x) = f(x) + g(x) = \left(a + \frac{1}{4}\right)x^2 - (4a + 1)x + 4a + 4$ nên tọa độ đỉnh I là

$$\begin{cases} x_I = \frac{4a+1}{2\left(a+\frac{1}{4}\right)} = 2 \\ y_I = h(2) = 4a+1-8a-2+4a+4 = 3 \end{cases} \Rightarrow I(2;3) \Rightarrow S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 253. Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho parabol $(P) : y = x^2 - 1$ và đường thẳng $d : y = 5x + m$ (với m là tham số). Tổng của tất cả các giá trị m để cho đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho OA vuông góc với OB là :

A. $\frac{1}{2}$.

B. 1.

C. $\frac{3}{2}$.

D. 2.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là : $x^2 - 1 = 5x + m \Leftrightarrow x^2 - 5x - m - 1 = 0$ (*).

Để đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B khi (*) có hai nghiệm phân biệt hay

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 25 + 4(m + 1) > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{29}{4}.$$

Ta có hai trường hợp sau :

TH1 : Nếu $m = -1$ thì d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(0; -1)$ và $B(5; 24)$, dễ thấy OA không vuông góc với OB , nên $m = -1$ loại.

TH2 : Nếu $-\frac{29}{4} < m \neq -1$ thì đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$.

Khi đó ta có :

$$OA \perp OB \Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = -1 \Leftrightarrow \left(5 + \frac{m}{x_1}\right) \left(5 + \frac{m}{x_2}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow 25 + 5m \cdot \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} + \frac{m^2}{x_1 x_2} = -1$$

$$\Leftrightarrow 26x_1 x_2 + m^2 + 5m(x_1 + x_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 26(-1 - m) + m^2 + 25m = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 26 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1 - \sqrt{105}}{2} \\ m = \frac{1 + \sqrt{105}}{2} \end{cases}.$$

Vậy tổng của tất cả các giá trị m để cho đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho OA vuông góc với OB là : $\frac{1 - \sqrt{105}}{2} + \frac{1 + \sqrt{105}}{2} = 1$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 254. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị là parabol (P) . Biết rằng đường thẳng $d_1 : y = -\frac{5}{2}$ cắt (P) tại một điểm duy nhất, đường thẳng $d_2 : y = 2$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là -1 và 5 . Tính giá trị $T = a + 2b + 3c$.

A. $T = -2$.

B. $T = -3$.

C. $T = -4$.

D. $T = -5$.

Lời giải.

Gọi $I(x_I; y_I)$ là đỉnh của (P) .

Vì đường thẳng $d_1 : y = -\frac{5}{2}$ cắt (P) tại một điểm duy nhất nên ta được $y_I = -\frac{5}{2}$.

Vì đường thẳng $d_2 : y = 2$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là -1 và 5 nên ta được $x_I = \frac{-1 + 5}{2} = 2$ và (P) đi qua điểm $M(-1; 2)$.

Từ các giả thiết trên ta được hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} a - b + c = 2 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \\ 4a + 2b + c = -\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 2 \\ 4a + b = 0 \\ 4a + 2b + c = -\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -2 \\ c = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy $T = a + 2b + 3c = -5$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 255. Cho hình chữ nhật $ABCD$, $AB = 10$, $AD = 8$. Trên các cạnh AB , BC , CD lần lượt lấy các điểm P , Q , R sao cho $AP = BQ = CR$. Độ dài của AP trong khoảng nào sau đây thì diện tích tam giác PQR đạt nhỏ nhất.

A. (2; 3).

B. (3; 4).

C. (4; 5).

D. (5; 6).

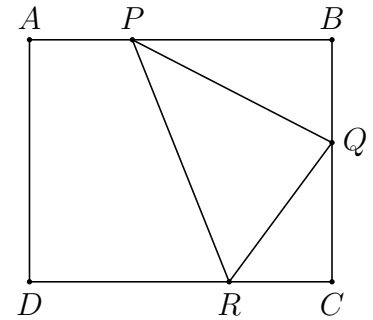
Lời giải.

Cách 1:

Ta có tứ giác $CRPB$ là hình thang và có diện tích

$S = \frac{(CR + BP) BC}{2} = 40$ không đổi nên diện tích hình PQR đạt nhỏ nhất khi và chỉ khi tổng diện tích của 2 tam giác BPQ , CQR đạt lớn nhất.

Đặt $AP = x$, $0 \leq x \leq 8$.



$$S_{BPQ} + S_{CQR} = \frac{x(8-x) + x(10-x)}{2} = x(9-x) = \frac{81}{4} - \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 \leq \frac{81}{4}, \forall x \in [0; 8].$$

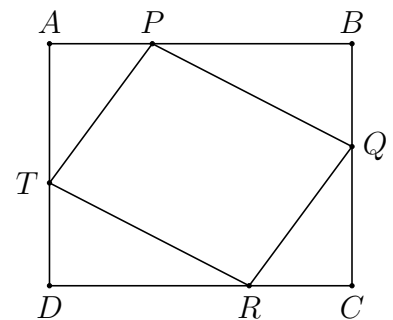
Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{9}{2}$.

Cách 2:

Trên cạnh AD lấy điểm T sao cho $DT = AP$. Để chứng minh được tứ giác $PQRT$ là hình bình hành và $S_{PRQ} = \frac{1}{2}S_{PQRT}$.

Đặt $AP = x$, $0 \leq x \leq 8$.

Diện tích hình $PQRT$ đạt nhỏ nhất khi và chỉ khi tổng diện tích của 4 tam giác APT , BPQ , CQR , DTR đạt lớn nhất



$$\begin{aligned} S_{APT} + S_{BPQ} + S_{CQR} + S_{DTR} &= x(8-x) + x(10-x) \\ &= x(18-2x) = 2 \cdot x(9-x) = \frac{81}{2} - 2\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 \leq \frac{81}{2}. \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{9}{2}$.

Chú ý: Có thể áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm x và $9-x$ hoặc xét hàm số $y = -2x^2 + 18x$ trên $[0; 8]$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 256. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 2mx - m^2 + 5m - 2$ đạt giá trị lớn nhất khi $m = \frac{a}{b}$, $\left(\frac{a}{b}\right)$ là phân số tối giản, $b > 0$. Tính $a + b$.

A. $a + b = 7$.

B. $a + b = 5$.

C. $a + b = 9$.

D. $a + b = -1$.

Lời giải.

Hàm số $y = x^2 - 2mx - m^2 + 5m - 2$ có giá nhỏ nhất là $y(m) = -2m^2 + 5m - 2$.

Biểu thức $y(m) = -2m^2 + 5m - 2$ đạt giá trị lớn nhất khi $m = \frac{5}{4} \Rightarrow a = 5, b = 4 \Rightarrow a + b = 9$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 257. Giả sử phương trình bậc hai ẩn x (m là tham số): $x^2 + 2(m-2)x - 3m^2 - 4m + 8 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1 + x_2 - 2x_1x_2 - 24 \leq 0$. Gọi M và N lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 - 13(x_1 + x_2)$. Tính $M + N$.

A. -64.

B. -44.

C. $-\frac{87}{2}$.

D. $-\frac{127}{2}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_1x_2 - 24 \leq 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_1x_2 - 24 \leq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 4 \geq 0 \\ 6m^2 + 6m - 36 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq m \leq -1 \\ 1 \leq m \leq 2 \end{cases} \quad (*) \end{aligned}$$

Vậy $P = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 - 13(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)^2 + 2x_1x_2 - 13(x_1 + x_2) = -2m^2 + 2m - 20$ + Bảng biến thiên của P với điều kiện (*)

m	-3	-1	1/2	1	2
P	-44	-24		-20	-24

Từ bảng biến thiên ta được: $M = -20$ khi $m = 1$, $N = -44$ khi $m = -3$. Suy ra $M + N = -64$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 258. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + 2$ ($a > 0$). Biết rằng hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$. Khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{8a^2}{3a^2 + 2ab + b^2}$ là

A. 4.

B. $\frac{8}{11}$.

C. $\frac{8}{3}$.

D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải.

Do $a > 0$ nên hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$ thì: $\frac{-b}{2a} \leq -1 \Leftrightarrow \frac{b}{a} \geq 2$.

Khi đó: $P = \frac{8a^2}{3a^2 + 2ab + b^2} = \frac{8}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 2\frac{b}{a} + 3} = \frac{8}{t^2 + 2t + 3}$ với $t = \frac{b}{a} \geq 2$.

Ta có $t^2 + 2t + 3 = (t+1)^2 + 2 \geq 11, \forall t \geq 2$. Dấu '=' xảy ra khi $t = 2$.

Do đó $P \leq \frac{8}{11}$. Suy ra $\max P = \frac{8}{11}$ khi $\frac{b}{a} = 2$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 259. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị đi qua điểm $A(1; 1)$ và cắt trục hoành tại hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông đỉnh A và có diện tích $S \leq \sqrt{2}$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số. Tìm giá trị lớn nhất của M .

- A. $\max M = 1$. B. $\max M = 2$. C. $\max M = 3$. D. $\max M = \frac{3}{2}$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số đi qua $A(1; 1)$ nên ta có $a + b + c = 1$, (1)

Gọi $x_1; x_2$ là nghiệm phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ thì $B(x_1; 0), C(x_2; 0)$.

Tam giác ABC vuông đỉnh A nên

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow (x_1 - 1)^2 + 1 + (x_2 - 1)^2 + 1 = (x_2 - x_1)^2 \\ &\Leftrightarrow x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 2 = 0 \Leftrightarrow 2a + b + c = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $a = -1, c = 2 - b$.

$$\text{Ta có } BC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{a^2}} = \sqrt{b^2 - 4b + 8}.$$

Tam giác ABC có diện tích $S \leq \sqrt{2}$ nên $\frac{1}{2}BC \leq \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{b^2 - 4b + 8} \leq 2\sqrt{2} \Rightarrow b^2 - 4b \leq 0$.

$$\text{Ta có } a = -1 \text{ nên hàm số có giá trị lớn nhất là } M = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{b^2 - 4b + 8}{4}.$$

Vì $b^2 - 4b \leq 0$ nên $M \leq 2, \max M = 2$.

$$M = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^2 + 2 \\ y = -x^2 + 4x - 2 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **B** □

Câu 260. Cho hàm số $f(x) = 4x^2 - 4mx + m^2 - 2m + 2$ (m là tham số). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\min_{[0;2]} f(x) = 3$. Khẳng định nào sau đây đúng.

- A. $S \subset (-4; 6)$. B. $S \subset (-3; 7)$. C. $S \subset [-2; 8]$. D. $S \subset [-1; 9]$.

Lời giải.

Có hoành độ của đỉnh $x_I = \frac{m}{2}; a = 4 > 0$.

Xét 3 trường hợp sau:

TH1: $\frac{m}{2} < 0 \Leftrightarrow m < 0$. Suy ra hàm số đồng biến trên đoạn khoảng $(0; 2)$.

$$\min_{[0;2]} f(x) = f(0) = m^2 - 2m + 2 = 3 \Rightarrow m = 1 - \sqrt{2}.$$

TH2: $0 \leq \frac{m}{2} \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 4 \Rightarrow \min_{[0;2]} f(x) = f\left(\frac{m}{2}\right) = -2m + 2 = 3 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$ (loại).

TH3: $\frac{m}{2} > 2 \Leftrightarrow m > 4$. Suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

$$\min_{[0;2]} f(x) = f(2) = m^2 - 10m + 18 = 3 \Rightarrow m = 5 + \sqrt{10} \text{ (thỏa mãn)}.$$

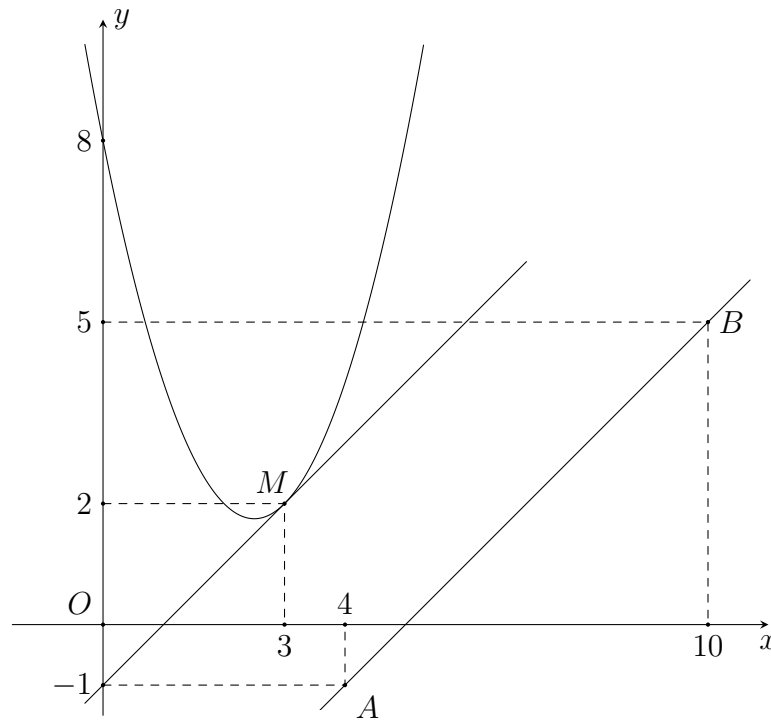
$$\text{Vậy } S = \{1 - \sqrt{2}; 5 + \sqrt{10}\} \subset [-1; 9].$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 261. Cho hàm số $y = x^2 - 5x + 8$ có đồ thị là (P) và hai điểm $A(4; -1), B(10; 5)$. Biết điểm $M(x_0; y_0)$ trên P thỏa mãn diện tích tam giác MAB nhỏ nhất. Tính tổng $x_0 + y_0$.

- A. 4. B. 2. C. 3. D. 5.

Lời giải.



+ Vẽ đồ thị (P) , nhận thấy A, B không thuộc bề lõm của P , suy ra yêu cầu bài toán thỏa mãn khi M là tiếp điểm của tiếp tuyến với P song song với đường thẳng AB .

+ Gọi $y = ax + b$ là đường thẳng qua A, B suy ra $\begin{cases} 4a + b = -1 \\ 10a + b = 5 \end{cases} \Rightarrow y = x - 5$.

+ Đường thẳng Δ song song với đường thẳng $y = x - 5$ có dạng $y = x + b$, Δ là tiếp tuyến của (P) khi phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 6x + 8 - b = 0$ của (P) và Δ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 1 + b = 0 \Leftrightarrow b = -1$. (chú ý $b = -1$ là điều kiện tiếp xúc).

Khi đó $M(3; 2)$, vậy $x_0 + y_0 = 5$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 262. Cho parabol $(P) : y = x^2 + 2018x + 3$ và đường thẳng $d : y = mx + 4$. Biết d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 . Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = |x_1 - x_2|$?

- A. $T = 2$. B. $T = 2018$. C. $T = 0$. D. $T = 4$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d :

$$x^2 + 2018x + 3 = mx + 4 \Leftrightarrow x^2 - (m - 2018)x - 1 = 0$$

Nhận thấy phương trình luôn có 2 nghiệm trái dấu x_1, x_2 với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Ta có $x_1 \cdot x_2 = -1 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{1}{x_1}$. Suy ra $T = \left| x_1 + \frac{1}{x_1} \right| = |x_1| + \left| \frac{1}{x_1} \right| \geq 2$ (do $x_1, \frac{1}{x_1}$ cùng dấu).

Dấu " $=$ " xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = \frac{1}{x_1} \Leftrightarrow x_1^2 = 1 \Leftrightarrow m = 2018$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 263. Cho $x, y, z \in [0; 2]$. Tìm giá trị lớn nhất của $T = 2(x + y + z) - (xy + yz + zx)$?

- A. $T = 3$. B. $T = 0$. C. $T = 4$. D. $T = 2$.

Lời giải.

Ta có $T = f(x) = (2 - y - z)x + 2(y + z) - yz$.

Nếu $y + z = 2$ thì $f(x) = 4 - yz \leq 4$ do $-yz \leq 0$.

Nếu $y + z \neq 2$ thì $f(x)$ là hàm số bậc nhất.

Ta có $f(0) = -(2 - y)(2 - z) + 4 \leq 4$ và $f(2) = -yz + 4 \leq 4$.

Vậy $\max T = 4$ khi $x = 0, y = z = 2$ hoặc $x = 2, y = z = 0$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 264. Cho hàm số $y = f(x) = x^2 - 2ax + 1$ với a là tham số. Gọi M và m là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên $[0; 1]$. Biết rằng có hai giá trị của a để $M - m = 4$ khi đó tổng hai giá trị của a bằng

A. 0.

B. 1.

C. -1.

D. 2.

Lời giải.

Hàm số $y = f(x) = x^2 - 2ax + 1$ có hệ số của x^2 bằng 1, tọa độ đỉnh $I(a, 1 - a^2)$, $f(0) = 1$, $f(1) = 2 - 2a$.

TH1: Xét $a < 0$ khi đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0; 1) \Rightarrow M = f(1)$, $m = f(0)$.

Khi đó $M - m = 4 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{2}$ (thỏa mãn).

TH2: Xét $a > 1$ khi đó hàm số nghịch biến trên $(0; 1) \Rightarrow M = f(0)$, $m = f(1)$.

Khi đó $M - m = 4 \Leftrightarrow a = \frac{5}{2}$ (thỏa mãn).

(Đến đây đủ hai giá trị a chọn luôn đáp án).

TH3: Xét $0 \leq a \leq 1$ khi đó $m = f(a) = -a^2 + 1$, $M = \max\{f(0), f(1)\}$.

-Nếu $M = f(0) \Rightarrow M - m = 4 \Leftrightarrow a = \pm 2$ không thỏa mãn.

-Nếu $M = f(1) \Rightarrow M - m = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -1 \end{cases}$ không thỏa mãn.

Vậy có hai giá trị a thỏa mãn là $a = -\frac{3}{2}$, $a = \frac{5}{2}$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 265. Gọi a, b các số thực để biểu thức $F = \frac{ax + b}{x^2 + 1}$ đạt giá trị lớn nhất bằng 4 và giá trị nhỏ nhất bằng -1. Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b$.

A. $P = 12$.

B. $P = 21$.

C. $P = 19$.

D. $P = 29$.

Lời giải.

Các số thực a, b thỏa mãn bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} \max_{\mathbb{R}}(F - 4) = 0 \\ \min_{\mathbb{R}}(F + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \max_{\mathbb{R}}(-4x^2 + ax + b - 4) = 0 \\ \min_{\mathbb{R}}(x^2 + bx + b + 1) = 0 \end{cases}$ Đặt

$f(x) = -4x^2 + ax + b - 4$, $g(x) = x^2 + bx + b + 1$.

Dễ thấy $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số bậc hai lần lượt có hệ số bằng -4 và 1. Nên max và min lần lượt đạt tại đỉnh của nó.

Từ đó ta có $\begin{cases} a^2 + 16(b - 4) = 0 \\ a^2 - 4(b + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 16 \\ b = 3 \end{cases}$.

Vậy giá trị của biểu thức $P = a^2 + b = 19$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 266. Cho phương trình bậc hai $x^2 - 2mx + m^2 - 2m + 4 = 0$ (x là ẩn và m là tham số). Khi đó m thuộc đoạn nào để phương trình đã cho có hai nghiệm không âm x_1, x_2 và giá trị của $P = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$

là nhỏ nhất.

A. $m \in [2; 4]$.

B. $m \in (4; 5)$.

C. $m \in [5; 8]$.

D. $m \in (8; +\infty)$.

Lời giải.

Phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - 2m + 4 = 0$ có hai nghiệm không âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m^2 + 2m - 4 \geq 0 \\ S = 2m \geq 0 \\ P = m^2 - 2m + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 2.$$

Theo định lý Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = 2m$, $x_1 \cdot x_2 = m^2 - 2m + 4$.

$$\text{Suy ra } P = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2} = \sqrt{x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 \cdot x_2}} = \sqrt{2m + 2\sqrt{(m-1)^2 + 3}}.$$

Mà $P = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ nhỏ nhất khi $\sqrt{2m + 2\sqrt{(m-1)^2 + 3}}$ nhỏ nhất.

$$\text{Vậy } P = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{2m + 2\sqrt{(m-1)^2 + 3}} \geq \sqrt{8}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m = 2$.

Vậy $m \in [2; 4]$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 267. Cho hàm số $y = 2x^2 + (6 - m)x + 3 - 2m$ (1). Giá trị m để đồ thị của hàm số (1) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho biểu thức

$$A = \frac{1}{(x_1 + 2)^{2018}} + \frac{1}{(x_2 + 2)^{2018}} \text{ đạt giá trị nhỏ nhất.}$$

A. $m \in \mathbb{R}$.

B. $m \in (-3; 0)$.

C. $m \in (0; 3)$.

D. $m \in \emptyset$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (1) và trục hoành:

$$2x^2 + (6 - m)x + 3 - 2m = 0 (*)$$

Để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt thì phương trình (*) phải có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m + 12 > 0, \forall m$.

Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (*). Theo Viét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m-6}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{3-2m}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)} = \frac{1}{(x_1 \cdot x_2 + 2x_1 + 2x_2 + 4)} = -2.$$

Theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\frac{1}{(x_1 + 2)^{2018}} + \frac{1}{(x_2 + 2)^{2018}} \geq 2\sqrt{\left(\frac{1}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)}\right)^{2018}} = 2^{1010}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \frac{1}{(x_1 + 2)^{2018}} = \frac{1}{(x_2 + 2)^{2018}} \Leftrightarrow |x_1 + 2| = |x_2 + 2|.$$

$$\text{Do } x_1, x_2 \text{ phân biệt nên ta có } x_1 + 2 = -x_2 - 2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -4 \Leftrightarrow \frac{m-6}{2} = -4 \Leftrightarrow m = -2.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 268. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^3 + x^2 + x}{(x^2 + 1)^2}$.

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. $\frac{5}{4}$.

D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải.

- Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Ta có $y = \frac{x(x^2 + 1) + x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x}{x^2 + 1} + \left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)^2$.
Đặt $t = \frac{x}{x^2 + 1}$. Do $x^2 + 1 \geq 2|x| \Leftrightarrow \left|\frac{x}{x^2 + 1}\right| \leq \frac{1}{2}$, suy ra điều kiện $t \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.
- Hàm số trở thành $y = f(t) = t^2 + t$ với $t \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Tọa độ đỉnh $I\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$.

Bảng biến thiên

t	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$y = f(t)$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $\frac{3}{4}$, xảy ra khi $x = 1$.Chọn đáp án **D**

□

Câu 269. Tính tích T giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} + 2\sqrt{1-x^4}.$$

A. $T = 1$.

B. $T = \frac{9}{4}$.

C. $T = \sqrt{2}$.

D. $T = \frac{9\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.

- Tập xác định $\mathcal{D} = [-1; 1]$.
- Đặt $t = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$. Do $1+x^2 \geq 1-x^2 \Rightarrow t \geq 0$.
Ta có $t^2 = 2 - 2\sqrt{1-x^4} \Leftrightarrow 2\sqrt{1-x^4} = 2 - t^2 \Rightarrow 2 - t^2 \geq 0 \Leftrightarrow t \leq \sqrt{2}$, dấu “=” xảy ra khi $x = \pm 1$. Suy ra $t \in [0; \sqrt{2}]$.
- Hàm số đã cho trở thành $y = f(t) = t + 2 - t^2$.
Xét hàm số $f(t) = -t^2 + t + 2$, trên đoạn $[0; \sqrt{2}]$.
Tọa độ đỉnh $I\left(\frac{1}{2}; \frac{9}{4}\right)$.

Ta có bảng biến thiên

t	0	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$
$f(t)$	2	$\frac{9}{4}$	$\sqrt{2}$

Giá trị lớn nhất của hàm số là $\frac{9}{4}$, xảy ra khi $t = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{8}}$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\sqrt{2}$, xảy ra khi $x = \pm 1$.

Vậy $T = \frac{9\sqrt{2}}{4}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 270. Cho đồ thị hàm số $(C): y = ax^2 + bx + c$ có đỉnh $I(-1; 2)$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a(2a+6) - 2b(c+3b) - 4c(3-b)}{a(3c+3b) + 2}$ là M khi hàm số có phương trình: $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$

Tính $Q = M + a_1^2 + b_1 + c_1^3$.

A. $Q = \frac{3739}{27}$.

B. $Q = 28$.

C. $Q = -\frac{26}{5}$.

D. $Q = -\frac{520}{27}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_1 = -\frac{b}{2a} = -1 \\ a - b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ c = 2 + a. \end{cases}$$

Do đó

$$\begin{aligned} P &= \frac{a \cdot 14a - 4a(2+7a) - 4(2+a)(3-2a)}{a(9a+6) + 2} \\ &= \frac{-6a^2 - 4a - 24}{9a^2 + 6a + 2} \\ &= -\frac{2}{3} - \frac{68}{3[(3a+1)^2 + 1]}. \end{aligned}$$

Từ đó ta có min $P = -\frac{70}{3}$ tại $a = -\frac{1}{3}; b = -\frac{2}{3}; c = \frac{5}{3}$. Hay $M = -\frac{70}{3}$.

Hàm số có phương trình $y = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$.

$$\text{Như vậy } Q = \left(-\frac{70}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{5}{3}\right)^3 = -\frac{520}{27}$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 271. Cho hai điểm $A(-1; 1); B(2; 4)$ nằm trên Parabol $(P): y = x^2$. Điểm C nằm trên cung $\widehat{AB}$ của Parabol (P) sao cho tam giác ABC có diện tích lớn nhất. Khi đó độ dài của đoạn thẳng OC là

A. $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Ta có phương trình của đường thẳng $AB: y = x + 2$.

Gọi d là đường thẳng song song với $AB: y = x + 2$ và tiếp xúc với (P) .

Ta có $d: y = x + m$ trong đó $m \neq 2$.

d tiếp xúc với (P) khi và chỉ khi phương trình $x^2 = x + m$ có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow x^2 - x - m = 0 \text{ có nghiệm kép} \Leftrightarrow 1 + 4m = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{4}.$$

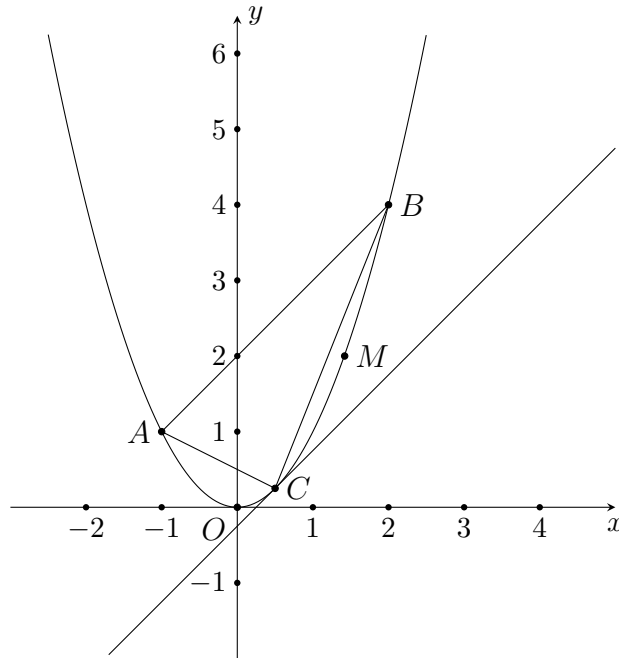
Khi đó $d: y = x - \frac{1}{4}$.

Gọi C là tiếp điểm của d và (P) , khi đó tọa độ của C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y = x - \frac{1}{4} \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right).$$

Gọi M là một điểm bất kì nằm trên cung $\widehat{AB}$ của Parabol (P) , khi đó điểm M nằm giữa hai đường thẳng d và đường thẳng AB suy ra chiều cao hạ từ M đến đường thẳng AB nhỏ hơn chiều cao hạ từ C đến đường thẳng AB . Vậy tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

$$\text{Khi đó } C\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right) \Rightarrow OC^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \Rightarrow OC = \frac{\sqrt{5}}{4}.$$



Chọn đáp án **A**

□

Câu 272. Cho parabol $(P): y = x^2 + 2018x + 3$ và đường thẳng $d: y = mx + 4$. Biết d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 . Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = |x_1 - x_2|$.

A. $T = 2018$.

B. $T = 0$.

C. $T = 2$.

D. $T = 4$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d :

$$x^2 - 2018x + 3 = mx + 4 \Leftrightarrow x^2 - (m - 2018)x - 1 = 0.$$

Nhận thấy phương trình luôn có 2 nghiệm trái dấu x_1, x_2 với mọi $m \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } x_1 x_2 = -1 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{1}{x_1}.$$

$$\text{Suy ra } T = \left| x_1 + \frac{1}{x_1} \right| = |x_1| + \left| \frac{1}{x_1} \right| \geq 2 \text{ (do } x_1, \frac{1}{x_1} \text{ cùng dấu).}$$

Dấu “=” xảy ra khi $m = 2018$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 273. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^4 - 4x^2 + 5 + m|$ trên đoạn $[1; \sqrt{3}]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $m = \frac{3}{2}$.

B. $m = -\frac{3}{2}$.

C. $m = \frac{1}{2}$.

D. $m = -\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Đặt $t = x^2 \Rightarrow t \in [1; 3]$ ta được hàm số $y = |t^2 - 4t + 5 + m|, t \in [1; 3]$.

Đặt $u = t^2 - 4t + 5, t \in [1; 3]$, ta có bảng biến thiên

t	1	2	3
$u = t^2 - 4t + 5$	2		2
		1	

Hàm số trở thành $y(u) = |u + m|$, với $u \in [1; 2]$.

Hàm số $f(u) = u + m$ đồng biến trên $[1; 2]$ nên hàm số $y(u) = |u + m|$ nhận giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất ở một trong hai điểm mút 1, 2.

$$\text{Do đó } \max_{[1; \sqrt{3}]} y = \max\{y(1); y(2)\} = \max\{|1 + m|; |2 + m|\} \geq \frac{|1 + m| + |2 + m|}{2} \geq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } m + 1 = -m - 2 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 274. Cho parabol $(P): y = -x^2 + 2mx - 3m^2 + 4m - 3$ (m là tham số) có đỉnh I . Gọi A, B là 2 điểm thuộc Ox sao cho $AB = 2018$. Khi đó $\triangle IAB$ có diện tích nhỏ nhất bằng

A. 2018.

B. 1009.

C. 4036.

D. 1008.

Lời giải.

$$y = -x^2 + 2mx - 3m^2 + 4m - 3 \text{ có } \Delta' = m^2 + (-3m^2 + 4m - 3) = -2(m - 1)^2 - 1 < 0, \forall m.$$

Suy ra (P) luôn nằm phía dưới Ox . (P) có đỉnh $I(m; -2m^2 + 4m - 3)$. Gọi H là hình chiếu của I trên Ox . Khi đó ta có

$$\begin{aligned} IH &= |-2m^2 + 4m + 3| = 2m^2 - 4m + 3 \\ \Rightarrow S_{\triangle IAB} &= \frac{1}{2} IH \cdot AB. \end{aligned}$$

$S_{\triangle IAB}$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow IH$ đạt giá trị nhỏ nhất

$$\Leftrightarrow f(m) = 2m^2 - 4m + 3 \text{ đạt giá trị nhỏ nhất}$$

$$\Leftrightarrow m = 1$$

$$\Rightarrow \min f(m) = 1 \Rightarrow \min IH = 1 \Rightarrow \min S_{\triangle IAB} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2018 = 1009.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 275. Cho hàm số $y = |x^2 + 2x + 3m|$, m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 1]$ bằng 7.

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

Lời giải.

Đặt $g(x) = x^2 + 2x + 3m$, khi đó $y = |g(x)|$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên đoạn $[-2; 1]$

x	-2	-1	1
y	$3m$	$3m - 1$	$3m + 3$

$$\text{Khi đó, } \max_{[-2; 1]} y = \max\{|3m - 1|; |3m + 3|\}.$$

$$\begin{aligned} \bullet |3m - 1| = 7 &\Leftrightarrow \begin{cases} 3m - 1 = 7 \\ 3m - 1 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{8}{3} \\ m = -2 \end{cases} \\ \bullet |3m + 3| = 7 &\Leftrightarrow \begin{cases} 3m + 3 = 7 \\ 3m + 3 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{4}{3} \\ m = -\frac{10}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Vì m nguyên nên chỉ có $m = -2$ thỏa đề bài.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 276. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1 + xy$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $S = x^4 + y^4 - x^2y^2$. Khi đó giá trị của $M + m$ là

A. $\frac{10}{9}$. B. $\frac{29}{18}$. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{5}{9}$.

Lời giải.

Ta có $S = (x^2 + y^2)^2 - 3x^2y^2 = (1 + xy)^2 - 3x^2y^2 = -2x^2y^2 + 2xy + 1$. Đặt $t = xy$ ta được $S = -2t^2 + 2t + 1$.

Ta lại có

$$-(x^2 + y^2) \leq 2xy \leq x^2 + y^2 \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq t = xy \leq 1.$$

Xét hàm số $f(t) = -2t^2 + 2t + 1$, $t \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right]$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{2}$	1

Từ bảng biến thiên ta thấy $M = \frac{3}{2}$; $m = \frac{1}{9}$ nên $M + m = \frac{29}{18}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 277. Giá trị m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |2m - 3x|$ trên đoạn $[-1; 2]$ đạt giá trị nhỏ nhất thỏa mãn mệnh đề nào sau đây?

A. $m \in (2; 3)$. B. $m \in (1; 2)$. C. $m \in (-1; 1)$. D. $m \in (3; 4)$.

Lời giải.

Theo tính chất hàm số bậc nhất ta thấy $\max_{[-1; 2]} f(x)$ chỉ có thể đạt tại $x = -1$ hoặc $x = 2$. Đặt

$M = \max_{[-1; 2]} f(x)$ ta có

$$\begin{cases} M \geq f(-1) = |2m + 3| \\ M \geq f(2) = |2m - 6| \end{cases}.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} M &\geq \frac{f(-1) + f(2)}{2} = \frac{|2m + 3| + |2m - 6|}{2} \\ &= \frac{|2m + 3| + |6 - 2m|}{2} \geq \frac{|(2m + 3) + (6 - 2m)|}{2} = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} |2m+3| = |6-2m| \\ (2m+3)(6-2m) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{3}{4}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của M là $\frac{9}{2}$ khi $m = \frac{3}{4}$.
 Chọn đáp án **C** □

Câu 278. Giá trị m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |-3x^2 + 6x + 1 - 2m|$ trên đoạn $[-2; 3]$ đạt giá trị nhỏ nhất thỏa mãn mệnh đề nào sau đây?

- A. $m \in (-6; -4)$. B. $m \in (-4; 0)$. C. $m \in (0; 3)$. D. $m \in (3; 5)$.

Lời giải.

Đặt $M = \max_{[-2; 3]} f(x)$. Theo tính chất hàm số bậc hai $g(x) = -3x^2 + 6x + 1 - 2m$ ta thấy

$$\begin{aligned} M &= \max\{|g(1)|; |g(-2)|; |g(3)|\} = \max\{|4 - 2m|; |-23 - 2m|; |-8 - 2m|\} \\ &= \max\{|2m - 4|; |2m + 23|\} \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} M &\geq \frac{|2m - 4| + |2m + 23|}{2} = \frac{|4 - 2m| + |2m + 23|}{2} \\ &\geq \frac{|(2m + 23) + (4 - 2m)|}{2} = \frac{27}{2}. \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} |2m + 23| = |4 - 2m| \\ (2m + 23)(4 - 2m) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{19}{4}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của M là $\frac{27}{2}$ khi $m = -\frac{19}{4}$.
 Chọn đáp án **A** □

Câu 279. Biết rằng hàm số $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c là các số thực) đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$ tại $x = \frac{3}{2}$ và tổng lập phương các nghiệm của phương trình $y = 0$ bằng 9. Tính $P = abc$.

- A. $P = 0$. B. $P = 6$. C. $P = 7$. D. $P = -6$.

Lời giải.

Hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$ tại $x = \frac{3}{2}$ nên

$$\begin{cases} a > 0 \\ -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Để phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm thì $b^2 - 4ac \geq 0$. Khi đó

$$x_1^3 + x_2^3 = 9 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2 = 9 \Leftrightarrow \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\left(-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right) = 9.$$

Từ đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = \frac{1}{4} \\ \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\left(-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \\ c = -2. \end{cases}$$

Do đó $P = abc = 6$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 280. Cho đường thẳng $d_m: y = mx - 2m + 1$ và parabol $(P): y = x^2 - 3x + 2$ (m là tham số thực). Biết $d = \frac{\sqrt{a}}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{Z}$ và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản) là khoảng cách lớn nhất từ đỉnh I của parabol (P) đến đường thẳng d_m . Tính $P = a^2 + b^2$.

- A. $P = 1097$. B. $P = 45$. C. $P = 857$. D. $P = 285$.

Lời giải.

Đỉnh của (P) là $I\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$. Gọi $M(a; b)$ là điểm cố định của họ đường thẳng d_m .

$$\text{Suy ra } (a-2)m + 1 - b = 0 \text{ đúng với mọi } m \Leftrightarrow \begin{cases} a-2=0 \\ 1-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow M(2; 1).$$

Gọi H là hình chiếu của I lên d_m , khi đó IH là khoảng cách từ I đến đường thẳng d_m .

Có $d(I; d_m) = IH \leq IM$ nên $d(I; d_m)$ đạt giá trị lớn nhất bằng IM khi và chỉ khi $H \equiv M(2; 1)$.

Khi đó $d = IM = \frac{\sqrt{29}}{4} \Leftrightarrow a = 29, b = 4$. Vậy $P = a^2 + b^2 = 857$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 281. Cho hàm số $y = f(x) = x^2 + 6x + 5$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(f(x))$, với $-3 \leq x \leq 0$. Tính tổng $S = m + M$.

- A. $S = 1$. B. $S = 56$. C. $S = 57$. D. $S = 64$.

Lời giải.

Ta có $f(f(x)) = f^2(x) + 6f(x) + 5$. Đặt $t = f(x)$, xét hàm $t = f(x) = x^2 + 6x + 5$ trên $[-3; 0]$ Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-3	0
$t = x^2 + 6x + 5$	$+\infty$	-4	5

Từ bảng biến thiên ta được: $-4 \leq t \leq 5$.

Khi đó hàm số được viết lại: $f(t) = t^2 + 6t + 5$. Lập bảng biến thiên của hàm $f(t) = t^2 + 6t + 5$, trên $[-4; 5]$.

t	-4	-3	5
$f(t) = t^2 + 6t + 5$	-3	-4	60

Ta được $m = -4$, $M = 60$. Vậy $S = 56$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 282. Cho Parabol $y = mx^2 - 2mx + 2$ ($m \neq 0$). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng -6 trên đoạn $[-2; 3]$. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

- A. 8. B. 7. C. 2. D. 4.

(chulinhchitihon@gmail.com)

Lời giải.

Tọa độ đỉnh của Parabol $I(1; 2 - m)$.

Nếu $m > 0$ khi đó giá trị nhỏ nhất là $y(1) = 2 - m \Rightarrow 2 - m = -6 \Rightarrow m = 8$ (thỏa mãn).

Nếu $m < 0$ khi đó $y(-2) = 8m + 2$, $y(3) = 3m + 2$ vì $8m + 2 < 3m + 2 \forall m < 0 \Rightarrow \min y = 8m + 2$.

YCBT $\Rightarrow 8m + 2 = -6 \Leftrightarrow m = -1$ (thỏa mãn). Vậy $S = -1; 8$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 283. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = 4x^2 - 4mx + m^2 - 2m$ trên đoạn $[-2; 0]$ bằng 3. Tính tổng T các phần tử của S .

- A. $T = -\frac{3}{2}$. B. $T = \frac{1}{2}$. C. $T = \frac{9}{2}$. D. $T = \frac{3}{2}$.

(Nguyễn Hoàng Phú An-Facebook: Phu An)

Lời giải.

Parabol có hệ số theo x^2 là $4 > 0$ nên bề lõm hướng lên. hoành độ đỉnh $x_I = \frac{m}{2}$.

Nếu $\frac{m}{2} < -2 \Leftrightarrow m < -4$ thì $x_I < -2 < 0$. Suy ra $f(x)$ tăng trên đoạn $[-2; 0]$.

Do đó $\min_{[-2; 0]} f(x) = f(-2) = m^2 + 6m + 16$.

Theo yêu cầu bài toán: $m^2 + 6m + 16 = 3$ (vô nghiệm).

Nếu $-2 \leq \frac{m}{2} \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 0$ thì $x_I \in [0; 2]$. Suy ra $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại đỉnh.

Do đó $\min_{[-2; 0]} f(x) = f(\frac{m}{2}) = -2m$. Theo yêu cầu bài toán $-2m = 3 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$ (thỏa mãn $-4 \leq m \leq 0$).

Nếu $\frac{m}{2} > 0 \Leftrightarrow m > 0$ thì $x_I > 0 > -2$. Suy ra $f(x)$ giảm trên đoạn $[-2; 0]$.

Do đó $\min_{[-2; 0]} f(x) = f(0) = m^2 - 2m$. Theo yêu cầu bài toán: $m^2 - 2m = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 3. \end{cases}$

Vậy $S = \left\{-\frac{3}{2}; 3\right\} \Rightarrow T = -\frac{3}{2} + 3 = \frac{3}{2}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 284. Xét các số thực a, b, c sao cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm thuộc $[0; 1]$.

Giá trị lớn nhất của biểu thức $T = \frac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)}$ là

- A. $T_{\max} = 3$. B. $T_{\max} = \frac{3}{2}$. C. $T_{\max} = \frac{35}{8}$. D. $T_{\max} = \frac{8}{3}$.

(Lê Cẩm Hoa-lecamhoa474@gmail.com)

Lời giải.

Với các số thực a, b, c làm cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm thuộc $[0; 1]$.

Suy ra $a \neq 0$. Gọi hai nghiệm đó là x_1, x_2 , theo định lý Viet ta được $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } T &= \frac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)} = \frac{\frac{(a-b)(2a-b)}{a^2}}{\frac{a-b+c}{a}} = \frac{\left(1 - \frac{b}{a}\right)\left(2 - \frac{b}{a}\right)}{1 - \frac{b}{a} + \frac{c}{a}} = \frac{(1+x_1+x_2)(2+x_1+x_2)}{1+x_1+x_2+x_1x_2} \\ &= \frac{2(1+x_1+x_2+x_1x_2)+x_1+x_2+x_1^2+x_2^2}{1+x_1+x_2+x_1x_2} = 2 + \frac{x_1+x_2+x_1^2+x_2^2}{1+x_1+x_2+x_1x_2}. \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x_1^2 \leq x_1x_2 \\ x_2^2 \leq 1 \end{cases} \quad \text{Suy ra } 1+x_1+x_2+x_1x_2 \geq 1+x_1+x_2+x_1^2 \geq x_1+x_2+x_1^2+x_2^2.$$

$$\Rightarrow \frac{x_1+x_2+x_1^2+x_2^2}{1+x_1+x_2+x_1x_2} \leq \frac{x_1+x_2+x_1^2+x_2^2}{1+x_1+x_2+x_1^2} \leq \frac{x_1+x_2+x_1^2+x_2^2}{x_1+x_2+x_1^2+x_2^2} = 1. \text{ Suy ra } T \leq 2+1=3.$$

Vậy $T_{\max} = 3$, dấu đẳng thức xảy ra khi $x_1 = x_2 = 1$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 285. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = f(x) = |x^2 - 3x + 2| + mx$ có giá trị nhỏ nhất bằng -1 . Tổng các phần tử của tập hợp S bằng

A. 6.

B. $\frac{5}{2} + 2\sqrt{3}$.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. $\frac{3}{2} + 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$y = f(x) = \begin{cases} x^2 + (m-3)x + 2 & \text{khi } x \leq 1 \vee x \geq 2 \quad (P_1) \\ -x^2 + (m+3)x - 2 & \text{khi } 1 < x < 2. \quad (P_2) \end{cases}$$

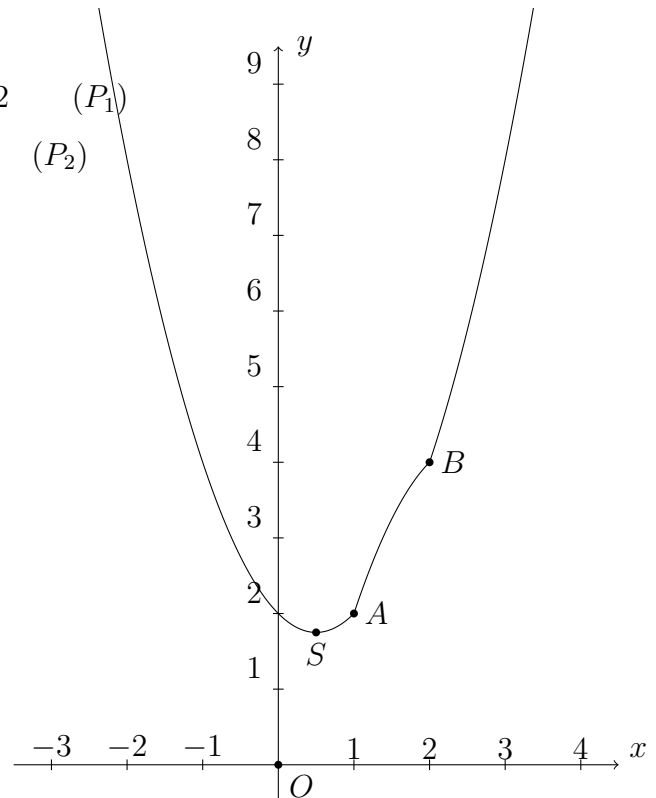
Hai parabol (P_1) và (P_2) cắt nhau tại $A(1; m)$, $B(2; 2m)$.

Parabol (P_1) có đỉnh $S\left(\frac{3-m}{2}; -\frac{(m-3)^2}{4} + 2\right)$.

Trường hợp 1: $\frac{3-m}{2} \leq 1 \vee \frac{3-m}{2} \geq 2 \Leftrightarrow m \leq -1 \vee m \geq 1$.

Khi đó

$$\begin{aligned} \min y = y_S = -1 &\Leftrightarrow -\frac{(m-3)^2}{4} + 2 = -1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 + 2\sqrt{3} \\ m = 3 - 2\sqrt{3}. \end{cases} \quad (\text{loại}) \end{aligned}$$

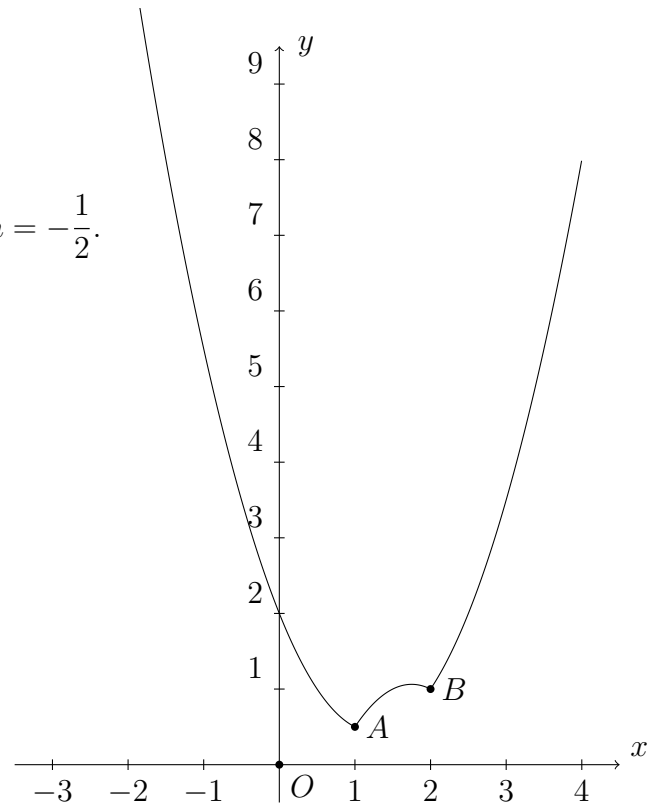


Trường hợp 2: $1 < \frac{3-m}{2} < 2 \Leftrightarrow -1 < m < 1$.

Khi đó

$$\min y = \min \{y_A; y_B\} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m \leq 0 \\ 2m = -1 \\ 0 < m < 1 \\ m = -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

Nhận xét: Do $\min y = \min \left\{ f(1); f(2); f\left(\frac{3-m}{2}\right) \right\}$ nên ta có thể giải bài toán bằng cách lần lượt cho $f(1)$, $f(2)$, $f\left(\frac{3-m}{2}\right)$ bằng -1 để tìm m , sau đó kiểm tra lại xem nó có phải là $\min y$ không.



Chọn đáp án **B**

□

Câu 286. Gọi M , m lần lượt là GTLN và GTNN của hàm số $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x}{(x^2 + 1)^2}$. Tìm số phần tử của tập hợp $\mathbb{Z} \cap [m; M]$.

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2}$. Đặt $t = \frac{x}{x^2 + 1}$.

Vì $x^2 + 1 \geq 2|x| \Rightarrow -\frac{x^2 + 1}{2} \leq x \leq \frac{x^2 + 1}{2} \Rightarrow \frac{-1}{2} \leq \frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow t \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Xét hàm $g(t) = t^2 + t$ với $t \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Dễ thấy hàm số đồng biến trên $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Nên $m = g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$, $M = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

Vậy $\mathbb{Z} \cap [m; M] = \{0\}$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 287. Cho hàm số $y = x^2 - 2x$ có đồ thị (C) . Giả sử $M(x_0; y_0)$ thuộc (C) sao cho khoảng cách từ điểm M tới đường thẳng $d: y = 4x - 15$ là nhỏ nhất. Tính $S = x_0 + y_0$.

A. 4.

B. 6.

C. 5.

D. 7.

Lời giải.

Gọi Δ là đường thẳng tiếp xúc với đồ thị (C) sao cho Δ song song với đường thẳng $d: y = 4x - 15$. Δ có phương trình là $y = 4x + c$, $c \neq -15$. Do Δ tiếp xúc với đồ thị (C) nên phương trình hoành độ giao điểm

$$x^2 - 6x - c = 0$$

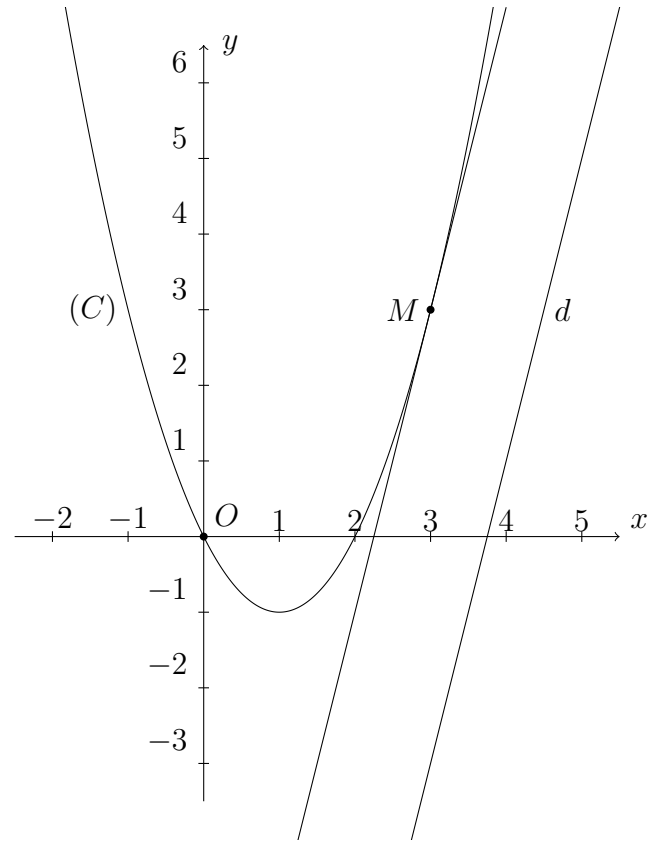
có nghiệm duy nhất.

Ta có $\Delta = 9 + c = 0 \Leftrightarrow c = -9$.

Vậy Δ có phương trình là $y = 4x - 9$.

Ta có $d(M, d) = d(M, \Delta) + d(\Delta, d)$. Khi đó với yêu cầu bài toán thì $d(M, d)$ nhỏ nhất khi $M \in \Delta$.

Giao điểm của Δ và (C) là $(3; 3)$. Suy ra $M(3; 3)$ là điểm cần tìm. Do đó $S = x_0 + y_0 = 6$.



Chọn đáp án **B**

□

Câu 288. Cho hàm số $y = x^2 - 2(m^2 + 1)x + m$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-2; 0]$ lần lượt là $y_1; y_2$. Tính tổng các giá trị của m tìm được, biết $y_1 + 11y_2 = 0$.

A. -1.

B. -3.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

Đặt $f(x) = x^2 - 2(m^2 + 1)x + m$.

Gọi $I(x_I; y_I)$ là tọa độ đỉnh của parabol $\Rightarrow x_I = m^2 + 1 \geq 1$. Vậy $x_I \notin [-2; 0]$.

Ta có hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; m^2 + 1) \Rightarrow$ hàm số cũng nghịch biến trên $(-2; 0)$.

Vậy $y_1 = f(-2) = 4m^2 + m + 8$ và $y_2 = f(0) = m$.

Theo bài ra $y_1 + 11y_2 = 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 12m + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -2. \end{cases}$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 289. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $|f(x)| \leq 1, \forall x \in [-1; 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = a^2 + b^2 + c^2$.

A. $\max T = 1$.

B. $\max T = 3$.

C. $\max T = 5$.

D. $\max T = 9$.

Lời giải.

Ta có $|f(1) - f(0)| = |a + b| \leq 2 \Rightarrow (a + b)^2 \leq 4$.

$|f(-1) - f(0)| = |a - b| \leq 2 \Rightarrow (a - b)^2 \leq 4$.

Suy ra $(a + b)^2 + (a - b)^2 \leq 8 \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2) \leq 8 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq 4$.

Ta lại có $|f(0)| = |c| \leq 1 \Rightarrow c^2 \leq 1$.

Do đó, $a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$. Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} |a+b|=2 \\ |a-b|=2 \\ |c|=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \{-2; 2\} \\ b=0 \\ c \in \{-1; 1\} \end{cases} \Leftrightarrow (a; b; c) \in \{(-2; 0; -1), (-2; 0; 1), (2; 0; -1), (2; 0; 1)\}.$$

Thử lại, chỉ có $(a; b; c) \in \{(-2; 0; 1), (-2; 0; 1)\}$ thỏa mãn $|f(x)| \leq 1, \forall x \in [-1; 1]$.

Vậy $\max T = 5$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 290. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x^2 + \sqrt{5+4x-x^2} = 4x + m - 103$ có nghiệm?

A. 7.

B. 8.

C. 9.

D. 6.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{5+4x-x^2} = \sqrt{9-(x-2)^2}$ nên $0 \leq t \leq 3$ hay $t \in [0; 3]$.

Ta được phương trình $-t^2 + t + 108 = m$.

Khi đó xét $y = f(t) = -t^2 + t + 108$ với $t \in [0; 3]$

x	0	$\frac{1}{2}$	3
y	108	$\frac{433}{4}$	102

Từ bảng biến thiên trên ta thấy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $102 \leq m \leq \frac{433}{4}$ nên có 7 các số nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án **A** □

Câu 291. Cho phương trình $(x^2 - 2x + m)^2 - 2x^2 + 3x - m = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-10; 10]$ để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt.

A. 11.

B. 12.

C. 9.

D. 13.

Lời giải.

Biến đổi phương trình về dạng:

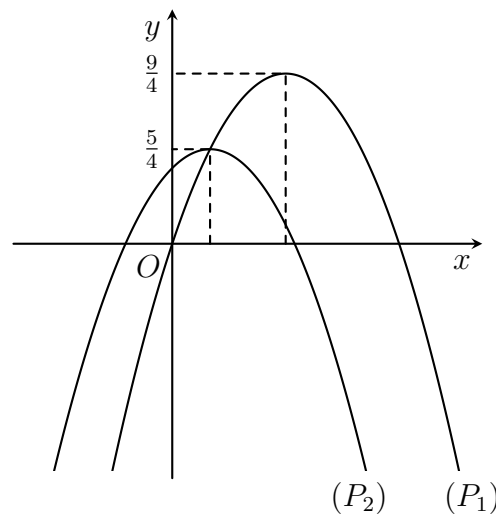
$$(x^2 - 2x + m)^2 - 2(x^2 - 2x + m) + m = x.$$

$$\text{Đặt } a = x^2 - 2x + m \text{ ta có hệ: } \begin{cases} a = x^2 - 2x + m \\ x = a^2 - 2a + m. \end{cases}$$

$$\text{Từ hệ phương trình có: } (x-a)(x+a-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x + a - 1 = 0. \end{cases}$$

$$\text{Hay có: } \begin{cases} x = x^2 - 2x + m \\ x + x^2 - 2x + m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -x^2 + 3x \\ m = -x^2 + x + 1. \end{cases}$$

Vẽ trên cùng một đồ thị các parabol $(P_1): y = -x^2 + 3x$, $(P_2): y = -x^2 + x + 1$ ta có $m \leq \frac{5}{4}$.



Vậy có 12 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu của bài toán

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 292. Có tất cả bao nhiêu giá trị m nguyên để phương trình $\sqrt{9-x} = \sqrt{3m-x^2+9x} - \sqrt{x}$ có đúng bốn nghiệm phân biệt?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. Không tồn tại.

Lời giải.

Đk $0 \leq x \leq 9$

Ta có: $\sqrt{9-x} = \sqrt{3m-x^2+9x} - \sqrt{x} (*) \Leftrightarrow \sqrt{9-x} + \sqrt{x} = \sqrt{3m-x^2+9x}$

$\Leftrightarrow 9 + 2\sqrt{9x-x^2} = 3m - x^2 + 9x \Leftrightarrow -(-x^2+9x) + 9 + 2\sqrt{9x-x^2} = 3m.$

Đặt: $t = \sqrt{9x-x^2} \left(0 \leq \sqrt{9x-x^2} = \sqrt{\frac{81}{4} - \left(\frac{9}{2}-x\right)^2} \leq \frac{9}{2} \right) \Rightarrow 0 \leq t \leq \frac{9}{2}.$

Phương trình (*) trở thành: $-t^2 + 2t + 9 = 3m \quad (1)$

Với $t = \sqrt{9x-x^2} \Rightarrow x^2 - 9x + t^2 = 0$ có $\Delta = 81 - 4t^2 > 0, \forall t \in \left[0; \frac{9}{2}\right).$

$\Rightarrow$ Nếu mỗi giá trị của $t \in \left[0; \frac{9}{2}\right)$ thì ta có 2 giá trị phân biệt của x tương ứng.

Như vậy: phương trình (*) có 4 nghiệm phân biệt khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thuộc $\left[0; \frac{9}{2}\right).$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(t) = -t^2 + 2t + 9$ trên $\left[0; \frac{9}{2}\right).$

t	0	1	$\frac{9}{2}$
$f(t)$	9	10	$\frac{9}{4}$

Khi đó ta có: $9 \leq 3m < 10 \Leftrightarrow 3 \leq m < \frac{10}{3}$ mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 3.$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 293. Cho $(P) y = 2x^2 - (m + 4)x - 2m + 1$ và đường thẳng $(d): y = -3x - 3m$, với m là tham số. Biết (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trọng tâm tam giác OAB thuộc đường thẳng $(\Delta): 6x - 2y + 2019 = 0$. Khi đó:

- A. $3m + 2020 = 0$. B. $3m - 2020 = 0$. C. $6m + 2021 = 0$. D. $6m - 2021 = 0$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$2x^2 - (m + 4)x - 2m + 1 = -3x - 3m \Leftrightarrow 2x^2 - (m + 1)x + m + 1 = 0.$$

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta = (m + 1)^2 - 8(m + 1) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m - 7 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 7. \end{cases}$$

Khi đó, phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 .

Tọa độ hai điểm A, B lần lượt là $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.

Gọi G là trọng tâm của tam giác OAB khi đó

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_1 + x_2}{3} = \frac{m + 1}{6} \\ y_G = \frac{y_1 + y_2}{3} = \frac{-3x_1 - 3m - 3x_2 - 3m}{3} = \frac{-3(x_1 + x_2) - 6m}{3} = -(x_1 + x_2) - 2m = -\frac{m + 1}{2} - 2m. \end{cases}$$

Mà G thuộc $(\Delta): 6x - 2y + 2019 = 0$ nên ta có

$$6 \cdot \frac{m + 1}{6} - 2 \left(-\frac{m + 1}{2} - 2m \right) + 2019 = 0 \Leftrightarrow 6m + 2021 = 0 \text{ (thỏa mãn).}$$

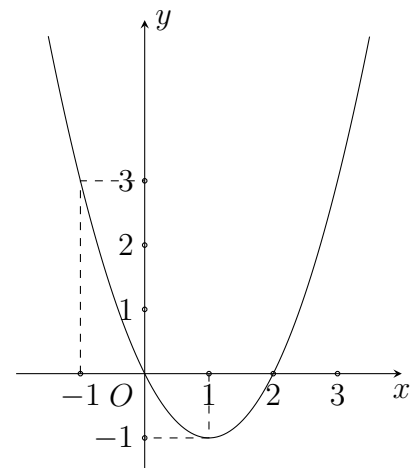
Chọn đáp án **C**

□

Câu 294.

Cho hàm số bậc hai $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tổng các giá trị nguyên của m để phương trình $f(f(x)) = m$ có bốn nghiệm phân biệt là

- A. $S = 5$. B. $S = 3$. C. $S = 6$. D. $S = +\infty$.

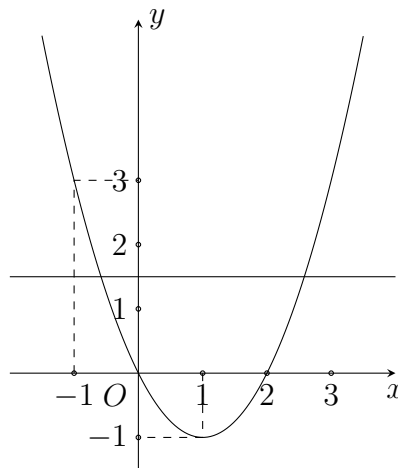


Lời giải.

Số nghiệm của phương trình $f(f(x)) = m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(f(x))$ và đường thẳng $y = m$.

Dựa vào đồ thị ta có

- Nếu $m < -1$ thì phương trình vô nghiệm.
- Nếu $m = -1$ thì phương trình tương đương $f(x) = 1$, suy ra phương trình đã cho có hai nghiệm.
- Nếu $-1 < m < 3$ thì phương trình tương đương với $f(x) = y_1 \in (-1; 1)$ hoặc $f(x) = y_2 > 1$.



Từ đồ thị suy ra phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

- Nếu $m = 3$ thì phương trình tương đương với $f(x) = -1$ hoặc $f(x) = y_2 > 1$. Từ đồ thị suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.
- Nếu $m > 3$ thì phương trình tương đương $f(x) = y_1 < -1$ hoặc $f(x) = y_2 > 1$. Từ đồ thị suy ra phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình $f(f(x)) = m$ có 4 nghiệm phân biệt khi chỉ khi $-1 < m < 3$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 295. Biết rằng $y = ax + b$, $(a, b \in \mathbb{R})$ là tiếp tuyến chung của hai parabol $y = x^2 + 4x + 8$ và $y = x^2 + 8x + 4$. Khi đó giá trị của biểu thức $T = 2018a + 2019b$ bằng

- A. $T = 24224$. B. $T = 24220$. C. $T = 24022$. D. $T = 24242$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = ax + b$ và parabol $y = x^2 + 4x + 8$ là

$$x^2 + 4x + 8 = ax + b \Leftrightarrow x^2 - (a - 4)x + 8 - b = 0. \quad (1)$$

Đường thẳng tiếp xúc với parabol khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow (a - 4)^2 - 4(8 - b) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 8a + 4b = 16. \quad (*)$$

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = ax + b$ và parabol $y = x^2 + 8x + 4$ là

$$x^2 + 8x + 4 = ax + b \Leftrightarrow x^2 - (a - 8)x + 4 - b = 0. \quad (2)$$

Đường thẳng tiếp xúc với parabol khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow (a - 8)^2 - 4(4 - b) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 16a + 4b = -48. \quad (**)$$

$$\text{Kết hợp } (*), (**) \text{ ta có hệ } \begin{cases} a^2 - 8a + 4b = 16 \\ a^2 - 16a + 4b = -48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 8a + 4b = 16 \\ 8a = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 4. \end{cases}$$

Vậy $T = 2018 \cdot 8 + 2019 \cdot 4 = 24220$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 296. Các parabol $(P_m): y = mx^2 - (4m - 1)x + 4m - 1$ ($m \neq 0$) luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định d khi m thay đổi. Hỏi d đi qua điểm nào trong các điểm sau

A. $(0; 0)$.B. $(-2; 0)$.C. $(-1; 0)$.D. $(3; 2)$.**Lời giải.**

Cách 1.

Gọi $d: y = ax + b$ là đường thẳng mà họ parabol luôn tiếp xúc.

Xét phương trình tương giao

$$mx^2 - (4m - 1)x + 4m - 1 = ax + b \Leftrightarrow mx^2 - (4m - 1 - a)x + 4m - 1 - b = 0.$$

Khi đó phương trình tương giao phải có nghiệm kép với mọi m

$$\Leftrightarrow \Delta = (4m - 1 - a)^2 - 4m(4m - 1 - b) = 0 \quad \forall m \neq 0$$

$$\Leftrightarrow [2(a - 1) + (1 + b)]m + (a - 1)^2 = 0 \quad \forall m \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2(a - 1) + 1 + b = 0 \\ a - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1. \end{cases}$$

Vậy $d: y = x - 1$.Suy ra đường thẳng d đi qua điểm $(3; 2)$.

Cách 2. (Trắc nghiệm)

Ta có $(P_m): y = mx^2 - (4m - 1)x + 4m - 1 = m(x - 2)^2 + x - 1$.Nên phương trình đường thẳng luôn tiếp xúc với họ parabol là $d: y = x - 1$.(Chú ý: Mẹo trắc nghiệm thay $m = 0$ vào phương trình họ parabol ta tìm được phương trình đường thẳng $d: y = x - 1$.)Chọn đáp án **D** □**Câu 297.** Biết parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ nhận ba đường thẳng $y = x - 5$, $y = -3x + 3$, $y = 3x - 12$ làm các tiếp tuyến. Khi đó giá trị của $M = ab + bc$ làA. -25 .B. -16 .C. -1 .D. 25 .**Lời giải.**

Theo bài ra ta có các phương trình sau đây đều có nghiệm kép

$$ax^2 + bx + c = x - 5 \Leftrightarrow ax^2 + (b - 1)x + c + 5 = 0.$$

$$ax^2 + bx + c = -3x + 3 \Leftrightarrow ax^2 + (b + 3)x + c - 3 = 0.$$

$$ax^2 + bx + c = 3x - 12 \Leftrightarrow ax^2 + (b - 3)x + c + 12 = 0.$$

Suy ra ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} (b - 1)^2 - 4a(c + 5) = 0 \\ (b + 3)^2 - 4a(c - 3) = 0 \\ (b - 3)^2 - 4a(c + 12) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 2b + 1 - 4ac - 20a = 0 & (1) \\ b^2 + 6b + 9 - 4ac + 12a = 0 & (2) \\ b^2 - 6b + 9 - 4ac - 48a = 0 & (3) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) suy ra $8b + 8 + 32a = 0$.Từ (2) và (3) suy ra $12b + 60a = 0$.Vậy ta có hệ sau $\begin{cases} 4a + b = -1 \\ 5a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = -5$.Thay lại vào phương trình (1) ta có $c = 4$.Vậy $M = ab + bc = -25$.Chọn đáp án **A** □

Câu 298. Các parabol của họ $(P_m): y = mx^2 + 2(m+1)x + m+1$ ($m \neq 0$) luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định có phương trình là

- A. $2x + y + 1 = 0$. B. $2x - y + 1 = 0$. C. $x + 2y + 1 = 0$. D. $x - 2y + 1 = 0$.

Lời giải.

Cách 1.

$$y = mx^2 + 2(m+1)x + m+1 = m(x+1)^2 + 2x + 1 \Rightarrow d: y = 2x + 1.$$

Cách 2.

Gọi $d: y = ax + b$ là đường thẳng cần tìm.

Theo bài ra ta có $mx^2 + 2(m+1)x + m+1 = ax + b$ có nghiệm kép với mọi $m \neq 0$.

$$\Leftrightarrow mx^2 + (2m+2-a)x + m+1-b = 0 \text{ có nghiệm kép với mọi } m \neq 0.$$

$$\Delta = (2m+2-a)^2 - 4m(m+1-b) = 0, \forall m \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 + 4 + a^2 + 8m - 4ma - 4a - 4m^2 - 4m + 4bm = 0, \forall m \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 4m(1-a+b) + 4 + a^2 - 4a = 0, \forall m \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-a+b=0 \\ 4+a^2-4a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1. \end{cases}$$

Vậy $d: y = 2x + 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 299. Cho $(P_m): y = x^2 - (2m+1)x + m^2 + 2$ luôn tiếp xúc với đường thẳng Δ cố định và $\Delta_m: y = (2m-1)x + m^2 + 4$ luôn tiếp xúc với một (P) cố định. Khi đó Δ cắt (P) tại A, B thì độ dài AB là

- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.

Lời giải.

$$\text{Xét } \Delta_m: y = m^2 + 2mx + x^2 - x^2 - x + 4 \Leftrightarrow y = (x+m)^2 - x^2 - x + 4.$$

$$\text{Do đó } \Delta_m \text{ luôn tiếp xúc với parabol } (P): y = -x^2 - x + 4.$$

$$(P_m): y = x^2 - (2m+1)x + m^2 + 2 \Leftrightarrow y = (x-m)^2 - x + 2.$$

$$\text{Suy ra } (P_m) \text{ luôn tiếp xúc với đường thẳng } \Delta: y = -x + 2.$$

$$\text{Xét phương trình hoành độ giao điểm } -x^2 - x + 4 = -x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \Rightarrow y = 2 - \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \Rightarrow y = 2 + \sqrt{2}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow A(\sqrt{2}; 2 - \sqrt{2}), B(-\sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}).$$

$$\Rightarrow AB = 4.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 300. Cho Parabol $(P): y = -mx^2 + 2m^2x + m^2 - 2m$ ($m \neq 0$). Tập hợp đỉnh của Parabol (P) là đường cong (C) cắt trục hoành tại điểm có tọa độ

- A. $(0; 0), (-2; 0)$. B. $(0; 0), (-2; 0), (1; 0)$.
C. $(-2; 0), (-1; 0), (0; 0)$. D. $(-2; 0), (1; 0)$.

Lời giải.

Ta có tọa độ đỉnh I của Parabol là

$$\begin{cases} x_I = m \\ y_I = -m^3 + 2m^3 + m^2 - 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = m \\ y_I = m^3 + m^2 - 2m \end{cases} \Rightarrow y_I = x_I^3 + x_I^2 - 2x_I.$$

Do $m \neq 0$ nên $x_I \neq 0$.

Suy ra tập hợp đỉnh của Parabol (P) là $(C) : y = x^3 + x^2 - 2x$ với $(x \neq 0)$.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm $(C) \cap Ox$ là

$$x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 1. \end{cases}$$

Do $x \neq 0$ nên $(C) \cap Ox = \{(-2; 0), (1; 0)\}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 301. Cho Parabol (P) có phương trình $y = 4x^2 + 1$. Gọi I là đỉnh của (P) ; A, B là hai điểm phân biệt thuộc (P) và không trùng với I sao cho IA vuông góc với IB . Biết rằng tập hợp trung điểm N của đoạn AB khi A, B thay đổi là một parabol có phương trình $y = mx^2 + n$. Tính $P = m^2 + 16n^2$.

A. $P = 98$.

B. $P = 89$.

C. $P = 97$.

D. $P = 79$.

Lời giải.

Ta có đỉnh của (P) là $I(0; 1)$.

Gọi A là điểm thuộc (P) nên $A(a; 4a^2 + 1)$.

Do IA qua $I(0; 1)$ và $A(a; 4a^2 + 1)$ nên IA có phương trình $y = 4ax + 1$.

Đường thẳng IB vuông góc với IA nên phương trình IB có dạng $y = -\frac{1}{4a}x + C$.

Do IB qua điểm $I(0; 1)$ nên $C = 1$.

Do đó ta có phương trình đường thẳng $IB: y = -\frac{1}{4a}x + 1 \Leftrightarrow x + 4ay - 4a = 0$.

Tọa độ của B là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} y = 4x^2 + 1 \\ x + 4ay - 4a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow B\left(\frac{-1}{16a}; \frac{1}{64a^2} + 1\right)$.

N là trung điểm của AB , suy ra $N\left(\frac{a}{2} - \frac{1}{32a}; 2a^2 + \frac{1}{128a^2} + 1\right)$.

Nhận xét: Theo giả thiết tập hợp N là một parabol có dạng $y = mx^2 + n$.

Từ đó ta xét $x_N^2 = \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{32a}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{1}{32} + \frac{1}{1024a^2}$.

Do đó $y_N = 2a^2 + \frac{1}{128a^2} + 1 = 8\left(\frac{a^2}{4} - \frac{1}{32} + \frac{1}{1024a^2}\right) + \frac{5}{4}$.

Vậy tập hợp của điểm N là Parabol $y = 8x^2 + \frac{5}{4} \Rightarrow \begin{cases} m = 8 \\ n = \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow P = 89$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 302. Biết rằng đường thẳng $y = mx$ luôn cắt parabol $y = 2x^2 + x - 3$ tại hai điểm phân biệt A và B , khi đó tập hợp trung điểm của đoạn thẳng AB là

A. Đường parabol $y = 4x^2 + 1$.

B. Đường parabol $y = 4x^2 + x$.

C. Đường thẳng $y = 4x + 1$.

D. Đường thẳng $y = 4x + 4$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường:

$$2x^2 + x - 3 = mx \Leftrightarrow 2x^2 + (1 - m)x - 3 = 0.$$

Vì $\Delta = m^2 - 2m + 25$ nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{m - 1}{4} \\ y = mx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4x + 1 \\ y = mx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4x + 1 \\ y = 4x^2 + x. \end{cases}$$

Do đó, tập hợp trung điểm của đoạn thẳng AB là đường parabol $y = 4x^2 + x$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 303. Tìm tập các giá trị của tham số m để phương trình $2x - \sqrt{x - 3} - m = 0$ có nghiệm.

- A. $m \geq 6$. B. $\frac{47}{8} \leq m < 6$. C. $m \geq \frac{47}{8}$. D. $\frac{47}{8} < m \leq 6$.

Lời giải.

Xét phương trình $2x - \sqrt{x - 3} - m = 0$ (1)

Đặt $t = \sqrt{x - 3}, t \geq 0$ khi đó $t^2 = x - 3 \Leftrightarrow x = t^2 + 3$.

Vậy ta có $2t^2 - t = m - 6$ (2).

Xét hàm số $f(t) = 2t^2 - t, (t \geq 0)$.

Bảng biến thiên

t	0	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$f(t)$	0	$-\frac{1}{8}$	$+\infty$

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm $t \geq 0$.

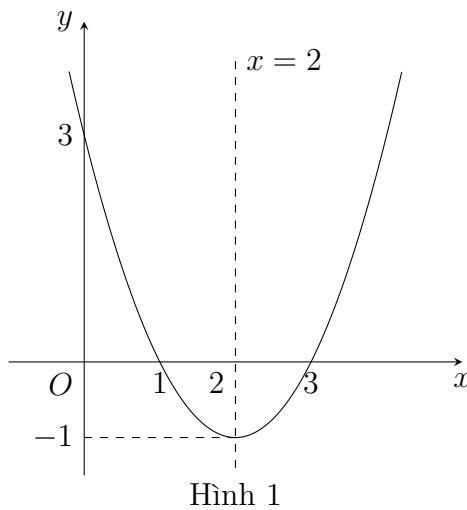
Từ bảng biến thiên suy ra $m - 6 \geq -\frac{1}{8} \Leftrightarrow m \geq \frac{47}{8}$.

Chọn đáp án **(C)** □

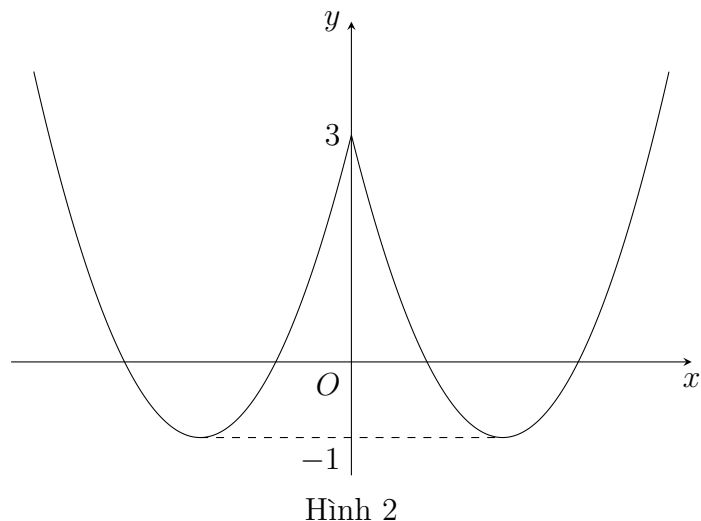
Câu 304. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^2 - 4|x| + 3 = m$ có 4 nghiệm phân biệt.

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Lời giải.



Hình 1



Hình 2

Phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = x^2 - 4|x| + 3$ và đường thẳng $y = m$ có 4 điểm chung phân biệt.

Từ đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ hình 1, ta suy ra đồ thị của hàm số $y = x^2 - 4|x| + 3$ như ở hình 2. Từ đó, ta suy ra tất cả các giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $-1 < m < 3$. Có 3 giá trị nguyên của tham số m .

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 305. Biết tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình $(x + 1)(x - 3) + \sqrt{8 + 2x - x^2} = 0$ có nghiệm là đoạn $[a; b]$. Tính $T = b - a$.

A. $T = \frac{25}{8}$.

B. $T = \frac{21}{8}$.

C. $T = 2$.

D. $T = \frac{17}{8}$.

Lời giải.

Điều kiện $-2 \leq x \leq 4$.

Đặt $t = \sqrt{8 + 2x - x^2} = \sqrt{9 - (x - 1)^2} \leq 3 \Rightarrow t \in [0; 3]$.

Phương trình đã cho trở thành $-t^2 + t + 5 = 2m$ (1).

Phương trình đã cho có nghiệm khi (1) có nghiệm $t \in [0; 3]$.

Xét hàm số $f(t) = -t^2 + t + 5$ trên đoạn $[0; 3]$.

Bảng biến thiên

t	0	$\frac{1}{2}$	3
$f(t)$	5	$\frac{21}{4}$	-1

Phương trình $f(t) = 2m$ có nghiệm khi $-1 \leq 2m \leq \frac{21}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{21}{8} \Rightarrow b - a = \frac{25}{8}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 306. Trục đối xứng của parabol $y = -2x^2 + 5x + 3$ là đường thẳng

A. $x = \frac{5}{2}$.

B. $x = -\frac{5}{2}$.

C. $x = \frac{5}{4}$.

D. $x = -\frac{5}{2}$.

Lời giải.

Ta có $-\frac{b}{2a} = \frac{5}{4}$ nên $x = \frac{5}{4}$ là trục đối xứng.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 307. Trục đối xứng của parabol $y = -2x^2 - 4x + 3$ là đường thẳng nào sau đây?

- A. $x = 1$. B. $x = -1$. C. $x = 2$. D. $x = -2$.

Lời giải.

Ta có $-\frac{b}{2a} = -1$ nên $x = -1$ là trục đối xứng.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 308. Đỉnh của parabol $y = \frac{2(x+2)^2 + 9}{-3}$ là điểm nào sau đây?

- A. $I(-2; 9)$. B. $I(2; 9)$. C. $I(-2; 3)$. D. $I(-2; -3)$.

Lời giải.

Dễ thấy hàm số đạt GTLN bằng -3 khi $x = -2$ do đó đỉnh của parabol $y = \frac{2(x+2)^2 + 9}{-3}$ là $I(-2; -3)$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 309. Xác định tọa độ tất cả các giao điểm của parabol $(P) : y = x^2 + 4x$ và đường thẳng $y = 3x + 6$.

- A. $(2; 12)$ và $(-3; -3)$. B. $(-2; 0)$ và $(3; 15)$. C. $(2; 12)$. D. $(3; 15)$.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 + 4x = 3x + 6 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = 12 \\ x = -3 \Rightarrow y = -3 \end{cases}$. Vậy

tọa độ hai giao điểm là $(2; 12)$ và $(-3; -3)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 310. Xác định tọa độ đỉnh I và trục đối xứng của đồ thị hàm số $y = x^2 - 5x + 4$.

- A. Đỉnh $I\left(-\frac{5}{2}; -\frac{9}{4}\right)$, trục đối xứng là $x = -\frac{5}{2}$. B. Đỉnh $I\left(\frac{5}{2}; -\frac{9}{4}\right)$, trục đối xứng là $x = -\frac{5}{2}$.
C. Đỉnh $I\left(-\frac{5}{2}; -\frac{9}{4}\right)$, trục đối xứng là $x = \frac{5}{2}$. D. Đỉnh $I\left(\frac{5}{2}; -\frac{9}{4}\right)$, trục đối xứng là $x = \frac{5}{2}$.

Lời giải.

Ta có $x_I = -\frac{-5}{2 \cdot 1} = \frac{5}{2}$; $y_I = -\frac{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}{4 \cdot 1} = -\frac{9}{4}$. Suy ra trục đối xứng là $x = \frac{5}{2}$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 311. Đồ thị của hàm số nào sau đây nhận trục tung làm trục đối xứng?

- A. $y = x^2 - 3x + 2$. B. $y = 2x^2 + 4$. C. $y = 3x^2 + 2x$. D. $y = 4x^2 - x + 1$.

Lời giải.

Trong các hàm số trên, chỉ có $y = 2x^2 + 4$ là hàm số chẵn, do đó đồ thị của nó nhận trục tung làm trục đối xứng.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 312. Cho hàm số $y = x^2 + mx + 2$. Tìm m để đồ thị (P) của hàm số qua điểm $M(-1; 0)$.

- A. $m = 1$. B. $m = 2$. C. $m = 3$. D. $m = 4$.

Lời giải.

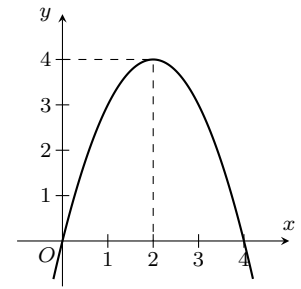
Đồ thị qua điểm $M(-1; 0)$ nên $(-1)^2 + m(-1) + 2 = 0 \Leftrightarrow m = 3$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 313.

Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



- A. $y = x^2 - 3x + 2$.
- B. $y = -2x^2 + 2x + 1$.
- C. $y = -x^2 + 3x$.
- D. $y = -x^2 + 4x$.

Lời giải.

Đồ thị là một parabol nên hàm số có dạng $y = ax^2 + bx + c$. Ta thấy đồ thị đi qua các điểm $(0; 0)$, $(2; 4)$ và $(4; 0)$ nên ta có

$$\begin{cases} c = 0 \\ 4a + 2b + c = 4 \\ 16a + 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 0. \end{cases}$$

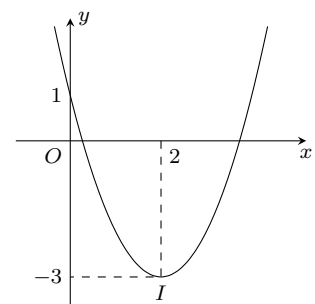
Vậy hàm số cần tìm là $y = -x^2 + 4x$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 314.

Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



- A. $y = -x^2 + 2x + 1$.
- B. $y = x^2 - 2x + 1$.
- C. $y = x^2 - 4x + 1$.
- D. $y = x^2 + 4x + 1$.

Lời giải.

Đồ thị là một parabol nên hàm số có dạng $y = ax^2 + bx + c$. Đồ thị đi qua các điểm $(0; 1)$, $(2; -3)$ và nhận đường thẳng $x = 2$ làm trục đối xứng nên ta có

$$\begin{cases} c = 1 \\ 4a + 2b + c = -3 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ 4a + 2b + c = -3 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 1. \end{cases}$$

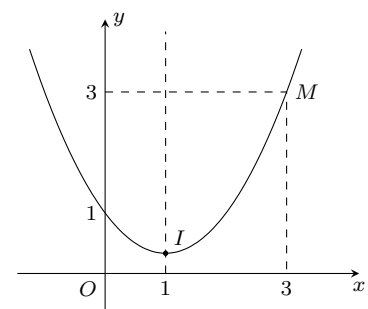
Vậy hàm số cần tìm là $y = x^2 - 4x + 1$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 315.

Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



- A. $y = \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 1$.
- B. $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 1$.
- C. $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 1$.
- D. $y = \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1$.

Lời giải.

Đồ thị là một parabol nên hàm số có dạng $y = ax^2 + bx + c$. Đồ thị đi qua các điểm $(0; 1)$, $(3; 3)$ và nhận đường thẳng $x = 1$ làm trục đối xứng nên ta có

$$\begin{cases} c = 1 \\ 9a + 3b + c = 3 \\ -\frac{b}{2a} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ 9a + 3b + c = 3 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = -\frac{4}{3} \\ c = 1. \end{cases}$$

Vậy hàm số cần tìm là $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 1$.

Chọn đáp án **(B)**

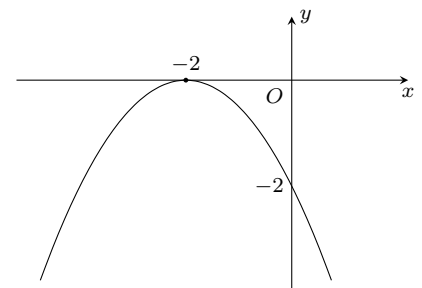
□

Câu 316.

Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây.

Hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = -\frac{1}{2}x^2 + x - 2$.
- B. $y = -\frac{1}{2}x^2 - x - 2$.
- C. $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$.
- D. $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 2$.

**Lời giải.**

Đồ thị là một parabol nên hàm số có dạng $y = ax^2 + bx + c$. Đồ thị đi qua các điểm $(0; -2)$, $(-2; 0)$ và nhận đường thẳng $x = -2$ làm trục đối xứng nên ta có

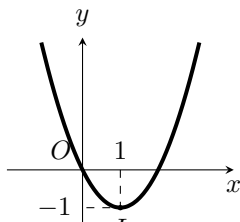
$$\begin{cases} c = -2 \\ 4a - 2b + c = 0 \\ -\frac{b}{2a} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2 \\ 4a - 2b + c = 0 \\ 4a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -2 \\ c = -2. \end{cases}$$

Vậy hàm số cần tìm là $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 2$.

Chọn đáp án **(D)**

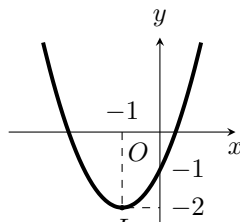
□

Câu 317. Trong các đường parabol dưới đây, đường nào là đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x - 1$?



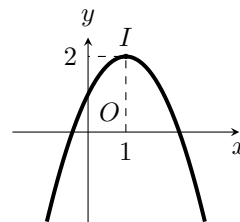
A.

Hình 1



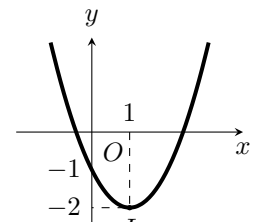
B.

Hình 2



C.

Hình 3



D.

Hình 4

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x - 1$ là một parabol có đỉnh $I(x_I; y_I)$, trong đó $x_I = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$ và $y_I = -\frac{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}{4 \cdot 1} = -2$. Vậy $I(1; -2)$.

Chọn đáp án **(D)**

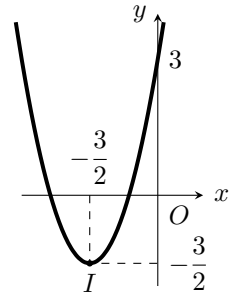
□

Câu 318.

Đường parabol ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây.

Hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = 2x^2 - 6x + 3$.
 B. $y = -2x^2 - 6x + 3$.
 C. $y = 2x^2 + 6x + 3$.
 D. $y = -2x^2 + 6x + 3$.

**Lời giải.**

Đồ thị là một parabol nên hàm số có dạng $y = ax^2 + bx + c$. Đồ thị đi qua các điểm $(0; 3)$, $(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2})$ và nhận đường thẳng $x = -\frac{3}{2}$ làm trục đối xứng nên ta có

$$\begin{cases} c = 3 \\ \frac{9}{4}a - \frac{3}{2}b + c = 0 \\ -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ \frac{9}{4}a - \frac{3}{2}b + c = -\frac{3}{2} \\ 3a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 6 \\ c = 3. \end{cases}$$

Vậy hàm số cần tìm là $y = 2x^2 + 6x + 3$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 319. Parabol $y = x^2 + 2x - 1$ đi qua điểm nào trong các điểm sau?

- A. $A(-1; 2)$. B. $B(1; 2)$. C. $C(2; -5)$. D. $D(-2; -5)$.

Lời giải.

Thay tọa độ các điểm vào công thức của parabol.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 320. Parabol $y = 2x^2 - 4x + 5$ có đỉnh là điểm nào trong các điểm sau?

- A. $I_1(-2; 21)$. B. $I_2(-1; 11)$. C. $I_3(1; 3)$. D. $I_4(2; 5)$.

Lời giải.

Đỉnh của parabol là điểm có tọa độ $I(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a})$.

Ta có $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -24$.

Vậy đỉnh của parabol là điểm có tọa độ $(1; 3)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 321. Parabol $y = -x^2 - 2x + 3$ có trục đối xứng là đường thẳng nào?

- A. $x = -1$. B. $y = -1$. C. $x = -2$. D. $x = 1$.

Lời giải.

Trục đối xứng của parabol là đường thẳng đi qua đỉnh và vuông góc với trục hoành. Khi đó, trục đối xứng có phương trình là $x = -\frac{b}{2a}$.

Trục đối xứng của parabol là đường thẳng $x = -1$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 322. Tìm số thực b để Parabol $y = x^2 + bx + 3$ đi qua điểm $M(-2; 3)$.

A. $b = -3$.

B. $b = 3$.

C. $b = 2$.

D. $b = 2$.

Lời giải.Parabol đi qua điểm M khi và chỉ khi $3 = 2^2 - 2b + 3 \Leftrightarrow b = 2$.Chọn đáp án **(D)** □**Câu 323.** Đồ thị của hàm số $y = x^2 - x - 6$ **không** đi qua điểm nào trong bốn điểm sau đây?

A. $M(1; -6)$.

B. $N(3; 0)$.

C. $P(-2; -8)$.

D. $Q\left(\frac{1}{2}; -\frac{25}{4}\right)$.

Lời giải.Ta có $(-2)^2 - (-2) - 6 = 0 \neq -8$. Do đó đồ thị hàm số không đi qua điểm $P(-2; -6)$.Chọn đáp án **(C)** □**Câu 324.** Đồ thị của hàm số nào sau đây nhận đường thẳng $x = -3$ làm trục đối xứng?

A. $y = x^2 + 3x - 4$.

B. $y = x^2 + 6x + 2$.

C. $y = x^2 + 6$.

D. $y = -x^2 + 6x$.

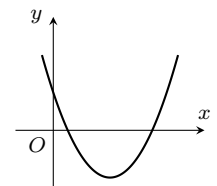
Lời giải.Đường thẳng $y = x^2 + 6x + 2$ nhận đường thẳng $x = -3$ làm trục đối xứng.Chọn đáp án **(B)** □**Câu 325.**Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình bên. Chỉ ra mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $a > 0, b > 0, c > 0$.

B. $a > 0, b < 0, c > 0$.

C. $a > 0, b > 0, c < 0$.

D. $a > 0, b < 0, c < 0$.

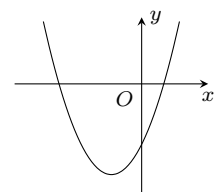
**Lời giải.**Đồ thị có bề lõm quay lên nên $a > 0$, lại có hoành độ đỉnh $x = -\frac{b}{2a} > 0$ nên a và b trái dấu, tức là $b < 0$. Mặt khác, tại điểm có hoành độ bằng 0 trên đồ thị thì có tung độ dương, ta suy ra $c > 0$.Chọn đáp án **(B)** □**Câu 326.**Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a > 0, b > 0, c < 0$.

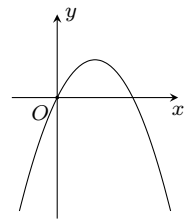
B. $a > 0, b < 0, c < 0$.

C. $a > 0, b > 0, c > 0$.

D. $a < 0, b < 0, c > 0$.

**Lời giải.**Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ âm. Suy ra $c < 0$.Đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm nằm về hai phía so với trục tung Oy (tức là có hoành độ trái dấu).Suy ra $a \cdot c < 0 \Rightarrow a > 0$.Đỉnh I của parabol nằm bên trái trục tung. Suy ra $-\frac{b}{2a} < 0 \Leftrightarrow \frac{b}{a} > 0 \Rightarrow b > 0$ (vì $a > 0$).Chọn đáp án **(A)** □**Câu 327.**

Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a < 0, b = 0, c > 0$.

B. $a < 0, b < 0, c = 0$.

C. $a < 0, b > 0, c > 0$.

D. $a < 0, b > 0, c = 0$.

Lời giải.

Đồ thị đi qua gốc tọa độ O . Suy ra $c = 0$.

Bề lõm quay xuống. Suy ra $a < 0$.

Đỉnh của parabol nằm bên phải trục tung Oy . Suy ra $-\frac{b}{2a} > 0 \Leftrightarrow \frac{b}{a} < 0 \Leftrightarrow b > 0$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 328. Tìm tọa độ đỉnh I của parabol $y = x^2 + 4x + 5$.

A. $I(0; 5)$.

B. $I(1; 10)$.

C. $I(-1; 2)$.

D. $I(-2; 1)$.

Lời giải.

Tọa độ đỉnh của parabol là $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ nên $x_I = -2$.

Thay x_I vào công thức hàm ta được $y_I = 1$. Suy ra $I(-2; 1)$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 329. Tìm phương trình trục đối xứng của đồ thị hàm số $y = -x^2 + 6x + 7$.

A. $y = 16$.

B. $x = 3$.

C. $y = 3$.

D. $x = 6$.

Lời giải.

Trục đối xứng của parabol có phương trình là $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2 \cdot (-1)} = 3$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 330. Tìm giá trị của m để parabol $y = x^2 + mx + 1$ đi qua điểm $A(1; 1)$.

A. $m = 1$.

B. $m = 2$.

C. $m = -1$.

D. $m = -2$.

Lời giải.

Thay tọa độ A vào phương trình parabol ta được $1 + m + 1 = 1 \Leftrightarrow m = -1$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 331. Tìm giá trị của a, b để đồ thị hàm số $y = x^2 + ax + b$ đi qua 2 điểm $M(1; 7)$ và $N(-1; 3)$.

A. $a = 1, b = 3$.

B. $a = 2, b = 4$.

C. $a = -1, b = 5$.

D. $a = 3, b = 7$.

Lời giải.

Thay tọa độ M, N vào công thức của đồ thị hàm số ta được

$$\begin{cases} 1 + a + b = 7 \\ 1 - a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 6 \\ -a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases}$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 332. Tọa độ đỉnh của đồ thị hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 11$ là

A. $(2; 15)$.

B. $(2; 7)$.

C. $(4; -5)$.

D. $(4; 11)$.

Lời giải.

Tọa độ đỉnh của đồ thị hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 11$ là $(2; 7)$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 333. Cho parabol đi qua 2 điểm $M(-4; 0)$ và $N(6; 0)$. Hãy tìm trục đối xứng của parabol đó.

- A. $x = -2$. B. $x = 2$. C. $x = -1$. D. $x = 1$.

Lời giải.

Vì hai điểm M, N nằm trên trục hoành và parabol đi qua 2 điểm $M(-4; 0)$ và $N(6; 0)$ nên trục đối xứng của parabol cách đều $M, N \Rightarrow$ trục đối xứng là $x = 1$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 334. Đồ thị của hàm số bậc hai có đỉnh là $I(-3; -2)$. Trục đối xứng của đồ thị đó là

- A. $x = -3$. B. $x = 3$. C. $y = -2$. D. $y = 2$.

Lời giải.

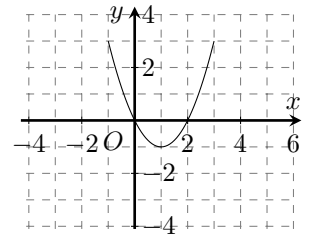
Vì đồ thị của hàm số bậc hai có đỉnh là $I(-3; -2)$ nên trục đối xứng của đồ thị đó là $x = -3$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 335.

Hàm số bậc hai nào dưới đây có đồ thị như hình bên?

- A. $y = x^2 - 2x$. B. $y = x^2 + 2x$.
C. $y = 2x - x^2$. D. $y = x^2 - 2x + 1$.



Lời giải.

Hàm số $y = x^2 - 2x$ có đỉnh là $I(1; -1)$ và đồ thị đi qua hai điểm $(0; 0)$ và $(2; 0)$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 336. Tọa độ đỉnh I của parabol $y = -3x^2 + 6x - 1$ là

- A. $I(-2; -25)$. B. $I(-1; -10)$. C. $I(1; 2)$. D. $I(2; -1)$.

Lời giải.

Tọa độ đỉnh của parabol $y = -3x^2 + 6x - 1$ là $I(1; 2)$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 337. Đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ có trục đối xứng là đường thẳng nào sau đây?

- A. $x = 1$. B. $x = 2$. C. $y = -1$. D. $y = 1$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ có trục đối xứng là $x = -\frac{b}{2a} = 2$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 338. Đồ thị hàm số $y = 2x^2 + 4x + 1$ có trục đối xứng là đường thẳng nào sau đây?

- A. $x = -\frac{1}{2}$. B. $x = -2$. C. $x = 1$. D. $x = -1$.

Lời giải.

Ta có $-\frac{b}{2a} = -1$, suy ra trục đối xứng của đồ thị hàm số là $x = -1$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 339. Parabol $(P): y = x^2 + 4x + 1$ có tọa độ đỉnh I là

- A. $(0; 1)$. B. $(2; 9)$. C. $(-2; -3)$. D. $(-1; -2)$.

Lời giải.

Ta có $\frac{-b}{2a} = -2$. Suy ra tọa độ đỉnh của Parabol là $(-2; -3)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 340. Cho parabol $(P): y = x^2 - 2mx + m + 3$, với m là tham số dương. Biết đỉnh của (P) thuộc đường thẳng $y = x + 2$, khi đó các giá trị m thuộc khoảng

- A. $(1; 4)$. B. $(-2; 1)$. C. $(0; 3)$. D. $(-1; 1)$.

Lời giải.

Tọa độ đỉnh của (P) là $I(m; -m^2 + m + 3)$.

Do $I \in d: y = x + 2 \Rightarrow -m^2 + m + 3 = m + 2 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = 1$ (vì $m > 0$).

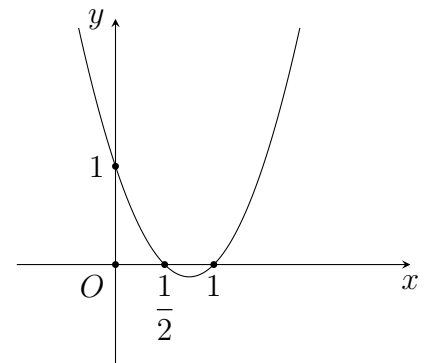
Chọn đáp án **C**

□

Câu 341.

Hàm số nào trong các hàm số dưới đây có đồ thị là hình vẽ bên?

- A. $y = 3x^2 - 2x + 1$. B. $y = -2x^2 + 3x + 1$.
C. $y = x^2 - 3x + 1$. D. $y = 2x^2 - 3x + 1$.



Lời giải.

- Từ đồ thị suy ra hệ số $a > 0$.
- Đồ thị cắt trục Ox tại điểm có hoành độ $x = 1; x = \frac{1}{2}$.
- Đồ thị cắt trục Oy tại điểm $(0; 1)$.

Căn cứ vào các dữ kiện trên suy ra đồ thị trong hình vẽ là của hàm số $y = 2x^2 - 3x + 1$.

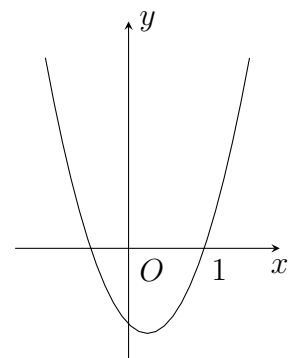
Chọn đáp án **D**

□

Câu 342.

Đồ thị hàm số sau đây là của một trong 4 hàm số cho trong các đáp án **A, B, C, D**. Hỏi đó là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

- A. $y = 2x^2 - x - 1$. B. $y = x^2 - x - 1$.
C. $y = 2x^2 - x + 1$. D. $y = 2x^2 + x - 1$.



Lời giải.

Đồ thị đã cho cắt trục hoành tại các điểm có tọa độ là $(1; 0)$, $(-\frac{1}{2}; 0)$ nên đồ thị đó là của hàm số $y = 2x^2 - x - 1$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 343.

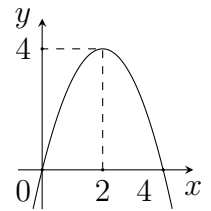
Hãy xác định hàm số bậc hai có đồ thị như hình dưới đây.

A. $y = x^2 - 3x + 2$.

B. $y = -2x^2 + 2x + 1$.

C. $y = -2x^2 + 2x + 1$.

D. $y = -x^2 + 4x$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị, ta thấy tại $x = 0$ thì $y = 0$ nên chỉ có hàm số $y = -x^2 + 4x$ thỏa mãn.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 344.

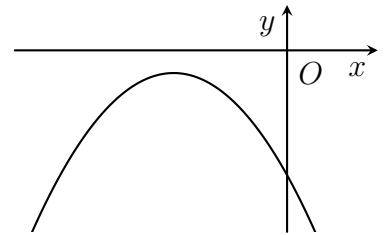
Cho hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị là đường parabol như hình bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a < 0, b > 0, c > 0$.

B. $a > 0, b < 0, c > 0$.

C. $a < 0, b > 0, c < 0$.

D. $a < 0, b < 0, c < 0$.



Lời giải.

Từ đồ thị ta nhận thấy đồ thị quay bề lõm về phía dưới, hoành độ đỉnh âm và cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $a < 0, -\frac{b}{2a} < 0, c < 0$ suy ra $a < 0, b < 0$ và $c < 0$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 345.

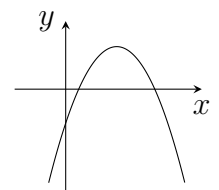
Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a < 0, b > 0, \Delta > 0$.

B. $a < 0, b < 0, \Delta > 0$.

C. $a > 0, b > 0, \Delta < 0$.

D. $a > 0, b > 0, \Delta > 0$.



Lời giải.

Dựa vào hình vẽ, ta thấy

- Parabol quay xuống nên $a < 0$;
- Parabol cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt nên $\Delta > 0$;
- Trục đối xứng nằm phía bên phải trục tung nên $-\frac{b}{2a} > 0 \Leftrightarrow ab < 0 \Rightarrow b > 0$.

Vậy $a < 0, b > 0, \Delta > 0$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 346. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$). Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Đồ thị của hàm số có trục đối xứng là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$.

B. Đồ thị của hàm số luôn cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$.

Lời giải.

Dựa vào sự biến thiên của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) ta thấy các khẳng định A, C, D đúng. Khẳng định “Đồ thị của hàm số luôn cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt” là sai vì có những hàm số

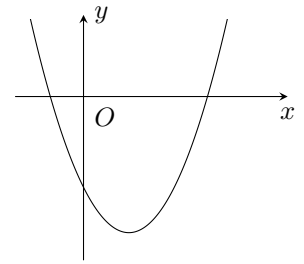
bậc hai không cắt trục hoành như hàm $y = 2x^2 - 3x + \frac{9}{8}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 347.

Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình bên dưới. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $a > 0, b < 0, c < 0$.

B. $a > 0, b < 0, c > 0$.

C. $a > 0, b > 0, c > 0$.

D. $a < 0, b < 0, c < 0$.

Lời giải.

Parabol có bề lõm quay lên $\Rightarrow a > 0$.

Parabol cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $c < 0$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 348. Cho hàm số $y = x^2 - 2x - 1$, mệnh đề nào sai?

A. Đồ thị hàm số nhận $I(1; -2)$ làm đỉnh.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

D. Đồ thị hàm số có trục đối xứng: $x = -2$.

Lời giải.

Trục đối xứng của đồ thị hàm số là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a} = 1$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 349. Tọa độ đỉnh I của parabol $y = x^2 - 2x + 7$ là

A. $I(-1; -4)$.

B. $I(1; 6)$.

C. $I(1; -4)$.

D. $I(-1; 6)$.

Lời giải.

Đỉnh $I: x = \frac{2}{2 \cdot 1} = 1, y = 1^2 - 2 \cdot 1 + 7 = 6$. Vậy $I(1; 6)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 350.

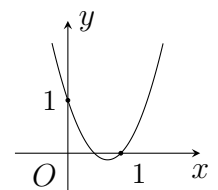
Đồ thị hình bên dưới là đồ thị của hàm số nào?

A. $y = -2x^2 + 3x - 1$.

B. $y = -x^2 + 3x - 1$.

C. $y = 2x^2 - 3x + 1$.

D. $y = x^2 - 3x + 1$.



Lời giải.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1.

Đồ thị cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1, phương trình hoành độ giao điểm phải có nghiệm

$$x = 1, \text{ ta chỉ có phương trình } 2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 351.

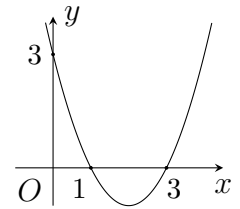
Đồ thị hình bên dưới là đồ thị của hàm số nào?

A. $y = 2x^2 - 3x + 3$.

B. $y = x^2 - 4x + 3$.

C. $y = -x^2 + 3x + 3$.

D. $y = -2x^2 + 3x + 3$.



Lời giải.

Vì bề lõm hướng lên trên nên $a > 0 \Rightarrow$

Đồ thị giao trục Ox tại điểm $(1; 0)$ và $(3; 0) \Rightarrow$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 352.

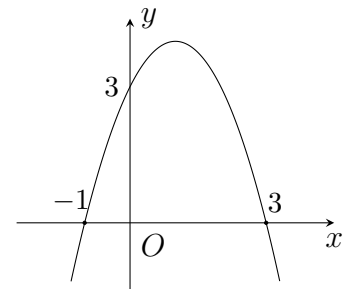
Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ, thì dấu các hệ số của nó là

A. $a < 0, b < 0, c > 0$.

B. $a < 0, b > 0, c > 0$.

C. $a > 0, b > 0, c > 0$.

D. $a < 0, b > 0, c < 0$.



Lời giải.

Đồ thị là parabol có bề lõm hướng xuống dưới nên $a < 0$.

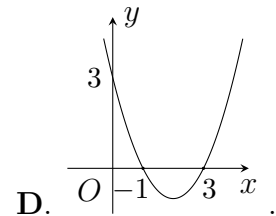
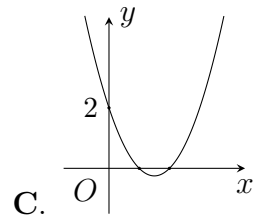
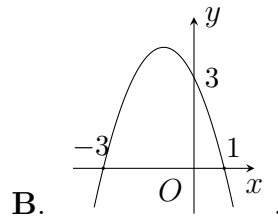
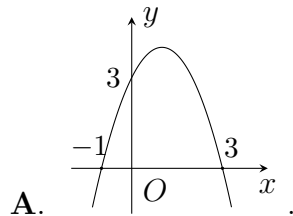
Đồ thị cắt chiều dương trục Oy nên $c > 0$.

Trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a} > 0$, mà $a < 0$, nên $b > 0$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 353. Hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$ có đồ thị là hình nào trong các hình sau?



Lời giải.

Do $a = -1$ nên đồ thị lõm xuống dưới $\Rightarrow$.

Đồ thị có đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow I(1; 4)$ nên hoành độ đỉnh dương.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 354.

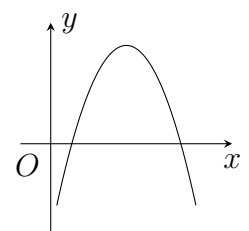
Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a < 0, b > 0, \Delta > 0$.

B. $a < 0, b < 0, \Delta > 0$.

C. $a > 0, b > 0, \Delta < 0$.

D. $a > 0, b > 0, \Delta > 0$.



Lời giải.

Quan sát bề lõm của parabol như hình vẽ ta có $a < 0$, parabol cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt nên $\Delta > 0$. Cho $x = 0$ thì giao của parabol với trục tung Oy là $b < 0$.

Chọn đáp án **(B)**



Câu 355.

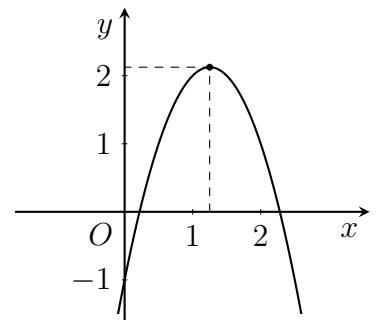
Hàm số nào có đồ thị như hình vẽ bên

A. $y = x^2 - 3x - 1$.

B. $y = -2x^2 + 5x - 1$.

C. $y = 2x^2 - 5x - 1$.

D. $y = -2x^2 + 5x$.



Lời giải.

Do bề lõm parabol hướng xuống nên $a < 0$ và qua $A(0; -1)$.

Chọn đáp án **(B)**



Câu 356.

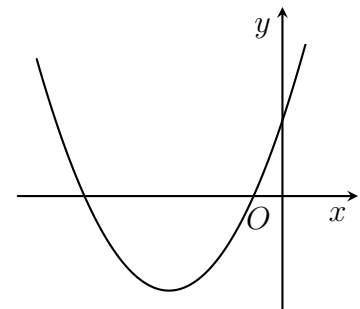
Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh nào sau đây đúng?

A. $a > 0, b = 0, c > 0$.

B. $a > 0, b > 0, c > 0$.

C. $a > 0, b < 0, c > 0$.

D. $a < 0, b > 0, c > 0$.



Lời giải.

Đồ thị có bề lõm quay lên trên $\Rightarrow a > 0$.

Trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a} < 0 \Rightarrow a.b > 0 \Rightarrow b > 0$.

Chọn đáp án **(B)**



Câu 357.

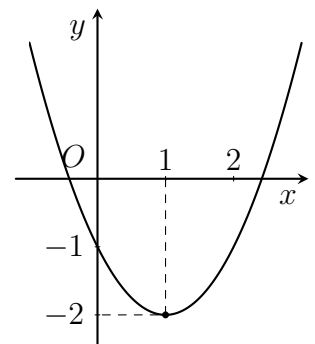
Đồ thị hình bên là của hàm số nào sau đây?

A. $y = -x^2 - 2x + 3$.

B. $y = x^2 + 2x - 2$.

C. $y = 2x^2 - 4x - 2$.

D. $y = x^2 - 2x - 1$.



Lời giải.

Do parabol có bề lõm quay lên nên $a > 0$ ta loại phương án $y = -x^2 - 2x + 3$.

Trục đối xứng của parabol là $x = -\frac{b}{2a} = 1$ nên ta phương án $y = x^2 + 2x - 2$.

Khi $x = 0$ thì $y = -1$ nên ta loại phương án $y = 2x^2 - 4x - 2$.

Vậy đồ thị trên là của hàm số $y = x^2 - 2x - 1$.

Chọn đáp án **(D)**



Câu 358.

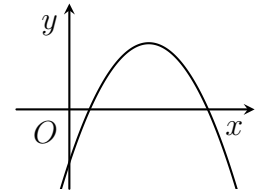
Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a < 0, b > 0, c > 0$.

B. $a > 0, b < 0, c > 0$.

C. $a < 0, b > 0, c < 0$.

D. $a > 0, b > 0, c < 0$.



Lời giải.

Nhìn vào đồ thị ta có

Bề lõm hướng xuống $\Rightarrow a < 0$.

Hoành độ đỉnh $x = -\frac{b}{2a} > 0 \Rightarrow \frac{b}{2a} < 0 \Rightarrow b > 0$ (do $a < 0$).

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm $\Rightarrow c < 0$.

Chọn đáp án **(C)**



Câu 359.

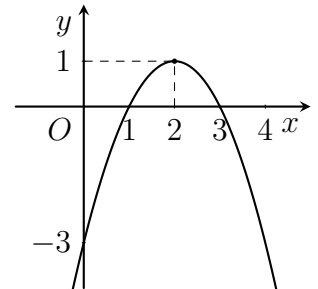
Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên?

A. $y = -x^2 + 2x - 3$.

B. $y = -x^2 + 4x - 3$.

C. $y = x^2 - 4x + 3$.

D. $y = x^2 - 2x - 3$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị suy ra $a < 0$ và tọa độ đỉnh là $I(2; 1)$.

Ta thấy $y = -x^2 + 4x - 3$ có $\Rightarrow a = -1$ và $I(2; 1)$.

Chọn đáp án **(B)**



Câu 360. Cho hàm số $y = -x^2 - 2x + 1$. Khẳng định nào sau đây **sai**.

A. Đồ thị hàm số có trục đối xứng $x = -1$.

B. Hàm số không chẵn, không lẻ.

C. Hàm số tăng trên khoảng $(-\infty; -1)$.

D. Đồ thị hàm số nhận $I(-1; 4)$ làm đỉnh.

Lời giải.

Ta có $a = -1, b = -2, c = 1$ nên đồ thị có trục đối xứng là $x = -\frac{-2}{2 \cdot (-1)} = -1$ và tọa độ đỉnh của parabol là $I(-1; 2)$.

Chọn đáp án **(D)**



Câu 361. Cho hàm số $y = x^2 - 2x + 3$. Khẳng định nào sau đây đúng.

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Lời giải.

Ta có $a = 1 > 0, b = -2, c = 3$ nên hàm số có đỉnh là $I(1; 2)$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$+\infty$	2	$+\infty$

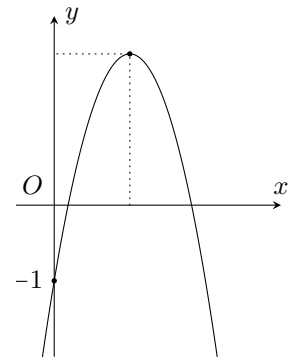
Từ đó suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 362.

Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A. $a < 0, b < 0, c < 0$.
- B. $a < 0, b = 0, c < 0$.
- C. $a > 0, b > 0, c < 0$.
- D. $a < 0, b > 0, c < 0$.

Lời giải.

Quan sát đồ thị ta có:

Đồ thị quay bề lõm xuống dưới nên $a < 0$; có hoành độ đỉnh $x_I = -\frac{b}{2a} > 0 \Leftrightarrow \frac{b}{a} < 0 \Rightarrow b > 0$.

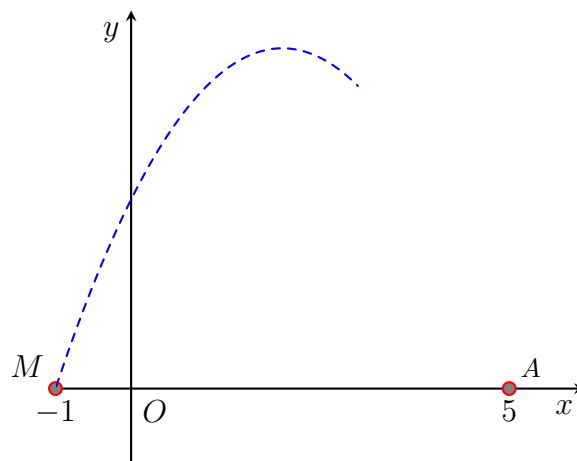
Lại có: đồ thị cắt Ox tại điểm có tung độ âm nên $c < 0$.

Vậy $a < 0, b > 0, c < 0$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 363. Một viên đá được ném về phía vật A bay lên với quỹ đạo là một đường Parabol. Xét một hệ trục Oxy như hình vẽ, giả sử trong hệ trục đó thì quỹ đạo bay của viên đá có phương trình $y = -0.5x^2 + 2x + 2.5$ và vị trí đá ném lên là M. Khi đó kết luận nào sau đây là đúng.



- A. Đá rơi đúng vật A.
- B. Đá rơi chưa tới vật A.
- C. Đá rơi khỏi vật A.
- D. Đá bay lên trời.

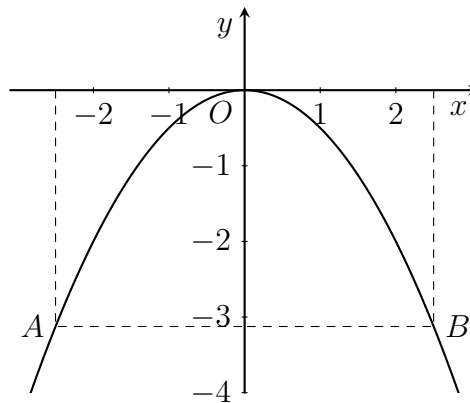
Lời giải.

Ta có vị trí đá rơi là giao điểm của (P) và trục Ox . Mà phương trình $-0.5x^2 + 2x + 2.5 = 0$ có hai nghiệm $x = -1$ hoặc $x = 5$. Vậy đá rơi đúng vị trí A.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 364. Một chiếc cổng hình parabol có phương trình $y = -\frac{1}{2}x^2$. Biết cổng có chiều rộng $d = 5$ mét (như hình vẽ). Hãy tính chiều cao h của cổng.



A. $h = 4,45$ mét.

B. $h = 3,125$ mét.

C. $h = 4,125$ mét.

D. $h = 3,25$ mét.

Lời giải.

Gọi A và B là hai điểm ứng với hai chân cổng như hình vẽ.

Vì cổng hình parabol có phương trình $y = -\frac{1}{2}x^2$ và cổng có chiều rộng $d = 5$ mét nên $AB = 5$ và $A\left(-\frac{5}{2}; -\frac{25}{8}\right); B\left(\frac{5}{2}; -\frac{25}{8}\right)$.

Vậy chiều cao của cổng là $\left|-\frac{25}{8}\right| = \frac{25}{8} = 3,125$ mét.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 365.

Cho hàm số $y = ax^2 + c$ ($a \neq 0$) có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a > 0, c < 0$.

B. $a < 0, c > 0$.

C. $a < 0, c < 0$.

D. $a < 0, c = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y	$-\infty$	10	$-\infty$

Lời giải.

Từ giả thiết, ta thấy $a < 0$ và $c = 10$. Suy ra $a < 0$ và $c > 0$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 366.

Cho hàm số $y = ax^2 + c$ ($a \neq 0$) có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a > 0, c < 0$.

B. $a < 0, c > 0$.

C. $a < 0, c < 0$.

D. $a > 0, c > 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y	$+\infty$	-7	$+\infty$

Lời giải.

Từ giả thiết ta thấy $a > 0$ và $c = -7$. Suy ra $a > 0$ và $c < 0$.

Chọn đáp án **A**



Câu 367.

Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $a < 0, b > 0, c < -1$. B. $a > 0, b < 0, c < 0$.
C. $a > 0, b < 0, c > -1$. D. $a > 0, b > 0, c > -1$.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
y	$+\infty$	-1	$+\infty$

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta thấy $a > 0$ và $\begin{cases} 9a + 3b + c = -1 \\ -\frac{b}{2a} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -6a, \\ c = -1 + 9a. \end{cases}$

Suy ra $b < 0$ và $c > -1$.

Chọn đáp án **C**



Câu 368.

Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $a < 0, b < 0, c > 2$. B. $a < 0, b < 0, c > 0$.
C. $a > 0, b < 0, c < 2$. D. $a < 0, b < 0, c < 2$.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y	$-\infty$	2	$-\infty$

Lời giải.

Từ bảng biến thiên ta thấy $a < 0$ và $\begin{cases} 4a - 2b + c = 2, \\ -\frac{b}{2a} = -2. \end{cases}$

Suy ra $a < 0, b < 0, c = 2 + 4a < 2$.

Chọn đáp án **D**



Câu 369. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2x + m}$ xác định trên nửa khoảng $[2; +\infty)$.

- A. $m \leq 0$. B. $m < 0$. C. $m > 0$. D. $m \geq 0$.

Lời giải.

Hàm số xác định trên $[2; +\infty) \Leftrightarrow x^2 - 2x + m \geq 0 \forall x \in [2; +\infty) \Leftrightarrow x^2 - 2x \geq -m \forall x \in [2; +\infty)$.

Khi đó, phần đồ thị hàm số trên $[2; +\infty)$ nằm bên trên đường thẳng $y = -m$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = x^2 - 2x$ trên $[2; +\infty)$:

x	2	$+\infty$
y	0	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $-m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 0$ thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án **D**



Câu 370. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x - 3 & \text{với } x \geq 2 \\ -x^2 + 2x + 1 & \text{với } x < 2 \end{cases}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và

giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 3]$. Tính giá trị biểu thức $S = M + m$.

A. $S = \frac{5}{2}$.

B. $S = \frac{3}{2}$.

C. $S = 2$.

D. $S = 3$.

Lời giải.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 3]$

x	0	1	2	3
$f(x)$	1	2	0	$\frac{3}{2}$

Suy ra $S = M + m = 2 + 0 = 2$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 371. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1}$.

A. 2.

B. $\frac{4}{3}$.

C. 6.

D. 3.

Lời giải.

Gọi y là một giá trị của A . Phương trình $y = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1}$ (ẩn x) tương đương với

$$\begin{cases} x \neq 1 \\ (y-3)x^2 - 2(y-4)x + y-6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (y-3)x^2 - 2(y-4)x + y-6 = 0.$$

Với $y = 3$, phương trình trở thành $2x = 3$ hay $x = \frac{3}{2}$.

Với $y \neq 3$, phương trình ban đầu có nghiệm nên phương trình sau có nghiệm. Do đó $\Delta' \geq 0$, tức

$$(y-4)^2 - (3-y)(6-y) \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 2.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 2.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 372. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x(x-3)(x-4)(x-7)$.

A. -84.

B. 7.

C. 12.

D. -36.

Lời giải.

Ta có $A = (x^2 - 7x)(x^2 - 7x + 12)$. Đặt $t = x^2 - 7x + 6$, $t \geq -\frac{25}{4}$, ta có

$$A = (t-6)(t+6) = t^2 - 36 \geq -36.$$

Dấu “=” xảy ra khi $t = 0$ hay $x = 1$ hoặc $x = 6$. Vậy giá trị nhỏ nhất của A là -36.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 373. Tìm m để hàm số $y = -x^2 + 2(m-1)x - m^2 + 3$ đạt giá trị lớn nhất là 6.

A. $m = -2$.

B. $m = -1$.

C. $m = 5$.

D. $m = 4$.

Lời giải.

Giá trị lớn nhất của hàm số là $-\frac{\Delta'}{a} = -2m + 4$, suy ra $-2m + 4 = 6$, hay $m = -1$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 374. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^2 - m$ trên đoạn $[-m; m]$ là m với $m > 0$. Tìm m .

- A. $m = 1$. B. $m = \frac{1}{4}$. C. $m = 2$. D. $m = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Bảng biến thiên của hàm số $y = x^2 - m$

x	$-m$	0	m
y	$m^2 - m$	$-m$	$m^2 - m$

Theo giả thiết ta có $m^2 - m = m$, suy ra $m = 2$ (do $m > 0$).

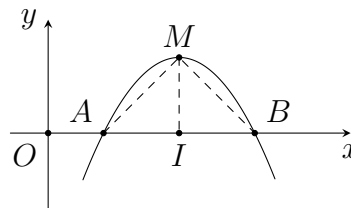
Chọn đáp án **C**

□

Câu 375. Hàm số $y = -x^2 + 2(m+2)x - 2$ đạt giá trị lớn nhất là y_0 tại $x = x_0$. Giả sử đồ thị hàm số này cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ với $x_1 < x_2$. Gọi $M(x_0; y_0)$, tìm m để tam giác MAB vuông tại M .

- A. $m = -2 \pm \sqrt{3}$. B. $m = -2 \pm \sqrt{2}$. C. $m > -2 + \sqrt{2}$. D. $m < -2 + \sqrt{3}$.

Lời giải.



Vì đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt nên

$$m^2 + 4m + 2 = \Delta' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 + \sqrt{2} \\ m < -2 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Khi đó, theo định lý Viète, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+2) \\ x_1 x_2 = 2 \end{cases}$.

Gọi I là trung điểm của AB . Tam giác MAB vuông cân tại M khi và chỉ khi $MI = AI$, điều này tương đương với

$$\begin{aligned} |y_0| &= \frac{|x_1 - x_2|}{2} \Leftrightarrow m^2 + 4m + 2 = \frac{\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}}{2} \\ \Leftrightarrow m^2 + 4m + 2 &= \sqrt{m^2 + 4m + 2} \Leftrightarrow m^2 + 4m + 2 = 1 \\ \Leftrightarrow m &= -2 \pm \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 376. Cho hàm số $f(x) = 4x^2 - 4ax + a^2 - 2a$. Tìm tất cả các giá trị của a để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-2; 0]$ bằng 2.

A. $\begin{cases} a = -1 \\ a = 1 + \sqrt{3} \end{cases}$

B. $\begin{cases} a = 1 \\ a = 1 \pm \sqrt{3} \end{cases}$

C. $\begin{cases} a = 1 \\ a = 1 - \sqrt{3} \end{cases}$

D. $\begin{cases} a = \pm 1 \\ a = 1 \pm \sqrt{3} \end{cases}$

Lời giải.

Ta xét các trường hợp

a) $\frac{a}{2} \in [-2; 0]$.

Khi đó $\min_{[-2;0]} f(x) = f\left(\frac{a}{2}\right) = -2a$. Suy ra $-2a = 2$ hay $a = -1$ (thỏa mãn).

b) $a < -4$.

Khi đó $\min_{[-2;0]} f(x) = f(-2) = a^2 + 6a + 16$. Suy ra $a^2 + 6a + 16 = 2$ (vô nghiệm).

c) $a > 0$.

Khi đó $\min_{[-2;0]} f(x) = f(0) = a^2 - 2a$. Suy ra $a^2 - 2a = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 + \sqrt{3} \\ a = 1 - \sqrt{3} \end{cases}$ (loại).

Vậy $\begin{cases} a = -1 \\ a = 1 + \sqrt{3} \end{cases}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 377. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 2mx + m$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 2.

A. $m = \pm 2$.

B. $m = \pm 1$.

C. $m = \pm 3$.

D. Không tồn tại m .

Lời giải.

Ta xét các trường hợp sau

a) $m \in [0; 2]$

Khi đó $\min_{[0;2]} f(x) = f(m) = -m^2 + m$, suy ra $-m^2 + m = 2$ (vô nghiệm).

b) $m < 0$

Khi đó $\min_{[0;2]} f(x) = f(0) = m$, suy ra $m = 2$ (không thỏa mãn).

c) $m > 2$ Khi đó $\min_{[0;2]} f(x) = f(2) = 4 - 3m$, suy ra $4 - 3m = 2$ hay $m = \frac{2}{3}$ (không thỏa mãn).

Vậy không tồn tại m thỏa yêu cầu bài toánChọn đáp án **D**

□

Câu 378. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2x - \frac{2}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 3\right]$. Tính $S = M + m$.

A. $S = \frac{41}{9}$.

B. $S = \frac{64}{36}$.

C. $S = \frac{4}{9}$.

D. $S = \frac{31}{9}$.

Lời giải.Đặt $t = x + \frac{1}{x}$, khi đó $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$. Ta tìm tập giá trị của $t = x + \frac{1}{x}$. Do $x > 0$ nên

$$t = x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = 2$. Mặt khác do $\frac{1}{3} < x \leq 3$ nên

$$(x - 3)(3x - 1) \leq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \leq 10x \Rightarrow t = x + \frac{1}{x} \leq \frac{10}{3}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = 3$. Vậy $t \in \left[2; \frac{10}{3}\right]$.

Đặt $g(t) = t^2 - 2t - 2$, $t \in \left[2; \frac{10}{3}\right]$. Tam thức bậc hai $g(t)$ có $-\frac{b}{2a} = 1 < 2$ nên dễ thấy $\max_{\left[2; \frac{10}{3}\right]} g(t) = g\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{22}{9}$ và $\min_{\left[2; \frac{10}{3}\right]} g(t) = g(2) = -2$. Vậy $S = \frac{22}{9} - 2 = \frac{4}{9}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 379. Cho các số thực $a, b, c \in [1; 2]$ thỏa mãn $a + b + c = 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2$.

- A. $P_{\max} = 3$. B. $P_{\max} = 4$. C. $P_{\max} = 5$. D. $P_{\max} = 6$.

Lời giải.

Với mọi $x \in [1; 2]$, ta có

$$(x - 1)(x - 2) \leq 0 \Rightarrow x^2 \leq 3x - 2.$$

Từ đó suy ra

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq (3a - 2) + (3b - 2) + (3c - 2) = 3(a + b + c) - 6 = 6.$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = 1$, $c = 2$ và các hoán vị. Vậy giá trị lớn nhất của P là 6.

Chọn đáp án **D** □

Câu 380. Tìm tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^2 + 2mx + 2m + 1$ không vượt quá giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + 2mx + 5$.

- A. $m \geq 1$. B. $m \leq -2$. C. $-2 \leq m \leq 1$. D. $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -2 \end{cases}$.

Lời giải.

Hàm số $y = -x^2 + 2mx + 2m + 1$ có giá trị lớn nhất là

$$y_1 = \frac{-\Delta}{4a} = m^2 + 2m + 1.$$

Hàm số $y = x^2 + 2mx + 5$ có giá trị nhỏ nhất là

$$y_2 = \frac{-\Delta}{4a} = -m^2 + 5.$$

Theo đề bài

$$y_1 \leq y_2 \Leftrightarrow m^2 + m - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 1.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 381. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x & (x \geq 0) \\ -x^2 + 2x & (x < 0) \end{cases}$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 4]$ lần lượt là

- A. $m = -9$, $M = 0$. B. $m = -8$, $M = 1$. C. $m = -9$, $M = 1$. D. $m = -8$, $M = 0$.

Lời giải.

Ta có bảng biến thiên của hàm số đã cho

x	$-\infty$	-2	0	3	4	$+\infty$
y			0			$+\infty$
		-8		-9	-8	
	$-\infty$					

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $m = \min_{[-2;4]} y = -9$, $M = \max_{[-2;4]} y = 0$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 382. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = f(x) = \begin{cases} |x^2 + 2x| & \text{khi } x \leq 0 \\ -3x^2 + 6x - 1 & \text{khi } x > 0 \end{cases}$ trên đoạn $[-3; 3]$.

A. $M = 3$.

B. $M = 2$.

C. $M = 0$.

D. $M = 8$.

Lời giải.

a) Với $-3 \leq x \leq -2$ thì $f(x) = x^2 + 2x$. Hàm số có $-\frac{b}{2a} = -1 > -2$ và $a > 0$ nên $\max_{[-3;-2]} f(x) = f(-3) = 3$.

b) Với $-2 < x \leq 0$ thì $f(x) = -x^2 - 2x$. Hàm số có $-\frac{b}{2a} = -1 \in [-2; 0]$ và $a < 0$ nên $\max_{[-2;0]} f(x) = f(-1) = 1$.

c) Với $0 < x \leq 3$ thì $f(x) = -3x^2 + 6x - 1$. Hàm số có $-\frac{b}{2a} = 1 \in [0; 3]$ và $a < 0$ nên $\max_{[0;3]} f(x) = f(1) = 2$.

Vậy $M = \max_{[-3;3]} f(x) = f(-3) = 3$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 383. Cho hàm số $y = x^2 - 2mx - 10m - 5$ (tham số $m < 0$). Tìm m để trên đoạn $[3m; 0]$ hàm số có giá trị lớn nhất gấp 2 lần giá trị nhỏ nhất.

A. $m = -4$.

B. $m = -3$.

C. $m = -2$.

D. $m = -1$.

Lời giải.

Hàm số có $-\frac{b}{2a} = m \in [3m; 0]$ nên $\min_{[3m;0]} y = y(m) = -m^2 - 10m - 5$. Ta có $y(0) = -10m - 5$ và $y(3m) = 3m^2 - 10m - 5$. Vì $y(3m) > y(0)$ nên $\max_{[3m;0]} y = y(3m) = 3m^2 - 10m - 5$. Theo đề bài, ta có

$$3m^2 - 10m - 5 = 2(-m^2 - 10m - 5) \Leftrightarrow 5(m+1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = -1.$$

Vậy $m = -1$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 384. Cho K là giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^2 + 2x - \frac{m}{2} - 1$. Tìm tất cả các giá trị của m để $1 < K \leq 3$.

A. $1 < m \leq 3$.

B. $-2 < m \leq 6$.

C. $0 < m \leq 1$.

D. $-6 < m \leq -2$.

Lời giải.

Parabol có đỉnh $I\left(1; -\frac{m}{2}\right)$.

Đồ thị quay xuống nên $K = -\frac{m}{2}$.

Theo đề ta có $1 < K \leq 3 \Leftrightarrow -6 < m \leq -2$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	+	0	-
y	$+\infty$	$-\frac{m}{2}$	$+\infty$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 385. Cho hàm số $y = x^2 - 2\left(m + \frac{1}{m}\right)x + m$ ($m > 0$) xác định trên $[-1; 1]$. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-1; 1]$ lần lượt là y_1, y_2 thỏa mãn $y_1 - y_2 = 8$. Khi đó giá trị của m bằng

A. $m = 1$.

B. $m \in \emptyset$.

C. $m = 2$.

D. $m = 1, m = 2$.

Lời giải.

Đặt $y = f(x) = x^2 - 2\left(m + \frac{1}{m}\right)x + m$.

Hoành độ đỉnh của đồ thị hàm số là $x = m + \frac{1}{m} \geq 2$ (bất đẳng thức Côsi).

Vì hệ số $a = 1 > 0$ nên hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty; m + \frac{1}{m}\right)$.

Suy ra, hàm số nghịch biến $[-1; 1]$.

$$\Rightarrow y_1 = f(-1) = 3m + \frac{2}{m} + 1.$$

$$y_2 = f(1) = 1 - m - \frac{2}{m}.$$

Theo đề bài ta có:

$$y_1 - y_2 = 8 \Leftrightarrow 3m + \frac{2}{m} + 1 - 1 + m + \frac{2}{m} = 8 \ (m > 0) \Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 386. Xác định parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$, biết nó đi qua ba điểm $M(0; -2)$, $N(2; -2)$ và $P(1; -1)$.

A. $(P): y = -x^2 + 2x - 2$.

B. $(P): y = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{2}{5}x - 2$.

C. $(P): y = x^2 - 2x - 2$.

D. $(P): y = -\frac{11}{10}x^2 + \frac{7}{10}x - 2$.

Lời giải.

Ta có hệ

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = -2, \\ a + b + c = -1, \\ c = -2. \end{cases}$$

Giải hệ trên, ta được $a = -1, b = 2, c = -2$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 387. Xác định parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$, biết nó đi qua hai điểm $A(1; 0)$, $B(-2; -6)$ và có trục đối xứng là đường thẳng $x = -\frac{3}{2}$.

A. $(P) : y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 1.$
 C. $(P) : y = -x^2 - 3x + 4.$

B. $(P) : y = -\frac{2}{3}x^2 + 2x - \frac{4}{3}.$
 D. $(P) : y = x^2 + 3x - 4.$

Lời giải.

Ta có hệ

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = -6, \\ a + b + c = 0, \\ -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

Giải hệ trên, ta thu được $a = 1, b = 3, c = -4.$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 388. Parabol $y = ax^2 + bx + c$ đi qua ba điểm $A(1; 4), B(-1; 0), C(2; 3)$ có phương trình là

A. $y = x^2 - 2x + 5.$ B. $y = x^2 - 2x - 3.$ C. $y = 2x^2 - 4x + 3.$ D. $y = -x^2 + 2x + 3.$

Lời giải.

Do parabol đi qua ba điểm $A(1; 4), B(-1; 0), C(2; 3)$ nên ta có
$$\begin{cases} 4 = a.1^2 + b.1 + c \\ 0 = a.(-1)^2 + b.(-1) + c \\ 3 = a.2^2 + b.2 + c \end{cases}$$

Thu gọn ta được
$$\begin{cases} a + b + c = 4 \\ a - b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases}.$$

Vậy $y = -x^2 + 2x + 3.$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 389. Cho hàm số $f(x)$ có tính chất $f(a - 2) = 2a^2 + 4a - 5, \forall a \in \mathbb{R}.$ Lựa chọn phương án đúng.

A. $f(x) = -2x^2 + 3x + 1.$

B. $f(x) = 2x^2 + 12x + 11.$

C. $f(x) = 2x^2 - 12x - 11.$

D. $f(x) = -2x^2 + 12x + 11.$

Lời giải.

Cách 1. Biến đổi $f(a - 2) = 2a^2 + 4a - 5 = 2(a - 2)^2 + 12(a - 2) + 11$ nên $f(x) = 2x^2 + 12x + 11.$

Cách 2. Đặt $x = a - 2 \Rightarrow a = x + 2.$ Khi đó $f(x) = 2(x + 2)^2 + 4(x + 2) - 5 = 2x^2 + 12x + 11.$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 390. Để giải bài toán “Tìm a và m để đồ thị hàm số $y = a(x - m)^2$ là một parabol có đỉnh là $I(-3; 0)$ và cắt trục tung tại điểm $M(0; -5)$ ”, một học sinh làm như sau:

Bước 1. Hàm số $y = a(x - m)^2 \Leftrightarrow y = ax^2 - 2max + am^2.$

Bước 2. Đồ thị hàm số là parabol có đỉnh $I(-3; 0)$ nên $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2am}{2a} = -3 \Leftrightarrow m = 3.$

Do đó $y = a(x - 3)^2.$

Bước 3. Đồ thị cắt trục tung tại điểm $M(0; -5)$ nên $-5 = a(0 - 3)^2 \Leftrightarrow a = -\frac{5}{9}.$

Vậy $m = 3$ và $a = -\frac{5}{9}.$ Suy ra $y = -\frac{5}{9}(x - 3)^2$

Bài giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào?

A. Đúng.

B. Sai từ bước 1.

C. Sai từ bước 2.

D. Sai từ bước 3.

Lời giải.

Bước 2 đúng phải là $x = -\frac{b}{2a} = \frac{2am}{2a} = m = -3$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 391. Xác định tất cả các hàm số có dạng $y = mx^2 + nx + p$ biết đồ thị hàm số là một parabol đi qua điểm $M(1; 0)$, $N(2; 5)$ và có trục đối xứng là đường thẳng $x = \frac{3}{2}$.

A. $y = \frac{10}{3}x^2 - 5x + \frac{5}{3}$.

B. $y = 10x^2 - 15x + 5$.

C. Không có hàm số thỏa mãn đề bài.

D. $y = x^2 + 2x - 3$.

Lời giải.

Từ các điều kiện của đề bài ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} m + n + p = 0 \\ 4m + 2n + p = 5 \\ -\frac{n}{2m} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + n + p = 0 \\ 4m + 2n + p = 5 \\ 3m + n = 0. \end{cases}$$

Hệ phương trình trên vô nghiệm, do đó không tồn tại m, n, p thỏa mãn yêu cầu.

Chọn đáp án **C** □

Câu 392. Xác định tất cả các hàm số có dạng $y = ax^2 + bx + c$ biết đồ thị hàm số là một parabol đi qua điểm $A(2; -3)$ và có đỉnh $I(1; -4)$.

A. $y = -x^2 + 2x + 3$.

B. $y = -2x^2 + 4x + 3$.

C. $y = x^2 - 2x - 3$.

D. $y = 2x^2 - 4x - 3$.

Lời giải.

Từ các điều kiện đề bài, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = -3 \\ a + b + c = -4 \\ -\frac{b}{2a} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b + c = -3 \\ a + b + c = -4 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -3. \end{cases}$$

Vậy hàm số cần tìm là $y = x^2 - 2x - 3$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 393. Xác định tất cả các hàm số có dạng $y = ax^2 + bx + c$ biết đồ thị hàm số là một parabol có đỉnh $I(0; -1)$ và tiếp xúc với đường thẳng $y = -4x + 1$.

A. $y = 2x^2 - 1$.

B. $y = -2x^2 - 1$.

C. $y = -8x^2 + 4x - 1$.

D. $y = 8x^2 + 4x - 1$.

Lời giải.

Parabol có đỉnh $I(0; -1)$ nên

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 0 \\ a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = -1. \end{cases}$$

Khi đó, hàm số có dạng $y = ax^2 - 1$.

Parabol tiếp xúc với đường thẳng khi và chỉ khi phương trình sau có nghiệm kép

$$ax^2 - 1 = -4x + 1 \Leftrightarrow ax^2 + 4x - 2 = 0.$$

Khi đó, $\Delta' = 2^2 - a(-2) = 0 \Leftrightarrow 4 + 2a = 0 \Leftrightarrow a = -2$.

Vậy hàm số cần tìm là $y = -2x^2 - 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 394. Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ là một parabol có bề lõm quay lên và đi qua điểm $K(0; -2)$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

- A. $a < 0$ và $c < 0$. B. $a > 0$ và $c > 0$. C. $a < 0$ và $c > 0$. D. $a > 0$ và $c < 0$.

Lời giải.

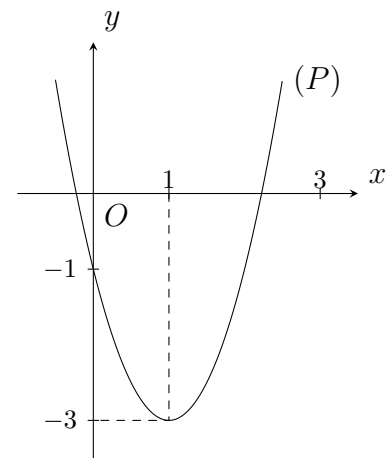
Vì đồ thị là một parabol có bề lõm quay lên nên $a > 0$ và $K(0; -2)$ thuộc đồ thị nên $c = -2 < 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 395.

Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình bên. Phương trình của parabol này là

- A. $y = 2x^2 - 4x - 1$. B. $y = 2x^2 + 3x - 1$.
C. $y = 2x^2 + 8x - 1$. D. $y = 2x^2 - x - 1$.



Lời giải.

Ta thấy (P) đi qua điểm $(0; -1)$ và có tọa độ đỉnh là $(1; -3)$.

$$\text{Do đó ta có hệ phương trình } \begin{cases} c = -1 \\ -\frac{b}{2a} = 1 \\ a + b + c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = -1 \end{cases}$$

Vậy $(P): y = 2x^2 - 4x - 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 396. Xác định tọa độ đỉnh S của parabol $(P): y = ax^2 + 4x - 5$, biết (P) có chung trục đối xứng với parabol $(P'): y = 2x^2 - 8x - 1$.

- A. $S(2; 1)$. B. $S(-2; 1)$. C. $S(2; -1)$. D. $S(-2; -1)$.

Lời giải.

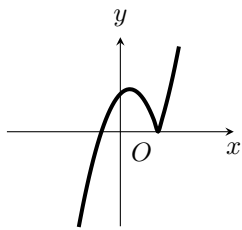
Parabol (P) có trục đối xứng $x = -\frac{2}{a}$ và parabol (P') có trục đối xứng $x = 2$.

Theo đề (P) và (P') có chung trục đối xứng, nên $-\frac{2}{a} = 2 \Leftrightarrow a = -1$.

Khi đó $(P): y = -x^2 + 4x - 5$ nên $S(2; -1)$.

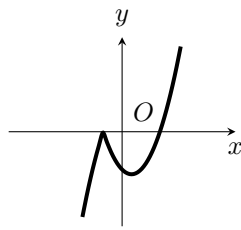
Chọn đáp án (C) □

Câu 397. Trong các đường cong dưới đây, đường nào là đồ thị của hàm số $y = (x - 1)|2x + 1|$?



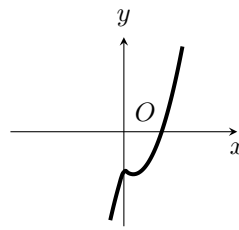
A.

Hình 1



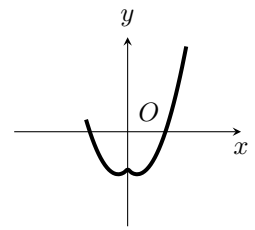
B.

Hình 2



C.

Hình 3



D.

Hình 4

Lời giải.

$$\text{Ta có } y = (x-1)|2x+1| = \begin{cases} 2x^2 - x - 1 & \text{với } x \geq -\frac{1}{2} \\ -2x^2 + x + 1 & \text{với } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Giữ nguyên đồ thị hàm số $y = 2x^2 - x - 1$ ứng với $x \geq -\frac{1}{2}$

Giữ nguyên đồ thị hàm số $y = -2x^2 + x + 1$ ứng với $x < -\frac{1}{2}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
y	$-\infty$	0	$-\frac{9}{8}$	$+\infty$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 398.

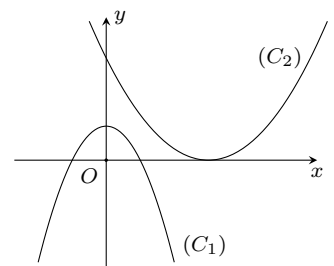
Cho hai hàm số $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$ và $y = a_2x^2 + b_2x + c_2$ với $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ là các số thực, lần lượt có đồ thị là (C_1) và (C_2) như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a_1 > a_2, b_1 < b_2, c_1 > c_2$.

B. $a_1 > a_2, b_1 > b_2, c_1 > c_2$.

C. $a_1 < a_2, b_1 < b_2, c_1 < c_2$.

D. $a_1 < a_2, b_1 > b_2, c_1 < c_2$.



Lời giải.

Từ hai đồ thị ta có $a_1 < 0, b_1 = 0, a_2 > 0, b_2 < 0$ và $c_1 < c_2$. Do đó ta chọn kết quả $a_1 < a_2, b_1 > b_2, c_1 < c_2$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 399.

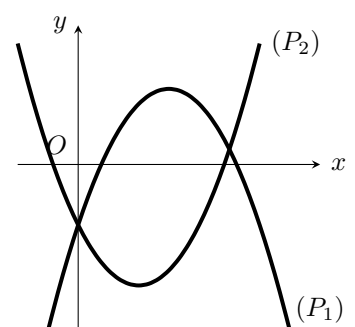
Cho hai parabol $(P_1): y = a_1x^2 + b_1x + c_1$ và $(P_2): y = a_2x^2 + b_2x + c_2$ có đồ thị như hình vẽ bên. Trong bốn khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng?

A. $a_1b_1 + a_2b_2 + c_1c_2 < 0$.

B. $a_1a_2 + b_1b_2 - c_1c_2 < 0$.

C. $(a_1 + b_1 - c_1)(a_2 + b_2 + c_2) > 0$.

D. $(a_1 + c_1 - c_2)(a_2 + b_2 - b_1) > 0$.



Lời giải.

Từ hai đồ thị ta có $a_1 > 0, b_1 > 0, a_2 < 0, b_2 < 0$ và $c_1 = c_2 < 0$.

Do đó ta chọn kết quả $a_1a_2 + b_1b_2 - c_1c_2 < 0$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 400.

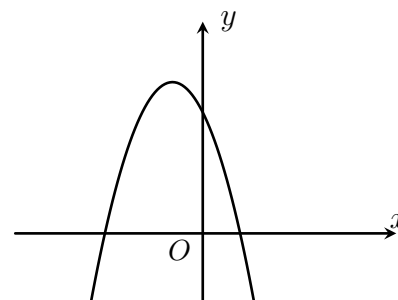
Hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là khẳng định đúng?

A. $a > 0, b < 0, c > 0$.

B. $a < 0, b < 0, c < 0$.

C. $a < 0, b > 0, c > 0$.

D. $a < 0, b < 0, c > 0$.



Lời giải.

Từ chiều biến thiên của đồ thị ta có $a < 0$. Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tung độ dương $\Rightarrow c > 0$.

Đỉnh parabol nằm bên trái trục tung nên $-\frac{b}{2a} < 0 \Rightarrow b < 0$. Vậy $a < 0, b < 0, c > 0$.

Chọn đáp án **(D)**

□

ĐÁP ÁN

1. D	2. B	3. A	4. D	5. D	6. C	7. C	8. A	9. D	10. A
11. D	12. C	13. D	14. B	15. D	16. A	17. C	18. B	19. B	20. D
21. B	22. D	23. C	24. B	25. C	26. B	27. D	28. D	29. B	30. B
31. A	32. C	33. D	34. B	35. D	36. D	37. D	38. D	39. B	40. D
41. A	42. D	43. A	44. B	45. C	46. C	47. D	48. B	49. D	50. A
51. B	52. A	53. D	54. C	55. B	56. B	57. D	58. D	59. B	60. C
61. A	62. D	63. A	64. B	65. A	66. A	67. D	68. C	69. C	70. B
71. C	72. B	73. C	74. A	75. A	76. B	77. A	78. C	79. C	80. D
81. B	82. A	83. D	84. B	85. D	86. C	87. B	88. B	89. D	90. A
91. C	92. D	93. C	94. D	95. B	96. D	97. B	98. B	99. A	100. D
101. A	102. B	103. B	104. C	105. D	106. B	107. C	108. D	109. B	110. C
111. C	112. A	113. C	114. D	115. D	116. B	117. C	118. B	119. D	120. A
121. A	122. A	123. D	124. A	125. A	126. A	127. D	128. C	129. D	130. B
131. A	132. A	133. C	134. C	135. C	136. B	137. C	138. D	139. B	140. B
141. C	142. B	143. B	144. B	145. C	146. D	147. A	148. B	149. D	150. C
151. A	152. D	153. A	154. C	155. D	156. D	157. B	158. C	159. D	160. D
161. B	162. A	163. B	164. A	165. B	166. C	167. B	168. A	169. D	170. B
171. D	172. B	173. D	174. B	175. D	176. A	177. C	178. A	179. D	180. D
181. A	182. C	183. A	184. C	185. B	186. D	187. A	188. A	189. B	190. B
191. C	192. D	193. A	194. C	195. B	196. C	197. D	198. C	199. A	200. B
201. C	202. B	203. B	204. A	205. C	206. C	207. A	208. C	209. A	210. C
211. B	212. A	213. A	214. C	215. B	216. C	217. A	218. B	219. A	220. D
221. C	222. C	223. B	224. A	225. B	226. A	227. B	228. C	229. C	230. C
231. B	232. C	233. C	234. A	235. A	236. B	237. A	238. A	239. A	240. C
241. A	242. B	243. B	244. B	245. D	246. B	247. B	248. B	249. C	250. A
251. A	252. B	253. B	254. D	255. C	256. C	257. A	258. B	259. B	260. D
261. D	262. A	263. C	264. B	265. C	266. A	267. B	268. D	269. D	270. D
271. A	272. C	273. B	274. B	275. A	276. B	277. C	278. A	279. B	280. C
281. B	282. B	283. D	284. A	285. B	286. B	287. B	288. B	289. C	290. A
291. B	292. A	293. C	294. B	295. B	296. D	297. A	298. B	299. B	300. D
301. B	302. B	303. C	304. B	305. A	306. C	307. B	308. D	309. A	310. D
311. B	312. C	313. D	314. C	315. B	316. D	317. D	318. C	319. B	320. C
321. A	322. D	323. C	324. B	325. B	326. A	327. D	328. D	329. B	330. C
331. B	332. B	333. D	334. A	335. A	336. C	337. B	338. D	339. C	340. C
341. D	342. A	343. D	344. D	345. A	346. B	347. A	348. D	349. B	350. C
351. B	352. B	353. A	354. B	355. B	356. B	357. D	358. C	359. B	360. D
361. B	362. D	363. A	364. B	365. B	366. A	367. C	368. D	369. D	370. C
371. A	372. D	373. B	374. C	375. A	376. A	377. D	378. C	379. D	380. C
381. A	382. A	383. D	384. D	385. A	386. A	387. D	388. D	389. B	390. C

391. C

392. C

393. B

394. A

395. A

396. C

397. B

398. D

399. B

400. D

Chương 3: PHƯƠNG TRÌNH HỆ PHƯƠNG TRÌNH

§1 MỞ ĐẦU VỀ PHƯƠNG TRÌNH

A TÌM TẬP XÁC ĐỊNH CỦA PHƯƠNG TRÌNH

Dạng 1. Tìm điều kiện xác định của phương trình

Điều kiện xác định của phương trình (gọi tắt là điều kiện của phương trình) là những điều kiện cần của ẩn x để các biểu thức trong phương trình đều có nghĩa.

Các dạng thường gặp:

- a) Điều kiện để biểu thức $\sqrt{f(x)}$ có nghĩa là $f(x) \geq 0$;
- b) Điều kiện để biểu thức $\frac{1}{f(x)}$ có nghĩa là $f(x) \neq 0$;
- c) Điều kiện để biểu thức $\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ có nghĩa là $f(x) > 0$.

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 1 ❖❖❖

Ví dụ 1. Tìm điều kiện của các phương trình sau:

a) $\frac{1}{x+1} = 3$;

b) $\sqrt{x-5} = 1$;

c) $\frac{1}{\sqrt{x+2}} = x+1$;

d) $\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x-3} = x+5$.

Lời giải.

- a) Điều kiện xác định của phương trình là $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$.
- b) Điều kiện xác định của phương trình là $x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$.
- c) Điều kiện xác định của phương trình là $x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$.
- d) Điều kiện xác định của phương trình là $\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 3 \end{cases}$.

□

Ví dụ 2. Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau:

$$\text{a) } \frac{3}{x^2 - 4} = \frac{\sqrt{3-x}}{3};$$

$$\text{b) } \frac{2x-1}{\sqrt{x-3}} = \sqrt{1-x}.$$

Lời giải.

- a) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} x^2 - 4 \neq 0 \\ 3 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 2 \\ 3 \geq x \end{cases}$.
- b) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} x - 3 > 0 \\ 1 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x \leq 1 \end{cases}$. Vậy không có giá trị nào của x thỏa mãn cả hai điều kiện này.

□

Ví dụ 3. Tìm điều kiện xác định rồi suy ra nghiệm của các phương trình sau:

$$\text{a) } \sqrt{3x-4} = \sqrt{4-3x};$$

$$\text{b) } 3x + 5 - \sqrt{x-3} = \sqrt{3-x} + 2018;$$

$$\text{c) } \frac{\sqrt{5x+15}}{x+3} = \sqrt{-x-3}.$$

Lời giải.

- a) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} 3x - 4 \geq 0 \\ 4 - 3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{4}{3} \\ x \leq \frac{4}{3} \end{cases}$ hay $x = \frac{4}{3}$. Thay $x = \frac{4}{3}$ vào phương trình ta thấy thỏa mãn. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \frac{4}{3}$.
- b) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ 3 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$. Thay $x = 3$ vào phương trình ta có $3 \cdot 3 - 0 = 0 + 2018$ (vô lý), vậy phương trình đã cho vô nghiệm.
- c) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} 5x + 15 \geq 0 \\ x + 3 \neq 0 \\ -x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \neq -3 \\ x \leq -3 \end{cases}$. Vậy không có x nào thỏa điều kiện xác định của phương trình nên phương trình vô nghiệm.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau:

$$\text{a) } 1 + \sqrt{2x-5} = 0;$$

$$\text{b) } \frac{2x+1}{2x^2-3x+1} = x-1;$$

$$\text{c) } \frac{x+1}{\sqrt{2x-1}} = x-3;$$

$$\text{d) } \frac{x+1}{x-2} = \frac{2-3x}{5x+1}.$$

Lời giải.

- b) Điều kiện xác định của phương trình là: $2x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2}$.
- c) Điều kiện xác định của phương trình là: $2x^2 - 3x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ và $x \neq \frac{1}{2}$.
- c) Điều kiện xác định của phương trình là: $2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$.

d) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} x - 2 \neq 0 \\ 5x + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -\frac{1}{5} \end{cases}.$

□

Bài 2. Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2 + 2x + 4} = x - 1;$

c) $\sqrt{5 - 2x} = \sqrt{x^2 + x + 1};$

b) $\frac{1}{x^2 + 1} = x - 3;$

d) $\frac{x + 1}{\sqrt{-x^2 + 4x - 5}} = x - 3.$

Lời giải.

- a) Điều kiện xác định của phương trình là: $x^2 + 2x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + 3 \geq 0$ (luôn đúng). Vậy phương trình xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- b) Điều kiện xác định của phương trình là: $x^2 + 1 \neq 0$ (luôn đúng). Vậy phương trình xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- c) Điều kiện xác định của phương trình là:

$$\begin{cases} 5 - 2x \geq 0 \\ x^2 + x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{5}{2} \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ (luôn đúng)} \end{cases} \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{2}.$$

- d) Điều kiện xác định của phương trình là: $-x^2 + 4x - 5 > 0 \Leftrightarrow -(x^2 - 4x + 4) - 1 > 0 \Leftrightarrow -(x - 2)^2 - 1 > 0$ (vô lý). Vậy không tồn tại giá trị của x để phương trình xác định.

□

Bài 3. Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau:

a) $\sqrt{5x - 1} + \sqrt{x + 2} = 7 - x;$

c) $\sqrt{x - 2} + \sqrt{4 - x} + \sqrt{2x - 5} = 2x^2 - 5x;$

b) $\sqrt{3x + 1} - \sqrt{6 - x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0;$

d) $\sqrt[3]{x^2 - 1} + x = \sqrt{x^3 - 2}.$

Lời giải.

a) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} 5x - 1 \geq 0 \\ x + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{5} \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{5}.$

b) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} 3x + 1 \geq 0 \\ 6 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq x \leq 6.$

c) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 4 - x \geq 0 \\ 2x - 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 4 \\ x \geq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{2} \leq x \leq 4.$

d) Điều kiện xác định của phương trình là: $x^3 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \sqrt[3]{2}.$

□

Bài 4. Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau:

- a) $(x+1)\sqrt{x^2-2x+3} = x^2+1$; c) $\sqrt{\sqrt{2}-1-x} + \sqrt[4]{x} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$;
 b) $x(x+1)(x-3)+3 = \sqrt{4-x} + \sqrt{1+x}$; d) $\sqrt{1-x^2} = \left(\frac{2}{3} - \sqrt{x}\right)^2$.

Lời giải.

- a) Điều kiện xác định của phương trình là: $x^2 - 2x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 2 \geq 0$ (luôn đúng). Vậy phương trình xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.
 b) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} 4-x \geq 0 \\ 1+x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 4$.
 c) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} \sqrt{2}-1-x \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \sqrt{2}-1$.
 d) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$.

□

Bài 5. Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau:

- a) $3\sqrt{2+x} - 6\sqrt{2-x} + 4\sqrt{4-x^2} = 10 - 3x$; c) $2\sqrt{1-x} + 3\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1+x} - x + 3$;
 b) $\sqrt{x-2} - \sqrt{x+2} = 2\sqrt{x^2-4} - 2x + 2$; d) $\sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{x^2-x+1}$.

Lời giải.

- a) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} 2+x \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \\ 4-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 2 \\ -2 \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$.
 b) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ x^2-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq -2 \\ x \geq 2 \vee x \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$.
 c) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ 1+x \geq 0 \\ 1-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq -1 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.
 d) Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases} x^2+x+1 \geq 0 \\ x^2-x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq 0 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq 0 \end{cases}$ (luôn đúng).

Vậy phương trình xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

□

Bài 6. Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau:

- a) $\frac{3x}{\sqrt{|x^2-1|}} = x+1$; b) $\frac{2x+3}{x-3} = \frac{24}{x^2-9} + \frac{2(x+5)}{x+3}$.

Lời giải.

a) Vì $|x^2 - 1| \geq 0$ nên điều kiện xác định của phương trình là: $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$.

b) Điều kiện xác định của phương trình là:
$$\begin{cases} x - 3 \neq 0 \\ x^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 3. \\ x + 3 \neq 0 \end{cases}$$

□

Bài 7. Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau:

a) $2\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} = 4;$

b) $\sqrt{\frac{6}{2-x}} + \sqrt{\frac{10}{3-x}} = 4.$

Lời giải.

a) Điều kiện xác định của phương trình là:
$$\begin{cases} x+2+\sqrt{x+1} \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x+1}+1)^2 \geq 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -1.$$

b) Điều kiện xác định của phương trình là:
$$\begin{cases} 2-x > 0 \\ 3-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow x < 2.$$

□

Bài 8. Tìm điều kiện xác định của các phương trình sau:

a) $\sqrt[4]{57-x} + \sqrt[4]{x+40} = 5;$

b) $\frac{\sqrt{x}-1}{|x|-3} = 0.$

Lời giải.

a) Điều kiện xác định của phương trình là:
$$\begin{cases} 57-x \geq 0 \\ x+40 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 57 \\ x > -40 \end{cases} \Leftrightarrow -40 \leq x \leq 57.$$

b) Điều kiện xác định của phương trình là:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ |x|-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \neq 3.$$

□

Bài 9. Tìm m để phương trình $\frac{x^2+x}{x-m+3} = 1$ xác định trên $[-1; 1)$.

Lời giải.

Phương trình xác định khi $x - m + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq m - 3$.

Để phương trình xác định trên $[-1; 1)$ thì $m - 3 \notin [-1; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} m - 3 < -1 \\ m - 3 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m \geq 4 \end{cases}.$

Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn điều kiện đầu bài.

□

Bài 10. Tìm giá trị của m để các phương trình sau xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

a) $\sqrt{2x^2+m} = x-2;$

b) $\frac{3x+1}{\sqrt{2x^2+4x+5-m}} = x-1;$

c) $\frac{x+1}{x^2-m+5} = x-3;$

d) $\frac{3x-2}{mx^2+9} = x^3+2.$

Lời giải.

a) Điều kiện xác định của phương trình là: $2x^2 + m \geq 0$. Để phương trình xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $m \geq 0$.

- b) Điều kiện xác định của phương trình là: $2x^2 + 4x + 5 - m > 0 \Leftrightarrow 2(x^2 + 2x + 1) + 3 - m > 0 \Leftrightarrow 2(x + 1)^2 + 3 - m > 0$. Để phương trình xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $3 - m > 0 \Leftrightarrow m < 3$.
- c) Điều kiện xác định của phương trình là: $x^2 - m + 5 \neq 0$. Để phương trình xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì phương trình $x^2 - m + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = m - 5$ vô nghiệm, điều này xảy ra khi $m - 5 < 0 \Leftrightarrow m < 5$.
- d) Điều kiện xác định của phương trình là: $mx^2 + 9 \neq 0$.
- Nếu $m = 0$ thì phương trình trở thành $\frac{3x - 2}{9} = x^3 + 2$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.
 - Nếu $m \neq 0$, để phương trình xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì phương trình $mx^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{9}{m}$ vô nghiệm, điều này xảy ra khi $-\frac{9}{m} < 0 \Leftrightarrow \frac{9}{m} > 0 \Leftrightarrow m > 0$.
- Vậy $m \geq 0$ thì phương trình xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

□

B PHƯƠNG TRÌNH HỆ QUẢ

1 TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Khái niệm. Nếu mọi nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ đều là nghiệm của phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ thì phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ được gọi là **phương trình hệ quả** của phương trình $f(x) = g(x)$. Ta viết

$$f(x) = g(x) \Rightarrow f_1(x) = g_1(x)$$

Nhận xét. Từ khái niệm trên, ta thấy các nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ luôn là nghiệm của phương trình $f_1(x) = g_1(x)$, do đó nếu ta tìm được tất cả các nghiệm của phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ thì bằng cách thử lại, ta sẽ tìm được tất cả các nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$. Đây cũng chính là phương pháp giải một phương trình dựa vào phương trình hệ quả của nó.

Các nghiệm của phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ mà không thỏa phương trình $f(x) = g(x)$ được gọi là các **nghiệm ngoại lai**.

2 CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI DẪN ĐẾN PHƯƠNG TRÌNH HỆ QUẢ THƯỜNG GẶP

A. Bình phương hai vế

Ví dụ 1.

$$\sqrt{2x - 1} = x - 1 \quad (1)$$

$$\Rightarrow 2x - 1 = (x - 1)^2 \quad (2)$$

Qua phép biến đổi **bình phương hai vế**, ta được phương trình (2) là phương trình hệ quả của phương trình (1).

B. Nhân hai vế của phương trình với một đa thức

Ví dụ 2.

$$\frac{x}{2(x-3)} + \frac{x}{2(x+1)} = \frac{2x}{(x+1)(x-3)} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2}(x+1) + \frac{x}{2}(x-3) = 2x \quad (2)$$

Qua phép biến đổi **nhân hai vế** với $(x+1)(x-3)$, ta được phương trình (2) là phương trình hệ quả của phương trình (1).

3 PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH DỰA VÀO PHƯƠNG TRÌNH HỆ QUẢ

Bước 1: Sử dụng các phép biến đổi dẫn đến phương trình hệ quả, đưa phương trình đã cho về một phương trình đơn giản hơn (*có thể giải được dễ dàng hơn*).

Bước 2: Giải phương trình hệ quả để tìm tất cả các nghiệm.

Bước 3: Thử lại các nghiệm để loại nghiệm ngoại lai.

Bước 4: Kết luận.

! Khi giải phương trình, ta có thể thực hiện liên tiếp các phép biến đổi. Tuy nhiên, trong các phép biến đổi liên tiếp đó, nếu có một phép biến đổi dẫn đến phương trình hệ quả thì phương trình cuối cùng vẫn chỉ là phương trình hệ quả của phương trình ban đầu.

Dạng 2. Khử mẫu (nhân hai vế với biểu thức)

Ở dạng này, ta sẽ đặt điều kiện xác định rồi nhân hai vế với mẫu của phân thức. Sau khi giải xong phương trình, kiểm tra nghiệm có thỏa mãn phương trình ban đầu hay không.

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 2 ❖❖❖

Ví dụ 1. Giải phương trình:

$$\frac{x^2 + x + 3}{x + 2} = 3$$

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x \neq -2$.

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + x + 3}{x + 2} &= 3 \\ \Rightarrow x^2 + x + 3 &= 3(x + 2) \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -1 \vee x = 3 \end{aligned}$$

Hai nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện xác định và thỏa phương trình ban đầu.

Vậy $S = \{-1; 3\}$. □

Ví dụ 2. Giải phương trình sau : $\frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x - 1}} = \sqrt{x - 1}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x > 1$.

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x - 1}} &= \sqrt{x - 1} \\ \Rightarrow x^2 - 4x + 3 &= x - 1 \\ \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}\end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện và thử lại phương trình đã cho ta được một nghiệm là $x = 4$. Vậy $S = \{4\}$. $\square$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải phương trình sau: $2x + \frac{3}{x - 2} = \frac{3x}{x - 2}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x \neq 2$.

$$\begin{aligned}2x + \frac{3}{x - 2} &= \frac{3x}{x - 2} \\ \Leftrightarrow \frac{2x(x - 2) + 3}{x - 2} &= \frac{3x}{x - 2} \\ \Rightarrow 2x^2 - 4x + 3 &= 3x \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}\end{aligned}$$

Thử lại phương trình ban đầu ta được các nghiệm $\begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$. Vậy $S = \left\{3; \frac{1}{2}\right\}$. $\square$

Bài 2. Giải phương trình: $\frac{x + 1}{\sqrt{x + 1}} = \sqrt{x + 1}$

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x > -1$.

$$\begin{aligned}\frac{x + 1}{\sqrt{x + 1}} &= \sqrt{x + 1} \\ \Rightarrow x + 1 &= x + 1 \text{ (luôn đúng)}\end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện ta được tập nghiệm của phương trình là $S = (-1; +\infty)$. $\square$

Bài 3. Giải phương trình:

$$\frac{2x^2 + 5x - 1}{\sqrt{x - 1}} = \frac{x + 5}{\sqrt{x - 1}}$$

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x > 1$

Phương trình trở thành:

$$\begin{aligned}\frac{2x^2 + 5x - 1}{\sqrt{x - 1}} &= \frac{x + 5}{\sqrt{x - 1}} \\ \Rightarrow 2x^2 + 5x - 1 &= x + 5 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -3\end{aligned}$$

Hai nghiệm này đều không thỏa mãn điều kiện xác định. Vậy $S = \emptyset$. □

Bài 4. Giải phương trình sau: $1 + \frac{2}{x - 4} = \frac{10}{x + 5} - \frac{24}{(4 - x)(x + 5)}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x \neq 4 \\ x \neq -5 \end{cases}$.

$$\begin{aligned}1 + \frac{2}{x - 4} &= \frac{10}{x + 5} - \frac{24}{(4 - x)(x + 5)} \\ \Leftrightarrow \frac{(x - 4)(x + 5) + 2(x + 5)}{(x - 4)(x + 5)} &= \frac{10(x - 4) + 24}{(x - 4)(x + 5)} \\ \Rightarrow x^2 - 7x + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases}\end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện và thử lại, nghiệm của phương trình đã cho là $\begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases}$. Vậy $S = \{1; 6\}$ □

Bài 5. Giải phương trình:

$$\frac{3x^2 - 7x + 2}{\sqrt{3x - 1}} = \sqrt{3x - 1}$$

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x > \frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned}\frac{3x^2 - 7x + 2}{\sqrt{3x - 1}} &= \sqrt{3x - 1} \\ \Rightarrow 3x^2 - 7x + 2 &= (\sqrt{3x - 1})^2 \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 7x + 2 &= 3x - 1 \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}\end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện và thử lại, ta được nghiệm $x = 3$. Vậy $S = \{3\}$. □

Dạng 3. Bình phương hai vế (làm mất căn)

Sau khi đặt điều kiện ban đầu, tiến hành chuyển vế và sử dụng kỹ thuật bình phương hai vế để làm mất căn thức, đưa phương trình ban đầu về phương trình hệ quả, dưới dạng đa thức.

◆◆◆ BÀI TẬP DẠNG 3 ◆◆◆

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt{x+2} = \sqrt{3-2x}$ (1).

Lời giải.

Điều kiện xác định $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 3-2x \geq 0 \end{cases}$.

$$(1) \Rightarrow x+2 = 3-2x \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}.$$

Thử lại nghiệm ta thấy thỏa mãn phương trình.

Vậy $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$. □

Ví dụ 2. Giải phương trình: $\sqrt{-10x+10} = x-1$

Lời giải.

Điều kiện xác định $-10x+10 \geq 0$.

$$\begin{aligned}\sqrt{-10x+10} &= x-1 \\ \Rightarrow -10x+10 &= (x-1)^2 \\ \Leftrightarrow -10x+10 &= x^2-2x+1 \\ \Leftrightarrow x^2+8x-9 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -9. \end{cases}\end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện và thử lại phương trình đã cho ta được một nghiệm là $x = 1$.

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \{1\}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN**Bài 1.** Giải phương trình:

$$\frac{\sqrt{4x^2 + 5x - 1}}{x + 1} = \sqrt{2}$$

Lời giải.Điều kiện xác định: $\begin{cases} 4x^2 + 5x + 1 \geq 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$

Phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} \sqrt{4x^2 + 5x - 1} &= \sqrt{2}(x + 1) \\ \Rightarrow 4x^2 + 5x - 1 &= 2(x + 1)^2 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện và thử lại, ta thấy $x = 1$ là nghiệm của phương trình. Vậy $S = \{1\}$. $\square$ **Bài 2.** Giải phương trình sau $\frac{\sqrt{x-1}}{x+2} = \frac{-x-11}{x+2} + 2$.**Lời giải.**Điều kiện xác định: $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq -2 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x-1}}{x+2} &= \frac{-x-11}{x+2} + 2 \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x-1}}{x+2} &= \frac{x-7}{x+2} \\ \Rightarrow \sqrt{x-1} &= x-7 \\ \Rightarrow x-1 &= (x-7)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 15x + 50 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 10 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện và thử lại, phương trình đã cho có nghiệm $x = 10$. Vậy $S = \{10\}$. $\square$ **Bài 3.** Giải phương trình sau: $\frac{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}{x + 1} = 2$.**Lời giải.**

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \geq 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 4 \end{cases} \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x \geq 4 \end{cases}.$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}{x + 1} &= 2 \\ \Rightarrow \sqrt{x^2 - 3x - 4} &= 2x + 2 \\ \Rightarrow x^2 - 3x - 4 &= 4x^2 + 8x + 4 \\ \Leftrightarrow 3x^2 + 11x + 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{8}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện và thử lại, phương trình đã cho có nghiệm là $x = -\frac{8}{3}$. Vậy $S = \left\{-\frac{8}{3}\right\}$. □

Bài 4. Giải phương trình $\sqrt{3x - 5} = \sqrt{2 - x}$

Lời giải.

Điều kiện xác định $\begin{cases} 3x - 5 \geq 0 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases}.$

$$\begin{aligned} \sqrt{3x - 5} &= \sqrt{2 - x} \\ \Rightarrow 3x - 5 &= 2 - x \\ \Leftrightarrow x &= \frac{7}{4} \end{aligned}$$

Thử lại ta có tập nghiệm là $S = \left\{\frac{7}{4}\right\}$. □

Bài 5. Giải phương trình $\sqrt{3x + 1} = 2x$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $3x + 1 \geq 0$.

$$\begin{aligned} \sqrt{3x + 1} &= 2x \\ \Rightarrow 3x + 1 &= 4x^2 \\ \Leftrightarrow x &= \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Thử lại ta có tập nghiệm là $S = \{1\}$. □

Bài 6. Giải phương trình: $\sqrt{3x^2 - 10x - 44} = 8 - x$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $3x^2 - 10x - 44 \geq 0$.

$$\begin{aligned}\sqrt{3x^2 - 10x - 44} &= 8 - x \\ \Rightarrow 3x^2 - 10x - 44 &= x^2 - 16x + 64 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 6x - 108 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \begin{cases} x = 6 \\ x = -9 \end{cases}\end{aligned}$$

Thử lại ta có tập nghiệm là $S = \{-9; 6\}$. □

Bài 7. Giải phương trình:

$$\frac{\sqrt{4x^2 - 3} - x}{x - 1} = 0$$

Lời giải.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} 4x^2 - 3 \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{4x^2 - 3} - x}{x - 1} &= 0 \\ \Rightarrow \sqrt{4x^2 - 3} &= x \\ \Rightarrow 4x^2 - 3 &= x^2 \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}\end{aligned}$$

Ta loại nghiệm $x = 1$ vì không thỏa điều kiện xác định. Còn $x = -1$ không là nghiệm của phương trình ban đầu. Vậy $S = \emptyset$. □

Bài 8. Giải phương trình: $\frac{\sqrt{12x - 4}}{(x + 1)(2x + 5)} + \frac{2x}{2x + 5} = \frac{x}{x + 1}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $\begin{cases} 12x - 4 \geq 0 \\ (x + 1)(2x + 5) \neq 0 \end{cases}$.

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{12x - 4}}{(x + 1)(2x + 5)} + \frac{2x}{2x + 5} &= \frac{x}{x + 1} \quad (1) \\ \Rightarrow \sqrt{12x - 4} + 2x(x + 1) &= x(2x + 5) \\ \Leftrightarrow \sqrt{12x - 4} &= 3x \\ \Rightarrow 12x - 4 &= 9x^2 \\ \Leftrightarrow 9x^2 - 12x + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (3x - 2)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Thay $x = \frac{2}{3}$ vào phương trình (1) ta thấy thỏa mãn. Vậy $S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$. □

Bài 9. Giải phương trình $\frac{2}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{x\sqrt{x+1}} = \frac{1}{x}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{x\sqrt{x+1}} &= \frac{1}{x} \quad (1) \\ \Rightarrow 2x+1 &= \sqrt{x+1} \quad (\text{nhân cả hai vế cho } x\sqrt{x+1}) \\ \Rightarrow (2x+1)^2 &= x+1 \\ \Leftrightarrow 4x^2+4x+1 &= x+1 \\ \Leftrightarrow 4x^2+3x &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{3}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện và thử lại ta thấy không có giá trị nào thỏa mãn. Vậy $S = \emptyset$. □

PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG

Định nghĩa. Hai phương trình (cùng ẩn) gọi là tương đương nếu chúng có chung một tập hợp nghiệm. Nếu phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ tương đương với phương trình $f_2(x) = g_2(x)$ thì ta viết

$$f_1(x) = g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) = g_2(x)$$

Định lí 1. Nếu thực hiện các phép biến đổi sau đây trên một phương trình mà không làm thay đổi điều kiện của nó thì ta được một phương trình mới tương đương:

- Cộng hay trừ hai vế với cùng một số hay cùng một biểu thức.
- Nhân hoặc chia cả hai vế cùng với một số khác 0 hoặc cùng một biểu thức luôn có giá trị khác 0.

Chú ý:

- Hai phương trình bất kỳ vô nghiệm có cùng ẩn là tương đương với nhau.
- Chuyển vế và đổi dấu một biểu thức thực chất là thực hiện phép cộng hay trừ hai vế với biểu thức đó.
- Khi muốn nhấn mạnh hai phương trình có cùng tập xác định $\mathbb{D}$ (hay có cùng điều kiện xác định mà ta cũng kí hiệu là $\mathbb{D}$) và tương đương với nhau, ta nói:
 - Hai phương trình tương đương với nhau trên $\mathbb{D}$, hoặc
 - Với điều kiện $\mathbb{D}$, hai phương trình tương đương với nhau.

Dạng 4. Phương pháp chứng minh hai phương trình tương đương

Khi giải phương trình hoặc xét sự tương đương của hai phương trình thông thường ta sử dụng một trong những cách sau:

- Giải từng phương trình để so sánh các tập nghiệm
- Sử dụng các phép biến đổi tương đương: Các phép biến đổi sau mà không làm thay đổi điều kiện xác định của phương trình thì ta thu được phương trình mới tương đương:
 - Cộng hay trừ hai vế với cùng một số hay cùng một biểu thức.
 - Nhân hoặc chia cả hai vế cùng với một số khác 0 hoặc cùng một biểu thức luôn có giá trị khác 0.
 - Bình phương hai vế của một phương trình có hai vế luôn cùng dấu khi ẩn lấy mọi giá trị thuộc tập xác định của phương trình.

BÀI TẬP DẠNG 4

Ví dụ 1. Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai?

- $|x| = 2 \Leftrightarrow x = 2$
- $x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0$.

Lời giải.

- $|x| = 2 \Leftrightarrow x = 2$ là sai vì $|x| = 2 \Rightarrow x = 2$ hoặc $x = -2$
- $x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0$ là đúng vì hai phương trình $x - 1 = 0$ và $(x - 1)^2 = 0$ có chung tập nghiệm là $S = \{1\}$

□

Ví dụ 2. Cặp phương trình nào sau đây là tương đương?

- $3x - \frac{21}{4} = 0$ và $4x - 7 = 0$.
- $x^2 - 4x + 3 = 0$ và $-2x^2 + 8x - 6 = 0$

Lời giải.

- Phương trình $3x - \frac{20}{4} = 0$ có nghiệm $x = \frac{10}{6}$, phương trình $4x - 7 = 0$ có nghiệm $x = \frac{7}{4}$. Vậy hai phương trình đã cho không tương đương.
- Nhân hai vế của phương trình $x^2 - 4x + 3 = 0$ với -2 ta được phương trình $-2x^2 + 8x - 6 = 0$. Vậy hai phương trình đã cho tương đương.

□

Ví dụ 3. Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai?

- Cho phương trình $3x + \sqrt{x-2} = x^2$. Chuyển $\sqrt{x-2}$ sang vế phải thì ta thu được phương trình tương đương.
- Cho phương trình $3x + \sqrt{x-2} = x^2 + \sqrt{x-2}$. Lược bỏ $\sqrt{x-2}$ cả hai vế ta được phương trình tương đương.

Lời giải.

- a) Chuyển $\sqrt{x-2}$ sang về phải thì ta thu được phương trình tương đương vì tuân thủ phép biến đổi tương đương (Cộng hai vế của phương trình với $-\sqrt{x-2}$ và không làm thay đổi điều kiện). Khẳng định đã cho là đúng.
- b) Điều kiện của phương trình là: $x \leq 2$. Khi Lược bỏ $\sqrt{x-2}$ cả hai vế ta đã thay đổi điều kiện của phương trình ban đầu nên kết quả không thu được phương trình tương đương. Khẳng định ban đầu là sai.

□

Ví dụ 4. Giải phương trình :

$$\frac{5x+3}{4} - x = \frac{|2x-3|}{2} \quad (3.1)$$

Lời giải.

$$(3.1) \Leftrightarrow x+3 = 2|2x-3|$$

- Nếu $2x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$ thì $|2x-3| = 2x-3$.

$$\text{Khi đó: } (3.1) \Leftrightarrow x+3 = 2(2x-3) \Leftrightarrow x = 3 \text{ (thỏa điều kiện } x \geq \frac{3}{2})$$

- Nếu $2x-3 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$ thì $|2x-3| = 3-2x$.

$$\text{Khi đó: } (3.1) \Leftrightarrow x+3 = 2(3-2x) \Leftrightarrow x = \frac{3}{5} \text{ (thỏa điều kiện } x < \frac{3}{2})$$

Vậy phương trình (3.1) có hai nghiệm $x = 3$ và $x = \frac{3}{5}$

□

Ví dụ 5. Xác định m để phương trình $\frac{3x+2}{x^2+x+1} = 2$ và phương trình $-x^2+(1-m)x-m+\frac{1}{2} = 0$ tương đương.

Lời giải.

Vì $x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên ta có :

$$\frac{3x+2}{x^2+x+1} = 2 \Leftrightarrow 3x+2 = 2x^2+2x+2 \Leftrightarrow 2x^2-x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Để hai phương trình tương đương thì phương trình $-x^2+(1-m)x-m+\frac{1}{2} = 0$ phải có nghiệm $x=0$ và $x=\frac{1}{2}$. Thay $x=0$ và $x=\frac{1}{2}$ vào phương trình $-x^2+(1-m)x-m+\frac{1}{2} = 0$ ta được $m = -\frac{1}{2}$. Lúc

$$\text{đó phương trình đó trở thành: } x^2 - \frac{1}{2}x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy với $m = -\frac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Các phương trình nào sau đây là tương đương?

- a) $\sqrt{x-3} + x = \sqrt{x-3} + 1$ và $x = 1$

$$b) \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{9}{\sqrt{x^2+1}} \text{ và } x^2 = 9$$

Lời giải.

- a) Điều kiện thì hai phương trình $\sqrt{x-3}+x = \sqrt{x-3}+1$ là $x \geq 3$ nên phương trình $\sqrt{x-3}+x = \sqrt{x-3}+1$ vô nghiệm. Do đó không tương đương với phương trình $x = 1$.
- b) Ta có $x^2 + 1 > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên nhân hai vế của phương trình $\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{9}{\sqrt{x^2+1}}$ với $\sqrt{x^2+1}$ ta được phương trình $x^2 = 9$. Vậy hai phương trình đã cho tương đương. $\square$

Bài 2. Đúng hay sai?

- a) $\sqrt{3-x} = 1 \Leftrightarrow 3-x = 1$.
- b) $\sqrt{x-2} = 3-x \Leftrightarrow x-2 = (3-x)^2$

Lời giải.

- a) Vì hai vế đều không âm nên bình phương hai vế ta được phương trình tương đương. Hay $\sqrt{3-x} = 1 \Leftrightarrow 3-x = 1$ là đúng.
- b) Do vế phải của phương trình $\sqrt{x-2} = 3-x$ có thể cùng dấu hoặc trái dấu với vế trái nên bình phương hai vế chỉ nhận được phương trình hệ quả. Khẳng định $\sqrt{x-2} = 3-x \Leftrightarrow x-2 = (3-x)^2$ là sai. $\square$

Bài 3. Cách giải sau sai ở đâu?

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x+3} &= \frac{1}{x+3} - 3 \\ \Leftrightarrow x + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+3} &= -3 \\ \Leftrightarrow x &= -3 \end{aligned}$$

Lời giải.

Cách giải trên sai ở bước cuối cùng ta đã làm mất điều kiện của phương trình nên không thể nhận được phương trình tương đương, $x = -3$ không phải là nghiệm của phương trình đã cho. $\square$

Bài 4. Trong các phép biến đổi sau, phép biến đổi nào cho ta phương trình tương đương, phép biến đổi nào cho ta phương trình không tương đương?

- a) Lược bỏ số hạng $\frac{4}{x-2}$ ở cả hai vế của phương trình $x^2 - 4x + \frac{4}{x-2} = \frac{4}{x-2} - 4$.
- b) Lược bỏ số hạng $\frac{5}{x+2}$ ở cả hai vế của phương trình $x^2 + 1 + \frac{5}{x+2} = \frac{5}{x+2} + 2x$.

Lời giải.

- a) Khi ta lược bỏ số hạng $\frac{4}{x-2}$ ở cả hai vế của phương trình $x^2 - 4x + \frac{4}{x-2} = \frac{4}{x-2} - 4$ ta được phương trình $x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$, tuy nhiên nó lại không phải là nghiệm của phương trình đã cho. Nên phép biến đổi trên không nhận được phương trình tương đương.
- b) Với điều kiện $x \neq -2$ thì phương trình $x^2 + 1 + \frac{5}{x+2} = \frac{5}{x+2} + 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ nó cũng chính là nghiệm của phương trình đã cho sau khi lược bỏ đi hạng tử $\frac{5}{x+2}$ ở cả hai vế. Vậy kết quả của phép biến đổi trên ta vẫn thu được một phương trình tương đương.

□

Bài 5. Xác định m để các cặp phương trình sau đây tương đương với nhau?

- a) $2x - 3 = 0$ và $\frac{2mx}{x-2} + 2m + 1 = 0$.
 b) $x^2 - 4 = 0$ và $3x^2 + (m+3)x + 7m + 9 = 0$.

Lời giải.

- a) $2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$. Để hai phương trình tương đương thì $x = \frac{3}{2}$ phải là nghiệm của phương trình $\frac{2mx}{x-2} + 2m + 1 = 0$ hay $\frac{2m \cdot \frac{3}{2}}{\frac{3}{2} - 2} + 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{8}$.

Vậy với $m = -\frac{1}{8}$ thì hai phương trình tương đương.

- b) Giải phương trình $x^2 - 4 = 0$ ta được nghiệm $x = \pm 2$. Thay vào phương trình $3x^2 + (m+3)x + 7m + 9 = 0$ ta được $m = -3$, khi đó phương trình $3x^2 + (m+3)x + 7m + 9 = 0$ trở thành phương trình : $3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Vậy $m = -3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

Bài 6. Với giá trị nào của m thì hai phương trình $x^2 - 1 = 0$ và $2mx^2 + (m^2 - 4)x - m^2 = 0$ có chung một tập hợp nghiệm.

Lời giải.

Giải phương trình $x^2 - 1 = 0$ ta được nghiệm $x = \pm 1$

- Thay $x = 1$ vào phương trình $2mx^2 + (m^2 - 4)x - m^2 = 0$ ta được $m = 2$, khi đó phương trình $2mx^2 + (m^2 - 4)x - m^2 = 0$ trở thành phương trình : $4x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Vậy $m = 2$ thỏa yêu cầu bài toán.
- Thay $x = -1$ vào phương trình $2mx^2 + (m^2 - 4)x - m^2 = 0$ ta được $-2m^2 + 2m - 4 = 0$ phương trình này vô nghiệm nên không có giá trị của m .

Vậy $m = 2$ thì hai phương trình đã cho tương đương nhau hay là chúng có chung một tập nghiệm. □

Bài 7. Giải phương trình $|2x - 1| = |-5x - 2|$

Lời giải.

$$|2x - 1| = |-5x - 2| \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = -5x - 2 \\ 2x - 1 = 5x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = -3 \\ 3x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{7} \\ x = 1 \end{cases}$$

□

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 8. Tìm điều kiện của mỗi phương trình rồi suy ra tập nghiệm:

- a) $\sqrt{x} - \sqrt{1-x} = \sqrt{-x-2}$
 b) $x + \sqrt{x^2 - 9} = \sqrt{9 - x^2} - 3$
 c) $\frac{x}{\sqrt{x-2}} = -\frac{1}{\sqrt{x-2}}$
 d) $x + 2\sqrt{x+1} = 1 - \sqrt{-x-1}$

Lời giải.

a) Điều kiện $\begin{cases} x \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \\ -x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

b) Điều kiện $\begin{cases} x^2 - 9 \geq 0 \\ 9 - x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 3.$

- Với $x = 3$: thay vào phương trình ta thấy vô lí.
- Với $x = -3$: thay vào phương trình ta thấy thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-3\}$.

c) Điều kiện $x > 2$.

Vì $x > 2 > 0$ nên $VT > 0$. Mà $VP < 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

d) Điều kiện $\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ -x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$

Thay $x = -1$ vào phương trình ta thấy vô lí. Vậy phương trình vô nghiệm.

□

Bài 9. Tìm điều kiện của mỗi phương trình rồi suy ra tập nghiệm:

a) $\sqrt{-x^2 - (y+1)^2} + xy = (x+1)(y+1)$

b) $\sqrt{-x^2 + 6x - y^2 + 2y - 10} + x + y = 4 + (x-3)(y+2)$

Lời giải.

a) Điều kiện $-x^2 - (y+1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}.$

Thay $x = 0, y = -1$ vào phương trình ta thấy thỏa mãn. Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{(x; y)\} = \{(0; -1)\}$.

b) Điều kiện $-x^2 + 6x - y^2 + 2y - 10 \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}.$

Thay $x = 3, y = 1$ vào phương trình ta thấy thỏa mãn. Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{(x; y)\} = \{(3; 1)\}$.

□

Bài 10. Giải các phương trình sau:

a) $x^3 + \frac{1}{\sqrt{x-1}} = x$

b) $1 + \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} = x^2$

c) $x\sqrt{2x-1} = 1 - 2x$

Lời giải.

a) Điều kiện $x > 1$.

Vì $x > 1 \Rightarrow x^3 > x \Rightarrow VT > VP \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

b) Điều kiện $-1 < x < 1$.

Vì $-1 < x < 1 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow VT > VP \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

c) Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$.

$$\forall x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow VT \geq 0 \Rightarrow VP \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 1 - 2x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Thay $x = \frac{1}{2}$ vào phương trình ta thấy thỏa mãn. Vậy $x = \frac{1}{2}$ là nghiệm của phương trình. □

Bài 11. Giải các phương trình sau:

a) $(x^2 + x - 2)\sqrt{x+1} = 0$

b) $\frac{x}{2\sqrt{x-3}} = \frac{2}{\sqrt{x-3}}$

c) $x + \frac{1}{x-2} = \frac{2x-3}{x-2}$

d) $2x + \frac{3}{x-1} = \frac{3x}{x-1}$

Lời giải.

a) Điều kiện $x \geq -1$.

$$\text{Phương trình tương đương } \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ \sqrt{x+1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (TM)} \\ x = -2 \text{ (Loại)} \\ x = -1 \text{ (TM)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

b) Điều kiện $x > 3$.

Phương trình tương đương $x = 4$ (TM). Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{4\}$.

c) Điều kiện $x \neq 2$.

Phương trình tương đương $x - 1 = 2x - 3 \Leftrightarrow x = 2$ (Loại). Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \emptyset$.

d) Điều kiện $x \neq 1$.

Phương trình tương đương $2x = \frac{3(x-1)}{x-1} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ (TM). Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$. □

Bài 12. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình sau:

a) $\sqrt{4-x} - 2 = \sqrt{x} - x$

b) $3\sqrt{x+2} = \sqrt{2-x} + 2\sqrt{2}$

Lời giải.

a) Điều kiện $0 \leq x \leq 4$.

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

- Với $x = 0$ thay vào phương trình ta thấy thỏa mãn.
- Với $x = 1$ thay vào phương trình ta thấy không thỏa mãn.
- Với $x = 2$ thay vào phương trình ta thấy không thỏa mãn.
- Với $x = 3$ thay vào phương trình ta thấy không thỏa mãn.
- Với $x = 4$ thay vào phương trình ta thấy thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm nguyên của phương trình là $S = \{0; 4\}$.

b) Điều kiện $-2 \leq x \leq 2$.

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

- Với $x = -2$ thay vào phương trình ta thấy không thỏa mãn.

- Với $x = -1$ thay vào phương trình ta thấy không thỏa mãn.
- Với $x = 0$ thay vào phương trình ta thấy thỏa mãn.
- Với $x = 1$ thay vào phương trình ta thấy không thỏa mãn.
- Với $x = 2$ thay vào phương trình ta thấy không thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm nguyên của phương trình là $S = \{0\}$.

□

Bài 13. Giải các phương trình sau bằng cách bình phương hai vế:

a) $|x - 2| = x + 2$

b) $\sqrt{x - 3} = \sqrt{9 - 2x}$

c) $\sqrt{5 - 2x} = x - 1$

Lời giải.

a) $|x - 2| = x + 2 \Rightarrow (x - 2)^2 = (x + 2)^2 \Rightarrow x = 0.$

Thay $x = 0$ vào phương trình ta thấy thỏa mãn. Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{0\}$.

b) $\sqrt{x - 3} = \sqrt{9 - 2x} \Rightarrow x - 3 = 9 - 2x \Rightarrow x = 4.$

Thay $x = 4$ vào phương trình ta thấy thỏa mãn. Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{4\}$.

c) $\sqrt{5 - 2x} = x - 1 \Rightarrow 5 - 2x = (x - 1)^2 \Rightarrow x = \pm 2.$

- Thay $x = 2$ vào phương trình ta thấy thỏa mãn.
- Thay $x = -2$ vào phương trình ta thấy không thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{2\}$.

□

Bài 14. Xét sự tương đương của các phương trình sau:

a) $\frac{x^2 - 4x - 4}{\sqrt{x - 4}} = \sqrt{x - 4}$ và $\frac{x^2 - 4x - 5}{\sqrt{x - 1}} = 0$

b) $|2 - x| = 2x - 1$ và $x^2 - 1 = 0$

Lời giải.

a) Xét phương trình $\frac{x^2 - 4x - 4}{\sqrt{x - 4}} = \sqrt{x - 4}$ (1).

Điều kiện $x > 4$.

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - 4x - 4 = x - 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (Loại)} \\ x = 5 \text{ (TM)} \end{cases} \Rightarrow S_1 = \{5\}.$$

Xét phương trình $\frac{x^2 - 4x - 5}{\sqrt{x - 1}} = 0$ (2).

Điều kiện $x > 1$.

$$(2) \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (Loại)} \\ x = 5 \text{ (TM)} \end{cases} \Rightarrow S_2 = \{5\}.$$

Vì $S_1 = S_2$ nên hai phương trình đã cho tương đương.

b) Xét phương trình $|2 - x| = 2x - 1$ (1).

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Vì $|2 - x| \geq 0 \Rightarrow 2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}.$

- Xét $2 - x = 2x - 1 \Rightarrow x = 1$ (TM).
- Xét $2 - x = -2x + 1 \Rightarrow x = -1$ (Loại).

Vậy $S_1 = \{1\}$.

Xét phương trình $x^2 - 1 = 0$ (2).

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

$(2) \Leftrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow S_2 = \{\pm 1\}$.

Vì $S_1 \neq S_2$ nên hai phương trình đã cho không tương đương.

□

D CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Điều kiện xác định của phương trình $\frac{2x}{x^2+1} - 5 = \frac{3}{x^2+1}$ là

- A. $x \neq 1$. B. $x \neq -1$. C. $x \neq \pm 1$. D. $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Vì $x^2 + 1 \neq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 2. Điều kiện xác định của phương trình $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} = \sqrt{x-3}$ là

- A. $x > 3$. B. $x \geq 2$. C. $x \geq 1$. D. $x \geq 3$.

Lời giải.

$$\text{Phương trình xác định khi } \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 2 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3.$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 3. Điều kiện xác định của phương trình $\sqrt{x-2} + \frac{x^2+5}{\sqrt{7-x}} = 0$ là

- A. $x \geq 2$. B. $x < 7$. C. $2 \leq x \leq 7$. D. $2 \leq x < 7$.

Lời giải.

$$\text{Phương trình xác định khi } \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 7-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x < 7.$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 4. Điều kiện xác định của phương trình $\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x^2-1} = 0$ là

- A. $x \geq 0$. B. $x > 0$.
C. $x > 0$ và $x^2 - 1 \geq 0$. D. $x \geq 0$ và $x^2 - 1 > 0$.

Lời giải.

$$\text{Phương trình xác định khi } \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases}$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 5. Điều kiện xác định của phương trình $\frac{x^2}{\sqrt{x-2}} = \frac{8}{\sqrt{x-2}}$ là

- A. $x \neq 2$. B. $x \geq 2$. C. $x < 2$. D. $x > 2$.

Lời giải.

Phương trình xác định khi $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 6. Điều kiện xác định của phương trình $\frac{1}{x^2-4} = \sqrt{x+3}$ là

- A. $x \geq -3$ và $x \neq \pm 2$. B. $x \neq \pm 2$.
C. $x > -3$ và $x \neq \pm 2$. D. $x \geq -3$.

Lời giải.

$$\text{Phương trình xác định khi } \begin{cases} x^2 - 4 \neq 0 \\ x + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 2 \\ x \geq -3 \end{cases}$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 7. Điều kiện xác định của phương trình $\sqrt{x^2 - 4} = \frac{1}{x - 2}$ là

- A. $x \geq 2$ hoặc $x \leq -2$. B. $x \geq 2$ hoặc $x < -2$.
C. $x > 2$ hoặc $x < -2$. D. $x > 2$ hoặc $x \leq -2$.

Lời giải.

$$\text{Phương trình xác định khi } \begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \leq -2. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 8. Điều kiện xác định của phương trình $x + \frac{1}{\sqrt{2x+4}} = \frac{\sqrt{3-2x}}{x}$ là

- A. $x > -2$ và $x \neq 0$. B. $x > -2, x \neq 0$ và $x \leq \frac{3}{2}$.
C. $x > -2$ và $x < \frac{3}{2}$. D. $x \neq -2$ và $x \neq 0$.

Lời giải.

$$\text{Phương trình xác định khi } \begin{cases} 2x + 4 > 0 \\ 3 - 2x \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x \leq \frac{3}{2} \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 9. Điều kiện xác định của phương trình $x + 2 - \frac{1}{\sqrt{x+2}} = \frac{\sqrt{4-3x}}{x+1}$ là

- A. $x > -2$ và $x \neq -1$. B. $x > -2$ và $x < \frac{4}{3}$.
C. $x + 1 = (2 - x)^2$ và $x \leq \frac{4}{3}$. D. $x \neq -2$ và $x \neq -1$.

Lời giải.

$$\text{Phương trình xác định khi } \begin{cases} x + 2 > 0 \\ 4 - 3x \geq 0 \\ x + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x \leq \frac{4}{3} \\ x \neq -1. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 10. Điều kiện xác định của phương trình $\frac{\sqrt{2x+1}}{x^2+3x} = 0$ là

- A. $x \geq -\frac{1}{2}$. B. $x \geq -\frac{1}{2}$ và $x \neq -3$.
C. $x \geq -\frac{1}{2}$ và $x \neq 0$. D. $x \neq -3$ và $x \neq 0$.

Lời giải.

$$\text{Phương trình xác định khi } \begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \\ x^2 + 3x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x \neq 0 \\ x \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 11. Hai phương trình được gọi là tương đương khi

- A. Có cùng dạng phương trình. B. Có cùng tập xác định.
C. Có cùng tập hợp nghiệm. D. Tất cả đều đúng.

Lời giải.

Theo định nghĩa phương trình tương đương.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 12. Phương trình nào sau đây tương đương với phương trình $x^2 - 4 = 0$?

- A. $(2 + x)(-x^2 + 2x + 1) = 0$. B. $(x - 2)(x^2 + 3x + 2) = 0$.
C. $\sqrt{x^2 - 3} = 1$. D. $x^2 - 4x + 4 = 0$.

Lời giải.

Ta có $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$. Do đó, tập nghiệm của phương trình đã cho là $S_0 = \{-2; 2\}$.

+) Ta có $(2 + x)(-x^2 + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \\ -x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \pm \sqrt{2} \end{cases}$. Do đó, tập nghiệm của phương trình là $S_1 = \{-2; 1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\} \neq S_0$.

+) Ta có $(x - 2)(x^2 + 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ x^2 + 3x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$. Do đó, tập nghiệm của phương

trình là $S_2 = \{-2; -1; 2\} \neq S_0$.

+) Ta có $\sqrt{x^2 - 3} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 2$. Do đó, tập nghiệm của phương trình là $S_3 = \{-2; 2\} = S_0$.

+) Ta có $x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Do đó, tập nghiệm của phương trình là $S_4 = \{2\} \neq S_0$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 13. Phương trình nào sau đây tương đương với phương trình $x^2 - 3x = 0$?

- A. $x^2 + \sqrt{x - 2} = 3x + \sqrt{x - 2}$. B. $x^2 + \frac{1}{x - 3} = 3x + \frac{1}{x - 3}$.
C. $x^2\sqrt{x - 3} = 3x\sqrt{x - 3}$. D. $x^2 + \sqrt{x^2 + 1} = 3x + \sqrt{x^2 + 1}$.

Lời giải.

Ta có $x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$. Do đó, tập nghiệm của phương trình đã cho là $S_0 = \{0; 3\}$.

+) Ta có $x^2 + \sqrt{x - 2} = 3x + \sqrt{x - 2} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$. Do đó, tập nghiệm của

phương trình là $S_1 = \{3\} \neq S_0$.

+) Ta có $x^2 + \frac{1}{x - 3} = 3x + \frac{1}{x - 3} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \neq 0 \\ x^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$. Do đó, tập nghiệm của phương trình là $S_2 = \{0\} \neq S_0$.

+) Ta có $x^2\sqrt{x - 3} = 3x\sqrt{x - 3} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ \begin{cases} x^2 - 3x = 0 \\ \sqrt{x - 3} = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$. Do đó, tập nghiệm của

phương trình là $S_3 = \{3\} \neq S_0$.

+) Ta có $x^2 + \sqrt{x^2 + 1} = 3x + \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow x^2 = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$. Do đó, tập nghiệm của phương trình là

$$S_4 = \{0; 3\} = S_0.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 14. Cho phương trình $(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1) = 0$. Phương trình nào sau đây tương đương với phương trình đã cho?

A. $x - 1 = 0$.

B. $x + 1 = 0$.

C. $x^2 + 1 = 0$.

D. $(x - 1)(x + 1) = 0$.

Lời giải.

Ta có $(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) = 0$ (vì $x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$).

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 15. Phương trình nào sau đây **không** tương đương với phương trình $x + \frac{1}{x} = 1$?

A. $x^2 + \sqrt{x} = -1$.

B. $|2x - 1| + \sqrt{2x + 1} = 0$.

C. $x\sqrt{x - 5} = 0$.

D. $7 + \sqrt{6x - 1} = -18$.

Lời giải.

Ta có $x + \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 - x + 1 = 0 \end{cases}$ (vô nghiệm)

Do đó, tập nghiệm của phương trình đã cho là $S_0 = \emptyset$.

- Ta có $\begin{cases} x^2 \geq 0 \\ \sqrt{x} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + \sqrt{x} \geq 0$. Do đó, phương trình $x^2 + \sqrt{x} = -1$ vô nghiệm.

Tập nghiệm của phương trình là $S_1 = \emptyset = S_0$.

- Ta có $|2x - 1| + \sqrt{2x + 1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |2x - 1| = 0 \\ \sqrt{2x + 1} = 0 \end{cases}$ (vô nghiệm). Do đó, phương trình $|2x - 1| + \sqrt{2x + 1} = 0$ vô nghiệm. Tập nghiệm của phương trình là $S_2 = \emptyset = S_0$.

- Ta có $x\sqrt{x - 5} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 \geq 0 \\ \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{x - 5} = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 5$. Do đó, phương trình $x\sqrt{x - 5} = 0$ có tập nghiệm là $S_3 = \{5\} \neq S_0$.

- Ta có $\sqrt{6x - 1} \geq 0 \Rightarrow 7 + \sqrt{6x - 1} \geq 7 > -18$. Do đó, phương trình $7 + \sqrt{6x - 1} = -18$ vô nghiệm. Tập nghiệm của phương trình là $S_4 = \emptyset = S_0$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 16. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $3x + \sqrt{x - 2} = x^2 \Leftrightarrow 3x = x^2 - \sqrt{x - 2}$.

B. $\sqrt{x - 1} = 3x \Leftrightarrow x - 1 = 9x^2$.

C. $3x + \sqrt{x - 2} = x^2 + \sqrt{x - 2} \Leftrightarrow 3x = x^2$.

D. $\frac{2x - 3}{\sqrt{x - 1}} = \sqrt{x - 1} \Leftrightarrow 2x - 3 = (x - 1)^2$.

Lời giải.

$3x + \sqrt{x - 2} = x^2 \Leftrightarrow 3x = x^2 - \sqrt{x - 2}$ đúng vì trừ hai vế cho $\sqrt{x - 2}$ không làm thay đổi điều kiện của phương trình.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 17. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\sqrt{x-1} = 2\sqrt{1-x} \Leftrightarrow x-1=0$.

B. $x^2+1=0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}=0$.

C. $|x-2|=|x+1| \Leftrightarrow (x-2)^2=(x+1)^2$.

D. $x^2=1 \Leftrightarrow x=1$.

Lời giải.

$x^2=1 \Leftrightarrow x=1$ sai vì $x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 18. Chọn cặp phương trình tương đương trong các cặp phương trình sau:

A. $x+\sqrt{x-1}=1+\sqrt{x-1}$ và $x=1$.

B. $x+\sqrt{x-2}=1+\sqrt{x-2}$ và $x=1$.

C. $\sqrt{x}(x+2)=\sqrt{x}$ và $x+2=1$.

D. $x(x+2)=x$ và $x+2=1$.

Lời giải.

+) Ta có $x+\sqrt{x-1}=1+\sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$.

+) Ta có $x+\sqrt{x-2}=1+\sqrt{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$.

+) Ta có $\sqrt{x}(x+2)=\sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \begin{cases} x=0 \\ x+2=0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x=0 \text{ và } x+2=1 \Leftrightarrow x=-1$.

Do đó, $\sqrt{x}(x+2)=\sqrt{x}$ và $x+2=1$ không phải là cặp phương trình tương đương.

+) Ta có $x(x+2)=x \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases} \text{ và } x+2=1 \Leftrightarrow x=-1$.

Do đó, $x(x+2)=x$ và $x+2=1$ không phải là cặp phương trình tương đương.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 19. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $3x+\sqrt{x-2}=x^2 \Leftrightarrow 3x=x^2-\sqrt{x-2}$.

B. $\sqrt{x-1}=3x \Leftrightarrow x-1=9x^2$.

C. $3x+\sqrt{x-2}=x^2+\sqrt{x-2} \Leftrightarrow 3x=x^2$.

D. $\frac{2x-3}{\sqrt{x-1}}=\sqrt{x-1} \Leftrightarrow 2x-3=(x-1)^2$.

Lời giải.

Trừ hai vế cho $\sqrt{x-2}$ không làm thay đổi điều kiện của phương trình.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 20. Chọn cặp phương trình không tương đương trong các cặp phương trình sau:

A. $x+1=x^2-2x$ và $x+2=(x-1)^2$.

B. $3x\sqrt{x+1}=8\sqrt{3-x}$ và $6x\sqrt{x+1}=16\sqrt{3-x}$.

C. $x\sqrt{3-2x}+x^2=x^2+x$ và $x\sqrt{3-2x}=x$.

D. $\sqrt{x+2}=2x$ và $x+2=4x^2$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{x+2}=2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 0 \\ x+2=4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x=\frac{1 \pm \sqrt{33}}{8} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{33}}{8}$.

$x+2=4x^2 \Leftrightarrow x=\frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$. Do đó, $\sqrt{x+2}=2x$ và $x+2=4x^2$ không phải là cặp phương trình

tương đương.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 21. Tìm giá trị thực của tham số m để cặp phương trình sau tương đương: $2x^2 + mx - 2 = 0$ (1) và $2x^3 + (m + 4)x^2 + 2(m - 1)x - 4 = 0$ (2).

A. $m = 2$.

B. $m = 3$.

C. $m = \frac{1}{2}$.

D. $m = -2$.

Lời giải.

$$\text{Ta có (2)} \Leftrightarrow (x + 2)(2x^2 + mx - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ 2x^2 + mx - 2 = 0. \end{cases}$$

Do hai phương trình tương đương nên $x = -2$ cũng là nghiệm của phương trình (1).

Thay $x = -2$ vào (1), ta được $2(-2)^2 + m(-2) - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 3$.

Với $m = 3$, ta có

- (1) trở thành $2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ hoặc $x = \frac{1}{2}$.

- (2) trở thành $2x^3 + 7x^2 + 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2(2x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ hoặc $x = \frac{1}{2}$.

Suy ra hai phương trình tương đương. Vậy $m = 3$ thỏa mãn.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 22. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để cặp phương trình sau tương đương: $mx^2 - 2(m - 1)x + m - 2 = 0$ (1) và $(m - 2)x^2 - 3x + m^2 - 15 = 0$ (2).

A. $m = -5$.

B. $m = -5; m = 4$.

C. $m = 4$.

D. $m = 5$.

Lời giải.

$$\text{Ta có (1)} \Leftrightarrow (x - 1)(mx - m + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ mx - m + 2 = 0. \end{cases}$$

Do hai phương trình tương đương nên $x = 1$ cũng là nghiệm của phương trình (2).

$$\text{Thay } x = 1 \text{ vào (2), ta được } (m - 2) - 3 + m^2 - 15 = 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -5 \\ m = 4. \end{cases}$$

Với $m = -5$, ta có

- (1) trở thành $-5x^2 + 12x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{5}$ hoặc $x = 1$.

- (2) trở thành $-7x^2 - 3x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{10}{7}$ hoặc $x = 1$.

Suy ra hai phương trình không tương đương.

Với $m = 4$, ta có

- (1) trở thành $4x^2 - 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ hoặc $x = 1$.

- (2) trở thành $2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ hoặc $x = 1$.

Suy ra hai phương trình tương đương.

Vậy $m = 4$ thỏa mãn.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 23. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $\sqrt{x - 2} = 1 \Rightarrow x - 2 = 1$.

B. $\frac{x(x - 1)}{x - 1} = 1 \Rightarrow x = 1$.

C. $|3x - 2| = x - 3 \Rightarrow 8x^2 - 4x - 5 = 0$.

D. $\sqrt{x - 3} = \sqrt{9 - 2x} \Rightarrow 3x - 12 = 0$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } |3x - 2| = x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ (3x - 2)^2 = (x - 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 8x^2 - 6x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \begin{cases} x = \frac{5}{4} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

$$8x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{11}}{4}.$$

Do đó, phương trình $8x^2 - 4x - 5 = 0$ không phải là hệ quả của phương trình $|3x - 2| = x - 3$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 24. Cho phương trình $2x^2 - x = 0$. Trong các phương trình sau đây, phương trình nào không phải là hệ quả của phương trình đã cho?

A. $2x - \frac{x}{1-x} = 0$.

B. $4x^3 - x = 0$.

C. $(2x^2 - x)^2 + (x - 5)^2 = 0$.

D. $2x^3 + x^2 - x = 0$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } 2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}. \text{ Do đó, tập nghiệm của phương trình đã cho là } S_0 = \left\{0; \frac{1}{2}\right\}.$$

$$+) \text{ Ta có } 2x - \frac{x}{1-x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \neq 0 \\ 2x(1-x) - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Do đó, tập nghiệm của phương trình là } S_1 = \left\{0; \frac{1}{2}\right\} \supset S_0.$$

$$+) \text{ Ta có } 4x^3 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \frac{1}{2} \end{cases}. \text{ Do đó, tập nghiệm của phương trình là } S_2 = \left\{-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right\} \supset S_0.$$

$$+) \text{ Ta có } (2x^2 - x)^2 + (x - 5)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x = 0 \\ x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x = 0 \\ x = 5 \end{cases} \text{ (vô nghiệm)}. \text{ Do đó, tập nghiệm của phương trình là } S_3 = \emptyset \not\supset S_0.$$

$$+) \text{ Ta có } 2x^3 + x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = -1 \end{cases}. \text{ Do đó, tập nghiệm của phương trình là } S_2 = \left\{-1; 0; \frac{1}{2}\right\} \supset S_0.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 25. Cho hai phương trình: $x(x - 2) = 3(x - 2)$ (1) và $\frac{x(x - 2)}{x - 2} = 3$ (2). Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Phương trình (1) là hệ quả của phương trình (2).

B. Phương trình (1) và (2) là hai phương trình tương đương.

C. Phương trình (2) là hệ quả của phương trình (1).

D. Cả A, B, C đều sai.

Lời giải.

Ta có: Phương trình (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$. Do đó, tập nghiệm của phương trình 1 là $S_1 = \{2; 3\}$.

Phương trình (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \neq 0 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$. Do đó, tập nghiệm của phương trình 2 là $S_2 = 3$.

Vì $S_2 \subset S_1$ nên phương trình (1) là hệ quả của phương trình (2).

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 26. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2 - 2x} = \sqrt{2x - x^2}$ là

- A. $S = \{0\}$. B. $S = \emptyset$. C. $S = \{0; 2\}$. D. $S = \{2\}$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ 2x - x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ x^2 - 2x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Thử lại ta thấy cả $x = 0$ và $x = 2$ đều thỏa mãn phương trình.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 27. Phương trình $x(x^2 - 1)\sqrt{x - 1} = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải.

Điều kiện: $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Phương trình tương đương với $\begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \\ \sqrt{x - 1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = 1 \end{cases}$.

Đối chiếu điều kiện, ta được nghiệm của phương trình đã cho là $x = 1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 28. Phương trình $\sqrt{-x^2 + 6x - 9} + x^3 = 27$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải.

Điều kiện: $-x^2 + 6x - 9 \geq 0 \Leftrightarrow -(x - 3)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Thử lại ta thấy $x = 3$ thỏa mãn phương trình. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 29. Phương trình $\sqrt{(x - 3)^2(5 - 3x)} + 2x = \sqrt{3x - 5} + 4$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} (x - 3)^2(5 - 3x) \geq 0 \\ 3x - 5 \geq 0 \end{cases} \quad (*)$

Ta thấy $x = 3$ thỏa mãn điều kiện (*).

Nếu $x \neq 3$ thì $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 3x \geq 0 \\ 3x - 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{5}{3} \\ x \geq \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$.

Do đó điều kiện xác định của phương trình là $x = 3$ hoặc $x = \frac{5}{3}$.

Thay $x = 3$ và $x = \frac{5}{3}$ vào phương trình thấy chỉ có $x = 3$ thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 30. Phương trình $x + \sqrt{x-1} = \sqrt{1-x}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Thử lại $x = 1$ thì phương trình không thỏa mãn phương trình.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 31. Phương trình $\sqrt{2x} + \sqrt{x-2} = \sqrt{2-x} + 2$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Thử lại phương trình thấy $x = 2$ thỏa mãn. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 32. Phương trình $x + \frac{1}{x-1} = \frac{2x-1}{x-1}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

Điều kiện: $x \neq 1$.

Với điều kiện trên phương trình tương đương $x^2 - x + 1 = 2x - 1 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 2$.

Đối chiếu điều kiện ta được phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 33. Phương trình $(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-3} = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq 3$.

$$\begin{aligned} & (x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-3} = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ \sqrt{x-3} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta được phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 34. Phương trình $(x^2 - x - 2)\sqrt{x+1} = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq -1$.

$$(x^2 - x - 2)\sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ \sqrt{x+1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2. \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x = -1, x = 2$. Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 35. Số -1 là nghiệm của phương trình nào trong các phương trình sau?

A. $x^2 + 4x + 2 = 0$.

B. $2x^2 - 5x - 7 = 0$.

C. $-3x^2 + 5x - 2 = 0$.

D. $x^3 - 1 = 0$.

Lời giải.

Với phương trình $x^2 + 4x + 2 = 0$. Ta có $(-1)^2 + 4(-1) + 2 = -1 \neq 0$.

Với phương trình $2x^2 - 5x - 7 = 0$. Ta có $2(-1)^2 - 5(-1) - 7 = 0$.

Với phương trình $-3x^2 + 5x - 2 = 0$. Ta có $-3(-1)^2 + 5(-1) - 2 = -10 \neq 0$.

Với phương trình $x^3 - 1 = 0$. Ta có $(-1)^3 - 1 = -2 \neq 0$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 36. Nghiệm của phương trình $x^2 - 7x + 12 = 0$ có thể xem là hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số nào sau đây?

A. $y = x^2$ và $y = -7x + 12$.

B. $y = x^2$ và $y = -7x - 12$.

C. $y = x^2$ và $y = 7x + 12$.

D. $y = x^2$ và $y = 7x - 12$.

Lời giải.

Ta có $x^2 - 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 7x - 12$. Do đó, nghiệm của phương trình đã cho có thể xem là hoành độ giao điểm của 2 đồ thị hàm số $y = x^2$ và $y = 7x - 12$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 37. Tập nghiệm của phương trình $\frac{x^2 - 5x}{\sqrt{x-2}} = -\frac{4}{\sqrt{x-2}}$ là:

A. $S = \{1; 4\}$.

B. $S = \{1\}$.

C. $S = \emptyset$.

D. $S = \{4\}$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 2$. Khi đó

$$\frac{x^2 - 5x}{\sqrt{x-2}} = -\frac{4}{\sqrt{x-2}} \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (loại)} \\ x = 4 \text{ (nhận)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \{4\}$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 38. Điều kiện xác định của phương trình $x + \sqrt{x-2} = 3 + \sqrt{x-2}$ là

A. $x = 2$.

B. $x \geq 3$.

C. $x \geq 2$.

D. $x = 3$.

Lời giải.

Phương trình có nghĩa khi $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 39. Phương trình nào dưới đây tương đương với phương trình $x^2 - 3x = 0$

A. $x^2 + \sqrt{2x - 1} = 3x + \sqrt{2x - 1}$.

B. $x^2\sqrt{x - 3} = 3x\sqrt{x - 3}$.

C. $x^2 + \sqrt[3]{x - 3} = 3x + \sqrt[3]{x - 3}$.

D. $x^2 - x + \frac{1}{x} = 2x + \frac{1}{x}$.

Lời giải.

Phương trình $x^2 - 3x = 0$ có tập nghiệm là $S = \{0; 3\}$.

Phương trình $x^2 + \sqrt{2x - 1} = 3x + \sqrt{2x - 1}$ có tập nghiệm là $S = \{3\}$.

Phương trình $x^2 + \sqrt[3]{x - 3} = 3x + \sqrt[3]{x - 3}$ có tập nghiệm là $S = \{0; 3\}$.

Phương trình $x^2\sqrt{x - 3} = 3x\sqrt{x - 3}$ có tập nghiệm là $S = \{3\}$.

Phương trình $x^2 - x + \frac{1}{x} = 2x + \frac{1}{x}$ có tập nghiệm là $S = \{3\}$.

Do đó, phương trình $x^2 + \sqrt[3]{x - 3} = 3x + \sqrt[3]{x - 3}$ tương đương với phương trình đã cho.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 40. Xác định số nghiệm của phương trình $\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} + \frac{1}{x - 2} = 2 + \frac{1}{x - 2}$.

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Lời giải.

Điều kiện: $x \neq 1, x \neq 2$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

So điều kiện, ta loại nghiệm $x = 2$ nên phương trình đã cho vô nghiệm.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 41. Điều kiện xác định của phương trình $x + \sqrt{x - 2} = 3 + \sqrt{x - 2}$ là

A. $x = 2$.

B. $x \geq 3$.

C. $x \geq 2$.

D. $x = 3$.

Lời giải.

Điều kiện để phương trình xác định là $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 42. Phương trình nào dưới đây tương đương với phương trình $x^2 - 3x = 0$?

A. $x^2 + \sqrt{2x - 1} = 3x + \sqrt{2x - 1}$.

B. $x^2\sqrt{x - 3} = 3x\sqrt{x - 3}$.

C. $x^2 + \sqrt[3]{x - 3} = 3x + \sqrt[3]{x - 3}$.

D. $x^2 - x + \frac{1}{x} = 2x + \frac{1}{x}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3. \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{0; 3\}$.

Trong các trường phương án thì phương trình $x^2 + \sqrt[3]{x - 3} = 3x + \sqrt[3]{x - 3}$ có cùng tập nghiệm.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 43. Cặp $(x; y) = (1; 2)$ là nghiệm của phương trình nào sau đây?

A. $x - 2y = 5$.

B. $0x + 3y = 5$.

C. $3x + 2y = 7$.

D. $3x - 2y = 4$.

Lời giải.

Ta có $3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$ nên cặp $(1; 2)$ là nghiệm của phương trình $3x + 2y = 7$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 44. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Mọi $x, y \in \mathbb{R}$ là nghiệm của phương trình $2x - 3y + 4 = 0$.
 B. Tập nghiệm của phương trình $2x - 3y + 4 = 0$ có biểu diễn hình học là một đường thẳng.
 C. $(1; 2)$ là một nghiệm của phương trình $2x - 3y + 4 = 0$.
 D. Phương trình $2x - 3y + 4 = 0$ có vô số nghiệm.

Lời giải.

Ta thấy $2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 4 = 4 \neq 0$ nên $(0; 0)$ không là nghiệm của phương trình $2x - 3y + 4 = 0$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 45. Tìm điều kiện xác định của phương trình $x^2 + 3 = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$.

- A. $x \in \mathbb{R}$. B. $x \in [1; +\infty)$. C. $x \in (1; +\infty)$. D. $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Lời giải.

Điều kiện của phương trình là $x - 1 > 0$ hay $x > 1$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 46. Điều kiện của phương trình $\frac{4x}{x-3} + x = 0$ là

- A. $x \geq 3$. B. $x > 3$. C. $x \neq -3$. D. $x \neq 3$.

Lời giải.

Điều kiện: $x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 47. Điều kiện của phương trình $\sqrt{x-5} = \sqrt{5-x}$ là

- A. $x \geq 5$. B. $x = 5$. C. $x \leq 5$. D. $-5 \leq x \leq 5$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x - 5 \geq 0 \\ 5 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 48. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\frac{3x+1}{x-5} = \frac{16}{x-5}$.

- A. $S = \emptyset$. B. $S = \{5\}$. C. $S = \left\{\frac{17}{3}\right\}$. D. $S = \left\{\frac{47}{3}\right\}$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 5$ (*)

Với điều kiện (*), phương trình đã cho tương đương với $3x + 1 = 16 \Leftrightarrow x = 5$ (không thỏa mãn điều kiện (*)).

Vậy $S = \emptyset$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 49. Trong các phương trình sau, phương trình nào tương đương với phương trình $x^2 = 1$?

- A. $|x| = 1$. B. $x^2 + 3x - 4 = 0$. C. $x^2 - 3x - 4 = 0$. D. $x^2 + \sqrt{x} = 1 + \sqrt{x}$.

Lời giải.

Phương trình $x^2 = 1$ và phương trình $|x| = 1$ có cùng tập nghiệm $S = \{-1; 1\}$ nên chúng tương đương.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 50. Tìm điều kiện xác định của phương trình $\sqrt{\frac{1}{x-1}} = \frac{x-1}{x}$.

A. $x \geq 0$.

B. $x > 1$.

C. $x \geq 1$.

D. $x \geq 0$ và $x \neq 1$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện của phương trình là } \begin{cases} \frac{1}{x-1} > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 51. Trong các phương trình sau, phương trình nào có nghiệm?

A. $\frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x-4}} = 0$.

B. $\sqrt{2x-3} = -6$.

C. $\frac{x^2 - 7x + 6}{\sqrt{1-x}} = 0$.

D. $\frac{2x-1}{x} = 1$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \frac{2x-1}{x} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ 2x-1 = x \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 52. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của phương trình $x^2 + 1 = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

A. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

B. $\mathcal{D} = [1; +\infty)$.

C. $\mathcal{D} = (1; +\infty)$.

D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho xác định khi $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 53. Cho phương trình $\frac{x-2}{\sqrt{x-3}} = \frac{2}{\sqrt{x-3}}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. $x = 2$ là nghiệm của phương trình.

B. $x = -2$ là nghiệm của phương trình.

C. $x = 4$ là nghiệm của phương trình.

D. Phương trình vô nghiệm.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x > 3$.

$$\text{Phương trình đã cho tương đương } \begin{cases} x > 3 \\ x-2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 54. Tìm điều kiện xác định của phương trình $\sqrt{2x-3} = \sqrt{7-x}$.

A. $x \geq \frac{3}{2}$.

B. $x \leq 7$.

C. $\frac{3}{2} < x < 7$.

D. $\frac{3}{2} \leq x \leq 7$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện xác định: } \begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ 7-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq x \leq 7.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 55. Tìm m để phương trình $2x^2 - 3x + 5 - 2m = 0$ nhận $x = -4$ làm nghiệm.

A. $m = \frac{49}{2}$.

B. $m = -\frac{49}{2}$.

C. $m = 49$.

D. $m = -49$.

Lời giải.

Phương trình đã cho có nghiệm là $x = -4$ khi và chỉ khi

$$2 \cdot (-4)^2 - 3 \cdot (-4) + 5 - 2m = 0 \Leftrightarrow 49 - 2m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{49}{2}.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 56. Cho hai phương trình $|x| = 1$ (1) và $x^2 - 3x + 2 = 0$ (2). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. (1) là hệ quả của (2).
- B. (2) là hệ quả của (1).
- C. $(1) \Leftrightarrow (2)$.
- D. $x = 1$ là nghiệm chung của hai phương trình.

Lời giải.

Để thấy $x = 1$ là nghiệm chung của hai phương trình.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 57. Trong các cặp phương trình sau, cặp phương trình nào tương đương với nhau?

- A. $|x| = 2$ và $x - 2 = 0$.
- B. $|x - 2| = 1$ và $|x| - 2 = 1$.
- C. $x^2 + 3|x| + 2 = 0$ và $x^2 + 3x + 2 = 0$.
- D. $2x - 1 = 0$ và $\frac{(x+2)(2x-1)}{\sqrt{x+1}} = 0$.

Lời giải.

Để thấy, phương trình $2x - 1 = 0$ có tập nghiệm là $\left\{\frac{1}{2}\right\}$. Ta có

$$\frac{(x+2)(2x-1)}{\sqrt{x+1}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ (x+2)(2x-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Vậy hai phương trình có cùng tập nghiệm, hay chúng tương đương với nhau.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 58. Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ với tham số m . Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm (nếu có) của phương trình. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. Khi $m = 3$ thì $|x_1 - x_2| = 4\sqrt{2}$.
- B. Khi $m = 2$ thì $|x_1 - x_2| = 4$.
- C. Khi $m = 1$ thì $|x_1 - x_2| = 2\sqrt{2}$.
- D. Tồn tại giá trị của m để $x_1 = x_2$.

Lời giải.

$\Delta = m^2 - m + 2 > 0$ với mọi m . Do đó phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt.

Vậy không thể tồn tại giá trị của m để $x_1 = x_2$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 59. Cho phương trình $a(x - a + 2) = a(x - 1) + 2$. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau đây

- A. Nếu $a = 0$ thì phương trình có nghiệm.
- B. Nếu $a \neq 1$ thì phương trình vô nghiệm.
- C. Nếu $a \neq 2$ thì phương trình vô nghiệm.
- D. Nếu $a \neq 1$ và $a \neq 2$ thì phương trình vô nghiệm.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với $a^2 - 3a + 2 = 0$ (trong đó a là tham số).

Khi đó phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi $a^2 - 3a + 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ a \neq 2 \end{cases}$.

Chọn đáp án **D**

□

- Câu 60.** Phương trình nào sau đây là phương trình hệ quả của phương trình $\frac{2x+4}{2-x} = \frac{-x^2+4}{x-2}$?
- A. $(5x+6)(x-4) = x^2(4-x)$. B. $(x-2)^2 = 0$.
 C. $x^2 - 6x + 8 = 0$. D. $(x-2)(2x+4) = (x-2)(-x^2+4)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \neq 2$.

$$\text{Ta có } \frac{2x+4}{2-x} = \frac{-x^2+4}{x-2} \Leftrightarrow 2x+4 = x^2-4 \Leftrightarrow x^2-2x-8=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-2. \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \{4; -2\}$.

Xét từng đáp án ta có

$$\bullet (5x+6)(x-4) = x^2(4-x) \Leftrightarrow \begin{cases} x-4=0 \\ 5x+6=-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x^2+5x+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-2 \\ x=-3. \end{cases}$$

Nên có tập nghiệm là $\{-3; -2; 4\}$.

$$\bullet (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x=2. \text{ Nên có tập nghiệm là } \{2\}.$$

$$\bullet x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=2 \end{cases}. \text{ Nên có tập nghiệm là } \{2; 4\}.$$

$$\bullet (x-2)(2x+4) = (x-2)(-x^2+4) \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ 2x+4=-x^2+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x^2+2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=0 \\ x=-2. \end{cases}$$

Nên có tập nghiệm là $\{-2; 0; 2\}$.

Vậy phương trình hệ quả của phương trình đã cho là $(5x+6)(x-4) = x^2(4-x)$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 61. Tập xác định của phương trình $\frac{2x+1}{\sqrt{4-5x}} + 2x - 3 = 5x - 1$ là

A. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{4}{5}\right\}$. B. $\left(-\infty; \frac{4}{5}\right]$. C. $\left(-\infty; \frac{4}{5}\right)$. D. $\left(\frac{4}{5}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Phương trình xác định khi và chỉ khi $4-5x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{5}{4}$.

Vậy tập xác định của phương trình là $\mathcal{D} = \left(-\infty; \frac{4}{5}\right)$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 62. Trong các phương trình sau, phương trình nào tương đương với phương trình $x-1=0$?

A. $2x-2=0$. B. $x+2=0$. C. $(x-1)(x+2)=0$. D. $x+1=0$.

Lời giải.

Ta có $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

$$\bullet 2x-2=0 \Leftrightarrow x=1.$$

$$\bullet x+2=0 \Leftrightarrow x=-2.$$

$$\bullet (x+1)(x+2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2. \end{cases}$$

$$\bullet x+1=0 \Leftrightarrow x=-1.$$

Vậy $2x - 2 = 0$ tương đương với $x - 1 = 0$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 63. Số nghiệm của phương trình $x + \sqrt{x-4} = \sqrt{4-x} + 4$ là

- A. Một nghiệm. B. Vô nghiệm. C. Vô số nghiệm. D. Hai nghiệm.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x-4 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Thế $x = 4$ vào phương trình $x + \sqrt{x-4} = \sqrt{4-x} + 4$ ta thấy thỏa mãn, nên phương trình có nghiệm là $x = 4$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 64. Tập nghiệm của phương trình $x + \sqrt{x} = \sqrt{x} - 2$ là

- A. $S = \mathbb{R}$. B. $S = \{-2\}$. C. $S = \emptyset$. D. $S = \{0\}$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$.

$$x + \sqrt{x} = \sqrt{x} - 2 \Leftrightarrow x = -2 \text{ (loại)}.$$

Vậy tập nghiệm phương trình là $S = \emptyset$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 65. Điều kiện xác định của phương trình $x - 3\sqrt{x-5} = 0$ là

- A. $x > 5$. B. $x \leq 5$. C. $x \geq 5$. D. $x \geq 3$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 66. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để phương trình $5x - 3 = -a + 3x$ có nghiệm âm.

- A. $a < 3$. B. $a \neq 3$. C. $a > 3$. D. $a > 0$.

Lời giải.

$$5x - 3 = -a + 3x \Leftrightarrow x = \frac{3-a}{2}. \text{ Để phương trình có nghiệm âm thì } \frac{3-a}{2} < 0 \Leftrightarrow a > 3.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 67. Phương trình $x^2 = 3x$ tương đương với phương trình nào sau đây?

- A. $x^2 + \sqrt{x-2} = 3x + \sqrt{x-2}$. B. $x^2 + \frac{1}{x-3} = 3x + \frac{1}{x-3}$.
C. $2x^2 + \sqrt{x+1} = 6x + \sqrt{x+1}$. D. $x^2 \cdot \sqrt{x-3} = 3x \cdot \sqrt{x-3}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } x^2 = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3. \end{cases}$$

Ta xét các phương trình

$$\text{a) } x^2 + \sqrt{x-2} = 3x + \sqrt{x-2}.$$

Điều kiện: $x \geq 2$.

$$\text{Phương trình trở thành } x^2 = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (\text{loại}) \\ x = 3 & (\text{nhận}). \end{cases}$$

Vậy phương trình này không tương đương với phương trình đã cho.

b) $x^2 + \frac{1}{x-3} = 3x + \frac{1}{x-3}$.

Điều kiện: $x \neq 3$.

Phương trình trở thành $x^2 = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (\text{nhận}) \\ x = 3 & (\text{loại}). \end{cases}$

Vậy phương trình này không tương đương với phương trình đã cho.

c) $2x^2 + \sqrt{x+1} = 6x + \sqrt{x+1}$.

Điều kiện: $x \geq -1$.

Phương trình trở thành $2x^2 = 6x \Leftrightarrow x^2 = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (\text{nhận}) \\ x = 3 & (\text{nhận}). \end{cases}$

Vậy phương trình này tương đương với phương trình đã cho.

d) $x^2 \cdot \sqrt{x-3} = 3x \cdot \sqrt{x-3}$.

Điều kiện: $x \geq 3$.

$x^2 \cdot \sqrt{x-3} = 3x \cdot \sqrt{x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3x \\ \sqrt{x-3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3. \end{cases}$

Kết hợp với điều kiện thì phương trình có nghiệm $x = 3$.

Vậy phương trình này không tương đương với phương trình đã cho.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 68. Cho phương trình $(x^2 - 4) \cdot \sqrt{-x} = 0$ có tập nghiệm là S . Số phần tử của tập S là

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải.

Điều kiện $-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$.

Có $(x^2 - 4) \cdot \sqrt{-x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ \sqrt{-x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \\ x = 0. \end{cases}$

So với điều kiện ta nhận các nghiệm $x = -2; x = 0$.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 69. Tìm tập nghiệm S của phương trình $3x + \sqrt{1-x} = 4 + \sqrt{x-1}$.

A. $S = \left\{\frac{4}{3}\right\}$.

B. $S = \left\{1; \frac{4}{3}\right\}$.

C. $S = \emptyset$.

D. $S = \{1\}$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$.

Tuy nhiên, $x = 1$ không thỏa mãn phương trình $3x + \sqrt{1-x} = 4 + \sqrt{x-1}$ nên phương trình đã cho vô nghiệm.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 70. Cho phương trình $\sqrt{x+1} = x-1$ (1). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Phương trình (1) có tập xác định là $[1; +\infty)$.

B. Phương trình (1) tương đương với phương trình $x+1 = (x-1)^2$.

C. Tập xác định của phương trình (1) chứa đoạn $[-1; 1]$.

D. Phương trình (1) vô nghiệm.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = [-1; +\infty)$.

$$\text{Ta có } \sqrt{x+1} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x+1 = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Suy ra phương trình có nghiệm $x = 3$.

Vậy khẳng định “Tập xác định của phương trình (1) chứa đoạn $[-1; 1]$ ” là khẳng định đúng.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 71. Cho phương trình $ax + b = 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Nếu $a \neq 0$ thì phương trình có một nghiệm duy nhất.
- B. Nếu $a = 0$ và $b \neq 0$ thì phương trình có nghiệm.
- C. Nếu $a = 0$ và $b = 0$ thì phương trình vô nghiệm.
- D. Nếu $a = 0$ thì phương trình có nghiệm.

Lời giải.

Nếu $a = 0$ thì phương trình trở thành $0x = -b$. Khi đó nếu $b \neq 0$ thì phương trình vô nghiệm và $b = 0$ thì phương trình có nghiệm.

Nếu $a \neq 0$ thì phương trình có một nghiệm duy nhất.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 72. Tích các nghiệm của phương trình $x^2 - 3x - 2 = 0$ là

- A. 2.
- B. -2.
- C. 3.
- D. -3.

Lời giải.

$$x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \\ x_2 = \frac{3 - \sqrt{17}}{2} \end{cases} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = -2.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 73. Điều kiện xác định của phương trình $\sqrt{x-2} + \frac{x^2+5}{\sqrt{7-x}} = 0$ là

- A. $2 \leq x < 7$.
- B. $x \geq 2$.
- C. $2 \leq x \leq 7$.
- D. $x < 7$.

Lời giải.

$$\text{Hàm số xác định khi } \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 7-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x < 7.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 74. Phương trình nào sau đây tương đương với phương trình $x^2 = 3x$?

- A. $x^2 + \frac{1}{x-3} = 3x + \frac{1}{x-3}$.
- B. $x^2 + \sqrt{x^2+1} = 3x + \sqrt{x^2+1}$.
- C. $x^2 + \sqrt{x-2} = 3x + \sqrt{x-2}$.
- D. $x^2\sqrt{x-3} = 3x\sqrt{x-3}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } x^2 = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3. \end{cases}$$

- $x^2 + \frac{1}{x-3} = 3x + \frac{1}{x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x^2 = 3x \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$
- $x^2 + \sqrt{x^2+1} = 3x + \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow x^2 = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3. \end{cases}$
- $x^2 + \sqrt{x-2} = 3x + \sqrt{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 = 3x \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$
- $x^2\sqrt{x-3} = 3x\sqrt{x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 = 3x \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$

Vậy phương trình " $x^2 + \sqrt{x^2+1} = 3x + \sqrt{x^2+1}$ " tương đương với phương trình đã cho.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 75. Điều kiện xác định của phương trình $x^2 + 2x = \sqrt{x-3} - 1$ là

- A. $x \geq 1$. B. $x \geq 3$. C. $x > 3$. D. $x \geq 2$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của phương trình $x^2 + 2x = \sqrt{x-3} - 1$ là $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 76. Phương trình $\sqrt{x-2} = \sqrt{2-x}$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 2. B. 1. C. Vô số nghiệm. D. Vô nghiệm.

Lời giải.

Phương trình $\sqrt{x-2} = \sqrt{2-x}$ xác định khi $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$. Thử $x = 2$ vào phương trình ta thấy thỏa nên phương trình có một nghiệm duy nhất là $x = 2$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 77. Tìm tập xác định của phương trình $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} = \sqrt{x-3}$.

- A. $\mathcal{D} = [3; +\infty)$. B. $\mathcal{D} = [2; +\infty)$. C. $\mathcal{D} = (3; +\infty)$. D. $\mathcal{D} = [1; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện để phương trình có nghĩa là $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3$.

Vậy tập xác định của phương trình là $\mathcal{D} = [3; +\infty)$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 78. Cho phương trình $(x^2 + 9) \cdot (x - 9) \cdot (x + 9) = 0$. Phương trình nào sau đây tương đương với phương trình đã cho?

- A. $x + 9 = 0$. B. $x - 9 = 0$.
C. $(x - 9) \cdot (x + 9) = 0$. D. $x^2 + 9 = 0$.

Lời giải.

Ta có $(x^2 + 9) \cdot (x - 9) \cdot (x + 9) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 9$.

Trong các phương trình đã cho thì chỉ có phương trình $(x - 9) \cdot (x + 9) = 0$ cũng có các nghiệm là $x = \pm 9$.

Do đó phương trình này tương đương với phương trình đã cho.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 79. Điều kiện xác định của phương trình $x - 2\sqrt{x-3} = 0$ là

- A. $x \geq 3$. B. $x \leq 3$. C. $x < 3$. D. $x > 3$.

Lời giải.

Phương trình xác định $\Leftrightarrow x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 80. Phương trình nào sau đây vô nghiệm?

- A. $x - \sqrt{x-3} = 3 + \sqrt{x-3}$. B. $x + \sqrt{x} = \sqrt{x} + 2$.
C. $\sqrt{x-4} + 2 = x + \sqrt{4-x}$. D. $\sqrt{x-2} = \sqrt{2-x}$.

Lời giải.

Xét phương trình $\sqrt{x-4} + 2 = x + \sqrt{4-x}$ điều kiện xác định $x = 4$.

Thay $x = 4$ và phương trình ta được $0 + 2 = 4 + 0$ vô lý, vậy phương trình vô nghiệm.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 81. Tìm điều kiện của ẩn số x để phương trình $\sqrt{x+1} = 2 - x$ xác định.

- A. $x \leq -1$. B. $x \leq 2$. C. $x \geq -1$. D. $x \geq 2$.

Lời giải.

Điều kiện $x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 82. Phương trình nào sau đây là phương trình hệ quả của phương trình $\frac{x^2+x}{x+1} = 3$?

- A. $3(x^2+x) = x+1$. B. $x^2-2x-3=0$. C. $x^2+x=3$. D. $x^2+x=0$.

Lời giải.

Ta có $\frac{x^2+x}{x+1} = 3 \Rightarrow x^2+x = 3(x+1) \Leftrightarrow x^2-2x-3=0$.

Vậy $x^2-2x-3=0$ là phương trình hệ quả của phương trình đã cho.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 83. Phương trình $x^2 - 4x + 3 = 0$ có tập nghiệm là tập hợp nào sau đây?

- A. $T = \{-3; -1\}$. B. $W = \{1; 3\}$. C. $S = (1; 3)$. D. $V = (-3; -1)$.

Lời giải.

Ta có $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3. \end{cases}$

Tập nghiệm của phương trình là $W = \{1; 3\}$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 84. Cho phương trình $2x - \frac{3}{x} = x^2 - \frac{3}{x}$ (1). Phương trình nào dưới đây tương đương với phương trình (1)?

- A. $2x = x^2$. B. $-\frac{3}{x} = x^2 - 2x - \frac{3}{x}$.
C. $\left(2x - \frac{3}{x}\right)^2 = \left(x^2 - \frac{3}{x}\right)^2$. D. $2x^2 - 3 = x^2 - 3$.

Lời giải.

Chuyển vế và đổi dấu là một phép biến đổi tương đương, do đó $-\frac{3}{x} = x^2 - 2x - \frac{3}{x}$ tương đương với (1).

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 85. Điều kiện xác định của phương trình $\sqrt{2-x} + \sqrt{7+x} = 2$ là

- A. $x \in (-7; 2)$. B. $x \in [2; +\infty]$. C. $x \in [-7; 2]$. D. $x \in \mathbb{R} \setminus \{-7; 2\}$.

Lời giải.

$$\text{ĐKXD: } \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ 7+x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq -7 \end{cases}.$$

Vậy $\mathcal{D} = [-7; 2]$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 86. Điều kiện xác định của phương trình $x + \frac{\sqrt{x+2}}{x^2+1} = \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+1}}$ là

- A. $x \geq -2$. B. $x > 1$. C. $\begin{cases} x \geq -2 \\ x > 1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x \geq -2 \\ x \neq 1 \end{cases}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của phương trình là

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x^2+1 \neq 0 \\ x^2-2x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \in \mathbb{R} \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \neq 1 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 87. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\frac{\sqrt{x^2-3x} \cdot \sqrt{4-x^2}}{x(x+2)} = 0$.

- A. $S = \{2\}$. B. $S = \{2; 3\}$. C. $S = \{3\}$. D. $S = \emptyset$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^2-3x \geq 0 \\ 4-x^2 \geq 0 \\ x(x+2) \neq 0 \end{cases} \text{ . Khi đó ta có}$$

$$\frac{\sqrt{x^2-3x} \cdot \sqrt{4-x^2}}{x(x+2)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2-3x = 0 \\ 4-x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Thử lại ta thấy không có giá trị x nào thoả mãn nên phương trình vô nghiệm.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 88. Trong các phương trình sau, phương trình nào tương đương với phương trình $x-1=0$?

- A. $x+2=0$. B. $x+1=0$. C. $2x-2=0$. D. $(x-1)(x+2)=0$.

Lời giải.

Ta có $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Ngoài ra, ta có

$$x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2,$$

$$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1,$$

$$2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1,$$

$$(x - 1)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2. \end{cases}$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 89. Cho phương trình $f(x) = 0$ có tập nghiệm $S_1 = \{m; 2m - 1\}$ và phương trình $g(x) = 0$ có tập nghiệm $S_2 = [1; 2]$. Tìm tất cả giá trị m để phương trình $g(x) = 0$ là phương trình hệ quả của phương trình $f(x) = 0$.

A. $1 < m < \frac{3}{2}$.

B. $1 \leq m \leq 2$.

C. $m \in \emptyset$.

D. $1 \leq m \leq \frac{3}{2}$.

Lời giải.

Để phương trình $g(x) = 0$ là phương trình hệ quả của phương trình $f(x) = 0$ thì

$$\begin{cases} 1 \leq m \leq 2 \\ 1 \leq 2m - 1 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq m \leq 2 \\ 1 \leq m \leq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m \leq \frac{3}{2}.$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 90. Điều kiện xác định của phương trình $\frac{2x}{x^2 + 1} - 5 = \frac{3}{x^2 + 1}$ là

A. $x \neq 1$.

B. $\forall x \in \mathbb{R}$.

C. $x \neq 1$ và $x \neq -1$.

D. $x \neq -1$.

Lời giải.

Do $x^2 + 1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên phương trình đã cho xác định $\forall x \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 91. Cho phương trình $\frac{16}{x^3} + x - 4 = 0$, giá trị nào của x là nghiệm của phương trình đã cho?

A. $x = 2$.

B. $x = 0$.

C. $x = 3$.

D. $x = 5$.

Lời giải.

Cách 1: Nhận thấy thay $x = 2$ vào phương trình thấy thỏa mãn nên $x = 2$ là nghiệm của phương trình.

Cách 2: Điều kiện: $x \neq 0$.

$$\text{Phương trình tương đương với } x^4 - 4x^3 + 16 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^3 - 2x^2 - 4x - 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3,67857351. \end{cases}$$

Do đó $x = 2$ là nghiệm của phương trình.

Chọn đáp án **A** □

Câu 92. Trong các phép biến đổi sau, biến đổi nào **sai**?

A. $x - 1 = 2x - 3 \Rightarrow (x + 1)(x - 1) = (x + 1)(2x - 3)$.

B. $x - 1 = 2x - 3 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 1) = (x + 1)(2x - 3)$.

C. $(x + 1)(x - 1) = (x + 1)(2x - 3) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 2x - 3 \\ x + 1 = 0 \end{cases}$.

D. Nếu $x > -1$ thì $(x + 1)(x - 1) = (x + 1)(2x - 3) \Leftrightarrow x - 1 = 2x - 3$.

Lời giải.

Nhận thấy trong đáp án B phương trình $x - 1 = 2x - 3$ có nghiệm $x = 2$ trong khi phương trình $(x + 1)(x - 1) = (x + 1)(2x - 3)$ có nghiệm $x = -1; x = 2$.

Hai phương trình không có cùng tập nghiệm nên không tương đương

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 93. Tìm tập nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2 - x - 2} = \sqrt{x - 2}$.

A. $S = \{-1; 2\}$.

B. $S = \{0\}$.

C. $S = \{2\}$.

D. $S = \{0; 2\}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $\begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$.

Ta có

$$\sqrt{x^2 - x - 2} = \sqrt{x - 2} \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2. \end{cases}$$

So với điều kiện xác định, ta được tập nghiệm cần tìm là $S = \{2\}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 94. Tìm tập nghiệm của phương trình $\sqrt{x - 5} = 2$.

A. $S = \{3\}$.

B. $S = \{9\}$.

C. $\emptyset$.

D. $S = \{7\}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$.

Với điều kiện trên, ta có

$$\sqrt{x - 5} = 2 \Leftrightarrow x - 5 = 4 \Leftrightarrow x = 9 \text{ (TMDK)}.$$

Vậy $x = 9$ là nghiệm cần tìm.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 95. Nghiệm của phương trình $\sqrt{3 + x} = x + 1$ là

A. $x = 1$.

B. $x = 1, x = -2$.

C. $x = -1$.

D. $x = 2, x = -1$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{3 + x} = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 3 + x = (x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 96. Số nghiệm của phương trình $2x + \frac{1}{\sqrt{x+1}} = -x^2 + \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. vô số.

Lời giải.

Điều kiện của phương trình là $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.

Khi đó phương trình tương đương với $2x = -x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (\text{nhận}) \\ x = -2 & (\text{loại}). \end{cases}$

Vậy phương trình có 1 nghiệm.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 97. Cho phương trình $\frac{x}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{2}{x^2-4}$. Tập nghiệm của phương trình là
 A. $S = \{0\}$. B. $S = \{0; -1\}$. C. $S = \{0; 1\}$. D. $S = \{-1\}$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -2. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{x-2} - \frac{1}{x+2} &= \frac{2}{x^2-4} \Leftrightarrow x(x+2) - (x-2) = 2 \\ \Leftrightarrow x^2 + x &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (\text{nhận}) \\ x = -1 & (\text{nhận}). \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{0; -1\}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 98. Cho phương trình $x^2 + 3x - \frac{x+2}{\sqrt{2-x}} = 10 - \frac{x+2}{\sqrt{2-x}}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- A. Phương trình có một nghiệm âm.
- B. Phương trình có hai nghiệm dương.
- C. Phương trình có một nghiệm dương.
- D. Phương trình có một nghiệm âm và một nghiệm dương.

Lời giải.

$$\text{Ta có } x^2 + 3x - \frac{x+2}{\sqrt{2-x}} = 10 - \frac{x+2}{\sqrt{2-x}} \Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 = 0, \forall x < 2 \Rightarrow x = -5.$$

Vậy phương trình có một nghiệm âm.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 99. Điều kiện xác định của phương trình $3x + \frac{5}{x-4} = 12 + \frac{5}{x-4}$ là
 A. $x \neq 4$. B. $x < 4$. C. $x > 4$. D. $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện: } x - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 4.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 100. Điều kiện xác định của phương trình $\sqrt{x-1} = 2x-3$ là

- A. $x \geq 1$. B. $x < 1$. C. $x \in \mathbb{R}$. D. $x \neq 1$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện: } x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 101. Một học sinh đã giải phương trình $\sqrt{x^2-5} = 2-x$ (*) tuân tự như sau:

$$(b1) (*) \Leftrightarrow x^2 - 5 = (2-x)^2$$

$$(b2) \Leftrightarrow 4x = 9$$

$$(b3) \Leftrightarrow x = \frac{9}{4}$$

$$(b4) \text{ Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm } S = \left\{ \frac{9}{4} \right\}.$$

Lý luận trên, nếu sai thì sai từ bước nào?

- A. (b1). B. (b2). C. (b3). D. Lý luận đúng.

Lời giải.

Lý luận trên sai từ bước (b1), do khi bình phương hai vế của phương trình ta chỉ được phương trình hệ quả.

Lời giải đúng cho phương trình trên như sau:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - 5} = 2 - x &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ x^2 - 5 = (2 - x)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ 4x = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.\end{aligned}$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 102. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của phương trình $\frac{x+9}{x^2-1} - 5 = \frac{2}{x^2-1}$.

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. C. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. D. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 103. Phương trình $|f(x)| = |g(x)|$ tương đương với phương trình nào trong các phương trình sau?

- A. $f(x) = g(x)$. B. $|f(x)|^2 = |g(x)|^2$.
C. $f(x) = -g(x)$. D. $|f(x)|^2 + |g(x)|^2 = 0$.

Lời giải.

Bình phương hai vế của một phương trình mà hai vế của nó cùng dấu thì ta được một phương trình tương đương.

Chọn đáp án **B** □

Câu 104. Điều kiện $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \geq 3 \end{cases}$ là điều kiện xác định của phương trình nào trong các phương trình dưới đây?

- A. $\sqrt{x-3} + \sqrt{x-4} = \sqrt{x}$. B. $\sqrt{x-3} + 4 = \frac{1}{x-3}$.
C. $\sqrt{x+3} = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$. D. $\sqrt{x-3} + \sqrt{x-1} = \sqrt{x}$.

Lời giải.

Phương trình $\sqrt{x-3} + \sqrt{x-4} = \sqrt{x}$ có điều kiện xác định là $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-4 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \geq 4 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 4$.

Phương trình $\sqrt{x-3} + 4 = \frac{1}{x-3}$ có điều kiện xác định là $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$.

Phương trình $\sqrt{x-3} = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$ có điều kiện xác định là $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$.

Phương trình $\sqrt{x-3} + \sqrt{x-1} = \sqrt{x}$ có điều kiện xác định là $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \geq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 105. Cho $x = 3$ là một nghiệm của phương trình $x^2 + 2mx + m - 2 = 0$ với m là tham số. Tìm nghiệm còn lại.

A. $x = -1$.

B. $x = -2$.

C. $x = 2$.

D. $x = 1$.

Lời giải.

Do $x = 3$ là nghiệm của phương trình nên ta có $9 + 6m + m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

Với $m = -1$ phương trình thành $x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3. \end{cases}$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 106. Phương trình $\sqrt{2x+3} = 3$ tương đương với phương trình nào sau đây?

A. $\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+3} = 3 + \sqrt{x+2}$.

B. $x\sqrt{2x+3} = 3x$.

C. $\sqrt{x-5} + \sqrt{2x+3} = 3 + \sqrt{x-5}$.

D. $(2x-3)\sqrt{2x+3} = 3(2x-3)$.

Lời giải.

Hai phương trình $\sqrt{2x+3} = 3$ và $\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+3} = 3 + \sqrt{x+2}$ có chung tập nghiệm là $S = \{3\}$ nên tương đương với nhau.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 107. Số thực nào dưới đây là nghiệm của phương trình $\frac{\sqrt{x-1}+2}{x-2} = \frac{4}{3}$.

A. 0.

B. 2.

C. 5.

D. 10.

Lời giải.

Thay các số ở các đáp án vào phương trình đã cho thì ta thấy $x = 5$ là nghiệm của phương trình ban đầu.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 108. Tìm điều kiện xác định của phương trình $\frac{2x}{x-1} + \sqrt{x} = 21$.

A. $x \geq 0$.

B. $x \geq 0; x \neq 1$.

C. $x \geq 1$.

D. $x > 0; x \neq 1$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $\begin{cases} x-1 \neq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \geq 0. \end{cases}$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 109. Tập nghiệm của phương trình $\frac{x^2}{x+3} - \frac{9}{x+3} = 0$ là

A. $S = \emptyset$.

B. $S = \{-3\}$.

C. $S = \{\pm 3\}$.

D. $S = \{3\}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x \neq -3$.

Ta có $\frac{x^2}{x+3} - \frac{9}{x+3} = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ (thỏa mãn)} \\ x = -3 \text{ (không thỏa mãn)}. \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \{3\}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 110. Điều kiện xác định của phương trình $\sqrt{x-3} = \sqrt{6-2x}$ là

- A. $x \neq 3$. B. $x = 3$. C. $x \leq 3$. D. $x \geq 3$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện xác định: } \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 6-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 111. Phương trình $\sqrt{x} = \sqrt{-x}$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 1. B. 0. C. 2. D. vô số.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \geq 0 \\ -x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Ta thấy $x = 0$ thỏa mãn phương trình nên $x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

□

Câu 112. Điều kiện xác định của phương trình $x + \frac{1}{\sqrt{x+3}} = \frac{\sqrt{4-x}}{x-1}$ là

- A. $x > -3$ và $x \neq 1$. B. $x \neq -3$ và $x \neq 1$.
C. $x > -3$, $x \leq 4$ và $x \neq 1$. D. $x > -3$ và $x \leq 4$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện xác định của phương trình là } \begin{cases} x+3 > 0 \\ 4-x \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x \leq 4 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 113. Phương trình nào tương đương với phương trình $x-2=0$?

- A. $x^2 + x - 6 = 0$. B. $\frac{x^2}{\sqrt{x-1}} = \frac{4}{\sqrt{x-1}}$.
C. $x^2 = 4$. D. $\sqrt{1-x} + x = 2 + \sqrt{1-x}$.

Lời giải.

Phương trình $x-2=0$ có tập nghiệm $S = \{2\}$. Trong khi đó

- Phương trình $x^2 + x - 6 = 0$ có tập nghiệm $S = \{2; -3\}$.
- Phương trình $x^2 = 4$ có tập nghiệm $S = \{-2; 2\}$.
- $\sqrt{1-x} + x = 2 + \sqrt{1-x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$.

Còn

$$\frac{x^2}{\sqrt{x-1}} = \frac{4}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy phương trình này tương đương với phương trình $x-2=0$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 114. Nghiệm của phương trình $x^4 + 5x^2 - 6 = 0$ là

- A. 1 và -6. B. ± 1 . C. ± 1 và $\pm\sqrt{6}$. D. ± 1 và ± 6 .

Lời giải.

Đặt $t = x^2, (t \geq 0)$ phương trình đã cho trở thành $t^2 + 5t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 & (\text{nhận}) \\ t = -6 & (\text{loại}). \end{cases}$

Với $t = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1, x = -1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 115. Tập nghiệm của phương trình $\frac{x^2}{\sqrt{x-1}} = \frac{4}{\sqrt{x-1}}$ là
 A. $S = \emptyset$. B. $S = \{-2\}$. C. $S = \{2\}$. D. $S = \{-2; 2\}$.

Lời giải.

- Điều kiện: $x > 1$ (*)
- Với điều kiện (*), phương trình đã cho tương đương với $x^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2. \end{cases}$
- Đối chiếu điều kiện (*) ta được nghiệm của phương trình là $x = 2$.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \{2\}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 116. Phương trình $\sqrt{x} = \sqrt{-x}$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0. B. Vô số. C. 2. D. 1.

Lời giải.

Điều kiện xác định của phương trình $\begin{cases} x \geq 0 \\ -x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$. Thử lại thấy $x = 0$ thỏa mãn phương trình.

Vậy phương trình có một nghiệm $x = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 117. Số nghiệm của phương trình $\frac{2x^2}{\sqrt{x+1}} = \frac{8}{\sqrt{x+1}}$ là
 A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Lời giải.

Tập xác định của phương trình là $x > -1$, phương trình trở thành $2x^2 = 8 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = -2$. So sánh điều kiện ta có $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Chọn đáp án (A) □

Câu 118. Giá trị của tham số m để phương trình $(m-2)x^2 - 2(m+1)x + m-5 = 0$ có nghiệm là

- A. $m \geq 1$. B. $m > 1$. C. $m \geq 1$ và $m \neq 2$. D. $m > 1$ và $m \neq 2$.

Lời giải.

Khi $m = 2$ phương trình có nghiệm là $x = -\frac{1}{2}$.

Khi $m \neq 2$ phương trình có nghiệm khi $\Delta' \geq 0$ hay $m \geq 1$.

Vậy phương trình có nghiệm khi $m \geq 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 119. Phương trình nào sau đây có nghiệm nguyên

- A. $4x^2 + \frac{1}{x^2} + \left| 2x - \frac{1}{x} \right| - 6 = 0$. B. $x + \sqrt{x-2} = 1 + \sqrt{x-2}$.
 C. $4x + \frac{3}{4x-1} = 1 + \frac{3}{4x-1}$. D. $16x^2 + \sqrt{x+4} = 1 + \sqrt{x+4}$.

Lời giải.

Các phương trình

$$\begin{aligned}x + \sqrt{x-2} &= 1 + \sqrt{x-2}, \\4x + \frac{3}{4x-1} &= 1 + \frac{3}{4x-1}\end{aligned}$$

vô nghiệm.

Còn phương trình $16x^2 + \sqrt{x+4} = 1 + \sqrt{x+4}$ có nghiệm là $x = \frac{1}{4}$ hoặc $x = -\frac{1}{4}$.

Phương trình $4x^2 + \frac{1}{x^2} + \left|2x - \frac{1}{x}\right| - 6 = 0$ nhận $x = 1$ là nghiệm.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 120. Cho phương trình $mx^2 + (m^2 - 3)x + m = 0$ (m là tham số). Giá trị của m để phương trình có nghiệm kép là

- A. $m \in \{-3; -1; 1; 3\}$. B. $m \in \{1; 3\}$. C. $m \in \{-1; -3\}$. D. $m \in \{1; 9\}$.

Lời giải.

Để phương trình có nghiệm kép thì $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0. \end{cases}$

Khi đó $\begin{cases} a \neq 0 \\ (m^2 - 3)^2 - 4m^2 = 0 \end{cases}$ giải ra ta được $m \in \{-3; -1; 1; 3\}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 121. Tìm tập nghiệm S của phương trình $x + \sqrt{x-3} = \sqrt{3-x} - 3$.

- A. $S = \mathbb{R}$. B. $S = \emptyset$. C. $S = \{3\}$. D. $S = \{\pm 3\}$.

Lời giải.

Điều kiện của phương trình đã cho là

$$\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Thế $x = 3$ vào phương trình đã cho ta được

$$3 + \sqrt{3-3} = \sqrt{3-3} - 3 \Leftrightarrow 3 = -3 \text{ (sai)}.$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 122. Gọi $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 5x - 4y = 8 \\ 2x + y = 11 \end{cases}$. Tính giá trị $2x_0 - y_0$.

- A. 11. B. 10. C. 2. D. 5.

Lời giải.

Giải hệ phương trình ta được $x_0 = 4, y_0 = 3$. Suy ra $2x_0 - y_0 = 5$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 123. Số nghiệm của phương trình $2x + \frac{1}{\sqrt{x+1}} = -x^2 + \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải.

Điều kiện: $x > -1$. Khi đó phương trình đã cho tương đương

$$2x = -x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases} \text{ (Loại)} \Rightarrow x = 0.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 124. Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm $\sqrt{x-1} = \sqrt{1-x}$?

- A. 0. B. vô số. C. 1. D. 2.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$.

Với $x = 1$ thay vào phương trình thỏa mãn. Vậy phương trình có một nghiệm.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 125. Số nghiệm của phương trình $\frac{x}{2\sqrt{x-3}} = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$ là

- A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x > 3$.

Với điều kiện $x > 3$ phương trình đã cho trở thành $\frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow x = 2 < 3$ (loại).

Vậy phương trình không có nghiệm.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 126. Phương trình $(x^2 + 5x + 4)\sqrt{x+3} = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải.

Điều kiện xác định của phương trình là $x \geq -3$.

Phương trình tương đương với $\begin{cases} x \geq -3 \\ \begin{cases} x = -1 \\ x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3. \end{cases} \\ x = -3 \end{cases}$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 127. Phương trình $(x^2 - 4x + 3)\sqrt{x-2} = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Lời giải.

Ta có

$$(x^2 - 4x + 3)\sqrt{x-2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3. \end{cases} \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm.

Chọn đáp án (B) □

Câu 128. Tìm nghiệm của tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + 4x - 5$.

- A. $x = 5; x = -1$. B. $x = -5; x = -1$. C. $x = 5; x = 1$. D. $x = -5; x = 1$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5; x = 1$.

Vậy nghiệm của tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + 4x - 5$ là $x = -5; x = 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 129. Điều kiện xác định của phương trình $\frac{\sqrt{x+2}}{x^2+2x} = \frac{3}{\sqrt{5-x}}$ là

- A. $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -2\}$. B. $x \in (-2; 5) \setminus \{0\}$. C. $[-2; 5] \setminus \{0; -2\}$. D. $(-\infty; 5) \setminus \{0; -2\}$.

Lời giải.

Phương trình $\frac{\sqrt{x+2}}{x^2+2x} = \frac{3}{\sqrt{5-x}}$ có nghĩa khi

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x^2+2x \neq 0 \\ 5-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \neq 0; x \neq -2 \\ x < 5 \end{cases} \Rightarrow x \in (-2; 5) \setminus \{0\}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 130. Điều kiện xác định của phương trình $\frac{\sqrt{x+4}}{x^2-1} = \frac{2}{\sqrt{3-x}}$ là

- A. $x \in (-4; +\infty)$. B. $x \in [-4; 3) \setminus \{\pm 1\}$. C. $x \in (-\infty; 3)$. D. $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho xác định khi

$$\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ x^2-1 \neq 0 \\ 3-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x \neq \pm 1 \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq x < 3 \\ x \neq \pm 1 \end{cases}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 131. Tập xác định của phương trình $\sqrt{x} + \frac{x^2-1}{x-1} = \sqrt[3]{x-2}$ là

- A. $\mathcal{D} = [2; +\infty)$. B. $\mathcal{D} = [0; +\infty) \setminus \{1\}$.
C. $\mathcal{D} = [0; +\infty)$. D. $\mathcal{D} = [0; +\infty) \setminus \{1; 2\}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$.

Vậy đáp án $\mathcal{D} = [0; +\infty) \setminus \{1\}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 132. Điều kiện xác định của phương trình $x + \frac{1}{\sqrt{2x+4}} = \frac{\sqrt{3-2x}}{x}$ là

- A. $x > -2$ và $x < \frac{3}{2}$. B. $-2 \leq x \leq \frac{3}{2}$. C. $x > -2$ và $x \neq 0$. D. $\begin{cases} -2 < x \leq \frac{3}{2} \\ x \neq 0 \end{cases}$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện xác định của phương trình là } \begin{cases} 3 - 2x \geq 0 \\ 2x + 4 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ x > -2 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x \leq \frac{3}{2} \\ x \neq 0 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 133. Cho phương trình $(m - 1)x^4 + 2(m - 3)x^2 + m + 3 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình vô nghiệm.

A. $m \in (-\infty; -3) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right).$

B. $m \leq -3.$

C. $m > \frac{3}{2}.$

D. $m < -3.$

Lời giải.Đặt $t = x^2 \geq 0$ phương trình viết lại thành $(m - 1)t^2 + 2(m - 3)t + m + 3 = 0$ (1).Với $m = 1$ thay vào ta có phương trình trên có nghiệm.

$$\text{Với } m \neq 1 \text{ để phương trình ban đầu vô nghiệm thì phương trình (1) phải có } \begin{cases} \Delta' < 0 \\ \Delta' \geq 0 \\ t_1 \cdot t_2 > 0 \\ t_1 + t_2 < 0. \end{cases}$$

$$\text{Mà } \Delta' = -8m + 12, t_1 + t_2 = \frac{2(3 - m)}{m - 1}, t_1 \cdot t_2 = \frac{m + 3}{m - 1}.$$

$$\text{Hệ điều kiện trên trở thành } \begin{cases} m > \frac{3}{2} \\ m \leq \frac{3}{2} \\ m \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty) \\ m \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty) \end{cases} \quad \text{chọn nghiệm chung ta được } m \in (-\infty; -3) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 134. Với giá trị nào m thì phương trình $(m - 3)x^2 + 3(m - 3)x + m + 2 = 0$ có nghiệm kép?

A. $m = \frac{29}{8}.$

B. $m = 7.$

C. $m = 3.$

D. $m = \frac{5}{2}.$

Lời giải.• Với $m = 3$ phương trình đã cho vô nghiệm nên $m = 3$ không thỏa mãn. (1)• Với $m \neq 3$, ta có $\Delta = 9(m - 3)^2 - 4(m - 3)(m + 2) = 5m^2 - 50m + 105.$

$$\text{Phương trình đã cho có nghiệm kép } \Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 5m^2 - 50m + 105 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = 7. \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra giá trị cần tìm của m là $m = 7.$ Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 135. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-7; 7]$ để phương trình $mx^2 - 2(m + 2)x + m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 14.

B. 8.

C. 7.

D. 15.

Lời giải.

TH1: $m = 0 \Leftrightarrow -4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$; phương trình chỉ có một nghiệm duy nhất nên loại $m = 0$.

TH2: $m \neq 0$.

Để $mx^2 - 2(m+2)x + m - 1 = 0$ với $m \in [-7; 7]$ có hai nghiệm phân biệt thì

$\Delta' = (m+2)^2 - m(m-1) > 0 \Leftrightarrow 5m > -4 \Leftrightarrow m > -\frac{4}{5}$ đồng thời $m \in [-7; 7]$.

Vậy $m = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Suy ra có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Chọn đáp án **C** □

Câu 136. Phương trình $(x^2 - 6x)\sqrt{17 - x^2} = x^2 - 6x$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Lời giải.

Điều kiện: $17 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{17} \leq x \leq \sqrt{17}$.

Ta có: $(x^2 - 6x)\sqrt{17 - x^2} = x^2 - 6x \Leftrightarrow (x^2 - 6x)(\sqrt{17 - x^2} - 1) = 0$. Tương đương

$$\begin{cases} x^2 - 6x = 0 \\ \sqrt{17 - x^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x - 6) = 0 \\ 16 - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (\text{Thỏa mãn}) \\ x = 6 & (\text{Loại}) \\ x = \pm 4 & (\text{Thỏa mãn}). \end{cases}$$

Vậy phương trình có 3 thực phân biệt.

Chọn đáp án **D** □

Câu 137. Phương trình $\sqrt{3x} + \sqrt{2x - 2} = \sqrt{1 - x} + 2$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện xác định: } \begin{cases} 3x \geq 0 \\ 2x - 2 \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 1 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Thay $x = 1$ vào $\sqrt{3x} + \sqrt{2x - 2} = \sqrt{1 - x} + 2$, ta được: $\sqrt{3} = 2$ (vô lý).

Vậy phương trình vô nghiệm.

Chọn đáp án **A** □

Câu 138. Cho phương trình $|x^2 - 5x + 4| = |x - 1|$ (1). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. Phương trình (1) có ba nghiệm.

B. Phương trình (1) vô nghiệm.

C. Phương trình (1) có hai nghiệm.

D. Phương trình (1) có bốn nghiệm.

Lời giải.

Phương trình (1) tương đương

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x^2 - 5x + 4 = x - 1 \\ x^2 - 5x + 4 = -x + 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2 - 6x + 5 = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \\ x = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 139. Điều kiện xác định của phương trình $\sqrt{x-3} + \frac{2}{x-5} = 3$ là

- A. $x \geq 3$. B. $\begin{cases} x > 3 \\ x \neq -5 \end{cases}$. C. $\begin{cases} x \geq 3 \\ x \neq 5 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x < 3 \\ x \neq 5 \end{cases}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của phương trình $\sqrt{x-3} + \frac{2}{x-5} = 3$ là $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x-5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \neq 5. \end{cases}$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 140. Tìm tập xác định của phương trình $\frac{x}{\sqrt{x+2}} - 3 = \sqrt{x+2}$.

- A. $(-2; +\infty)$. B. $(-\infty; -2]$. C. $[-2; +\infty)$. D. $(-\infty; -2)$.

Lời giải.

Điều kiện để phương trình xác định là $x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 141. Tập xác định của hàm số $y = \frac{x+2}{x^2-2x-3}$ là.

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$. B. $D = \mathbb{R} \setminus (-1; 3)$. C. $D = \mathbb{R} \setminus [-1; 3]$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$.

Lời giải.

TXĐ $x^2 - 2x - 3 \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 3 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 142. Tất cả các giá trị của m để $(m-1)x + 2x = 3$ là phương trình bậc nhất theo ẩn x là

- A. $m \in \mathbb{R}$. B. m khác 1. C. m khác -1. D. $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $(m-1)x + 2x = 3 \Leftrightarrow (m+1)x = 3$.

Phương trình này là phương trình bậc nhất theo ẩn x khi $m+1$ khác 0, hay m khác -1.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 143. Tìm tập xác định của phương trình $\frac{x-2}{x-1} = x+2$.

- A. $(1; +\infty)$. B. $(-\infty; -1)$. C. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. D. $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của phương trình $\frac{x-2}{x-1} = x+2$ là

$$x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1.$$

Vậy tập xác định của phương trình là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 144. Cho phương trình $\sqrt{x} = 1-x$. Điều kiện của phương trình này là

- A. $x \leq 1$. B. $x \geq 0$. C. $x \geq 1$. D. $0 \leq x \leq 1$.

Lời giải.

Điều kiện của phương trình là $x \geq 0$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 145. Điều kiện xác định của phương trình $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} = \sqrt{x-3}$ là

- A. $x > 3$. B. $x \geq 2$. C. $x \geq 1$. D. $x \geq 3$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện của phương trình là } \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 2 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 146. Phương trình $3x - 2y = 1$ nhận cặp số nào sau đây làm nghiệm?

- A. $(-1; 1)$. B. $(1; 1)$. C. $(1; -1)$. D. $(0; 2)$.

Lời giải.

Ta có $3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1$. Vậy $(1; 1)$ là nghiệm của phương trình.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 147. Cặp số (x, y) nào sau đây là một nghiệm của phương trình $x + y - 3 = 0$?

- A. $(x; y) = (4; 0)$. B. $(x; y) = (2; 2)$. C. $(x; y) = (-2; 1)$. D. $(x; y) = (2; 1)$.

Lời giải.

Ta có $2 + 1 - 3 = 0$ nên $(x; y) = (2; 1)$ là một nghiệm của phương trình $x + y - 3 = 0$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 148. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{2-x} + \sqrt{x-3} = 0$ là

- A. $S = \{2; 3\}$. B. $S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$. C. $S = \{3\}$. D. $S = \emptyset$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện xác định } \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset. \text{ Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.}$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 149. Cho phương trình $\frac{3x+1}{\sqrt{-x+2}-\sqrt{x-3}}$. Kết luận nào sau đây đúng?

- A. Điều kiện xác định của phương trình là $x \geq 3$.
- B. Phương trình vô nghiệm.
- C. Phương trình có một nghiệm duy nhất.
- D. Điều kiện xác định của phương trình là $x < 2$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của phương trình $\begin{cases} -x+2 \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$. Phương trình vô nghiệm.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 150. Phương trình $a^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm khi và chỉ khi.

- A. $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$.
- B. $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$.
- C. $\Delta > 0$.
- D. $\Delta \geq 0$.

Lời giải.

Phương trình có 2 nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 151. Cặp số $(x; y)$ nào sau đây không là nghiệm của phương trình $2x - 3y = 5$?

- A. $(x; y) = \left(\frac{5}{2}; 0\right)$.
- B. $(x; y) = (1; -1)$.
- C. $(x; y) = \left(0; \frac{5}{3}\right)$.
- D. $(x; y) = (-2; -3)$.

Lời giải.

Thay các bộ số $(x; y)$ vào phương trình, ta thấy bộ số $\left(0; \frac{5}{3}\right)$ không thỏa mãn: $2 \cdot 0 - 3 \cdot \frac{5}{3} = -5 \neq 5$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 152. Phương trình $x^2 - 2mx + 2 + m = 0$ có một nghiệm $x = 2$ thì

- A. $m = 1$.
- B. $m = -1$.
- C. $m = 2$.
- D. $m = -2$.

Lời giải.

Thay $x = 2$ vào phương trình $x^2 - 2mx + 2 + m = 0$ ta có $2^2 - 2m \cdot 2 + 2 + m = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 153. Phương trình $3x + 2y - 5 = 0$ nhận cặp số nào sau đây là nghiệm

- A. $(2; -3)$.
- B. $(-1; -1)$.
- C. $(3; 2)$.
- D. $(1; 1)$.

Lời giải.

Thay $x = 1$ và $y = 1$ vào phương trình đã cho ta thấy thỏa mãn nên $(1; 1)$ là một nghiệm.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 154. Khẳng định đúng nhất trong các khẳng định sau:

- A. Phương trình $3x + 5 = 0$ có nghiệm là $x = -\frac{5}{3}$.
- B. Phương trình $0x - 7 = 0$ vô nghiệm.
- C. Phương trình $0x + 0 = 0$ có tập nghiệm $\mathbb{R}$.
- D. Cả A, B, C đều đúng.

Lời giải.

“Phương trình $3x + 5 = 0$ có nghiệm là $x = -\frac{5}{3}$ ” là khẳng định đúng.

“Phương trình $0x - 7 = 0$ vô nghiệm” là khẳng định đúng.

“Phương trình $0x + 0 = 0$ có tập nghiệm $\mathbb{R}$ ” là khẳng định đúng.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 155. Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm $\sqrt{x-2} = \sqrt{2-x}$?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. Vô số.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Thay $x = 2$ vào phương trình ta được $0 = 0$ hay $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 156. Tìm nghiệm của nhị thức bậc nhất $f(x) = 3x + 6$.

A. $x = 2$.

B. $x = -2$.

C. $x = -3$.

D. $x = 3$.

Lời giải.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 157. Chọn phát biểu đúng?

A. $x^2(x+1) = 2x^2 \Leftrightarrow x+1 = 2.$

B. $(x^2+1)x = (x^2+1)(\sqrt{x}-1) \Leftrightarrow x = \sqrt{x}-1.$

C. $x + \sqrt{x-1} = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow x = 0.$

D. $\frac{x+1}{x} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x+1 = 1.$

Lời giải.

$$(x^2+1)x = (x^2+1)(\sqrt{x}-1)$$

$$\Leftrightarrow (x^2+1)x - (x^2+1)(\sqrt{x}-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+1)[x - (\sqrt{x}-1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+1) = 0 & (\text{vn}) \\ x - (\sqrt{x}-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x - (\sqrt{x}-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{x}-1.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 158. Trong các phương trình sau, phương trình nào tương đương với phương trình $x-1=0$?

A. $x+2=0.$

B. $x-1=0.$

C. $2x-2=0.$

D. $(x-1)(x+2)=0.$

Lời giải.

$$\text{Ta có } x-1=0 \Leftrightarrow 2x-2=0.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

ĐÁP ÁN

1. D	2. D	3. D	4. C	5. D	6. A	7. D	8. B	9. C	10. C
11. C	12. C	13. D	14. D	15. C	16. A	17. D	18. A	19. A	20. D
21. B	22. C	23. C	24. C	25. A	26. C	27. B	28. B	29. B	30. A
31. B	32. B	33. B	34. C	35. B	36. D	37. D	38. C	39. C	40. D
41. C	42. C	43. C	44. A	45. C	46. D	47. B	48. A	49. A	50. B
51. D	52. C	53. C	54. D	55. A	56. D	57. D	58. D	59. D	60. A
61. C	62. A	63. A	64. C	65. C	66. C	67. C	68. B	69. C	70. C
71. A	72. B	73. A	74. B	75. B	76. B	77. A	78. C	79. B	80. C
81. C	82. B	83. B	84. B	85. C	86. D	87. D	88. C	89. D	90. B
91. A	92. B	93. C	94. B	95. A	96. B	97. B	98. A	99. A	100. A
101. A	102. C	103. B	104. D	105. A	106. A	107. C	108. B	109. D	110. B
112. C	113. B	114. B	115. C	116. D	117. A	118. A	119. A	120. A	121. B
122. D	123. B	124. C	125. B	126. C	127. B	128. D	129. B	130. B	131. B
132. D	133. A	134. B	135. C	136. D	137. A	138. A	139. C	140. A	141. A
142. C	143. C	144. B	145. D	146. B	147. D	148. D	149. B	150. B	151. C
152. C	153. D	154. D	155. B	156. B	157. B	158. C			

§2 PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT, BẬC HAI

- A TÓM TẮT LÝ THUYẾT
- B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Giải và biện luận phương trình bậc nhất

- Phương pháp giải:
- a) $a \neq 0$: Phương trình có một nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}$.

b) $a = 0$ và $b \neq 0$: Phương trình vô nghiệm.

c) $a = 0$ và $b = 0$: Phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

BÀI TẬP DẠNG 1

Ví dụ 1. Giải và biện luận phương trình sau theo tham số m

$m^2x + 2 = x + 2m \quad (1)$

Lời giải.

Ta có biến đổi tương đương

$$(1) \Leftrightarrow m^2x - x = 2m - 2 \Leftrightarrow (m^2 - 1)x = 2(m - 1) \quad (2)$$

Ta xét các trường hợp sau đây:

Trường hợp 1: Khi $m \neq \pm 1$, ta có $m^2 - 1 \neq 0$ nên (2) có nghiệm

$$x = \frac{2(m - 1)}{m^2 - 1} = \frac{2}{m + 1}.$$

Đây là nghiệm duy nhất của phương trình.

Trường hợp 2: Khi $m = 1$, phương trình (2) trở thành $0.x = 0$. Phương trình này có nghiệm đúng với mọi số thực x nên phương trình (1) cũng có nghiệm đúng với mọi số thực x . **Trường hợp 3:** Khi $m = -1$, phương trình (2) trở thành $0.x = -4$. Phương trình này vô nghiệm nên phương trình (1) cũng vô nghiệm.

Kết luận:

- Với $m \neq \pm 1$: (1) có nghiệm duy nhất $x = \frac{2}{m + 1}$.
- Với $m = -1$: (1) vô nghiệm.
- Với $m = 1$: (1) có vô số nghiệm.

□

Ví dụ 2. Giải và biện luận phương trình $\frac{2x + a}{a - 2} - \frac{a - 2x}{a + 2} = \frac{6a}{a^2 - 4}$. (1)

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} a - 2 \neq 0 \\ a + 2 \neq 0 \\ a^2 - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \neq \pm 2.$$

Phương trình trên được viết lại dưới dạng

$$(2x + a)(a + 2) - (a - 2x)(a - 2) = 6a \Leftrightarrow 2ax = a. \quad (2)$$

Trường hợp 1: Nếu $a \neq 0$ thì (2) $\Leftrightarrow x = \frac{2a}{4a} = \frac{1}{2}$.

Trường hợp 2: Nếu $a = 0$ thì (2) $\Leftrightarrow 0.x = 0$, phương trình có nghiệm đúng với mọi số thực x .

Kết luận:

- Với $a \neq 0$ và $a \neq \pm 2$ thì phương trình có một nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{2}$.
- Với $a = 0$ thì phương trình có nghiệm đúng với mọi số thực x .
- Với $a = \pm 2$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

□

Ví dụ 3. Tìm giá trị của tham số m để phương trình sau có tập hợp nghiệm là $\mathbb{R}$

$$m(m^2x - 1) = 1 - x \quad (1)$$

Lời giải.

Phương trình đã cho viết dưới dạng $(m^3 + 1)x = m + 1$. (2)

Do đó, phương trình (1) có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi phương trình (2) có tập nghiệm $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m^3 + 1 = 0 \\ m + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$.

Vậy với $m = -1$ thì phương trình (1) có tập nghiệm là $\mathbb{R}$. □

Ví dụ 4. Tìm giá trị tham số m để phương trình sau có nghiệm $x > 2$

$$2x - 3m = 1 \quad (1)$$

Lời giải.

Phương trình đã cho được viết lại dưới dạng $x = \frac{3m + 1}{2}$.

Phương trình (1) có nghiệm $x > 2$ khi và chỉ khi $\frac{3m + 1}{2} > 2 \Leftrightarrow m > 1$.

Vậy $m > 1$ thỏa yêu cầu bài toán. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải và biện luận phương trình $(m^2 + 4)x - 3m = x - 3$. (1)

Lời giải.

Phương trình đã cho được viết lại dưới dạng $(m^2 + 3)x = 3m - 3$. (2).

Vì $m^2 + 3 > 0$, với mọi giá trị thực của m nên phương trình (2) có 1 nghiệm duy nhất là $x = \frac{3m - 3}{m^2 + 3}$. □

Bài 2. Giải và biện luận phương trình $m(x - 2m) = x + m + 2$. (1)

Lời giải.

Phương trình (1) được viết lại dưới dạng $(m - 1)x = 2m^2 + m + 2$. (2)

- Với $m = 1$, phương trình (2) trở thành $0.x = 5$. Điều này vô lí, phương trình đã cho vô nghiệm.
- Với $m \neq 1$, phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \frac{m^2 + 2 + m}{m - 1}$. □

Bài 3. Giải và biện luận phương trình $m^2x + 2 = x + 2m$. (1)

Lời giải.

Phương trình (1) được viết lại dưới dạng $(m^2 - 1)x = 2m - 2$. (2)

- Với $m \neq \pm 1$, phương trình (2) có nghiệm duy nhất $x = \frac{2m - 2}{m^2 - 1} = \frac{2}{m + 1}$.
- Với $m = 1$, phương trình (2) trở thành $0.x = 0$. Phương trình đúng với mọi số thực x .
- Với $m = -1$, phương trình (2) trở thành $0.x = -4$. Điều này vô lí nên phương trình đã cho vô nghiệm. □

Bài 4. Giải và biện luận phương trình $m^2x + 1 = (m - 1)x + m$. (1).

Lời giải.

Phương trình (1) được viết lại dưới dạng $(m^2 - m + 1)x = m - 1$. (2).

Vì $m^2 - m + 1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên phương trình (2) luôn có nghiệm duy nhất $x = \frac{m - 1}{m^2 - m + 1}$. □

Bài 5. Giải và biện luận phương trình $m^2x + 6 = 4x + 3m$. (1).

Lời giải.

Phương trình (1) được viết lại dưới dạng $(m^2 - 4)x = 3m - 6$. (2).

- Với $m \neq \pm 2$, phương trình (2) có nghiệm duy nhất $x = \frac{3m - 6}{m^2 - 4} = \frac{3}{m + 2}$.
- Với $m = 2$, phương trình (2) trở thành $0.x = 0$. Phương trình đúng với mọi số thực x .
- Với $m = -2$, phương trình (2) trở thành $0.x = -12$. Điều này vô lí nên phương trình đã cho vô nghiệm.

□

Bài 6. Tìm giá trị tham số m để phương trình $m^2(mx - 1) = 2m(2x + 1)$ (1) có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Phương trình (1) được viết lại dưới dạng $(m^3 - 4m)x = 2m + m^2$. (2).

Phương trình (1) có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi phương trình (2) có tập nghiệm là $\mathbb{R}$. Điều này xảy

$$\text{ra khi và chỉ khi } \begin{cases} m^3 - 4m = 0 \\ 2m + m^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -2 \end{cases}.$$

□

Bài 7. Tìm giá trị tham số m để phương trình $m(x - m + 3) = 2(x - 2) + 6$ (1) có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Phương trình (1) được viết lại dưới dạng $(m - 2)x = m^2 - 3m + 2$. (2).

Phương trình (1) có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi phương trình (2) có tập nghiệm là $\mathbb{R}$. Điều này xảy

$$\text{ra khi và chỉ khi } \begin{cases} m - 2 = 0 \\ m^2 - 3m + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

□

Bài 8. Tìm giá trị tham số m để phương trình $m(x - m + 3) = 2(x - 2) + 6$ (1) có nghiệm duy nhất.

Lời giải.

Phương trình (1) được viết lại dưới dạng $(m - 2)x = m^2 - 3m + 2$. (2).

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm duy nhất. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$.

□

Bài 9. Tìm giá trị tham số m để phương trình $(m + 3)(x - m) = 2(x - 2)$ (1) vô nghiệm.

Lời giải.

Phương trình (1) được viết lại dưới dạng $(m + 1)x = m^2 + 3m - 4$. (2).

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm duy nhất. Điều này

$$\text{xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} m + 1 = 0 \\ m^2 + 3m - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m \neq 1 \\ m \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

□

Bài 10. Tìm giá trị tham số m để phương trình $(m - 1)^2x = 4x + m + 1$ (1) vô nghiệm.

Lời giải.

Phương trình (1) được viết lại dưới dạng $(m^2 + 2m - 3)x = m + 1$. (2).

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm duy nhất. Điều này

$$\text{xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} m^2 + 2m - 3 = 0 \\ m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases} \\ m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}. \quad \square$$

Bài 11. Tìm giá trị tham số m để phương trình $m^2(x-1) = 2(mx-2)$ (1) có nghiệm duy nhất.

Lời giải.

Phương trình (1) được viết lại dưới dạng $(m^2 - 2m)x = m^2 - 4$. (2).

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm duy nhất. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $m^2 - 2m \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq 0 \end{cases}$. $\square$

Bài 12. Tìm giá trị tham số m để phương trình $m^2(x-1) = -4(mx+1)$ (1) có nghiệm dương duy nhất.

Lời giải.

Phương trình (1) được viết lại dưới dạng $(m^2 + 4m)x = m^2 - 4$. (2).

Phương trình (1) có nghiệm dương duy nhất khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm dương duy nhất.

$$\text{Điều này xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} m^2 + 4m \neq 0 \\ \frac{m^2 - 4}{m^2 + 4m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -4 \\ m \neq 0 \end{cases} \quad m^2 > 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}. \quad \square$$

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 13. Giải và biện luận phương trình $(x-1)(x-mx+2) = 0$.

Lời giải.

Phương trình (1) tương đương với

$$\begin{cases} x = 1 \\ (1-m)x = -2 \end{cases} \quad (*)$$

- Với $m = 1$, phương trình (*) trở thành $0.x = -2$. Điều này vô lý nên phương trình (*) vô nghiệm. Phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = 1$.
- Với $m = 3$, phương trình (*) trở thành $-2x = -2$. Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$. Do đó, phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = 1$.
- Với $m \neq 1$ và $m \neq 3$, phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = -\frac{2}{1-m} \neq 1$. Do đó, phương trình (1) có hai nghiệm $x = 1$ và $x = -\frac{2}{1-m}$.

$\square$

Bài 14. Giải và biện luận phương trình $(x^2 - 4)(mx - 3) = 0$.

Lời giải.

Phương trình (1) tương đương với

$$\begin{cases} x = \pm 2 \\ mx = 3 \end{cases} \quad (*)$$

- Với $m = 0$, phương trình (*) trở thành $0.x = 3$. Điều này vô lý nên phương trình (*) vô nghiệm. Phương trình (1) có hai nghiệm $x = \pm 2$.

- Với $m = \frac{3}{2}$, phương trình (*) trở thành $\frac{3}{2}x = 3$. Phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = 2$. Do đó, phương trình (1) có hai nghiệm $x = \pm 2$.
- Với $m = -\frac{3}{2}$, phương trình (*) trở thành $-\frac{3}{2}x = 3$. Phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = -2$. Do đó, phương trình (1) có hai nghiệm $x = \pm 2$.
- Với $m \neq \pm 2$ và $m \neq 0$, phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = -\frac{3m}{m} \neq \pm 2$. Do đó, phương trình (1) có ba nghiệm $x = \pm 2$ và $x = \frac{3}{m}$.

□

Dạng 2. Phương trình chứa ẩn dưới dấu căn

Nguyên tắc cơ bản trong giải phương trình chứa ẩn dưới dấu căn là phải tìm cách làm mất dấu căn. Có các phương pháp thường dùng như: bình phương hai vế, đặt ẩn phụ, đưa phương trình về dạng tích, ...

Phương pháp 1. Bình phương hai vế.

Thiết lập điều kiện rồi sau đó bình phương hai vế.

- $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B. \end{cases}$
- $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2. \end{cases}$

Phương pháp 2. Đặt ẩn phụ.

Nhiều phương trình, việc bình phương không thể làm mất hết căn hoặc lại đưa về những phương trình bậc cao hơn hai. Những câu như vậy ta không nên bình phương hai vế mà nên sử dụng phương pháp khác.

Sau đây là một số dạng hay gặp trong đặt ẩn phụ:

- $af(x) + b\sqrt{f(x)} = c$. Đặt $\sqrt{f(x)} = t$.
- $a(\sqrt{A} \pm \sqrt{B}) + b\sqrt{A \cdot B} = c$ (A, B là biểu thức của x). Đặt $\sqrt{A} \pm \sqrt{B} = t \Rightarrow \sqrt{A \cdot B} = \dots$ (Bình phương t để đưa ra $\sqrt{A \cdot B}$).

Phương pháp 3. Đưa về dạng tích.

Nếu phương trình đưa được về tích ta có thể chuyển về các phương trình dễ giải hơn. Chúng ta có thể thực hiện theo một trong những hướng sau:

- Ghép nhóm tạo ra nhân tử chung.
- Biến đổi liên hợp $\sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$.
- Khi nhằm được nghiệm thì thêm bớt hệ số để liên hợp tạo ra nhân tử chung.

🔗🔗🔗 BÀI TẬP DẠNG 2 🔗🔗🔗

Phương pháp 1. Bình phương hai vế.

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x^2-3x}$.

Lời giải.

$$\sqrt{2x-4} = \sqrt{x^2-3x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4 \geq 0 \\ 2x-4 = x^2-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2-5x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \begin{cases} x=1 \\ x=4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=4 \end{cases}$$

Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 4$. □

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sqrt{x^2-2x+5} = 3x-1$.

Lời giải.

$$\sqrt{x^2-2x+5} = 3x-1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1 \geq 0 \\ x^2-2x+5 = (3x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ 8x^2-4x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{-1}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$. □

Ví dụ 3. Giải phương trình $\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1} = 3$.

Lời giải.

Phân tích: 2 vế không âm nên ta có thể bình phương được, bình phương sẽ mất dần số lượng căn đi.

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1} = 3 \text{ (ĐK: } x \geq \frac{1}{2}) \\ \Leftrightarrow & (\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1})^2 = 9 \\ \Leftrightarrow & 3x+2 + 2\sqrt{(x+3)(2x-1)} = 9 \\ \Leftrightarrow & 2\sqrt{(x+3)(2x-1)} = 7-3x \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 7-3x \geq 0 \\ 4(2x^2+5x-3) = (7-3x)^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x \leq \frac{7}{3} \\ x^2-62x+61=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x \leq \frac{7}{3} \\ \begin{cases} x=1 \\ x=61 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=61 \end{cases} \text{ (TMDK)} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải phương trình $\sqrt{x^2+3} = \sqrt{2x+6}$.

Lời giải.

$$\sqrt{x^2+3} = \sqrt{2x+6} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x^2+3 = 2x+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Phương trình có 2 nghiệm $x = -1; x = 3$. □

Bài 2. Giải phương trình $\sqrt{2x^2 + 2} = x + 1$.

Lời giải.

$$\sqrt{2x^2 + 2} = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 2x^2 + 2 = (x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Phương trình có 2 nghiệm $x = 1$. □

Bài 3. Giải phương trình $\sqrt{x + 3} + \sqrt{3x + 1} = 4$.

Lời giải.

$$\text{ĐK: } x \geq -3. \sqrt{x + 3} + \sqrt{3x + 1} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{3x^2 + 10x + 3} = 6 - 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ 3x^2 + 10x + 3 = (6 - 2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 (\text{tmđk})$$

Phương trình có 2 nghiệm $x = 1$. □

Bài 4. Giải phương trình $\sqrt{2x + 3} - \sqrt{4 - x} = 2$.

Lời giải.

$$\text{ĐK: } \frac{-3}{2} \leq x \leq 4.$$

$$\sqrt{2x + 3} - \sqrt{4 - x} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2x + 3} = \sqrt{4 - x} + 2 \Leftrightarrow 4\sqrt{4 - x} = 3x - 5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{3} \\ 16(4 - x) = (3x - 5)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 (\text{thỏa mãn điều kiện})$$

Phương trình có 1 nghiệm $x = 3$. □

Bài 5. Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 4x + 4} - \sqrt{x^2 + 2x - 2} = 2$.

Lời giải.

$$\text{ĐK: } x^2 + 2x - 2 \geq 0.$$

$$\sqrt{x^2 + 4x + 4} - \sqrt{x^2 + 2x - 2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4x + 4} = \sqrt{x^2 + 2x - 2} + 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2x - 2 + 4 + 4\sqrt{x^2 + 2x - 2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + 2x - 2} = x + 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + 2x - 2 = (x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 (\text{thỏa mãn điều kiện})$$

Phương trình có 1 nghiệm $x = 1$. □

Phương pháp 2. Đặt ẩn phụ.

Ví dụ 4. Giải phương trình $2x^2 - 2x + \sqrt{(x + 1)(x - 2)} = 14$.

Lời giải.

$$\text{Đặt } \sqrt{(x + 1)(x - 2)} = t \ (t \geq 0) \Rightarrow x^2 - x - 2 = t^2 \Rightarrow x^2 - x = t^2 + 2.$$

Vậy ta có phương trình:

$$2(t^2 + 2) + t = 14 \Leftrightarrow 2t^2 + t - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{-5}{2} (\text{loại}) \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } \sqrt{(x + 1)(x - 2)} = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Phương trình có 2 nghiệm $x = -2; x = 3$. □

Ví dụ 5. Giải phương trình $\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} + \sqrt{-x^2+4x-3} = 3$.

Lời giải.

ĐK: $1 \leq x \leq 3$ Đặt $\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} = t$ ($\sqrt{2} \leq t \leq 2$)

$$\Rightarrow t^2 = 2 + 2\sqrt{(x-1)(3-x)} \Rightarrow \sqrt{-x^2+4x-3} = \frac{t^2-2}{2}.$$

Khi đó ta có phương trình:

$$t + \frac{t^2-2}{2} = 3 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -4(\text{loại}) \end{cases} \Leftrightarrow t = 2.$$

Khi đó ta có $\sqrt{-x^2+4x-3} = 1 \Leftrightarrow -x^2+4x-3 = 1 \Leftrightarrow x = 2$.

Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$. □

Ví dụ 6. Giải phương trình $\sqrt[3]{x+7} + \sqrt{x+3} = 4$.

Lời giải.

ĐK: $x \geq -3$.

Đặt $\sqrt[3]{x+7} = a; \sqrt{x+3} = b$ ($b \geq 0$)

Ta có hệ

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ a^3 - b^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - a \\ a^3 - (4 - a)^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - a \\ a^3 - a^2 + 8a - 20 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - a \\ (a - 2)(a^2 + a + 10) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 - a \\ a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 2 \end{cases}.$$

Vậy $\sqrt{x+3} = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 6. Giải phương trình $\sqrt{x^2+x+2} = 2x^2+2x-2$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{x^2+x+2}$ ($t \geq 0$) có phương trình:

$$t = 2t^2 - 6 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -\frac{3}{2}(\text{Loại}) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \sqrt{x^2+x+2} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Phương trình có 2 nghiệm $x = 1; x = -2$. □

Bài 7. Giải phương trình $\sqrt{(x-1)(x+2)} = 2x^2 + 2x - 10$.

Lời giải.

Đặt $\sqrt{(x-1)(x+2)} = t (t \geq 0)$ thì $x^2 + x = t^2 + 2$ ta có phương trình

$$t = 2(t^2 + 2) - 10 \Leftrightarrow 2t^2 - t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -\frac{3}{2} \text{(loại)} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \sqrt{(x-1)(x+2)} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$$

Phương trình có 2 nghiệm $x = 2; x = -3$ □

Bài 8. Giải phương trình $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} + 3\sqrt{1-x^2} = 5$.

Lời giải.

ĐK: $-1 \leq x \leq 1$ Đặt $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = t (\sqrt{2} \leq t \leq 2)$ thì $\sqrt{1-x^2} = \frac{t^2-2}{2}$ khi đó ta có phương trình

$$t + 3\frac{t^2-2}{2} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -\frac{8}{3} \text{(loại)} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \sqrt{1-x^2} = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$ □

Bài 9. Giải phương trình $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} + x + \sqrt{x^2-x-2} = 8$.

Lời giải.

ĐK: $x \geq 2$.

Đặt $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = t (t \geq 0)$ thì $x + \sqrt{x^2-x-2} = \frac{t^2+1}{2}$ ta có

$$t + \frac{t^2+1}{2} = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -5 \text{(loại)} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x + \sqrt{x^2-x-2} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x-2} = 5-x \Leftrightarrow x = 3 \text{(thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$ □

Bài 10. Giải phương trình $\sqrt[3]{x-1} + 2\sqrt{x+2} = 5$.

Lời giải.

Đặt $\sqrt[3]{x-1} = a; \sqrt{x+2} = b (b \geq 0)$ ta có hệ

$$\begin{cases} a + 2b = 5 \\ a^3 - b^2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \sqrt{x+2} = 2 \Leftrightarrow x = 2.$$

phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$ □

Phương pháp 3. Đưa về dạng tích.

Ví dụ 7. Giải phương trình $\sqrt{x-1} + 3\sqrt{3-x} - \sqrt{-x^2+4x-3} = 3$.

Lời giải.

ĐK: $1 \leq x \leq 3$.

$$\sqrt{x-1} + 3\sqrt{3-x} - \sqrt{-x^2+4x-3} = 3$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sqrt{x-1} + 3\sqrt{3-x} - \sqrt{(x-1)(3-x)} - 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow (\sqrt{x-1} - 3) + (3\sqrt{3-x} - \sqrt{(x-1)(3-x)}) = 0 \\
&\Leftrightarrow (\sqrt{x-1} - 3) - \sqrt{3-x}(\sqrt{x-1} - 3) = 0 \\
&\Leftrightarrow (\sqrt{x-1} - 3)(\sqrt{3-x} - 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = 3 \\ \sqrt{3-x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10(\text{loại}) \\ x = 2 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có một nghiệm $x = 2$. □

Ví dụ 8. Giải phương trình $\sqrt{x+3} - \sqrt{2x-1} = x^2 - 3x - 4$.

Lời giải.

Đk: $x \geq \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x+3} - \sqrt{2x-1} = x^2 - 3x - 4 \\
&\Leftrightarrow \frac{x+3-2x+1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1}} = (x-4)(x+1) \\
&\Leftrightarrow \frac{4-x}{\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1}} = (x-4)(x+1) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ \frac{-1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1}} = x+1(2) \end{cases}.
\end{aligned}$$

Phương trình (2) vô nghiệm vì với $x \geq \frac{1}{2}$ thì $VT < 0 < VP$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 4$ □

Ví dụ 9. Giải phương trình $\sqrt{x-2} + x^2 - 3x - 1 = 0$.

Lời giải.

Phân tích: Ta nhầm được một nghiệm của phương trình là $x = 3$ và nếu tại $x = 3$ thì $\sqrt{x-2}$ là 1 nên nếu ta trừ nó cho 1 thì sẽ tạo được nhân tử $x - 3$

. ĐK: $x \geq 2$.

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x-2} + x^2 - 3x - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow (\sqrt{x-2} - 1) + x^2 - 3x = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x-2} + 1} + x(x-3) = 0 \\
&\Leftrightarrow (x-3) \left(\frac{x-3}{\sqrt{x-2} + 1} + x \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \frac{x-3}{\sqrt{x-2} + 1} + x = 0(2) \end{cases}.
\end{aligned}$$

Phương trình (2) với điều kiện $x \geq 2$ thì phương trình (2) có $VT > 0$ nên (2) vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 3$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 11. Giải phương trình $-\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 1$.

Lời giải.

$$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 1 \Leftrightarrow (\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1+x}-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Phương trình có nghiệm $x = 0$. □

Bài 12. Giải phương trình $\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1} + x^2 - 4 = 0$

Lời giải.

$$\text{ĐK: } x \geq \frac{1}{2}.$$

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1} + x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x+3}-2) + (\sqrt{2x-1}-1) + x^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \left(\frac{1}{\sqrt{x+3}+2} + \frac{2}{\sqrt{2x-1}+1} + x+1 \right) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Phương trình có một nghiệm là $x = 1$. □

Bài 13. Giải phương trình $\sqrt{x^2+3} = \sqrt{x+3} + 3x^3 - 3$.

Lời giải.

$$\text{ĐK: } x \geq -3$$

$$\sqrt{x^2+3} = \sqrt{x+3} + 3x^3 - 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3} - \sqrt{x+3} = 3(x^3 - 1)$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \frac{x}{\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x+3}} = 3(x-1)(x^2+x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \sqrt{x^2+3} + \sqrt{x+3} = 3(x^2+x+1)(2) \end{cases}$$

Thấy phương trình (2) vô nghiệm vì $VT \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \leq VP$.

Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất $x = 1$. □

Dạng 3. Phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối

Nguyên tắc cơ bản trong giải phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối là phải tìm cách làm mất dấu giá trị tuyệt đối. Các phương pháp thường dùng là: biến đổi tương đương, chia khoảng trên trục số, ...

Phương pháp 1. Biến đổi tương đương.

Với $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số. Khi đó

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases} \end{cases}$$

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

$$|f(x)| + |g(x)| = |f(x) + g(x)| \Leftrightarrow f(x).g(x) \geq 0$$

Phương pháp 2. Chia khoảng trên trục số

Ta lập bảng xét dấu của các biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối rồi xét các trường hợp để khử dấu giá trị tuyệt đối.

Một số cách khác

a) Đặt ẩn phụ.

b) Sử dụng bất đẳng thức ta so sánh $f(x)$ và $g(x)$ từ đó tìm nghiệm của phương trình

$$f(x) = g(x).$$

- c) Sử dụng đồ thị cần chú ý số nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ là số giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$. Phương pháp này thường áp dụng cho các bài toán biện luận nghiệm.

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 3 ❖❖❖

Phương pháp 1. Biến đổi tương đương.

Ví dụ 1. Giải phương trình sau $|2x - 3| = 5 - x$.

Lời giải.

$$\text{Phương trình } |2x - 3| = 5 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - x \geq 0 \\ \begin{cases} 2x - 3 = 5 - x \\ 2x - 3 = -(5 - x) \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ \begin{cases} x = \frac{8}{3} \\ x = -2 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \frac{8}{3}$ và $x = -2$. □

Ví dụ 2. Giải phương trình $|x - 2| = |3x + 2|$.

Lời giải.

$$\text{Phương trình } |x - 2| = |3x + 2| \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 3x + 2 \\ x - 2 = -(3x + 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -2$ và $x = 0$. □

Ví dụ 3. Giải phương trình $|x - 2| + |x + 2| = |2x|$.

Lời giải.

$$\text{Phương trình } |x - 2| + |x + 2| = |2x| \Leftrightarrow |x - 2| + |x + 2| = |x - 2 + x + 2| \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq 2 \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải phương trình $|x - 3| = 2x + 4$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } |x - 3| = 2x + 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4 \geq 0 \\ \begin{cases} x - 3 = 2x + 4 \\ x - 3 = -2x - 4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ \begin{cases} x = -7 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

Vậy phương trình có một nghiệm $x = -\frac{1}{3}$. □

Bài 2. Giải phương trình $|x + 1| = |3x - 1|$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } |x+1| = |3x-1| \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 3x-1 \\ x+1 = -3x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=0 \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=1$ và $x=0$. □

Bài 3. Giải phương trình sau $|3x-6| = 2x+1$.

Lời giải.

$$\text{Phương trình } |3x-6| = 2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 > 0 \\ \begin{cases} 3x-6 = 2x+1 \\ 3x-6 = -2x-1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ \begin{cases} x=7 \\ x=1 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=7$ và $x=1$ □

Bài 4. Giải phương trình $|x-1| + |2x+1| = |3x|$.

Lời giải.

$$\text{Phương trình } |x-1| + |2x+1| = |3x| \Leftrightarrow |x-1| + |2x+1| = |x-1+2x+1| \Leftrightarrow (x-1)(2x+1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{1}{2} \\ x \geq 1 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty)$. □

Bài 5. Giải phương trình $|3x-5| + |2x-1| = |-5x+6|$.

Lời giải.

$$\text{Phương trình } |3x-5| + |2x-1| = |-5x+6| \Leftrightarrow |3x-5| + |2x-1| = |5x-6| = |3x-5+2x-1| \Leftrightarrow (3x-5)(2x-1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ x \geq \frac{5}{3} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{3}; +\infty\right)$. □

Bài 6. Giải và biện luận phương trình $|x-2m| = x+m$.

Lời giải.

$$\text{Phương trình } |x-2m| = x+m \Leftrightarrow \begin{cases} x+m \geq 0 \\ \begin{cases} x-2m = x+m \\ x-2m = -x+m \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -m \\ \begin{cases} 3m = 0 \\ x = \frac{3m}{2} \end{cases} \end{cases}$$

Với $x = \frac{3m}{2} \geq -m \Rightarrow m \geq 0$.

Kết luận:

Với $m < 0$ phương trình vô nghiệm.

Với $m = 0$ phương trình có tập nghiệm $S = [0; +\infty)$.

Với $m > 0$ phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{3m}{2}$. □

Phương pháp 2. Chia khoảng trên trục số

Ví dụ 4. Giải phương trình $|x-2| = 2x-1$.

Lời giải.

Ta xét hai trường hợp

TH1: Với $x \geq 2$ phương trình trở thành $x - 2 = 2x - 1 \Rightarrow x = -1 < 2$ (loại).

TH2: Với $x < 2$ phương trình trở thành $-x + 2 = 2x - 1 \Rightarrow x = 1 < 2$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$. □

Ví dụ 5. Giải phương trình $|x - 2| + |3x - 9| = |x + 1|$.

Lời giải.

Lập bảng để khử dấu giá trị tuyệt đối. Có $\begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ 3x - 9 = 0 \Rightarrow x = 3 \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$.

x	$-\infty$	-1	2	3	$+\infty$
$x - 2$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$3x - 9$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$

Khi đó ta xét từng trường hợp để khử dấu giá trị tuyệt đối như sau:

TH1: Với $x < -1$ phương trình trở thành

$$-(x - 2) - (3x - 9) = -(x + 1) \Leftrightarrow x = 4 > -1 \Rightarrow \text{loại.}$$

TH2: Với $-1 \leq x < 2$ phương trình trở thành

$$-(x - 2) - (3x - 9) = x + 1 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow \text{loại.}$$

TH3: Với $2 \leq x < 3$ phương trình trở thành

$$x - 2 - (3x - 9) = x + 1 \Leftrightarrow x = 2.$$

TH4: Với $x \geq 3$ phương trình trở thành

$$x - 2 + 3x - 9 = x + 1 \Leftrightarrow x = 4.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 2$ và $x = 4$. □

Ví dụ 6. Biện luận số nghiệm của phương trình $|2x - 4m| = 3x + 2m$.

Lời giải.

Ta sẽ xét từng trường hợp để loại bỏ dấu giá trị tuyệt đối

TH1: Với $x \geq 2m$ thì phương trình trở thành

$$2x - 4m = 3x + 2m \Rightarrow x = -6m \text{ vì } x \geq 2m \Rightarrow -6m \geq 2m \Rightarrow m \leq 0$$

Vậy với $m \leq 0$ thì phương trình có nghiệm $x = -6m$.

TH2: Với $x < 2m$ thì phương trình trở thành

$$-2x + 4m = 3x + 2m \Rightarrow x = \frac{2m}{5} \text{ vì } x < 2m \Rightarrow \frac{2m}{5} < 2m \Rightarrow m > 0$$

Vậy $m > 0$ thì phương trình có nghiệm $x = \frac{2m}{5}$.

Kết luận: Với mọi $m \in \mathbb{R}$ thì phương trình có một nghiệm. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 7. Giải phương trình $|3x - 2| = x + 1$.

Lời giải.

TH1: Với $x \geq \frac{2}{3}$ phương trình trở thành $3x - 2 = x + 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ (thỏa mãn)

TH2: Với $x < \frac{2}{3}$ phương trình trở thành $-3x + 2 = x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \frac{3}{2}$ và $x = \frac{1}{4}$. □

Bài 8. Giải phương trình $|2x - 1| = |x + 2| + |x - 1|$.

Lời giải.

Ta lập bảng để khử dấu giá trị tuyệt đối. Có $\begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$2x - 1$		-	0	+	+
$x + 2$	-	0	+	+	+
$x - 1$	-	-	-	0	+

Từ đó ta xét các trường hợp để bỏ dấu giá trị tuyệt đối

TH1: Với $x < -2$ phương trình trở thành $-2x + 1 = -x - 2 - x + 1 \Leftrightarrow 0 = -3 \Rightarrow$ loại.

TH2: Với $-2 \leq x < \frac{1}{2}$ phương trình trở thành $-2x + 1 = x + 2 - x + 1 \Leftrightarrow x = -1$.

TH3: Với $\frac{1}{2} \leq x < 1$ phương trình trở thành $2x - 1 = x + 2 - x + 1 \Leftrightarrow x = 2 > 1 \Rightarrow$ loại.

TH4: Với $x \geq 1$ phương trình trở thành $2x - 1 = x + 2 + x - 1 \Leftrightarrow -1 = 1 \Rightarrow$ loại.

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = -1$. □

Bài 9. Giải phương trình $|x^2 - 3x + 2| + |3x - 6| = 2$.

Lời giải.

Ta lập bảng xét dấu để khử dấu giá trị tuyệt đối. Có $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ 3x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$x^2 - 3x + 2$	$+$	0	$-$	0	$+$
$3x - 6$	$-$	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu ta xét các trường hợp để bỏ dấu giá trị tuyệt đối:

TH1: Với $x < 1$ phương trình trở thành

$$x^2 - 3x + 2 - 3x + 6 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - \sqrt{3} \\ x = 3 + \sqrt{3} \end{cases} \text{ (loại)}$$

TH2: Với $1 \leq x < 2$ phương trình trở thành $-x^2 + 3x - 2 - 3x + 6 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$ kết hợp với $1 \leq x < 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$.

TH3: Với $x \geq 2$ phương trình trở thành $x^2 - 3x + 2 + 3x - 6 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{6} \\ x = \sqrt{6} \end{cases}$ kết hợp với $x \geq 2 \Rightarrow x = \sqrt{6}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \sqrt{2}$ và $x = \sqrt{6}$. □

Bài 10. Giải phương trình $\left| \frac{2x+1}{x-1} \right| = x+5$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 1$. Ta lập bảng xét dấu để khử dấu giá trị tuyệt đối, có $2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$ và $x-1=0 \Rightarrow x=1$. Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$		
$\frac{2x-1}{x-1}$		+	0	-	0	+

□

Bài 11. Giải phương trình $|3x-2| + |x^2-3x+2| = |x-2| + |x-1|$.

Lời giải.

Ta lập bảng để khử dấu giá trị tuyệt đối. Có $\begin{cases} 3x-2=0 \Rightarrow x=\frac{2}{3} \\ x^2-3x+2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=1 \end{cases} \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	1	2	$+\infty$	
$3x - 2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$x^2 - 3x + 2$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$x - 1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	

Từ bảng xét dấu ta xét các trường hợp để bỏ dấu giá trị tuyệt đối

TH1: Với $x < \frac{2}{3}$ phương trình trở thành

$$-3x+2+x^2-3x+2 = -x+2-x+1 \Leftrightarrow x^2-4x+1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \\ x = 2 - \sqrt{3} \end{cases} \text{ kết hợp với } x < \frac{2}{3} \Rightarrow x = 2 - \sqrt{3}.$$

Tương tự xét đối với các trường hợp còn lại ta được phương trình có hai nghiệm là $x = 2 - \sqrt{3}$ và $x = 1$. $\square$

Bài 12. Giải phương trình $\frac{|2x+4|-3|x|}{|x-2|+x-1} = 4$.

Lời giải.

Ta lập bảng để khử dấu giá trị tuyệt đối. Có $\square$

Bài 13. Biện luận số nghiệm các phương trình $|3x-4m| = x+m$.

Lời giải.

TH1: Với $x < \frac{4m}{3}$ thì phương trình trở thành $3x-4m = x+m \Leftrightarrow x = \frac{5m}{2}$ kết hợp với $x < \frac{4m}{3} \Rightarrow \frac{5m}{2} < \frac{4m}{3} \Leftrightarrow m < 0$.

TH2: Với $x \geq \frac{4m}{3}$ thì phương trình trở thành $-3x+4m = x+m \Leftrightarrow x = \frac{3m}{4}$ kết hợp với $x \geq \frac{4m}{3} \Rightarrow \frac{3m}{4} \geq \frac{4m}{3} \Leftrightarrow -\frac{7}{12}m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 0$.

Kết luận: Vậy phương trình đã cho luôn có duy nhất một nghiệm. $\square$

Một số cách khác

Ví dụ 7. Giải phương trình $|x^2-4x+2| = 2x^2-8x+3$.

Lời giải.

Ta có $|x^2-4x+2| = 2x^2-8x+3 \Leftrightarrow |x^2-4x+2| = 2(x^2-4x+2) - 1 \Rightarrow$ đặt $t = x^2-4x+2$. Khi đó, phương trình trở thành

$$|t| = 2t - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2t - 1 \geq 0 \\ \begin{cases} t = 2t - 1 \\ t = -2t + 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq \frac{1}{2} \\ \begin{cases} t = 1 \Rightarrow t = 1 \\ t = \frac{1}{3} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \\ x = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 2 + \sqrt{3}$ và $x = 2 - \sqrt{3}$. $\square$

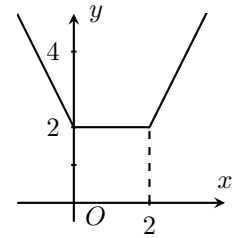
Ví dụ 8. Biện luận số nghiệm của phương trình $|x| + |x-2| = m$.

Lời giải.

Trước hết ta vẽ đồ thị hàm số $y = |x| + |x-2|$ lập bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		-	0	+		+	
$x-2$		-		-	0	+	

Từ đó vẽ đồ thị ứng với mỗi khoảng trong bảng xét dấu ta được đồ thị hình bên. Khi đó, số nghiệm của phương trình $|x| + |x - 2| = m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |x| + |x - 2|$ và đường thẳng $y = m$. Dựa vào đồ thị ta thấy:



Với $m < 2$ thì phương trình vô nghiệm.

Với $m = 2$ thì phương trình có tập nghiệm $S = [0; 2]$.

Với $m > 2$ thì phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

□

Ví dụ 9. Giải phương trình $|x - 2016|^4 + |x - 2017|^5 = 1$.

Lời giải.

Ta thấy $x = 2016$ hoặc $x = 2017$ là nghiệm của phương trình.

TH1: Với $x < 2016 \Rightarrow x - 2017 < -1 \Rightarrow |x - 2017| > 1 \Rightarrow |x - 2016|^4 + |x - 2017|^5 > 1$

$\Rightarrow$ phương trình không có nghiệm thỏa mãn $x < 2016$.

TH2: Với $2016 < x < 2017 \Rightarrow \begin{cases} 0 < x - 2016 < 1 \\ -1 < x - 2017 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x - 2016|^4 < |x - 2016| < x - 2016 \\ |x - 2017|^5 < |x - 2017| < 2017 - x \end{cases}$

$\Rightarrow |x - 2016|^4 + |x - 2017|^5 < x - 2016 + 2017 - x = 1 \Rightarrow$ phương trình không có nghiệm thỏa mãn $2016 < x < 2017$.

TH3: Với $x > 2017 \Rightarrow x - 2016 > 1 \Rightarrow |x - 2016|^4 + |x - 2017|^5 > 1$

$\Rightarrow$ phương trình không có nghiệm $x > 2017$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 2016$ và $x = 2017$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 14. Giải phương trình $|2x^2 - 4x + 3| = |x^2 - 3x + 1|$.

Lời giải.

$$\text{Phương trình } |2x^2 - 4x + 3| = |x^2 - 3x + 1| \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 4x + 3 = x^2 - 3x + 1 \\ 2x^2 - 4x + 3 = -x^2 + 3x - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 2 = 0 \\ 3x^2 - 7x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 1$ và $x = \frac{4}{3}$.

□

Bài 15. Giải phương trình $|5 - |2x - 1|| = 3$.

Lời giải.

Đặt $t = |2x - 1|$ với $t \geq 0$. Khi đó phương trình trở thành

$$|5 - t| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - t = 3 \\ 5 - t = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 8 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 2 \Rightarrow |2x - 1| = 2 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 2 \\ 2x - 1 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 8 \Rightarrow |2x - 1| = 8 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 8 \\ 2x - 1 = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{2} \\ x = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy phương trình có tập nghiệm } S = \left\{ -\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{9}{2} \right\}.$$

□

Bài 16. Biện luận số nghiệm của phương trình $|5x + 2| + |x - 1| = m$

Lời giải.

Trước tiên ta vẽ đồ thị hàm số $y = |5x + 2| + |x - 1|$ bằng cách lập bảng xét dấu

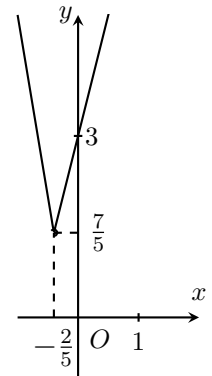
x	$-\infty$	$-\frac{2}{5}$	1	$+\infty$
$5x - 2$	$-$	0	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	0	$+$

Từ đó vẽ đồ thị ứng với mỗi khoảng trong bảng xét dấu ta được đồ thị hình bên. Khi đó, số nghiệm của phương trình $|5x + 2| + |x - 1| = m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |5x + 2| + |x - 1|$ và đường thẳng $y = m$. Dựa vào đồ thị ta thấy:

Với $m < \frac{7}{5}$ thì phương trình vô nghiệm.

Với $m = \frac{7}{5}$ thì phương trình có duy nhất một nghiệm.

Với $m > \frac{7}{5}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.



□

Bài 17. Giải phương trình $|x - 2017|^{2018} + |x - 2018|^{2017} = 1$.

Lời giải.

Ta thấy $x = 2017$ hoặc $x = 2018$ là nghiệm của phương trình.

TH1: Với $x < 2017 \Rightarrow x - 2018 < -1 \Rightarrow |x - 2018| > 1 \Rightarrow |x - 2017|^{2018} + |x - 2018|^{2017} > 1$
 $\Rightarrow$ phương trình không có nghiệm thỏa mãn $x < 2017$.

TH2: Với $2017 < x < 2018 \Rightarrow \begin{cases} 0 < x - 2017 < 1 \\ -1 < x - 2018 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x - 2017|^{2018} < |x - 2017| < x - 2017 \\ |x - 2018|^{2017} < |x - 2018| < 2018 - x \end{cases}$
 $\Rightarrow |x - 2017|^{2018} + |x - 2018|^{2017} < x - 2017 + 2018 - x = 1 \Rightarrow$ phương trình không có nghiệm thỏa mãn $2017 < x < 2018$.

TH3: Với $x > 2018 \Rightarrow x - 2017 > 1 \Rightarrow |x - 2017|^{2018} + |x - 2018|^{2017} > 1$
 $\Rightarrow$ phương trình không có nghiệm $x > 2018$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 2017$ và $x = 2018$.

□

Bài 18. Giải phương trình $|x + 1| + |x + 2| + |x + 3| + \dots + |x + 99| = 100x$.

Lời giải.

Ta có $|x + 1| + |x + 2| + |x + 3| + \dots + |x + 99| \geq 0 \Rightarrow |x + 1| + |x + 2| + |x + 3| + \dots + |x + 99| = 100x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$.
 Khi đó phương trình trở thành

$$x + 1 + x + 2 + x + 3 + \dots + x + 99 = 100x \Leftrightarrow 99x + 4950 = 100x \Rightarrow x = 4950.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 4950$

□

Dạng 4. Phương trình chứa ẩn ở mẫu. Phương trình bậc bốn trùng phương

Loại 1. Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

- Đặt điều kiện xác định của phương trình.
- Biến đổi phương trình đã cho về phương trình bậc nhất, bậc hai đã biết cách giải.
- Chọn nghiệm thỏa điều kiện xác định của phương trình.

 Khi giải phương trình chứa ẩn ở mẫu thức, ta phải chú ý điều kiện xác định của phương trình.

Loại 2. Phương trình trùng phương

Để giải phương trình trùng phương dạng $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (*) ta đặt $t = x^2 \geq 0$ để đưa về phương trình bậc hai $at^2 + bt + c = 0$ (*').

- Nếu phương trình (*) vô nghiệm hoặc chỉ có nghiệm âm thì phương trình (*) vô nghiệm.
- Nếu phương trình (*) có nghiệm $t = 0$ thì phương trình (*) có nghiệm $x = 0$.
- Nếu phương trình (*) có một nghiệm $t = t_0 > 0$ thì phương trình (*) có hai nghiệm $x = \pm\sqrt{t_0}$.

BÀI TẬP DẠNG 4

Loại 1. Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Ví dụ 1. Giải phương trình $\frac{x^2 + 3x + 4}{2x - 1} = \frac{x + 1}{2}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của phương trình: $x \neq \frac{1}{2}$.

Phương trình đã cho thành $2(x^2 + 3x + 4) = (x + 1)(2x - 1) \Leftrightarrow 5x = -9 \Leftrightarrow x = -\frac{9}{5}$.

So điều kiện ta nhận $x = -\frac{9}{5}$.

□

Ví dụ 2. Giải phương trình $\frac{5x - 3}{3x + 5} = \frac{2x - 5}{x - 1}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của phương trình: $x \neq -\frac{5}{3}, x \neq 1$.

Phương trình đã cho thành $(5x - 3)(x - 1) = (2x - 5)(3x + 5) \Leftrightarrow x^2 + 3x - 28 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -7 \end{cases}$.

So điều kiện ta nhận $x = -7, x = 4$.

□

Ví dụ 3. Giải phương trình $\frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$ (*).

Lời giải.

Điều kiện xác định của phương trình: $x \notin \{-7, -6, -5, -4\}$.

Khi đó:

$$\begin{aligned}
 (*) &\Leftrightarrow \frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} = \frac{1}{18} \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18} \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18} \\
 &\Leftrightarrow x^2 + 11x - 26 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -13 \\ x = 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

So điều kiện ta nhận $x = -13, x = 2$. □

Ví dụ 4. Giải và biện luận phương trình $\frac{(3m-2)x-4}{x-1} = 2m+3$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của phương trình: $x \neq 1$.

Phương trình đã cho thành $(3m-2)x-4 = (2m+3)(x-1) \Leftrightarrow (m-5)x = 1-2m$.

Với $m=5$ phương trình cuối thành $0x = -9$ vô nghiệm nên phương trình ban đầu vô nghiệm.

Với $m \neq 5$ thì $(m-5)x = 1-2m \Leftrightarrow x = \frac{1-2m}{m-5}$. Nghiệm này thỏa mãn điều kiện của phương trình đã cho khi và chỉ khi $\frac{1-2m}{m-5} \neq 1 \Leftrightarrow m \neq 2$.

Kết luận:

+ Với $m=5$ hoặc $m=2$ phương trình vô nghiệm.

+ Với $m \neq 5$ và $m \neq 2$ phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{1-2m}{m-5}$. □

Ví dụ 5. Tìm m để phương trình $\frac{x+1}{x-m+1} = \frac{x}{x+m+2}$ vô nghiệm.

Lời giải.

Điều kiện xác định của phương trình: $x \neq m-1, x \neq -m-2$.

Phương trình đã cho thành $(x+1)(x+m+2) = x(x-m+1) \Leftrightarrow 2(m+1)x = -m-2$.

Ta xét các trường hợp sau:

+ Với $m=-1$ thì $2(m+1)x = -m-2$ thành $0x = -1$ (vô nghiệm), nên $m=-1$ nhận.

+ Với $m \neq -1$ thì $2(m+1)x = -m-2 \Leftrightarrow x = \frac{-m-2}{2(m+1)}$. Kiểm tra điều kiện:

$$\begin{cases} x \neq m-1 \\ x \neq -m-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-m-2}{2(m+1)} \neq m-1 \\ \frac{-m-2}{2(m+1)} \neq -m-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -\frac{1}{2} \\ m \neq -2 \end{cases}$$

Vậy với $m \in \left\{-2, -1, -\frac{1}{2}, 0\right\}$ thì phương trình đã cho vô nghiệm. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải phương trình $\frac{2x^2 + 3x - 1}{x + 3} = \frac{4x - 5}{2}$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -3$.

Biến đổi phương trình ta được nghiệm $x = 13$ thỏa điều kiện. □

Bài 2. Giải phương trình $\frac{2x^2 - 2}{2x + 1} + \frac{x + 2}{2x + 1} = 2$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \neq -\frac{1}{2}$.

Biến đổi phương trình thành $2x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

So điều kiện ta nhận $x = 2$. □

Bài 3. Giải phương trình $\frac{3x^2 - x - 2}{\sqrt{3x - 2}} = \sqrt{3x - 2}$.

Lời giải.

Điều kiện $x > \frac{2}{3}$.

Biến đổi phương trình thành $3x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \frac{4}{3}$.

So điều kiện ta nhận $x = \frac{4}{3}$. □

Bài 4. Giải và biện luận phương trình $\frac{2mx - m^2 + m - 2}{x^2 - 1} = 1$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \neq \pm 1$.

Biến đổi phương trình thành $f(x) = x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0$.

Phương trình có biệt thức $\Delta' = m - 1$.

Với $m < 1$ phương trình cuối vô nghiệm nên phương trình ban đầu vô nghiệm.

Với $m = 1$ phương trình cuối có nghiệm $x = 1$ (loại) nên phương trình ban đầu vô nghiệm.

Với $m > 1$ phương trình cuối có nghiệm $x = m \pm \sqrt{m - 1}$.

- TH1: $f(1) = m^2 - 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = 1, m = 2$.
- TH2: $f(-1) = m^2 + m + 2 \neq 0 \forall m$.

Kết luận:

+ $m \leq 1$ hoặc $m = 2$ phương trình vô nghiệm.

+ $1 < m \neq 2$ phương trình có hai nghiệm $x = m \pm \sqrt{m - 1}$. □

Bài 5. Tìm m để phương trình $\frac{3x - m}{\sqrt{x - 2}} + \sqrt{x - 2} = \frac{2x + 2m - 1}{\sqrt{x - 2}}$ có nghiệm.

Lời giải.

Điều kiện $x > 2$.

Biến đổi phương trình thành $3x - m + x - 2 = 2x + 2m - 1 \Leftrightarrow 2x = 3m + 1 \Leftrightarrow x = \frac{3m + 1}{2}$.

Điều kiện để phương trình có nghiệm là $\frac{3m + 1}{2} > 2 \Leftrightarrow m > 1$. □

Loại 2. Phương trình trùng phương

Ví dụ 6. Giải phương trình $2x^4 - 7x^2 + 5 = 0$.

Lời giải.

Đặt $t = x^2 \geq 0$ ta được phương trình $2t^2 - 7t + 5 = 0 \Leftrightarrow t = 1, t = \frac{5}{2}$.

Với $t = 1$ thì $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Với $t = \frac{5}{2}$ thì $x = \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$. □

Ví dụ 7. Giải phương trình $(1 - \sqrt{2})x^4 + 2x^2 - 1 - \sqrt{2} = 0$.

Lời giải.

Đặt $t = x^2 \geq 0$ ta được phương trình $(1 - \sqrt{2})t^2 + 2t - 1 - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$.

Với $t = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$ thì $x^2 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2} - 1}}$. □

Ví dụ 8. Tìm m để phương trình $x^4 - 2mx^2 + 2m - 1 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt.

Lời giải.

Đặt $t = x^2 \geq 0$ ta được phương trình $t^2 - 2mt + 2m - 1 = 0$.

Phương trình $x^4 - 2mx^2 + 2m - 1 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $t^2 - 2mt + 2m - 1 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 2m + 1 > 0 \\ S = 2m > 0 \\ P = 2m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < m \neq 1$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 6. Giải phương trình $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Lời giải.

Đặt $t = x^2 \geq 0$ phương trình thành $t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 1, t = 4$.

Với $t = 1$ thì $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Với $t = 4$ thì $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$. □

Bài 7. Giải phương trình $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Lời giải.

Đặt $t = x^2 \geq 0$ ta được phương trình $t^2 - 13t + 36 = 0 \Leftrightarrow t = 9, t = 4$.

Với $t = 9$ thì $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$.

Với $t = 4$ thì $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$. □

Bài 8. Giải phương trình $x^4 + 24x^2 - 25 = 0$.

Lời giải.

Đặt $t = x^2 \geq 0$ ta được phương trình $t^2 + 24t - 25 = 0 \Leftrightarrow t = 1, t = -25$. Nghiệm $t = 1$ nhận, còn nghiệm $t = -25 < 0$ nên loại.

Với $t = 1$ thì $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$. □

Bài 9. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m + 1 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt nhỏ hơn 2.

Lời giải.

Đặt $t = x^2 \geq 0$ ta được phương trình $t^2 - (3m + 2)t + 3m + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1, t = 3m + 1$.

Với $t = 1$ thì $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Với $t = 3m + 1$ thì $x^2 = 3m + 1$.

Phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt nhỏ hơn 2 khi và chỉ khi phương trình $x^2 = 3m + 1$ có

hai nghiệm phân biệt khác ± 1 và nhỏ hơn 2 $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 3m + 1 < 4 \\ 3m + 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$. □

Bài 10. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - (m^2 + 10)x^2 + 9 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| = 8$.

Lời giải.

Đặt $t = x^2 \geq 0$ ta được phương trình $t^2 - (m^2 + 10)t + 9 = 0$.

Phương trình $x^4 - (m^2 + 10)x^2 + 9 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 khi và chỉ khi phương

trình $t^2 - (m^2 + 10)t + 9 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt thỏa mãn $0 < t_1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$ (luôn

thỏa với mọi giá trị tham số m).

Nhận xét rằng nếu x là nghiệm của phương trình thì $-x$ cũng là nghiệm nên $|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| = 8 \Leftrightarrow \sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} = 4 \Leftrightarrow t_1 + t_2 + 2\sqrt{t_1 t_2} = 16$.

Theo định lý Vi-et thì $t_1 + t_2 = m^2 + 10, t_1 t_2 = 9$.

Do đó ta được $m^2 + 10 = 10 \Leftrightarrow m = 0$. □

Dạng 5. Biện luận theo m có áp dụng định lý Viète

Định lý Viète

Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm x_1, x_2 thì

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Ngược lại, nếu hai số u và v có tổng $u + v = S$ và tích $uv = P$ thì u và v là các nghiệm của phương trình

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

BÀI TẬP DẠNG 5

Ví dụ 1. Biết phương trình $x^2 + 2mx - 12 = 0$ có một nghiệm $x_1 = 3$. Tìm m và nghiệm còn lại.

Lời giải.

- Thay $x_1 = 3$ vào phương trình ta được

$$9 + 6m - 12 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

- Theo định lí Viète, ta có $x_1 x_2 = -12 \Rightarrow x_2 = -4$.

□

Ví dụ 2. Biết phương trình $x^2 - x + m - 7 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 với $x_1 < x_2$ và $x_2 - x_1 = 5$. Tìm m .

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_1 - x_2 = -5 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

$$\text{Do đó } x_1 x_2 = m - 7 = -6 \Leftrightarrow m = 1.$$

□

Ví dụ 3. Cho phương trình $x^2 - 2mx - 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Tính theo m giá trị của các biểu thức sau:

a) $A = x_1^2 + x_2^2$.

b) $B = x_1^3 + x_2^3$.

Lời giải.

$$\text{Áp dụng định lí Viète ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = -4. \end{cases}$$

a) $A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 4m^2 + 8$.

b) $B = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = (2m)^3 - 3(-4)(2m) = 8m^3 + 24m$.

□

Ví dụ 4. Cho phương trình $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 4m + 3 = 0$ (1). Tìm m để phương trình (1).

- có hai nghiệm trái dấu.
- có hai nghiệm dương phân biệt.

Lời giải.

- Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

$$m^2 - 4m + 3 < 0 \Leftrightarrow (m - 1)(m - 3) < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 3.$$

- Phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 2 > 0 \\ 2(m - 1) > 0 \\ (m - 1)(m - 3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3.$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm m để phương trình $x^2 - 9x + m = 0$ có một nghiệm là -3 . Khi đó tìm nghiệm còn lại.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} -3 + x_2 = 9 \\ (-3) \cdot x_2 = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 12 \\ m = -36. \end{cases}$$

□

Bài 2. Cho phương trình $x^2 - (m + 5)x - m + 6 = 0$ (1).

- Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu.
- Tìm m để phương trình (1) có một nghiệm $x = -2$. Tìm nghiệm còn lại.
- Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 13$.

Lời giải.

- Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow -m + 6 < 0 \Leftrightarrow m > 6$.
- Ta có $x = -2$ là nghiệm của phương trình (1) nên

$$(-2)^2 - (m + 5)(-2) - m + 6 = 0 \Leftrightarrow m = -20.$$

Với $m = -20$ thay vào phương trình (1) ta được

$$x^2 + 15x + 26 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -13. \end{cases}$$

- Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 + 14m + 1 > 0 \quad (*).$$

$$\text{Theo định lí Viète ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = m + 5 \\ x_1 x_2 = -m + 6. \end{cases} \quad \text{Khi đó } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = m^2 + 12m + 13.$$

Do đó

$$x_1^2 + x_2^2 = 13 \Leftrightarrow m^2 + 12m + 13 = 13 \Leftrightarrow m^2 + 12m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 & (\text{thỏa mãn } (*)) \\ m = -12 & (\text{không thỏa mãn } (*)). \end{cases}$$

Vậy $m = 0$.

□

Bài 3. Cho phương trình $mx^2 - 6(m - 1)x + 9(m - 3) = 0$. Tìm giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = x_1 x_2$.

Lời giải.

$$\text{Phương trình có hai nghiệm phân biệt } \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -1. \end{cases}$$

$$\text{Theo định lí Viète, ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{6(m - 1)}{m} \\ x_1 x_2 = \frac{9(m - 3)}{m}. \end{cases} \quad \text{Khi đó}$$

$$x_1 + x_2 = x_1 x_2 \Leftrightarrow \frac{6(m - 1)}{m} = \frac{9(m - 3)}{m} \Leftrightarrow m = 7.$$

□

Bài 4. Cho phương trình $(m-1)x^2 - 2(m-2)x + m+3 = 0$ (1).

- a) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .
 b) Với các giá trị m trong câu a). Tìm một hệ thức giữa x_1, x_2 độc lập đối với m .

Lời giải.

- a) Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi

$$\begin{cases} m-1 \neq 0 \\ \Delta' = (m-2)^2 - (m-1)(m+3) > 0 \end{cases} \begin{cases} m \neq 1 \\ m < \frac{7}{6} \end{cases}.$$

- b) Theo định lí Viète, ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m-2}{m-1} = 1 + \frac{1}{m-1} & (*) \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m+3}{m-1} = 1 + \frac{4}{m-1} & (**). \end{cases}$$

Từ (*) suy ra $\frac{1}{m-1} = x_1 + x_2 - 1$. Do đó

$$x_1 \cdot x_2 = 1 + 4(x_1 + x_2 - 1) \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 - 4(x_1 + x_2) + 3 = 0.$$

□

Bài 5. Cho phương trình $mx^2 + 2(m-4)x + m+7 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - 2x_2 = 0$.

Lời giải.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < \frac{16}{15} \end{cases} (*)$.

Theo định lí Viète, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2(m-4)}{m} & (1) \\ x_1 x_2 = \frac{m+7}{m} & (2). \end{cases}$

Kết hợp (1) với điều kiện $x_1 - 2x_2 = 0$ suy ra $x_1 = \frac{-4m+16}{3m}, x_2 = \frac{-2m+8}{3m}$.

Thay vào (2) ta được

$$m^2 + 127m - 128 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 & (\text{thỏa mãn } (*)) \\ m = -128 & (\text{thỏa mãn } (*)). \end{cases}$$

□

Bài 6. Cho hàm số $y = x^2 - 2x + m$ có đồ thị (P) . Tìm m để (P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $OA = 5OB$.

Lời giải.

Ta có (P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình $x^2 - 2x + m = 0 (*)$ có hai nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow \Delta' = 1 - m > 0 \Leftrightarrow m < 1$.

Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $(*)$ và tọa độ các điểm là $A(x_1; 0), B(x_2; 0)$.

Theo định lí Viète:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 & (1) \\ x_1 x_2 = m & (2). \end{cases}$$

Ta có $OA = 5OB \Leftrightarrow |x_1| = 5|x_2| \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5x_2 \\ x_1 = -5x_2. \end{cases}$

- Với $x_1 = 5x_2$. Kết hợp với (1) suy ra $x_1 = \frac{5}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$. Thay vào (2) ta được $m = \frac{5}{9}$.
- Với $x_1 = -5x_2$. Kết hợp với (1) suy ra $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$. Thay vào (2) ta được $m = -\frac{5}{4}$.

Vậy các giá trị thỏa mãn bài toán là $m = \frac{5}{9}$, $m = -\frac{5}{4}$. □

Bài 7. Trong các hình chữ nhật có chu vi bằng 24. Tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

Lời giải.

Gọi chiều rộng và chiều dài của hình chữ nhật lần lượt là x và y ($x > 0$, $y > 0$) và diện tích của hình chữ nhật là S ($S > 0$). Khi đó

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ xy = S. \end{cases}$$

Do đó, x và y là hai nghiệm của phương trình $X^2 - 12X + S = 0$. Vì phương trình phải có nghiệm nên ta có

$$\Delta' = 36 - S \geq 0 \Leftrightarrow S \leq 36.$$

Dấu “=” xảy ra khi $\Delta' = 0 \Leftrightarrow x = y = 6$.

Vậy $\max S = 36$ (đvdt), khi đó hình chữ nhật là hình vuông có cạnh bằng 6. □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 8. Giải và biện luận phương trình $(x - 1)(x - mx + 2) = 0$.

Lời giải.

Phương trình (1) tương đương với

$$\begin{cases} x = 1 \\ (1 - m)x = -2 \quad (*) \end{cases}$$

- Với $m = 1$, phương trình (*) trở thành $0 \cdot x = -2$. Điều này vô lí nên phương trình (*) vô nghiệm. Phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = 1$.
- Với $m = 3$, phương trình (*) trở thành $-2x = -2$. Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$. Do đó, phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = 1$.
- Với $m \neq 1$ và $m \neq 3$, phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = -\frac{2}{1 - m} \neq 1$. Do đó, phương trình (1) có hai nghiệm $x = 1$ và $x = -\frac{2}{1 - m}$.

□

Bài 9. Giải và biện luận phương trình $(x^2 - 4)(mx - 3) = 0$.

Lời giải.

Phương trình (1) tương đương với

$$\begin{cases} x = \pm 2 \\ mx = 3 \quad (*) \end{cases}$$

- Với $m = 0$, phương trình (*) trở thành $0.x = 3$. Điều này vô lí nên phương trình (*) vô nghiệm. Phương trình (1) có hai nghiệm $x = \pm 2$.
- Với $m = \frac{3}{2}$, phương trình (*) trở thành $\frac{3}{2}x = 3$. Phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = 2$. Do đó, phương trình (1) có hai nghiệm $x = \pm 2$.
- Với $m = -\frac{3}{2}$, phương trình (*) trở thành $-\frac{3}{2}x = 3$. Phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = -2$. Do đó, phương trình (1) có hai nghiệm $x = \pm 2$.
- Với $m \neq \pm 2$ và $m \neq 0$, phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = -\frac{3m}{m} \neq \pm 2$. Do đó, phương trình (1) có ba nghiệm $x = \pm 2$ và $x = \frac{3}{m}$.

□

Bài 10. Giải phương trình $2(x^2 + 2) = 5\sqrt{x^3 + 1}$

Lời giải.

$$\text{Đặt } \sqrt{x+1} = a; \sqrt{x^2-x+1} = b \text{ ta có } 2(a^2 + b^2) = 5ab \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ a = \frac{1}{2}b \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} \sqrt{x+1} = 2\sqrt{x^2-x+1} \\ \sqrt{x+1} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2-x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{37}}{2} \\ x = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{37}}{2} \end{cases}$$

□

Bài 11. Giải phương trình $\sqrt{x+2} = x^2 + 2x - 2$

Lời giải.

$$\sqrt{x+2} = x^2 + 2x - 2 \Leftrightarrow (x+2) + \sqrt{x+2} - (x^2 - x) = 0.$$

Đặt $t = \sqrt{x+2}$ ta có $t^2 + t - (x^2 - x) = 0$, coi đây là phương trình ẩn t và có tham số x , sử dụng $\Delta = (2x-1)^2$ thì ta có:

$$\begin{cases} t = -x \\ t = x-1 \end{cases} \text{ hay ta có}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} = -x \\ \sqrt{x+2} = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

□

Bài 12. Giải phương trình $\sqrt{2+x} = \frac{-x^2 - x + 2}{x}$.

Lời giải.

ĐK: $x \geq -2, x \neq 0$

$$\sqrt{2+x} = \frac{-x^2 - x + 2}{x} \Leftrightarrow \sqrt{2+x} - (x+1) = \frac{-x^2 - x + 2}{x} - (x+1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2 - x + 1}{\sqrt{2+x} + (x+1)} = 2 \frac{-x^2 - x + 1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 - x + 1 = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2+x} + (x+1)} = \frac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \\ 2\sqrt{2+x} = -x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \\ x = -2 \end{cases}$$

□

Bài 13. Giải phương trình $\sqrt{2x^2 + 2x + 5} + \sqrt{2x^2 - 2x + 25} = \sqrt{8x^2 + 8}$.

Lời giải.

$$\sqrt{2x^2 + 2x + 5} + \sqrt{2x^2 - 2x + 25} = \sqrt{8x^2 + 8}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (x+2)^2} + \sqrt{(x+3)^2 + (x-4)^2} = \sqrt{(2x+2)^2 + (2x-2)^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức khoảng cách $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$ ta có

VT $\geq$ VP; vậy phương trình xảy ra khi dấu bằng xảy ra hay tức là:

$$\frac{x-1}{x+3} = \frac{x+2}{x-4} \Leftrightarrow x = \frac{-1}{5}.$$

□

Bài 14. Giải phương trình $|3|x - 2| - 9| - 2|6 - |3x - 6|| = 5$.

Lời giải.

Đặt $t = |x - 2|$ với $t \geq 0$ khi đó phương trình trở thành $|3t - 9| - 2|6 - 3t| = 5$. Ta lập bảng xét dấu của phương trình này. Có $3t - 9 = 0 \Rightarrow t = 3$ và $6 - 3t = 0 \Rightarrow t = 2$.

Bảng xét dấu

t	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$3t - 9$	-	0	+	+
$6 - 3t$	+	0	-	-

TH1: Với $t < 2$ phương trình trở thành

$$-3t + 9 - 2(6 - 3t) = 5 \Leftrightarrow -3t + 9 - 12 + 6t = 5 \Leftrightarrow t = \frac{8}{3} > 2 \text{ (loại)}.$$

TH2: Với $2 \leq t < 3$ phương trình trở thành

$$-3t + 9 + 12 - 6t = 5 \Leftrightarrow -9t = -16 \Rightarrow t = \frac{16}{9} < 2 \text{ (loại)}.$$

TH3: Với $t \geq 3$ phương trình trở thành

$$3t - 9 + 12 - 6t = 5 \Leftrightarrow -3t = 2 \Rightarrow t = -\frac{2}{3} < 3 \text{ (loại)}.$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

□

Bài 15. Tìm các số nguyên a để phương trình $ax^2 - (a+3)x + a+2 = 0$ có nghiệm nguyên.

Lời giải.

◦ Với $a = 0$ phương trình trở thành: $3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$.

◦ Với $a \neq 0$ khi đó để phương trình có nghiệm nguyên điều kiện cần là:

$\Delta = (a+3)^2 - 4a(a+2) = -3a^2 - 2a + 9$ là một số chính phương, tức là: $-3a^2 - 2a + 9 = k^2, k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Khi đó điều kiện của } a \text{ là: } \begin{cases} \frac{-1 - 2\sqrt{7}}{3} < a < \frac{-1 + 2\sqrt{7}}{3} \\ a \in \mathbb{Z}^* \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

Thay lần lượt các giá trị của a vào Δ và phương trình ban đầu ta tìm được: $a = -2; a = 1$ thỏa mãn.

Kết luận: Có 2 giá trị $a = -2$ và $a = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

Bài 16. Giải và biện luận phương trình: $\frac{a}{ax-1} + \frac{b}{bx-1} = \frac{a+b}{(a+b)x-1}$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} ax - 1 \neq 0 \\ bx - 1 \neq 0 \\ (a+b)x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax \neq 1 \\ bx \neq 1 \\ (a+b)x \neq 1 \end{cases} \quad (I).$$

Phương trình được viết lại thành: $abx[(a+b)x - 2] = 0$ (*).

◦ Nếu $a = b = 0$ phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$.

◦ Nếu $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ khi đó điều kiện (I) trở thành $x \neq \frac{1}{b}$.

Khi đó phương trình nghiệm đúng với mọi $x \neq \frac{1}{b}$.

◦ Nếu $\begin{cases} b = 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$ khi đó điều kiện (I) trở thành $x \neq \frac{1}{a}$.

Khi đó phương trình nghiệm đúng với mọi $x \neq \frac{1}{a}$.

◦ Nếu $\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ a+b=0 \end{cases}$ khi đó điều kiện (I) trở thành $x \neq \frac{1}{a}$ và $x \neq \frac{1}{b}$.

Khi đó phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

◦ Nếu $\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \\ a+b \neq 0 \end{cases}$ khi đó điều kiện (I) trở thành $x \neq \frac{1}{a}$; $x \neq \frac{1}{b}$ và $x \neq \frac{1}{a+b}$.

Khi đó phương trình có nghiệm $x = 0$ và nghiệm $x = \frac{2}{a+b}$ nếu $a \neq b$. □

Bài 17. Giải phương trình: $2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 2 = 0$.

Lời giải.

◦ Với $x = 0$ phương trình trở thành $2 = 0$. Vậy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình.

◦ Với $x \neq 0$. Chia cả hai vế cho x^2 ta được phương trình:

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0.$$

$$\text{Đặt } t = x + \frac{1}{x}, \quad |t| \geq 2.$$

$$\text{Khi đó phương trình trở thành: } 2(t^2 - 2) - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (L).$$

$$\text{Với } t = 2 \text{ ta có phương trình: } x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$. □

Bài 18. Giải phương trình: $(x+1)(x+2)(x+3^2(x+4)(x+5)) = 360$.

Lời giải.

$$\text{Phương trình đã cho } \Leftrightarrow (x^2 + 6x + 5)(x^2 + 6x + 8)(x^2 + 6x + 9) = 360.$$

Đặt $t = x^2 + 6x$, $t \geq -9$. Ta được phương trình:

$$(t+5)(t+8)(t+9) - 360 = 0 \Leftrightarrow t(t^2 + 22t + 157) = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

$$\text{Với } t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -6 \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{0; -6\}$. □

Bài 19. Giải phương trình: $x^3 + 2 = 3\sqrt[3]{3x - 2}$.

Lời giải.

$$\circ \text{ Đặt } y = \sqrt[3]{3x - 2}. \text{ Khi đó phương trình chuyển thành hệ: } \begin{cases} x^3 + 2 = 3y \\ y^3 = 3x - 2 \end{cases} \Rightarrow x^3 - y^3 = -3(x - y).$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

$$\text{Thay vào hệ ta được phương trình: } x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{1; -2\}$. □

Bài 20. Giải phương trình: $\sqrt{2x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1} = 3x$.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$.

$$\text{Ta có: } (2x^2 + x + 1) - (x^2 - x + 1) = x^2 + 2x > 0 \quad \forall x > 0.$$

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}} = 3x \Leftrightarrow \frac{x + 2}{\sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}} = 3.$$

$$\text{Ta có hệ phương trình: } \begin{cases} \sqrt{2x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1} = 3x \\ \sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} = \frac{x + 2}{3} \end{cases}$$

$$\text{Trừ vế với vế ta được: } 3\sqrt{2x^2 + x + 1} = 5x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -8 \text{ (L)} \end{cases}.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$. □

Bài 21. Giải phương trình: $2\sqrt[9]{(1+x)^2} + 3\sqrt[9]{1-x^2} + \sqrt[9]{(1-x)^2} = 0$.

Lời giải.

Dễ thấy $x = \pm 1$ không phải là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho

$\sqrt[9]{(1-x)^2}$, $t \neq -1$ ta được phương trình:

$$2\sqrt[9]{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt[9]{\frac{1-x}{1+x}} + 3 = 0.$$

Đặt $t = \sqrt[9]{\frac{1+x}{1-x}}$ ta được phương trình:

$$2t + \frac{1}{t} + 3 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (L)} \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Với } t = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt[9]{\frac{1+x}{1-x}} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1+2^9}{1-2^9}.$$

□

Bài 22. Giải phương trình: $2x^2 + 5x - 1 = 7\sqrt{x^3 + 1}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq 1$.

Phương trình đã cho tương đương với: $3(x-1) + 2(x^2+x+1) = 7\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)}$.

Dễ thấy $x = 1$ không phải là nghiệm của phương trình.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \sqrt{x-1} \\ v = \sqrt{x^2+x+1} \end{cases}, \quad u, v > 0.$$

$$\text{Phương trình đã cho trở thành: } 3u^2 + 2v^2 = 7uv \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2v \\ u = \frac{1}{3}v \end{cases}.$$

◦ Với $u = 2v$ ta có: $4x^2 + 3x + 5 = 0 \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm.

◦ Với $u = \frac{1}{3}v$ ta có: $x^2 - 8x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \pm \sqrt{6}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{4 - \sqrt{6}; 4 + \sqrt{6}\}$. □

Bài 23. Tìm m để phương trình $mx^2 - 2(3-m)x + m - 4 = 0$ có đúng một nghiệm âm.

Lời giải.

◦ Với $m = 0$ phương trình có nghiệm $x = -\frac{2}{3}$ thỏa yêu cầu bài toán.

◦ Với $m \neq 0$ phương trình có đúng một nghiệm âm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x_1 < 0 \leq x_2 \\ x_1 = x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < 0 = x_2 \\ x_1 < 0 < x_2 \\ x_1 = x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ S < 0 \\ P < 0 \\ \begin{cases} \Delta = 0 \\ -\frac{b}{2a} < 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ 0 < m < 4 \\ m = \frac{9}{2} \end{cases}.$$

Vậy $m \in [0; 4] \cup \left\{\frac{9}{2}\right\}$ thì phương trình có đúng một nghiệm âm. □

Bài 24. Giả sử phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Tìm điều kiện cần và đủ để phương trình có một nghiệm bằng bình phương nghiệm còn lại.

Lời giải.

$$\text{Từ giả thiết ta có: } \begin{cases} x_1 = x_2^2 \\ x_2 = x_1^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2^2 = 0 \\ x_2 - x_1^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x_1 - x_2^2)(x_2 - x_1^2) = 0.$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2 + (x_1x_2)^2 - (x_1^3 + x_2^3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2 + (x_1x_2)^2 - (x_1 + x_2) \left[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{a} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{b}{a} \left(\frac{b^2}{a^2} - 3\frac{c}{a} \right) = 0.$$

$$b^3 + a^2c + ac^2 = 3abc.$$

Điều kiện cần và đủ để phương trình có một nghiệm bằng bình phương nghiệm còn lại là $b^3 + a^2c + ac^2 = 3abc$. □

Bài 25. Giải phương trình $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} = 1$.

Lời giải.

Viết lại phương trình thành: $\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} + \sqrt{(2-\sqrt{x-1})^2} = 1$.

Điều kiện: $x \geq 1$.

Khi đó phương trình trở thành: $|\sqrt{x-1}-1| + |2-\sqrt{x-1}| = (\sqrt{x-1}-1) + (2-\sqrt{x-1})$.

Áp dụng tính chất: $|a| + |b| = a - b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} \sqrt{x-1}-1 \geq 0 \\ 2-\sqrt{x-1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} \geq 1 \\ \sqrt{x-1} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 5.$$

□

Bài 26. Tìm m để phương trình $x^2 + 2(m+1)x + 2m+3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Khi đó hãy lập phương trình bậc hai có nghiệm $\frac{1}{x_1^2}$ và $\frac{1}{x_2^2}$.

Lời giải.

○ Phương trình bậc hai có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi:

$$\Delta' = (m+1)^2 - 2m - 3 > 0 \Leftrightarrow m^2 > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\sqrt{2} \\ m > \sqrt{2} \end{cases}.$$

$$\text{○ Ta có: } \begin{cases} \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1^2x_2^2} = \frac{4m^2+4m-2}{(2m+3)^2} \\ \frac{1}{x_1^2} \cdot \frac{1}{x_2^2} = \frac{1}{4m^2+12m+9} \end{cases}.$$

Phương trình bậc hai thỏa mãn là: $X^2 - \frac{4m^2+4m-2}{4m^2+12m+9}X + \frac{1}{4m^2+12m+9} = 0$.

$$\Leftrightarrow (4m^2+12m+9)X^2 - (4m^2+4m-2)X + 1 = 0 \text{ với } m \neq -\frac{3}{2}.$$

□

Bài 27. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $|x^2 - 4x + 1| = m$.

Lời giải.

Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 1$ (P)

Đồ thị hàm số $y = |x^2 - 4x + 1|$ (C) gồm hai phần:

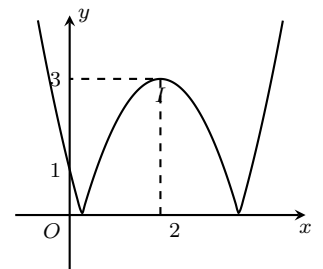
○ Phần phía trên trục hoành của (P).

○ Phần đối xứng phần đồ thị phía dưới trục hoành của (P) qua trục hoành.

Khi đó số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của (C) và đường thẳng $y = m$ ta được:

- + Với $m < 0$ phương trình vô nghiệm.
- + Với $m = 0$ hoặc $m > 3$ phương trình có 2 nghiệm.
- + Với $0 < m < 3$ phương trình có 4 nghiệm phân biệt.
- + Với $m = 3$ phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

□



Bài 28. Tìm m để phương trình $4x^4 + 4x^2 + 2mx + m^2 + 2m + 1 = 0$.

- a) Có nghiệm lớn nhất.
- b) Có nghiệm nhỏ nhất.

Lời giải.

Giả sử x_0 là nghiệm của phương trình đã cho, khi đó phương trình:

$$m^2 + 2(x_0 + 1)m + 4x_0^4 + 4x_0^2 + 1 = 0 \text{ luôn có nghiệm } m.$$

$$\Leftrightarrow \Delta' = (x_0 + 1)^2 - (2x_0^2 + 1)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x_0 - 2x_0^2)(2x_0^2 + x_0 + 2) \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x_0 \leq \frac{1}{2}.$$

$$\circ x_0 = 0 \Rightarrow m^2 + 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1.$$

$$\circ x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow m^2 + 3m + \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}.$$

□

Bài 29. Giải phương trình $\sqrt{2x^2 + 4} + 2\sqrt{2 - x^2} = 2\sqrt{6}$.

Lời giải.

Điều kiện: $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$$\sqrt{2x^2 + 4} + 2\sqrt{2 - x^2} = \sqrt{2}\sqrt{x^2 + 2} + 2\sqrt{2 - x^2} \leq \sqrt{(2 + 4)(x^2 + 2 + 2 - x^2)} = 2\sqrt{6}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2 - x^2}}{2} \Leftrightarrow 3x^2 + 2 = 0.$$

Do đó phương trình đã cho vô nghiệm. □

Bài 30. Cho phương trình: $\left(\frac{1+x}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2m \cdot \frac{1+x}{\sqrt{x}} + 1 = 0$.

a) Giải phương trình với $m = -1$.

b) Tìm m để phương trình có nghiệm.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 0$.

Đặt $t = \frac{1+x}{\sqrt{x}}$, $t \geq 2$. Phương trình đã cho trở thành: $t^2 + 2mt + 1 = 0$ (*).

a) Với $m = -1$ ta có: $t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm.

b) Để phương trình ban đầu có nghiệm thì (*) phải có nghiệm $t \geq 2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq t_1 \leq t_2 \\ t_1 \leq 2 \leq t_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ \begin{cases} f(2) \geq 0 \\ \frac{S}{2} \geq 2 \\ f(2) \leq 0 \end{cases} \end{cases}.$$

Giải hệ tìm được $m \leq -\frac{5}{4}$.

□

C CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $(m^2 - 4)x = 3m + 6$ vô nghiệm.

A. $m = 1$.B. $m = 2$.C. $m = \pm 2$.D. $m = -2$.

Lời giải.

$$\text{Phương trình đã cho vô nghiệm khi } \begin{cases} m^2 - 4 = 0 \\ 3m + 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 2 \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $mx - m = 0$ vô nghiệm.

A. $m \in \emptyset$.B. $m = \{0\}$.C. $m \in \mathbb{R}^+$.D. $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

$$\text{Phương trình đã cho vô nghiệm khi } \begin{cases} m = 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 3. Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $(m^2 - 5m + 6)x = m^2 - 2m$ vô nghiệm.

A. $m = 1$.B. $m = 2$.C. $m = 3$.D. $m = 6$.

Lời giải.

$$\text{Phương trình đã cho vô nghiệm khi } \begin{cases} m^2 - 5m + 6 = 0 \\ m^2 - 2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m = 2 \\ m = 3 \end{cases} \\ m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 4. Cho phương trình $(m + 1)^2x + 1 = (7m - 5)x + m$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình đã cho vô nghiệm.

A. $m = 1$.B. $m = 2; m = 3$.C. $m = 2$.D. $m = 3$.

Lời giải.

Phương trình viết lại $(m^2 - 5m + 6)x = m - 1$.

$$\text{Phương trình vô nghiệm khi } \begin{cases} m^2 - 5m + 6 = 0 \\ m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m = 2 \\ m = 3 \end{cases} \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 3 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 5. Cho hai hàm số $y = (m + 1)x^2 + 3m^2x + m$ và $y = (m + 1)x^2 + 12x + 2$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hai hàm số đã cho không cắt nhau.

A. $m = 2$.B. $m = -2$.C. $m = \pm 2$.D. $m = 1$.

Lời giải.

Đồ thị hai hàm số không cắt nhau khi và chỉ khi phương trình

$$\begin{aligned}(m+1)x^2 + 3m^2x + m &= (m+1)x^2 + 12x + 2 \text{ vô nghiệm.} \\ \Leftrightarrow 3(m^2 - 4)x &= 2 - m \text{ vô nghiệm.} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 = 0 \\ 2 - m \neq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 2 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2.\end{aligned}$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $(2m - 4)x = m - 2$ có nghiệm duy nhất.

- A. $m = -1$. B. $m = 2$. C. $m \neq -1$. D. $m \neq 2$.

Lời giải.

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi $2m - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 7. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để phương trình $(m^2 - 9)x = 3m(m - 3)$ có nghiệm duy nhất ?

- A. 2. B. 19. C. 20. D. 21.

Lời giải.

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi $m^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 3$ Vì m là các số nguyên thuộc đoạn $[-10; 10]$ nên có 19 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **B** □

Câu 8. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-5; 10]$ để phương trình $(m + 1)x = (3m^2 - 1)x + m - 1$ có nghiệm duy nhất. Tổng các phần tử trong S bằng:

- A. 15. B. 16. C. 39. D. 40.

Lời giải.

Phương trình viết lại $(3m^2 - m - 2)x = 1 - m$.

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi $3m^2 - m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -\frac{2}{3} \end{cases}$.

Mà $m \in [-5; 10]$ và $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

Do đó, tổng các phần tử trong S bằng 39.

Chọn đáp án **C** □

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $(m^2 + m)x = m + 1$ có nghiệm duy nhất $x = 1$.

- A. $m = -1$. B. $m \neq 0$. C. $m \neq -1$. D. $m = 1$.

Lời giải.

Phương trình có nghiệm duy nhất khi $m^2 + m \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -1 \end{cases} \quad (*)$

Khi đó, nghiệm của phương trình là $x = \frac{1}{m}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \frac{1}{m} = 1 \Leftrightarrow m = 1$ (thỏa mãn (*)).

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 10. Cho hai hàm số $y = (m + 1)^2x - 2$ và $y = (3m + 7)x + m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hai hàm số đã cho cắt nhau.

A. $m \neq -2$.

B. $m \neq -3$.

C. $m \neq -2$ và $m \neq 3$.

D. $m = -2, m = 3$.

Lời giải.

Đồ thị hai hàm số cắt nhau khi và chỉ khi phương trình $(m + 1)^2x - 2 = (3m + 7)x + m$ có nghiệm duy nhất.

$\Leftrightarrow (m^2 - m - 6)x = 2 + m$ có nghiệm duy nhất.

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 6 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m \neq -2. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $(m^2 - 1)x = m - 1$ có nghiệm đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

A. $m = 1$.

B. $m = \pm 1$.

C. $m = -1$.

D. $m = 0$.

Lời giải.

Phương trình đã cho nghiệm đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$ hay phương trình có vô số nghiệm khi $\begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 12. Cho phương trình $m^2x + 6 = 4x + 3m$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình đã cho có nghiệm.

A. $m = 2$.

B. $m \neq -2$.

C. $m \neq -2$ và $m \neq 2$.

D. $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Phương trình viết lại $(m^2 - 4)x = 3m - 6$.

Phương trình đã cho vô nghiệm khi $\begin{cases} m^2 - 4 = 0 \\ 3m - 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 2 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$.

Do đó, phương trình đã cho có nghiệm khi $m \neq -2$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 13. Cho phương trình $(m^2 - 3m + 2)x + m^2 + 4m + 5 = 0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình đã cho có nghiệm đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

A. $m = -2$.

B. $m = -5$.

C. $m = 1$.

D. Không tồn tại.

Lời giải.

Phương trình đã cho nghiệm đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$ hay phương trình có vô số nghiệm khi

$$\begin{cases} m^2 - 3m + 2 = 0 \\ -(m^2 + 4m + 5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \Leftrightarrow m \in \emptyset. \\ m \in \emptyset \end{cases}$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 14. Cho phương trình $(m^2 - 2m)x = m^2 - 3m + 2$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình đã cho có nghiệm.

A. $m = 0$.

B. $m = 2$.

C. $m \neq 0$ và $m \neq 2$.

D. $m \neq 0$.

Lời giải.

Phương trình đã cho vô nghiệm khi
$$\begin{cases} m^2 - 2m = 0 \\ m^2 - 3m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \\ m \neq 2 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0. \text{ Do đó, phương trình}$$

đã cho có nghiệm khi $m \neq 0$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 15. Cho hai hàm số $y = (m + 1)x + 1$ và $y = (3m^2 - 1)x + m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hai hàm số đã cho trùng nhau.

A. $m = 1$ hoặc $m = -\frac{2}{3}$.

B. $m \neq 1$ và $m \neq -\frac{2}{3}$.

C. $m = 1$.

D. $m = -\frac{2}{3}$.

Lời giải.

Đồ thị hai hàm số trùng nhau khi và chỉ khi phương trình $(m + 1)x + 1 = (3m^2 - 1)x + m$ có vô số nghiệm

$$\Leftrightarrow (3m^2 - m - 2)x = 1 - m \text{ có vô số nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 - m - 2 = 0 \\ 1 - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 16. Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi:

A. $a = 0$.

B. $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$.

C. $a = b = c = 0$.

D. $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$.

Lời giải.

Với $a = 0$. Phương trình trở thành $bx = -c$. Khi đó, phương trình có nghiệm duy nhất khi $b \neq 0$.

Với $a \neq 0$. Khi đó, phương trình có nghiệm duy nhất khi $\Delta = 0$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 17. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để phương trình $x^2 - x + m = 0$ vô nghiệm?

A. 9.

B. 10.

C. 20.

D. 21.

Lời giải.

Ta có $\Delta = 1 - 4m$. Phương trình vô nghiệm khi $\Delta < 0 \Leftrightarrow 1 - 4m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$. Do $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-10; 10] \end{cases}$.

Nên có 10 giá trị thỏa mãn.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 18. Phương trình $(m + 1)x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ vô nghiệm khi:

A. $m \leq -2$.

B. $m < -2$.

C. $m > 2$.

D. $m \geq 2$.

Lời giải.

Với $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$. Khi đó phương trình trở thành $2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

Với $m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$. Ta có $\Delta' = m^2 - (m - 2)(m + 1) = m + 2$. Phương trình vô nghiệm khi $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m + 2 < 0 \Leftrightarrow m < -2$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 19. Số nguyên k nhỏ nhất thỏa mãn phương trình $2x(kx - 4) - x^2 + 6 = 0$ vô nghiệm là?

A. $k = -1$.

B. $k = 1$.

C. $k = 2$.

D. $k = 3$.

Lời giải.

Phương trình viết lại $(2k - 1)x^2 - 8x + 6 = 0$. Với $2k - 1 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$. Khi đó, phương trình trở thành $-8x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$.

Với $2k - 1 \neq 0 \Leftrightarrow k \neq \frac{1}{2}$. Ta có $\Delta' = (-4)^2 - (2k - 1) \cdot 6 = -12k + 22$. Khi đó, phương trình đã cho vô nghiệm khi $\Delta' < 0 \Leftrightarrow -12k + 22 < 0 \Leftrightarrow k > \frac{11}{6}$.

Do đó, số nguyên k nhỏ nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán là $k = 2$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 20. Phương trình $(m - 2)x^2 + 2x - 1 = 0$ có nghiệm kép khi

A. $m = 1; m = 2$.

B. $m = 1$.

C. $m = 2$.

D. $m = -1$.

Lời giải.

Phương trình đã cho có nghiệm kép khi $\begin{cases} m - 2 \neq 0 \\ \Delta' = m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 21. Phương trình $mx^2 + 6 = 4x + 3m$ có nghiệm duy nhất khi

A. $m \in \emptyset$.

B. $m = 0$.

C. $m \in \mathbb{R}$.

D. $m \neq 0$.

Lời giải.

Phương trình viết lại $mx^2 - 4x + (6 - 3m) = 0$.

Với $m = 0$. Khi đó, phương trình trở thành $4x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$. Do đó, $m = 0$ là một giá trị cần tìm.

Với $m \neq 0$. Ta có $\Delta' = (-2)^2 - m(6 - 3m) = 3m^2 - 6m + 4 = 3(m - 1)^2 + 1 > 0$ Khi đó, phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt nên $m \neq 0$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 22. Phương trình $mx^2 - 2(m + 1)x + m + 1 = 0$ có nghiệm duy nhất khi

A. $m = 0$.

B. $m = -1$.

C. $m = 0, m = -1$.

D. $m = 1$.

Lời giải.

Với $m = 0$. Khi đó, phương trình trở thành $-2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. Do đó, $m = 0$ là một giá trị cần tìm.

Với $m \neq 0$. Ta có $\Delta' = [-(m + 1)]^2 - m(m + 1) = m + 1$. Khi đó, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 23. Phương trình $(m+1)x^2 - 6(m+1)x + 2m + 3 = 0$ có nghiệm kép khi

- A. $m = -1$. B. $m = -1, m = -\frac{6}{7}$. C. $m = -\frac{6}{7}$. D. $m = \frac{6}{7}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho có nghiệm kép khi $\begin{cases} m+1 \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ 7m^2 + 13m + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ \begin{bmatrix} m = -1 \\ m = -\frac{6}{7} \end{bmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{6}{7}.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 24. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $(m-2)x^2 - 2x + 1 - 2m = 0$ có nghiệm duy nhất. Tổng của các phần tử trong S bằng

- A. $\frac{5}{2}$. B. 3. C. $\frac{7}{2}$. D. $\frac{9}{2}$.

Lời giải.

Với $m = 2$, phương trình trở thành $-2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$. Do đó $m = 2$ là một giá trị cần tìm.

Với $m \neq 2$, phương trình đã cho là phương trình bậc hai có $\Delta' = 2m^2 - 5m + 3$. Để phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$ hoặc $m = 1$. Vậy $S = \left\{1; \frac{3}{2}; 2\right\}$. Vậy tổng các phần tử trong S

bằng $1 + \frac{3}{2} + 2 = \frac{9}{2}$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 25. Phương trình $(m-1)x^2 + 6x - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi

- A. $m > -8$. B. $m > -\frac{5}{4}$. C. $m > -8, m \neq 1$. D. $m > -\frac{5}{4}, m \neq 1$.

Lời giải.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi $\begin{cases} m-1 \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m+8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > -8. \end{cases}$

Chọn đáp án **C** □

Câu 26. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-5; 5]$ để phương trình $mx^2 - 2(m+2)x + m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

- A. 5. B. 6. C. 9. D. 10.

Lời giải.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi $\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 5m+4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\frac{4}{5}. \end{cases}$

Do $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-5; 5] \end{cases}$ nên có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **A** □

Câu 27. Phương trình $(m^2+2)x^2 + (m-2)x - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi

- A. $0 < m < 2$. B. $m > 2$. C. $m \in \mathbb{R}$. D. $m \leq 2$.

Lời giải.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi $\begin{cases} m^2 + 2 \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 13m^2 - 4m + 28 > 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}.$

Chọn đáp án **C** □

Câu 28. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = 2x + m$ tiếp xúc với parabol $P: y = (m - 1)x^2 + 2mx + 3m - 1$.

A. $m = 1$.B. $m = -1$.C. $m = 0$.D. $m = 2$.**Lời giải.**

Phương trình hoành độ giao điểm

$$(m - 1)x^2 + 2mx + 3m - 1 = 2x + m \Leftrightarrow (m - 1)x^2 + 2(m - 1)x + 2m - 1 = 0. \quad (*)$$

đường thẳng d tiếp xúc với P khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \neq 0 \\ \Delta' = (m - 1)^2 (m - 1) (2m - 1) = m(m - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ \begin{cases} m = 0 \Leftrightarrow m = 0. \\ m = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 29. Phương trình $x^2 + m = 0$ có nghiệm khi

A. $m > 0$.B. $m < 0$.C. $m \leq 0$.D. $m \geq 0$.**Lời giải.**

Phương trình tương đương với $x^2 = -m$. Do vế trái của phương trình không âm nên để phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 0$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 30. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-20; 20]$ để phương trình $x^2 - 2mx + 144 = 0$ có nghiệm. Tổng của các phần tử trong S bằng

A. 21.

B. 18.

C. 1.

D. 0.

Lời giải.

Phương trình có nghiệm khi $\Delta' = m^2 - 144 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 \geq 12^2 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 12 \\ m \leq -12 \end{cases}$. Vì m là số nguyên thuộc

đoạn $[-20; 20]$ nên m thuộc tập $\{-20; -19; -18; \dots; -12; 12; 13; 14; \dots; 20\}$. Do đó tổng các phần tử trong tập S bằng 0.

Chọn đáp án **D** □

Câu 31. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hai đồ thị hàm số $y = -x^2 - 2x + 3$ và $y = x^2 - m$ có điểm chung.

A. $m = -\frac{7}{2}$.B. $m < -\frac{7}{2}$.C. $m > -\frac{7}{2}$.D. $m \geq -\frac{7}{2}$.**Lời giải.**

Phương trình hoành độ giao điểm $-x^2 - 2x + 3 = x^2 - m \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - m - 3 = 0$. $(*)$ Để hai đồ thị hàm số có điểm chung khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' = 1 - 2(-m - 3) \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{7}{2}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 32. Phương trình $(m-1)x^2 + 3x - 1 = 0$ có nghiệm khi

- A. $m \geq -\frac{5}{4}$. B. $m \leq -\frac{5}{4}$. C. $m = -\frac{5}{4}$. D. $m = \frac{5}{4}$.

Lời giải.

Với $m = 1$, phương trình trở thành $3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$. Do đó $m = 1$ thỏa mãn.

Với $m \neq 1$, ta có $\Delta = 9 + 4(m-1) = 4m + 5$.

Phương trình có nghiệm khi $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4m + 5 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{5}{4}$. Vì $m \neq 1$ nên $-\frac{5}{4} \leq m \neq -1$.

Hợp hai trường hợp ta được $m \geq -\frac{5}{4}$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 33. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để phương trình $mx^2 - mx + 1 = 0$ có nghiệm.

- A. 17. B. 18. C. 20. D. 21..

Lời giải.

Nếu $m = 0$ thì phương trình trở thành $1 = 0$ do đó phương trình vô nghiệm.

Khi $m \neq 0$, phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta = m^2 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 4. \end{cases}$

Kết hợp điều kiện $m \neq 0$, ta được: $\begin{cases} m < 0 \\ m \geq 4 \end{cases}$. Vì m là số nguyên thuộc $[-10; 10]$ nên m thuộc

$\{-10; -9; -8; \dots; -1\} \cup \{4; 5; 6; \dots; 10\}$. Vậy có tất cả 17 giá trị nguyên m thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 34. Biết rằng phương trình $x^2 - 4x + m + 1 = 0$ có một nghiệm bằng 3. Nghiệm còn lại của phương trình bằng

- A. -1. B. 1. C. 2. D. 4..

Lời giải.

Vì phương trình đã cho có nghiệm bằng 3 nên thay $x = 3$ vào phương trình, ta được

$$9 - 12 + m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 2.$$

Với $m = 2$ phương trình trở thành $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1. \end{cases}$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 35. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $3x^2 - (m+2)x + m - 1 = 0$ có một nghiệm gấp đôi nghiệm còn lại.

- A. $m \in \left\{\frac{5}{2}; 7\right\}$. B. $m \in \left\{-2; -\frac{1}{2}\right\}$. C. $m \in \left\{0; \frac{2}{5}\right\}$. D. $m \in \left\{-\frac{3}{4}; 1\right\}$.

Lời giải.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m + 16 > 0 \Leftrightarrow (m-4)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 4. (*)$

Theo định lí Viet, ta có
$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{m-1}{3} \\ x_1 + x_2 = \frac{m+2}{3} \\ x_1 = 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{9}(m+2) \\ x_2 = \frac{1}{9}(m+2) \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m-1}{3} \end{cases}.$$

Suy ra $\frac{2}{81}(m+2)^2 = \frac{m-1}{3} \Leftrightarrow 2m^2 - 19m + 35 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{5}{2} \\ m = 7 \end{cases}$ (thỏa mãn(*))

Chọn đáp án **A**

□

Câu 36. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $3x^2 - 2(m+1)x + 3m - 5 = 0$ có một nghiệm gấp ba nghiệm còn lại.

A. $m = 7$.

B. $m = 3$.

C. $m = 3; m = 7$.

D. $m \in \emptyset$.

Lời giải.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 7m + 16 > 0 \Leftrightarrow \left(m - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Theo định lí Viet, ta có
$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{3m-5}{3} \\ x_1 + x_2 = \frac{2(m+1)}{3} \\ x_1 = 3x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{m+1}{2} \\ x_2 = \frac{m+1}{6} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{3m-5}{3} \end{cases}.$$

Suy ra $\frac{(m+1)^2}{12} = \frac{3m-5}{3} \Leftrightarrow m^2 - 10m + 21 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = 7 \end{cases}$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 37. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $(x-1)(x^2 - 4mx - 4) = 0$ ba nghiệm phân biệt.

A. $m \in \mathbb{R}$.

B. $m \neq 0$.

C. $m \neq \frac{3}{4}$.

D. $m \neq -\frac{3}{4}$.

Lời giải.

Ta có $(x-1)(x^2 - 4mx - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ g(x) = x^2 - 4mx - 4 = 0 (*) \end{cases}$. Phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (*) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4m^2 + 4 > 0 \\ g(1) = 1 - 4m - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq -\frac{3}{4}.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 38. Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm phân biệt cùng dấu khi và chỉ khi

A. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \end{cases}$.

Lời giải.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta > 0$. Khi đó, gọi hai nghiệm của phương trình là x_1 và x_2 . Do x_1 và x_2 cùng dấu nên $x_1x_2 > 0$ hay $P > 0$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 39. Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi

A. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \end{cases}$.

Lời giải.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta > 0$. Khi đó, gọi 2 nghiệm của phương trình là x_1 và x_2 .

Do x_1 và x_2 là hai nghiệm âm nên $\begin{cases} x_1 + x_2 < 0 \\ x_1x_2 > 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 40. Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi

A. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \end{cases}$.

Lời giải.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta > 0$. Khi đó, gọi hai nghiệm của phương trình là x_1 và x_2 .

Do x_1 và x_2 là hai nghiệm dương nên $\begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1x_2 > 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 41. Phương trình $x^2 - mx + 1 = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt khi

A. $m < -2$. B. $m > 2$. C. $m \geq -2$. D. $m \neq 0$.

Lời giải.

Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt khi $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 > 0 \\ m < 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -2$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 42. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-5; 5]$ để phương trình $x^2 + 4mx + m^2 = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt?

A. 5. B. 6. C. 10. D. 11.

Lời giải.

Phương trình đã cho có hai nghiệm âm phân biệt khi

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 > 0 \\ -4m < 0 \\ m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0.$$

Do $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-5; 5] \end{cases}$ nên $m \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$ do đó có 5 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 43. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $mx^2 + x + m = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt là

A. $m \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$. B. $m \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. C. $m \in (0; 2)$. D. $m \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt khi

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 1 - 4m^2 > 0 \\ -\frac{1}{m} < 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 44. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2; 6]$ để phương trình $x^2 + 4mx + m^2 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt. Tổng các phần tử trong S bằng:

A. -3 . B. 2 . C. 18 . D. 21 .

Lời giải.

Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt khi

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 > 0 \\ -4m > 0 \\ m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0.$$

Vì m nguyên và thuộc $[-2; 6]$ nên m thuộc $\{-2; -1\}$. Do đó, tổng các phần tử trong S bằng -3 .

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 45. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt là:

A. $m \in (-1; 1)$. B. $m \in (1; +\infty)$. C. $m \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. D. $m \in (-\infty; -1)$.

Lời giải.

$$\text{Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 2m + 2 > 0 \\ S = 2(m+1) > 0 \\ P = m^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m > -1 \\ \begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m > 1. \text{ Vậy}$$

với $m > 1$ thì thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 46. Phương trình $(m-1)x^2 + 3x - 1 = 0$ có hai nghiệm trái dấu khi

A. $m > 1$. B. $m < 1$. C. $m \geq 1$. D. $m \leq 1$.

Lời giải.

Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu khi $\begin{cases} a \neq 0 \\ P < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \neq 0 \\ \frac{-1}{m - 1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1.$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 47. Giả sử phương trình $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + 2 = 0$ (m là tham số) có hai nghiệm là x_1, x_2 . Tính giá trị biểu thức $P = 3x_1x_2 - 5(x_1 + x_2)$ theo m .

A. $P = 3m^2 - 10m + 6.$

B. $P = 3m^2 + 10m - 5.$

C. $P = 3m^2 - 10m + 1.$

D. $P = 3m^2 + 10m + 1.$

Lời giải.

Theo định lý Viet, ta có $\begin{cases} x_1x_2 = m^2 + 2 \\ x_1 + x_2 = 2m + 1 \end{cases}.$

Thay vào P , ta được $P = 3(m^2 + 2) - 5(2m + 1) = 3m^2 - 10m + 1.$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 48. Giả sử phương trình $x^2 - 3x - m = 0$ (m là tham số) có hai nghiệm là x_1, x_2 . Tính giá trị biểu thức $P = x_1^2(1 - x_2) + x_2^2(1 - x_1)$ theo m .

A. $P = -m + 9.$

B. $P = 5m + 9.$

C. $P = m + 9.$

D. $P = -5m + 9.$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} P &= x_1^2(1 - x_2) + x_2^2(1 - x_1) = x_1^2 - x_1^2x_2 + x_2^2 - x_2^2x_1 = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2(x_1 + x_2) \\ &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - x_1x_2(x_1 + x_2). \end{aligned}$$

Theo định lý Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1x_2 = -m \end{cases}$ Thay vào P , ta được $P = 3^2 - 2(-m) - (-m) \cdot 3 = 5m + 9.$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 49. Giả sử phương trình $2x^2 - 4ax - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính giá trị của biểu thức $T = |x_1 - x_2|.$

A. $T = \frac{4a^2 + 2}{3}.$

B. $T = \sqrt{4a^2 + 2}.$

C. $T = \frac{\sqrt{a^2 + 8}}{2}.$

D. $T = \frac{\sqrt{a^2 + 8}}{4}.$

Lời giải.

Vì x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $2x^2 - 4ax - 1 = 0$. Theo định lý Viet, ta có

$$x_1 + x_2 = -\left(-\frac{4a}{2}\right) = 2a \text{ và } x_1x_2 = -\frac{1}{2} \quad (1)$$

Ta có $T = |x_1 - x_2| \Leftrightarrow T^2 = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \quad (2).$

Từ (1) và (2) suy ra $T^2 = (2a)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 4a^2 + 2 \Rightarrow T = \sqrt{4a^2 + 2} > 0.$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 50. Cho phương trình $x^2 + px + q = 0$ trong đó $p > 0, q > 0$. Nếu hiệu các nghiệm của phương trình bằng 1. Khi đó p bằng

A. $\sqrt{4q + 1}.$

B. $\sqrt{4q - 1}.$

C. $-\sqrt{4q + 1}.$

D. $q + 1.$

Lời giải.

Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình $x^2 + px + q = 0$.

Theo định lý Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p < 0 \\ x_1 x_2 = q > 0 \end{cases}$ (vì $p, q > 0$). (1)

Từ giả thiết, ta có $|x_1 - x_2| = 1 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 1$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $p^2 - 4q = 1 \Leftrightarrow p^2 = 4q + 1 \Leftrightarrow p = \sqrt{4q + 1} > 0$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 51. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + 1 = 0$ (m là tham số). Tìm giá trị nguyên của m sao cho biểu thức $P = \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}$ có giá trị nguyên.

A. $m = -2$. B. $m = -1$. C. $m = 1$. D. $m = 2$.

Lời giải.

Ta có $\Delta = (2m + 1)^2 - 4(m^2 + 1) = 4m - 3$. Để phương trình có hai nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{4}$. Theo

định lý Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 1 \\ x_1 x_2 = m^2 + 1 \end{cases}$. Khi đó

$$P = \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} = \frac{m^2 + 1}{2m + 1} = \frac{2m - 1}{4} + \frac{5}{4(2m + 1)} \Rightarrow 4P = 2m - 1 + \frac{5}{2m + 1}.$$

Do $m \geq \frac{3}{4}$ nên $2m + 1 \geq \frac{5}{2}$.

Để $P \in \mathbb{Z}$ thì ta phải có $(2m + 1)$ là ước của 5, suy ra $2m + 1 = 5 \Leftrightarrow m = 2$.

Thử lại với $m = 2$, ta được $P = 1$: thỏa mãn

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 52. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 + 2 = 0$ (m là tham số). Tìm m để biểu thức $P = x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) - 6$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $m = \frac{1}{2}$. B. $m = 1$. C. $m = 2$. D. $m = -12$.

Lời giải.

Ta có $\Delta' = (m + 1)^2 - (m^2 + 2) = 2m - 1$.

Phương trình có hai nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}$. (*)

Theo định lý Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 2 \\ x_1 x_2 = m^2 + 2 \end{cases}$. Khi đó

$$P = x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) - 6 = m^2 + 2 - 2(2m + 2) - 6 = (m - 2)^2 - 12 \geq -12.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $m = 2$ thỏa (*).

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 53. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $2x^2 + 2mx + m^2 - 2 = 0$ (m là tham số). Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức $P = |2x_1 x_2 + x_1 + x_2 - 4|$.

A. $P_{\max} = \frac{1}{2}$. B. $P_{\max} = 2$. C. $P_{\max} = \frac{25}{4}$. D. $P_{\max} = \frac{9}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\Delta' = m^2 - 2(m^2 - 2) = -m^2 + 4$.

Phương trình có hai nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' = 4 - m^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$. (*)

Theo định lý Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1 x_2 = \frac{m^2 - 2}{2} \end{cases}$. Khi đó

$$\begin{aligned} A &= |2x_1 x_2 + x_1 + x_2 - 4| = |m^2 - m - 6| \\ &= |(m+2)(m-3)| = -(m+2)(m-3) \\ &= -m^2 + m + 6 = -\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} \leq \frac{25}{4}; \quad (\text{do } -2 \leq m \leq 2). \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $m = \frac{1}{2}$ thỏa (*).

Chọn đáp án **C**

□

Câu 54. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 2m^2 - 3m + 1 = 0$ (m là tham số). Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức $P = |x_1 + x_2 + x_1 x_2|$

A. $P_{\max} = \frac{1}{4}$. B. $P_{\max} = 1$. C. $P_{\max} = \frac{9}{8}$. D. $P_{\max} = \frac{9}{16}$.

Lời giải.

Ta có $\Delta' = (m-1)^2 - (2m^2 - 3m + 1) = -m^2 + m = m(1-m)$.

Phương trình có hai nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 1$ (*).

Theo định lý Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 \cdot x_2 = 2m^2 - 3m + 1 \end{cases}$. Khi đó

$$P = |x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2| = |2(m-1) + 2m^2 - 3m + 1| = 2 \left| m^2 - \frac{m}{2} - \frac{1}{2} \right| = 2 \left| \left(m - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{9}{16} \right|$$

$$\text{Vì } 0 \leq m \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{4} \leq m - \frac{1}{4} \leq \frac{3}{4} \Rightarrow \left(m - \frac{1}{4} \right)^2 \leq \frac{9}{16} \Rightarrow \left(m - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{9}{16} \leq 0.$$

$$\text{Do đó } P = 2 \left| \left(m - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{9}{16} \right| = 2 \left(\frac{9}{16} - \left(m - \frac{1}{4} \right)^2 \right) = \frac{9}{8} - 2 \left(m - \frac{1}{4} \right)^2 \leq \frac{9}{8}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $m = \frac{1}{4}$: thỏa mãn (*).

Chọn đáp án **C**

□

Câu 55. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - mx + m - 1 = 0$ (m là tham số). Tìm m để biểu thức $P = \frac{2x_1 x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1 x_2 + 1)}$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $m = \frac{1}{2}$. B. $m = 1$. C. $m = 2$. D. $m = \frac{5}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\Delta = m^2 - 4(m-1) = (m-2)^2 \geq 0$, với mọi m . Do đó phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của m .

Theo định lý Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = m - 1 \end{cases}$. Suy ra

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = m^2 - 2(m-1) = m^2 - 2m + 2.$$

Khi đó $P = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)} = \frac{2m + 1}{m^2 + 2}$. Suy ra

$$P - 1 = \frac{2m + 1}{m^2 + 2} - 1 = \frac{2m + 1 - m^2 - 2}{m^2 + 2} = -\frac{(m - 1)^2}{m^2 + 2} \leq 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Do đó $P \leq 1, \forall m \in \mathbb{R}$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $m = 1$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 56. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - mx + m - 1 = 0$ (m là tham số). Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)}$.

- A. $P_{\min} = -2$. B. $P_{\min} = -\frac{1}{2}$. C. $P_{\min} = 0$. D. $P_{\min} = 1$.

Lời giải.

Ta có $\Delta = m^2 - 4(m - 1) = (m - 2)^2 \geq 0$, với mọi m . Do đó phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của m .

Theo định lý Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = m - 1 \end{cases}$.

Suy ra $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = m^2 - 2(m - 1) = m^2 - 2m + 2$. Khi đó

$$P = \frac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)} = \frac{2m + 1}{m^2 + 2}.$$

Suy ra $P + \frac{1}{2} = \frac{2m + 1}{m^2 + 2} + \frac{1}{2} = \frac{2(2m + 1) + m^2 + 2}{2(m^2 + 2)} = \frac{(m + 2)^2}{2(m^2 + 2)} \geq 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Suy ra $P \geq -\frac{1}{2}, \forall m \in \mathbb{R}$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $m = -2$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 57. Nếu $m \neq 0$ và $n \neq 0$ là các nghiệm của phương trình $x^2 + mx + n = 0$ thì tổng $m + n$ bằng

- A. $-\frac{1}{2}$. B. -1 . C. $\frac{1}{2}$. D. 1 .

Lời giải.

Theo định lý Viet, ta có $\begin{cases} m + n = -m \\ m.n = n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -2m \\ m = 1 \end{cases} (n \neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = -2 \end{cases} \Rightarrow m + n = -1$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 58. Giả sử các nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$ là lập phương các nghiệm của phương trình $x^2 + mx + n = 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $p + q = m^3$. B. $p = m^3 + 3mn$. C. $p = m^3 - 3mn$. D. $\left(\frac{m}{n}\right)^3 = \frac{p}{q}$.

Lời giải.

Giả sử phương trình $x^2 + px + q = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $x^2 + mx + n = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 . Theo bài ra, ta có

$$\begin{cases} x_1 = x_3^3 \\ x_2 = x_4^3 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 + x_2 = x_3^3 + x_4^3 = (x_3 + x_4) \left[(x_3 + x_4)^2 - 3x_3x_4 \right]. \quad (*)$$

Theo định lý Viet, ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_3 + x_4 = -m, \text{ thay vào } (*), \text{ ta được } -p = -m(m^2 - 3n). \\ x_3x_4 = n \end{cases}$$

Vậy $p = m(m^2 - 3n) = m^3 - 3mn$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 59. Cho hai phương trình $x^2 - 2mx + 1 = 0$ và $x^2 - 2x + m = 0$. Có hai giá trị của m để phương trình này có một nghiệm là nghịch đảo của một nghiệm của phương trình kia. Tính tổng S của hai giá trị m đó.

A. $S = -\frac{5}{4}$.

B. $S = 1$.

C. $S = -\frac{1}{4}$.

D. $S = \frac{1}{4}$.

Lời giải.

Gọi x_0 là nghiệm của phương trình $x^2 - 2mx + 1 = 0$. Điều kiện: $x_0 \neq 0$. Suy ra $\frac{1}{x_0}$ là nghiệm của phương trình $x^2 - 2x + m = 0$.

Khi đó, ta có hệ
$$\begin{cases} x_0^2 - 2mx_0 + 1 = 0 \\ \left(\frac{1}{x_0}\right)^2 - \frac{2}{x_0} + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - 2mx_0 + 1 = 0 & (1) \\ mx_0^2 - 2x_0 + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) - (2), ta được $x_0^2(1 - m) - 2x_0(m - 1) = 0 \Leftrightarrow (m - 1)(x_0^2 + 2x_0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ x_0 = -2 \end{cases}$.

Với $x_0 = -2$ thay vào (1), ta được $(-2)^2 - 2m \cdot (-2) + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{5}{4}$.

Vậy tổng tất cả giá trị của m cần tìm là $m_1 + m_2 = 1 - \frac{5}{4} = -\frac{1}{4}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 60. Cho hai phương trình $x^2 - mx + 2 = 0$ và $x^2 + 2x - m = 0$. Có bao nhiêu giá trị của m để một nghiệm của phương trình này và một nghiệm của phương trình kia có tổng là 3?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

Gọi x_0 là một nghiệm của phương trình $x^2 - mx + 2 = 0$. Suy ra $3 - x_0$ là một nghiệm của phương trình $x^2 + 2x - m = 0$.

Khi đó, ta có hệ
$$\begin{cases} x_0^2 - mx_0 + 2 = 0 \\ (3 - x_0)^2 + 2(3 - x_0) - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - mx_0 + 2 = 0 & (1) \\ m = x_0^2 - 8x_0 + 15 & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta được $x_0^2 - (x_0^2 - 8x_0 + 15)x_0 + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ x_0 = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow$ Có 3 giá trị của m cần

tìm

Chọn đáp án **D** □

Câu 61. Cho a, b, c, d là các số thực khác 0. Biết c và d là hai nghiệm của phương trình $x^2 + ax + b = 0$ và a, b là hai nghiệm của phương trình $x^2 + cx + d = 0$. Tính giá trị của biểu thức $S = a + b + c + d$.

A. $S = -2$.

B. $S = 0$.

C. $S = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

D. $S = 2$.

Lời giải.

Vì c, d là hai nghiệm của phương trình $x^2 + ax + b = 0$ suy ra $c + d = -a$.

Vì a, b là hai nghiệm của phương trình $x^2 + cx + d = 0$ suy ra $a + b = -c$.

$$\text{Khi đó, ta có hệ } \begin{cases} c + d = -a \\ a + b = -c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = -d \\ a + c = -b \end{cases} \Leftrightarrow b = d.$$

$$\text{Lại có } \begin{cases} c^2 + ac + b = 0 \\ a^2 + ca + d = 0 \end{cases} \Rightarrow c^2 - a^2 + b - d = 0 \Leftrightarrow a^2 = c^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ a = -c. \end{cases}$$

Với $a = -c$ thì từ $c + d = -a \Rightarrow d = 0$: mâu thuẫn giả thiết.

Với $a = c$ thì từ $c + d = -a \Rightarrow d = -2c$ và từ $a + b = -c \Rightarrow b = -2c$.

$$\text{Ta có } c^2 + ac + b = 0 \Rightarrow 2c^2 - 2c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \text{ (loại)} \\ c = 1 \text{ (nhận)} \end{cases}.$$

Khi đó $S = a + b + c + d = c - 2c + c - 2c = -2c = -2 \cdot 1 = -2$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 62. Tập nghiệm S của phương trình $2x + \frac{3}{x-1} = \frac{3x}{x-1}$ là

$$\text{A. } S = \left\{1; \frac{3}{2}\right\}. \quad \text{B. } S = \{1\}. \quad \text{C. } S = \left\{\frac{3}{2}\right\}. \quad \text{D. } S = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } x \neq 1. \text{ Khi đó } 2x + \frac{3}{x-1} = \frac{3x}{x-1} \Leftrightarrow 2x = \frac{3(x-1)}{x-1} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ thỏa mãn điều kiện} \\ \Rightarrow S = \left\{\frac{3}{2}\right\}.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 63. Phương trình $\frac{2x^2 - 10x}{x^2 - 5x} = x - 3$ có bao nhiêu nghiệm?

$$\text{A. } 0. \quad \text{B. } 1. \quad \text{C. } 2. \quad \text{D. } 3.$$

Lời giải.

$$\frac{2x^2 - 10x}{x^2 - 5x} = x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x \neq 0 \\ \frac{2x(x-5)}{x(x-5)} = x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x \neq 0 \\ 2 = x - 3 \end{cases} \Rightarrow S = \emptyset.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 64. Gọi x_0 là nghiệm của phương trình $1 - \frac{2}{x-2} = \frac{10}{x+3} - \frac{50}{(2-x)(x+3)}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

$$\text{A. } x_0 \in (-5; -3). \quad \text{B. } x_0 \in [-3; -1]. \quad \text{C. } x_0 \in (-1; 4). \quad \text{D. } x_0 \in [4; +\infty).$$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -3 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} 1 - \frac{2}{x-2} &= \frac{10}{x+3} - \frac{50}{(2-x)(x+3)} \\ \Leftrightarrow (2-x)(x+3) - 2(x+3) &= 10(2-x) - 50 \\ \Leftrightarrow x^2 - 7x - 30 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \text{ (nhận)} \\ x = -3 \text{ (loại)}. \end{cases} \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 65. Tập nghiệm S của phương trình $\frac{(m^2 + 1)x - 1}{x + 1} = 1$ trong trường hợp $m \neq 0$ là

- A. $S = \left\{ \frac{m+1}{m^2} \right\}$. B. $S = \emptyset$. C. $S = \mathbb{R}$. D. $S = \left\{ \frac{2}{m^2} \right\}$.

Lời giải.

$$\frac{(m^2 + 1)x - 1}{x + 1} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ (m^2 + 1)x - 1 = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2}{m^2}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 66. Tập nghiệm S của phương trình $\frac{(2m^2 + 3)x + 6m}{x} = 3$ khi $m \neq 0$ là

- A. $S = \emptyset$. B. $S = \left\{ -\frac{3}{m} \right\}$. C. $S = \mathbb{R}$. D. $S = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Lời giải.

$$\frac{(2m^2 + 3)x + 6m}{x} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ (2m^2 + 3)x + 6m = 3x \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{m}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 67. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình $\frac{x^2 + mx + 2}{x^2 - 1} = 1$ vô nghiệm?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải.

$$\frac{x^2 + mx + 2}{x^2 - 1} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ mx = -3 \quad (*) \end{cases}$$

- với $m = 0$ thì $(*)$ vô nghiệm nên phương trình đã cho vô nghiệm.
- với $m \neq 0$ thì phương trình đã cho vô nghiệm khi $(*)$ có nghiệm $x = \pm 1 \Leftrightarrow m = \pm 3$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 68. Phương trình $\frac{2mx - 1}{x + 1} = 3$ có nghiệm duy nhất khi

- A. $m \neq \frac{3}{2}$. B. $m \neq 0$. C. $m \neq 0$ và $m \neq \frac{3}{2}$. D. $m \neq -\frac{1}{2}$ và $m \neq \frac{3}{2}$.

Lời giải.

$$\frac{2mx - 1}{x + 1} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ (2m - 3)x = 4. \end{cases}$$

$$\text{Phương trình có nghiệm duy nhất khi} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 3 \neq 0 \\ x = \frac{4}{2m - 3} \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{3}{2} \\ m \neq -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 69. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-3; 5]$ để phương trình $\frac{x - m}{x + 1} = \frac{x - 2}{x - 1}$ có nghiệm. Tổng các phần tử trong tập S bằng

- A. -1. B. 8. C. 9. D. 10.

Lời giải.

$$\frac{x-m}{x+1} = \frac{x-2}{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ mx = m+2. \end{cases}$$

Phương trình có nghiệm khi $\begin{cases} m \neq 0 \\ x = 1 + \frac{2}{m} \neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -1 \end{cases}.$

Vì $m \in \mathbb{Z}, m \in [-3; 5]$ nên $m \in S = \{-3; -2; 1; 2; 3; 4; 5\}.$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 70. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[1; 20]$ để phương trình $\frac{x+1}{x-2} +$

$\frac{m}{4-x^2} = \frac{x+3}{x+2}$ có nghiệm.

A. 4.

B. 18.

C. 19.

D. 20.

Lời giải.

$$\frac{x+1}{x-2} + \frac{m}{4-x^2} = \frac{x+3}{x+2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 2 \\ 2x = -m-8 \end{cases}$$

. Phương trình có nghiệm khi $x = \frac{m}{2} - 4 \neq \pm 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 12 \\ m \neq 4 \end{cases}.$ Suy ra có tất cả 18 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 71. Tập nghiệm S của phương trình $|3x-2| = 3-2x$ là

A. $S = \{-1; 1\}.$

B. $S = \{-1\}.$

C. $S = \{1\}.$

D. $S = \{0\}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} |3x-2| &= 3-2x \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x \geq 0 \\ |3x-2|^2 &= (3-2x)^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ 9x^2 - 12x + 4 &= 4x^2 - 12x + 9 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ 5x^2 &= 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 1. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S = \{-1; 1\}$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 72. Phương trình $|2x-4| - 2x + 4 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. Vô số.

Lời giải.

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow |2x-4| = 2x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4 \geq 0 \\ 2x-4 = 2x-4 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Do đó, phương trình có vô số nghiệm

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 73. Tập nghiệm S của phương trình $|2x-1| = x-3$ là:

A. $S = \left\{\frac{4}{3}\right\}.$

B. $S = \emptyset.$

C. $S = \left\{-2; \frac{4}{3}\right\}.$

D. $S = \{-2\}.$

Lời giải.

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ (2x - 1)^2 = (x - 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 3x^2 + 2x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ x = -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

Vậy $S = \emptyset$ Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 74. Tổng các nghiệm của phương trình $|x^2 + 5x + 4| = x + 4$ bằng**A.** -12.**B.** -6.**C.** 6.**D.** 12.**Lời giải.**

$$\begin{aligned} & |x^2 + 5x + 4| = x + 4 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + 4 \geq 0 \\ (x^2 + 5x + 4)^2 = (x + 4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ (x^2 + 5x + 4)^2 - (x + 4)^2 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x \geq -4 \\ (x^2 + 6x + 8)(x^2 + 4x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ \begin{cases} x^2 + 6x + 8 = 0 \\ x^2 + 4x = 0 \end{cases} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x \geq -4 \\ \begin{cases} x = -2, x = -4 \\ x = 0, x = -4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = -4. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0 + (-2) + (-4) = -6.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 75. Gọi x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) là hai nghiệm của phương trình $|x^2 - 4x - 5| = 4x - 17$. Tính giá trị biểu thức $P = x_1^2 + x_2$.**A.** $P = 16$.**B.** $P = 58$.**C.** $P = 28$.**D.** $P = 22$.**Lời giải.**

$$\begin{aligned} & |x^2 - 4x - 5| = 4x - 17 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 4x - 17 \geq 0 \\ |x^2 - 4x - 5|^2 = (4x - 17)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{17}{4} \\ (x^2 - 4x - 5)^2 = (4x - 17)^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x \geq \frac{17}{4} \\ (x^2 - 8x + 12)(x^2 - 22) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{17}{4} \\ \begin{cases} x^2 - 8x + 12 = 0 \\ x^2 - 22 = 0 \end{cases} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x \geq \frac{17}{4} \\ \begin{cases} x = 2 \vee x = 6 \\ x = \pm\sqrt{22} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = \sqrt{22}. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P = (\sqrt{22})^2 + 6 = 28.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 76. Tập nghiệm S của phương trình $|x - 2| = |3x - 5|$ là

A. $S = \left\{\frac{3}{2}; \frac{7}{4}\right\}$. B. $S = \left\{-\frac{3}{2}; \frac{7}{4}\right\}$. C. $S = \left\{-\frac{7}{4}; -\frac{3}{2}\right\}$. D. $S = \left\{-\frac{7}{4}; \frac{3}{2}\right\}$.

Lời giải.

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow |x - 2|^2 = |3x - 5|^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 9x^2 - 30x + 25$$

$$\Leftrightarrow 8x^2 - 26x + 21 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = \frac{7}{4} \end{cases} \Rightarrow S = \left\{\frac{3}{2}; \frac{7}{4}\right\}.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 77. Tổng các nghiệm của phương trình $|x + 2| = 2|x - 2|$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{2}{3}$. C. 6. D. $\frac{20}{3}$.

Lời giải.

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 4(x - 2)^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 20x + 12 = 0. \text{ Do đó, tổng các nghiệm của phương trình bằng } -\frac{b}{a} = \frac{20}{3}.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 78. Phương trình $|2x + 1| = |x^2 - 3x - 4|$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.

Lời giải.

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = x^2 - 3x - 4 \\ 2x + 1 = -(x^2 - 3x - 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x - 5 = 0 \\ x^2 - x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 \pm \sqrt{45}}{2} \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases}.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 79. Phương trình $|2x - 4| + |x - 1| = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} |2x - 4| \geq 0 \\ |x - 1| \geq 0 \end{cases} \Rightarrow |2x - 4| + |x - 1| \geq 0.$$

$$\text{Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} |2x - 4| = 0 \\ |x - 1| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset. \text{ Vậy phương trình đã cho vô nghiệm}$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 80. Tổng các nghiệm của phương trình $|2x - 5| + |2x^2 - 7x + 5| = 0$ bằng

A. 6. B. $\frac{5}{2}$. C. $\frac{7}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} |2x - 5| \geq 0 \\ |2x^2 - 7x + 5| \geq 0 \end{cases} \Rightarrow |2x - 5| + |2x^2 - 7x + 5| \geq 0.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} 2x - 5 = 0 \\ 2x^2 - 7x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 81. Phương trình $(x + 1)^2 - 3|x + 1| + 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải.

Đặt $t = |x + 1|$, $t \geq 0$. Phương trình trở thành $t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = 2$.

• Với $t = 1$ ta có $|x + 1| = 1 \Leftrightarrow x + 1 = \pm 1 \Leftrightarrow x = -2$ hoặc $x = 0$.

• Với $t = 2$ ta có $|x + 1| = 2 \Leftrightarrow x + 1 = \pm 2 \Leftrightarrow x = -3$ hoặc $x = 1$.

Vậy phương trình có bốn nghiệm là $x = -3, x = -2, x = 0, x = 1$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 82. Tổng các nghiệm của phương trình $4x(x - 1) = |2x - 1| + 1$ bằng:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. -2.

Lời giải.

$$4x(x - 1) = |2x - 1| + 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x - |2x - 1| - 1 = 0.$$

Đặt $t = |2x - 1|$, $t \geq 0$. Suy ra $t^2 = 4x^2 - 4x + 1 \Rightarrow 4x^2 - 4x = t^2 - 1$. Phương trình trở thành

$$t^2 - 1 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = 2 \text{ (nhận)} \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 2, \text{ ta có } |2x - 1| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 2 \\ 2x - 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 83. Với giá trị nào của a thì phương trình $3|x| + 2ax = -1$ có nghiệm duy nhất?

A. $a > \frac{3}{2}$.

B. $a < \frac{-3}{2}$.

C. $\begin{cases} a \neq \frac{3}{2} \\ a \neq \frac{-3}{2} \end{cases}$.

D. $\begin{cases} a < \frac{-3}{2} \\ a > \frac{3}{2} \end{cases}$.

Lời giải.

Dễ thấy, $x = 0$ không là nghiệm của phương trình đã cho.

• Xét $x \in (-\infty; 0)$: Phương trình trở thành $-3x + 2ax = -1 \Leftrightarrow (2a - 3)x = -1$.

Phương trình 1 có nghiệm duy nhất khi $2a - 3 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \frac{3}{2}$. Khi đó, nghiệm của phương trình

là $x = \frac{-1}{2a - 3}$. Mà $x < 0 \Rightarrow \frac{-1}{2a - 3} < 0 \Leftrightarrow 2a - 3 > 0 \Leftrightarrow a > \frac{3}{2}$.

- Xét $x \in (0; +\infty)$: Phương trình trở thành $3x + 2ax = -1 \Leftrightarrow (2a + 3)x = -12$. Phương trình 2 có nghiệm duy nhất khi $2a + 3 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -\frac{3}{2}$. Khi đó, nghiệm của phương trình là $x = \frac{-1}{2a+3}$.
Mà $x > 0 \Rightarrow \frac{-1}{2a+3} > 0 \Leftrightarrow 2a + 3 < 0 \Leftrightarrow a < -\frac{3}{2}$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 84. Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $|x| + 1 = x^2 + m$ có nghiệm duy nhất.

- A. $m = 0$. B. $m = 1$. C. $m = -1$. D. Không có m .

Lời giải.

Phương trình $\Leftrightarrow |x|^2 - |x| + (m - 1) = 0$.

Đặt $t = |x|, t \geq 0$, phương trình trở thành $t^2 - t + m - 1 = 0 (*)$.

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow (*)$ có nghiệm duy nhất $t = 0$.

Với $t = 0$ là nghiệm của phương trình $(*) \Rightarrow 0^2 - 0 + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Thử lại, thay $m = 1$ vào phương trình $(*)$, thấy phương trình có 2 nghiệm $t = 0$ và $t = 1$: Không thỏa mãn

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 85. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-5; 5]$ để phương trình $|mx + 2x - 1| = |x - 1|$ có đúng hai nghiệm phân biệt?

- A. 8. B. 9. C. 10. D. 11.

Lời giải.

$$|mx + 2x - 1| = |x - 1| \Leftrightarrow \begin{cases} mx + 2x - 1 = x - 1 \\ mx + 2x - 1 = -(x - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m + 1)x = 0 & (1) \\ (m + 3)x = 2 & (2) \end{cases}$$

Xét (1), ta có

- $m = -1$ thì phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- $m \neq -1$ thì phương trình có nghiệm $x = 0$.

Xét (2), ta có

- $m = -3$ thì phương trình vô nghiệm.
- $m \neq -3$ thì phương trình có nghiệm $x = \frac{2}{m+3}$.

Vì $\frac{2}{m+3} \neq 0, \forall m \neq -3$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x = 0, x = \frac{2}{m+3}$ khi $m \neq -1$ và $m \neq -3$.

Mà $m \in [-5; 5]$ và $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-5; -4; -2; 0; 1; 2; 3; 4; 5\} \Rightarrow$ có 9 giá trị m

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 86. Tập nghiệm S của phương trình $\sqrt{2x-3} = x-3$ là:

- A. $S = \{6; 2\}$. B. $S = \{2\}$. C. $S = \{6\}$. D. $S = \emptyset$.

Lời giải.

$$\text{Cách 1: } \sqrt{2x-3} = x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 2x-3 = x^2-6x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \begin{cases} x=2 \Leftrightarrow x=6 \\ x=6 \end{cases} \end{cases}$$

Cách 2: Thử đáp án. Thay $x = 2$ vào phương trình ta được $\sqrt{2 \cdot 2 - 3} = 2 - 3$ (sai).

Thay $x = 6$ vào phương trình ta được $\sqrt{2 \cdot 6 - 3} = 6 - 3$ (đúng).

Vậy $x = 6$ là nghiệm của phương trình

Chọn đáp án **C**

□

Câu 87. Tập nghiệm S của phương trình $\sqrt{x^2 - 4} = x - 2$ là:

A. $S = \{0; 2\}$.

B. $S = \{2\}$.

C. $S = \{0\}$.

D. $S = \emptyset$.

Lời giải.

$$\text{Cách 1: } \sqrt{x^2 - 4} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 4 = x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Cách 2: Thử đáp án. Thay $x = 0$ vào phương trình ta được $\sqrt{0^2 - 4} = 0 - 2$ (sai).

Thay $x = 2$ vào phương trình ta được $\sqrt{2^2 - 4} = 2 - 2$ (đúng).

Vậy $x = 2$ là nghiệm của phương trình

Chọn đáp án **B**

□

Câu 88. Tổng các nghiệm của phương trình $(x - 2)\sqrt{2x + 7} = x^2 - 4$ bằng:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện: } 2x + 7 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{7}{2}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} (x - 2)\sqrt{2x + 7} &= x^2 - 4 \\ \Leftrightarrow (x - 2)\sqrt{2x + 7} &= (x - 2)(x + 2) \\ \Leftrightarrow (x - 2)[\sqrt{2x + 7} - (x + 2)] &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ \sqrt{2x + 7} - (x + 2) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \sqrt{2x + 7} = x + 2 \end{cases} &\quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } \sqrt{2x + 7} = x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 2x + 7 = (x + 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 1, x = 2$ nên tổng hai nghiệm của phương trình là $1 + 2 = 3$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 89. Phương trình $\frac{x^2 - 4x - 2}{\sqrt{x - 2}} = \sqrt{x - 2}$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 5.

Lời giải.

Điều kiện: $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$. Ta có

$$\frac{x^2 - 4x - 2}{\sqrt{x - 2}} = \sqrt{x - 2} \Leftrightarrow x^2 - 4x - 2 = x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 5. \end{cases}$$

So với điều kiện $x > 2$ thì $x = 5$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 90. Phương trình $\sqrt{2-x} + \frac{4}{\sqrt{2-x}+3} = 2$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

Điều kiện: $2-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$.

$$\begin{aligned} & \sqrt{2-x} + \frac{4}{\sqrt{2-x}+3} = 2 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{2-x}(\sqrt{2-x}+3) + 4 = 2(\sqrt{2-x}+3) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x \leq 2 \\ \sqrt{2-x} = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & x = 1 \end{aligned}$$

Vậy $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 91. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2 + \frac{2x^2}{x-1} + m = 0$ có đúng bốn nghiệm?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. Vô số.

Lời giải.

$$\text{Đặt } \frac{x^2}{x-1} = t \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - tx + t = 0 (*) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-t+t \neq 0 \\ \Delta_t = t^2 - 4t \end{cases}.$$

Với mỗi t thỏa mãn $\Delta_t > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t < 0 \\ t > 4 \end{cases}$ thì (*) có hai nghiệm x phân biệt. Mặt khác phương trình đã cho trở thành:

$$t^2 + 2t + m = 0 \Leftrightarrow (t+1)^2 = 1-m \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ \begin{cases} t = -1 - \sqrt{1-m} < 0 \\ t = -1 + \sqrt{1-m} \end{cases} \end{cases} (**).$$

Phương trình đã cho có đúng 4 nghiệm khi và chỉ khi (**) có hai nghiệm t phân biệt thỏa mãn điều kiện $\Delta_t > 0$ hay

$$\begin{cases} m < 1 \\ \begin{cases} -1 + \sqrt{1-m} < 0 \\ -1 + \sqrt{1-m} > 4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ \begin{cases} 1-m < 1 \\ 1-m > 25 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < 1 \\ m < -24. \end{cases}$$

□

Câu 92. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2m\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$ có nghiệm.

A. $m \in \left(-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right)$.

B. $m \in \left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

C. $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{4}\right]$.

D. $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Đặt $x + \frac{1}{x} = t \rightarrow \begin{cases} |t| \geq 2 \\ x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2 \end{cases}$. Khi đó phương trình đã cho trở thành $f(t) = t^2 - 2mt - 1 = 0 (*)$

(Phương trình này luôn có hai nghiệm phân biệt $t_1 < 0 < t_2$ do $ac < 0$). Do đó phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $(*)$ có ít nhất một nghiệm t thỏa mãn $|t| \geq 2$, hay ít nhất một trong hai số

$$2; -2 \text{ phải nằm giữa hai nghiệm } t_1, t_2; \text{ hay } \begin{cases} f(2) \leq 0 \\ f(-2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 4m \leq 0 \\ 3 + 4m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{3}{4} \\ m \leq -\frac{3}{4} \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 93. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^2 + \frac{4}{x^2} - 4\left(x - \frac{2}{x}\right) + m - 1 = 0$ có đúng hai nghiệm lớn hơn 1.

- A. $m < -8$. B. $-8 < m < 1$. C. $0 < m < 1$. D. $m \leq -8$.

Lời giải.

Đặt $x - \frac{2}{x} = t \Rightarrow \begin{cases} g(x) = x^2 - tx - 2 = 0 (*) \\ x^2 + \frac{4}{x^2} = t^2 + 4. \end{cases}$. Phương trình $(*)$ có $ac < 0$ nên có hai nghiệm phân

biệt trái dấu với mọi $t \in \mathbb{R}$. Do đó $(*)$ nếu có nghiệm lớn hơn 1 thì có duy nhất một nghiệm như thế $\Leftrightarrow x_1 < 1 < x_2 \Leftrightarrow g(1) < 0 \Leftrightarrow -t - 1 < 0 \Leftrightarrow t > -1$.

Mặt khác phương trình đã cho trở thành $f(t) = t^2 - 4t + m + 3 = 0 (**)$. Phương trình đã cho có đúng hai nghiệm x_1, x_2 lớn hơn 1 khi và chỉ khi $(**)$ có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 lớn hơn -1 , hay

$$\begin{cases} \Delta' = 4 - m - 3 > 0 \\ (t_1 + 1)(t_2 + 1) = t_1 t_2 + (t_1 + t_2) + 1 > 0 \\ t_1 + t_2 = 4 > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > -8. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 94. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $(x^2 + 2x + 4)^2 2m(x^2 + 2x + 4) + 4m - 1 = 0$ có đúng hai nghiệm.

- A. $m \in (3; 4)$. B. $m \in (-\infty; 2 - \sqrt{3}) \cup (2 + \sqrt{3}; +\infty)$.
C. $m \in (4; +\infty) \cup \{2 + \sqrt{3}\}$. D. $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $(x^2 + 2x + 4)^2 2m(x^2 + 2x + 4) + 4m - 1 = 0$. (1).

Đặt $t = x^2 + 2x + 4 \Rightarrow x^2 + 2x + 4 - t = 0$. (2)

Phương trình (1) trở thành $g(t) = t^2 - 2mt + 4m - 1 = 0$. (3)

Phương trình 2 có nghiệm khi $\Delta'_{(2)} = t - 3 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 3$. Khi $t = 3$ thì phương trình 2 có nghiệm kép $x = -1$. Phương trình (1) có đúng hai nghiệm khi:

TH1: Phương trình (3) có nghiệm kép lớn hơn 3. Phương trình (3) có nghiệm kép khi $\Delta'_{(3)} = m^2 - 4m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 2 \pm \sqrt{3}$.

- Với $m = 2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow$ Phương trình 3 có nghiệm $t = 2 - \sqrt{3} < 3$: Không thỏa mãn.
- Với $m = 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow$ Phương trình 3 có nghiệm $t = 2 + \sqrt{3} > 3$: Thỏa mãn.

TH2: Phương trình (3) có 2 nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $t_1 < 3 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 4m + 1 > 0 \\ g(3) = -2m + 8 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 - \sqrt{3} \\ m > 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow m > 4. \\ m > 4 \end{cases}$$

Hợp hai trường hợp ta được $m \in (4; +\infty) \cup \{2 + \sqrt{3}\}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 95. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^2 + 2mx + 2m|x + m| + m^2 + 3 - 2m = 0$ có nghiệm.

A. $m \in (\infty; -3] \cup [1; +\infty)$.

B. $m \in (\infty; -3] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

C. $m \in [1; +\infty)$.

D. $m \in \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} x^2 + 2mx + 2m|x + m| + m^2 + 3 - 2m &= 0 \\ \Leftrightarrow (|x + m| + m)^2 &= m^2 + 2m - 3 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 3 \geq 0 \\ \begin{cases} |x + m| = -\sqrt{m^2 + 2m - 3} - m(1) \\ |x + m| = \sqrt{m^2 + 2m - 3} - m(2) \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Ta có $m^2 + 2m - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ m \geq 1 \end{cases}$.

- Nếu $m \leq -3$, thì $\sqrt{m^2 + 2m - 3} - m \geq 0$, suy ra (2) có nghiệm, do đó phương trình đã cho có nghiệm.
- Nếu $m \geq 1$ thì (1) vô nghiệm, do đó phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi (2) có nghiệm $\Leftrightarrow \sqrt{m^2 + 2m - 3} - m \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 \geq m^2 \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{2}$.

Vậy $m \in (\infty; -3] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 96. Biết rằng đường thẳng $d: y = 3x + m$ (với m là số thực) tiếp xúc với đồ thị hàm số $(C): y = x^2 - 5x - 8$. Tìm tọa độ tiếp điểm của d và (C) .

A. $(4; -12)$.

B. $(-4; 28)$.

C. $(1; -12)$.

D. $(-1; -2)$.

Lời giải.

+ Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là

$$x^2 - 5x - 8 = 3x + m \Leftrightarrow x^2 - 8x - m - 8 = 0 \quad (*)$$

+ d tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có nghiệm kép, hay

$$\Delta' = 16 + m + 8 = 0 \Leftrightarrow m = -24.$$

+ Với $m = -24$ thì phương trình (*) trở thành $x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow y = -12$.

+ Vậy tọa độ tiếp điểm của d và (C) là $(4; -12)$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 97. Tổng các nghiệm (nếu có) của phương trình $\sqrt{2x-1} = x-2$ bằng

A. 6.

B. 1.

C. 5.

D. 2.

Lời giải.

$$\sqrt{2x-1} = x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 2x-1 = (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 6x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = 1; x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là 5.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 98. Giả sử x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 - (m+2)x + m^2 + 1 = 0$. Khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 4(x_1 + x_2) - x_1x_2$ bằng

A. $\frac{95}{9}$.

B. 11.

C. 7.

D. $-\frac{1}{9}$.

Lời giải.

Phương trình $x^2 - (m+2)x + m^2 + 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 khi và chỉ khi

$$\Delta = (m+2)^2 - 4(m^2 + 1) \geq 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 4m \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{4}{3}.$$

Áp dụng hệ thức vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m+2 \\ x_1x_2 = m^2 + 1 \end{cases}$

Khi đó $P = 4(x_1 + x_2) - x_1x_2 = 4(m+2) - (m^2 + 1) = -m^2 + 4m + 7$.

Xét hàm số $P(m) = -m^2 + 4m + 7, \forall m \in \left[0; \frac{4}{3}\right]$. Ta có $P'(m) = -2m + 4 \geq 0, \forall m \in \left[0; \frac{4}{3}\right]$.

Suy ra hàm số $P(m)$ đồng biến trên $\left[0; \frac{4}{3}\right]$. Do đó $\max_{x \in \left[0; \frac{4}{3}\right]} P(m) = P\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{95}{9}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 99. Số nghiệm của phương trình $(x+3)(x - \sqrt{4-x^2}) = 0$ là

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Lời giải.

$$(x+3)(x - \sqrt{4-x^2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=0 \\ \sqrt{4-x^2}=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ \begin{cases} x \geq 0 \\ 4-x^2=x^2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ \begin{cases} x \geq 0 \\ \begin{cases} x=\sqrt{2} & (\text{nhận}) \\ x=-\sqrt{2} & (\text{loại}). \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 100. Tổng các nghiệm (nếu có) của phương trình $\sqrt{2x-1} = x-2$ bằng

A. 6.

B. 1.

C. 5.

D. 2.

Lời giải.

$$\text{Phương trình } \sqrt{2x-1} = x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 2x-1 = x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 6x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 101. Giả sử x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 - (m+2)x + m^2 + 1 = 0$. Khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 4(x_1 + x_2) - x_1x_2$ bằng

A. $\frac{95}{9}$.

B. 11.

C. 7.

D. $\frac{-1}{9}$.

Lời giải.

Phương trình bậc hai có nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 4m \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{4}{3}$.

Theo hệ thức Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 2 \\ x_1x_2 = m^2 + 1. \end{cases}$

Khi đó $P = 4(x_1 + x_2) - x_1x_2 = 4(m+2) - (m^2 + 1) = -m^2 + 4m + 7$.

Xét hàm số $f(m) = -m^2 + 4m + 7$ trên $\left[0; \frac{4}{3}\right]$. Bảng biến thiên hàm số $f(m)$ trên $\left[0; \frac{4}{3}\right]$:

x	0	$\frac{4}{3}$
$f(m)$	7	$\frac{95}{9}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị lớn nhất của P bằng $\max_{\left[0; \frac{4}{3}\right]} f(m) = \frac{95}{9}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 102. Số nghiệm của phương trình $(x^2 - 4x + 3)\sqrt{x-2} = 0$ là

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải.

Điều kiện của phương trình: $x \geq 2$.

$$(x^2 - 4x + 3)\sqrt{x-2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ \sqrt{x-2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (loại)} \\ x = 3 \text{ (nhận)} \\ x = 2 \text{ (nhận)}. \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 2$ và $x = 3$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 103. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 + mx - m + 1 = 0$ có hai nghiệm trái dấu là

A. $[1; +\infty)$.

B. $(1; +\infty)$.

C. $(1; 10)$.

D. $(-2 + \sqrt{8}; +\infty)$.

Lời giải.

Phương trình $x^2 + mx - m + 1 = 0$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow -m + 1 < 0 \Leftrightarrow m > 1$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 104. Tìm tất cả giá trị của m để bất phương trình $2|x-m| + x^2 + 2 > 2mx$ thỏa mãn với mọi x .

A. $m > -\sqrt{2}$.

B. Không tồn tại m .

C. $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$.

D. $m < \sqrt{2}$.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương với

$$(x - m)^2 + 2|x - m| + 1 > m^2 - 1 \Leftrightarrow (|x - m| + 1)^2 > m^2 - 1.$$

Nên để bất phương trình thỏa mãn với mọi x thì

$$m^2 - 1 < \min (|x - m| + 1)^2 = 1 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 105. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2x^2 - 4mx + 2m^2 + m + 1 = 0$ có nghiệm.

A. $m < -1$.

B. $m \leq -1$.

C. $m = 1$.

D. $m > 1$.

Lời giải.

Phương trình $2x^2 - 4mx + 2m^2 + m + 1 = 0$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 2(2m^2 + m + 1) \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -1.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 106. Phương trình $\sqrt{x^2 + 481} - 3\sqrt[4]{x^2 + 481} = 10$ có hai nghiệm α, β . Khi đó tổng $S = \alpha + \beta$ thuộc đoạn nào sau đây?

A. $S \in [-5; -1]$.

B. $S \in [-10; -6]$.

C. $S \in [2; 5]$.

D. $S \in [-1; 1]$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt[4]{x^2 + 481}$, $t \geq 0$. Phương trình được viết lại thành

$$t^2 - 3t - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 & (\text{nhận}) \\ t = -2 & (\text{loại}) \end{cases} \Leftrightarrow t = 5.$$

Vậy ta có

$$\sqrt[4]{x^2 + 481} = 5 \Leftrightarrow x^2 + 481 = 625 \Leftrightarrow x^2 = 144 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2. \end{cases}$$

Suy ra tổng $S = \alpha + \beta = -2 + 2 = 0 \in [-1; 1]$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 107. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\sqrt{x^2 - x - m} = x - 1$ có nghiệm là

A. $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

B. $[0; +\infty)$.

C. $(0; +\infty)$.

D. $[1; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có

$$\sqrt{x^2 - x - m} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - x - m = (x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = m + 1. \end{cases}$$

Suy ra phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m + 1 \geq 1 \Leftrightarrow m \geq 0$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 108. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 + mx + 4 = 0$ có nghiệm.

A. $-4 \leq m \leq 4$.

B. $m \leq -4$ hoặc $m \geq 4$.

C. $m \leq -2$ hoặc $m \geq 2$.

D. $-2 \leq m \leq 2$.

Lời giải.

Ta có $\Delta = m^2 - 16$. Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -4 \\ m \geq 4. \end{cases}$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 109. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(2m - 1)x + 1$ có đồ thị là (C_m) . Với giá trị nào của tham số m thì đường thẳng $d: y = 2mx - 4m + 3$ cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt?

A. $m \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{4}{9}; +\infty\right) \setminus \left\{\frac{9}{8}\right\}$.

B. $m \in \left(0; \frac{4}{9}\right)$.

C. $m \in \left(\frac{4}{9}; +\infty\right)$.

D. Không tồn tại m .

Lời giải.

Yêu cầu bài toán tương đương phương trình

$$\begin{aligned} x^3 - 3mx^2 + 3(2m - 1)x + 1 &= 2mx - 4m + 3 \\ \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 - (3m - 2)x - 2m + 1) &= 0 \end{aligned}$$

có ba nghiệm phân biệt, hay phương trình $x^2 - (3m - 2)x - 2m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 2. Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ 2^2 - 2(3m - 2) - 2m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 - 4m > 0 \\ 9 - 8m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > \frac{4}{9} \\ m \neq \frac{9}{8}. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 110. Tổng các nghiệm (nếu có) của phương trình: $\sqrt{2x - 1} = x - 2$ bằng:

A. 6.

B. 1.

C. 5.

D. 2.

Lời giải.

Với điều kiện $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ ta có phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$2x - 1 = (x - 2)^2 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1(L) \\ x = 5(t/m) \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 5$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 111. Giả sử x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 - (m + 2)x + m^2 + 1 = 0$. Khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 4(x_1 + x_2) - x_1x_2$ bằng

A. $\frac{95}{9}$.

B. 11.

C. 7.

D. $\frac{-1}{9}$.

Lời giải.

Phương trình bậc hai $x^2 - (m + 2)x + m^2 + 1 = 0$ có nghiệm x_1, x_2
 $\Leftrightarrow \Delta = (m + 2)^2 - 4(m^2 + 1) \geq 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 4m \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{4}{3}$

Áp dụng hệ thức Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 2 \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 + 1 \end{cases}$

Khi đó $P = 4(x_1 + x_2) - x_1 x_2 = 4(m + 2) - (m^2 + 1) = -m^2 + 4m + 7$

Xét hàm số $P(m) = -m^2 + 4m + 7 \forall m \in \left[0; \frac{4}{3}\right]$. Có $P' = -2m + 4 \geq 0 \forall m \in \left[0; \frac{4}{3}\right]$

Hàm số $P(m)$ luôn đồng biến trên $\left[0; \frac{4}{3}\right] \Rightarrow \max P(m) = f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{95}{9}$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\frac{95}{9}$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 112. Phương trình $\sqrt{x^2 + 481} - 3\sqrt[4]{x^2 + 481} = 10$ có hai nghiệm α, β . Khi đó tổng $\alpha + \beta$ thuộc đoạn nào sau đây?

A. $[2; 5]$.

B. $[-1; 1]$.

C. $[-10; -6]$.

D. $[-5; -1]$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt[4]{x^2 + 481}, t \geq \sqrt[4]{481}$. Phương trình đã cho trở thành $t^2 - 3t - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = -2. \end{cases}$

Đối chiếu điều kiện, loại $t = -2$.

Với $t = 5 \Rightarrow \sqrt[4]{x^2 + 481} = 5 \Leftrightarrow x^2 = 144 \Leftrightarrow x = \pm 12 \Rightarrow \alpha = 12, \beta = -12$.

Do đó $\alpha + \beta = 0 \in [-1; 1]$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 113. Giải phương trình $x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$ ta được một nghiệm $x = \frac{a + \sqrt{b}}{c}, a, b, c \in \mathbb{N}, b <$

20. Tính giá trị biểu thức $P = a^3 + 2b^2 + 5c$.

A. $P = 61$.

B. $P = 109$.

C. $P = 29$.

D. $P = 73$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x - \frac{1}{x} \geq 0 \\ 1 - \frac{1}{x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-1)(x+1)}{x} \geq 0 \\ \frac{x-1}{x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x < 0 \\ x \geq 1. \end{cases}$

Với $-1 \leq x < 0 \Rightarrow x < \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$.

Xét $x \geq 1$,

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \\ \Leftrightarrow x - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} &= \sqrt{x - \frac{1}{x}} \\ \Leftrightarrow x^2 + 1 - \frac{1}{x} - 2\sqrt{x^2 - x} &= x - \frac{1}{x} \\ \Leftrightarrow x^2 - x - 2\sqrt{x^2 - x} + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x^2 - x} - 1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x} &= 1 \\ \Leftrightarrow x^2 - x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ (thỏa mãn)} \\ x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (loại)}. \end{cases}$$

Do đó $a = 1, b = 5, c = 2 \Rightarrow P = a^3 + 2b^2 + 5c = 61$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 114. Bất phương trình $|2x - 1| > x$ có tập nghiệm là

- A. $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$. B. $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$.
C. $\mathbb{R}$. D. Vô nghiệm.

Lời giải.

$$|2x - 1| > x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ 2x - 1 > x \\ 2x - 1 < 0 \\ -2x + 1 > x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x > 1 \\ x < \frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < \frac{1}{3} \end{cases}$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 115. Cho phương trình $x^3 + x^2 - (m + 1)x + 8 = (x - 3)\sqrt{x^3 + x^2 - mx + 6}$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m và $m \leq 10$ sao cho phương trình có nghiệm. Tính tổng T các phần tử của S .

- A. $T = 10$. B. $T = 19$. C. $T = 9$. D. $T = 52$.

Lời giải.

Điều kiện $x^3 + x^2 - mx + 6 \geq 0$. Khi đó

$$\text{PT} \Leftrightarrow x^3 + x^2 - mx + 6 - (x - 3)\sqrt{x^3 + x^2 - mx + 6} - (x - 2) = 0.$$

Đặt $t = \sqrt{x^3 + x^2 - mx + 6}$, với $t \geq 0$. Phương trình trở thành

$$t^2 - (x - 3)t - (x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = x - 2. \end{cases}$$

Với $t = x - 2$, ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{x^3 + x^2 - mx + 6} = x - 2 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x^3 + x^2 - mx + 6 = (x - 2)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^3 + 2 = (m - 4)x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 + \frac{2}{x} = m - 4. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Với } x \geq 2, \text{ ta thấy } m - 4 = x^2 + \frac{2}{x} = \left(x^2 + \frac{8}{x} + \frac{8}{x}\right) - \frac{14}{x} \geq 3\sqrt{x^2 \cdot \frac{8}{x} \cdot \frac{8}{x}} - \frac{14}{2} = 5.$$

Do đó $m \geq 9 \Rightarrow S = \{9; 10\} \Rightarrow T = 19$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 116. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2 - x - 4} = \sqrt{x - 1}$ là

A. vô số nghiệm.

B. 1.

C. 0.

D. 2.

Lời giải.

$$\sqrt{x^2 - x - 4} = \sqrt{x - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x^2 - x - 4 = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 117. Cho phương trình $\sqrt{x^2 - 7x + 10} = 3x - 1$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sqrt{x^2 - 7x + 10} = 3x - 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 7x + 10 = (3x - 1)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 1 \geq 0 \\ 8x^2 + x - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{9}{8} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 118. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(a; b)$ với $a, b \in (0; 10)$ để phương trình $(x^2 + ax + b)^2 + a(x^2 + ax + b) + b = x$ có bốn nghiệm thực phân biệt.

A. 33.

B. 32.

C. 34.

D. 31.

Lời giải.

$$\text{Đặt } u = x^2 + ax + b \text{ ta có hệ phương trình } \begin{cases} u^2 + au + b = x & (1) \\ u = x^2 + ax + b & (2). \end{cases}$$

$$\text{Lấy (1) trừ (2) ta được } \begin{cases} (u - x)(u + x + a + 1) = 0 \\ u = x^2 + ax + b. \end{cases}$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} u = x \\ u = x^2 + ax + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = x \\ x^2 + (a - 1)x + b = 0(3) \end{cases}, \Delta_1 = (a - 1)^2 - 4b.$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} u = -x - a - 1 \\ u = x^2 + ax + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -x - a - 1 \\ x^2 + (a + 1)x + a + b + 1 = 0(4) \end{cases}, \Delta_2 = (a - 1)^2 - 4b - 4.$$

$$\text{Phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt } \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ (3) \text{ và } (4) \text{ không có nghiệm chung.} \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a - 1)^2 > 4b \\ (a - 1)^2 > 4b + 4 \end{cases} \Leftrightarrow (a - 1)^2 > 4b + 4.$$

$$\bullet (3) \text{ và } (4) \text{ có 2 nghiệm phân biệt và có nghiệm chung } x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + (a - 1)x_0 + b = 0 \\ x_0^2 + (a + 1)x_0 + a + b + 1 = 0 \\ (a - 1)^2 > 4b + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{a+1}{2} \\ (a-1)^2 = 4b+4 : \text{ không tồn tại } a \text{ và } b. \\ (a-1)^2 > 4b+4 \end{cases}$$

Do đó, khi (3) và (4) mỗi phương trình có 2 nghiệm phân biệt thì chúng không có nghiệm chung.

$$\text{Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow (a-1)^2 > 4b+4$$

Xét $a, b \in \mathbb{Z}^+$ và $a, b \in (0; 10)$:

Với $a \in \{1; 2; 3\}$ (loại).

Với $a = 4$ thì $b = 1$ (Có 1 cặp số $(a; b)$ thỏa mãn).

Với $a = 5$ thì $b \in \{1; 2\}$, (Có 2 cặp số $(a; b)$ thỏa mãn).

Với $a = 6$ thì $b \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$, (Có 5 cặp số $(a; b)$ thỏa mãn).

Với $a = 7$ thì $b \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ (Có 7 cặp số $(a; b)$ thỏa mãn).

Với $a = 8$ thì $b \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ (Có 9 cặp số $(a; b)$ thỏa mãn).

Với $a = 9$ thì $b \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ (Có 9 cặp số $(a; b)$ thỏa mãn).

Vậy ta được tổng số các cặp $(a; b)$ thỏa mãn là:

$$1 + 2 + 5 + 7 + 9 + 9 = 33.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 119. Cho phương trình $(m-3)x = m^2 - 2m - 3$ với m là tham số. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Khi $m \neq 1$ và $m \neq 3$ thì phương trình vô nghiệm.
- B. Khi $m = 3$ thì phương trình có nghiệm duy nhất.
- C. Khi $m = -1$ thì phương trình có nghiệm duy nhất.
- D. Khi $m = -1$ thì phương trình có vô số nghiệm.

Lời giải.

Với $m = -1$, phương trình trở thành $-4x = 0$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 120. Tìm tập nghiệm của phương trình $|5 - 2x| = |3x + 3|$.

- A. $\left\{\frac{2}{5}\right\}$.
- B. $\{-8\}$.
- C. $\left\{\frac{2}{5}; -8\right\}$.
- D. $\emptyset$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{cases} 5 - 2x = 3x + 3 \\ 5 - 2x = -3x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ x = -8. \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $\left\{\frac{2}{5}; -8\right\}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 121. Cho phương trình $ax + b = 0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow a \neq 0$.

- B. Phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow b \neq 0$.
- C. Phương trình nghiệm đúng với mọi $x \Leftrightarrow a = 0, b \neq 0$.
- D. Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow a = 0, b = 0$.

Lời giải.

Phương trình $ax + b = 0$.

- Nếu $a \neq 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất.
- Nếu $a = 0$
 - $\oplus$ Nếu $b \neq 0$ thì phương trình vô nghiệm.
 - $\oplus$ Nếu $b = 0$ thì phương trình nghiệm đúng với mọi x .

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 122. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\sqrt{5-2x} = 0$.

- A. $S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$. B. $S = \left\{-\frac{5}{2}\right\}$. C. $S = \left(-\infty; \frac{5}{2}\right]$. D. $S = \left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải.

$$\sqrt{5-2x} = 0 \Leftrightarrow 5-2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 123. Tìm tập nghiệm S của phương trình $|x^2 - 5x + 4| = x + 4$.

- A. $S = \{-6\}$. B. $S = \{-6; 0\}$. C. $S = \{6; 0\}$. D. $S = \{2; 4\}$.

Lời giải.

$$|x^2 - 5x + 4| = x + 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 \geq 0 \\ x^2 - 5x + 4 = x + 4 \\ x^2 - 5x + 4 = -(x + 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x^2 - 6x = 0 \\ x^2 - 4x + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = 0. \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{6; 0\}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 124. Tìm tập nghiệm S của phương trình $(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-3} = 0$.

- A. $S = \{1; 2\}$. B. $S = \{3\}$. C. $S = \{1; 2; 3\}$. D. $S = \emptyset$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 3$

(*)

$$\text{Với điều kiện (*), } (x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ \sqrt{x-3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2. \\ x = 3 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện (*), ta được $x = 3$.

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{3\}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 125. Tìm m để phương trình $(m^2 - 4m + 3)x = m^2 - 3m + 2$ có nghiệm duy nhất.

- A. $m \neq 3$ và $m \neq 1$. B. $m \neq 1$. C. $m \neq 3$. D. $m = 3$ và $m = 1$.

Lời giải.

Nếu $m = 3$ hoặc $m = 1$ thì phương trình đã cho tương ứng vô nghiệm hoặc có vô số nghiệm. Với $m \neq 3$ và $m \neq 1$ thì phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{m-2}{m-3}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 126. Tìm m để phương trình $mx^2 - 2(m-2)x + m-3 = 0$ có nghiệm duy nhất.

A. $m = 4$.

B. $m = 0$.

C. $0 \neq m \leq 4$.

D. $m = 4$ hoặc $m = 0$.

Lời giải.

a) Nếu $m = 0$ thì phương trình trở thành $4x = 3$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{3}{4}$.

b) Nếu $m \neq 0$ thì phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow (m-2)^2 - m(m-3) = 0 \Leftrightarrow m = 4.$$

Vậy với $m \in \{0; 4\}$ thì phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 127. Tìm tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2 - 4} = 2$.

A. 0.

B. 8.

C. $2\sqrt{2}$.

D. $-2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương

$$x^2 - 4 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}.$$

Vậy tổng hai nghiệm của phương trình đã cho bằng 0.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 128. Tìm tập nghiệm của phương trình $(x^2 - 5x + 4)\sqrt{x-2} = 0$.

A. $\{1; 2; 4\}$.

B. $\{2; 4\}$.

C. $\{1; 2\}$.

D. $\{1; 4\}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{cases} x = 2 \\ \begin{cases} x > 2 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{2; 4\}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 129. Cho phương trình $mx^2 + 2x + 1 = 0$ với tham số m . Khẳng định nào dưới đây **sai**?

A. Khi $m > 1$ thì phương trình vô nghiệm.

B. Khi $m < 1$ và $m \neq 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

C. Khi $m \neq 0$ thì phương trình có hai nghiệm.

D. Khi $m = 1$ hoặc $m = 0$ thì phương trình có một nghiệm.

Lời giải.

Ta có $2x^2 + 2x + 1 = x^2 + (x+1)^2 > 0$, nên với $m = 2$, phương trình đã cho vô nghiệm. Vậy khẳng định “Khi $m \neq 0$ thì phương trình có hai nghiệm” là sai.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 130. Cho phương trình $x^2 + (2m - 3)x + m^2 - 2m = 0$ với tham số m . Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. Khi $m = 3$ thì phương trình có tích hai nghiệm bằng 3.
- B. Khi $m = 3$ thì phương trình có tích hai nghiệm bằng 3 và tổng hai nghiệm bằng -3 .
- C. Khi $m = -1$ thì phương trình có tích hai nghiệm bằng 3.
- D. Khi $m = -1$ thì phương trình có tổng hai nghiệm bằng 3.

Lời giải.

Với $m = -1$, phương trình trở thành $x^2 - 5x + 3 = 0$. Dễ thấy phương trình này có $\Delta > 0$. Theo định lý Viète, tích hai nghiệm của phương trình bằng 3.

Chọn đáp án **C** □

Câu 131. Cho phương trình $mx^2 + (m^2 - 3)x + m = 0$ với tham số m . Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. Khi $m = 2$ thì phương trình có hai nghiệm dương.
- B. Khi $m = 2$ thì phương trình có hai nghiệm cùng dấu.
- C. Khi $m = 4$ thì phương trình có hai nghiệm dương.
- D. Khi $m = 4$ thì phương trình có nghiệm âm.

Lời giải.

Với $m = 4$, phương trình đã cho trở thành $4x^2 + 13x + 4 = 0$, hay $x = \frac{-13 \pm \sqrt{105}}{8}$. Vậy phương trình có hai nghiệm âm với $m = 4$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 132. Trong các phương trình dưới, phương trình nào có nghiệm duy nhất với mọi giá trị của tham số m ?

- A. $mx + m = 0$.
- B. $(m - 2)x + 2m = 0$.
- C. $(m^2 + 1)x + 2 = 0$.
- D. $m^2x + 3m + 2 = 0$.

Lời giải.

Do $m^2 + 1 > 0$, với mọi m nên phương trình $(m^2 + 1)x + 2 = 0$ có nghiệm duy nhất $x = -\frac{2}{m^2 + 1}$ với mọi m .

Chọn đáp án **C** □

Câu 133. Cho phương trình $[(m^2 + 1)x - m - 1](x^2 - 2mx - 2 + 3m) = 0$ với tham số m . Chỉ ra khẳng định **sai** trong các khẳng định sau.

- A. Phương trình luôn có ba nghiệm phân biệt.
- B. Khi $m = -2$ thì phương trình có ba nghiệm phân biệt.
- C. Khi $m = -1$ thì phương trình có ba nghiệm phân biệt.
- D. Khi $m = 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải.

Với $m = 1$, phương trình có nghiệm duy nhất $x_0 = 1$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 134. Tìm tập nghiệm của phương trình $\sqrt{3x^2 + 6x + 3} = 2x + 1$.

- A. $\{1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3}\}$.
- B. $\{1 - \sqrt{3}\}$.
- C. $\{1 + \sqrt{3}\}$.
- D. $\emptyset$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \\ 3x^2 + 6x + 3 = (2x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \\ x^2 - 2x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{3}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{1 + \sqrt{3}\}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 135. Tìm điều kiện cần và đủ để phương trình $ax = b$ có nghiệm duy nhất.

A. $a = 0$.

B. $a \neq 0$.

C. $a = 1$.

D. $b \neq 0$.

Lời giải.

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi $a \neq 0$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 136. Tìm điều kiện cần và đủ để phương trình $ax = b$ có vô số nghiệm.

A. $a = 0$ và $b = 0$.

B. $a \neq 0$.

C. $a = 0$.

D. $b = 0$.

Lời giải.

Phương trình đã cho có vô số nghiệm khi $a = 0$ và $b = 0$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 137. Tìm điều kiện cần và đủ để phương trình $ax = b$ vô nghiệm.

A. $a = 0$ và $b = 0$.

B. $a \neq 0$.

C. $a = 0$.

D. $a = 0$ và $b \neq 0$.

Lời giải.

Phương trình đã cho vô nghiệm khi $a \neq 0$ và $b = 0$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 138. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $m(x + m) = 3(x + m)$ có vô số nghiệm?

A. $m = 0$.

B. $m = 3$.

C. $m \neq 0$.

D. $m \neq 3$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương $(m - 3)x + m^2 - 3m = 0$

(1).

Phương trình (1) có vô số nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} m - 3 = 0 \\ m^2 - 3m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 3$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 139. Trong trường hợp nào sau đây thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm duy nhất.

A. $a = b = 0$.

B. $a \neq 0$ và $b^2 - 4ac \neq 0$.

C. $a = c = 0$.

D. $a \neq 0$ và $b^2 - 4ac = 0$.

Lời giải.

- Xét $a = 0$, khi đó phương trình tương đương $bx + c = 0$. Phương trình có nghiệm duy nhất khi $b \neq 0$.
- Xét $a \neq 0$, phương trình có $\Delta = b^2 - 4ac$. Phương trình có nghiệm duy nhất khi $\Delta = 0$ hay $b^2 - 4ac = 0$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 140. Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 - 8x + 13 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

A. $\frac{8}{13}$.

B. $-\frac{8}{13}$.

C. 8.

D. -8.

Lời giải.

Áp dụng định lý Viète ta có

$$P = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{8}{13}.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 141. Một người đi bộ xuất phát từ vị trí A đến vị trí B, di chuyển với vận tốc không đổi. Sau khi người này đi được 5 giờ 20 phút thì gặp một người đi xe đạp cũng xuất phát từ A đến B (với vận tốc không đổi). Tính vận tốc của người đi bộ biết rằng vận tốc xe đạp lớn hơn người đi bộ là 12 km/h.

A. 4 km/h.

B. 5 km/h.

C. 3 km/h.

D. 6 km/h.

Lời giải.

Gọi vận tốc của người đi bộ là x km/h ($x > 0$) suy ra vận tốc người đi xe đạp là $x + 12$. Thời gian di chuyển cho đến lúc gặp nhau của người đi bộ và người đi xe đạp lần lượt là $\frac{20}{x}, \frac{20}{x + 12}$. Theo đề bài ta có

$$\frac{20}{x} - \frac{20}{x + 12} = \frac{16}{3} \Leftrightarrow x^2 + 12 - 45 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -15 \end{cases} \text{ (loại)}.$$

Vậy vận tốc người đi bộ là 3 km/h.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 142. Cho phương trình $x^2 - 2(m + 2)x + m^2 + m + 6 = 0$. Tìm tất cả tham số m để phương trình có 2 nghiệm sao cho nghiệm này gấp ba lần nghiệm kia.

A. $m > \frac{2}{3}$.

B. $m = 2$.

C. $m = 6$.

D. $m = 2, m = 6$.

Lời giải.

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m + 2)^2 - m^2 - m - 6 \Leftrightarrow m \geq \frac{2}{3}.$$

Khi đó, theo định lý Viète, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m + 2) \\ x_1 x_2 = m^2 + m + 6 \end{cases}$. Theo giả thiết, ta có $x_1 = 3x_2$, thay vào ta được

$$3 \cdot \frac{(m + 2)^2}{4} = m^2 + m + 6 \Leftrightarrow m^2 - 8m + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 6. \end{cases}$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 143. Cho phương trình $(m + 2)x^2 + (2m + 1)x + 2 = 0$ với tham số m . Chỉ ra khẳng định **sai** trong các khẳng định sau.

A. Khi $m < -2$ thì phương trình có hai nghiệm trái dấu.

B. Khi $m > -2$ thì phương trình có hai nghiệm cùng dấu.

C. Khi $m = -5$ thì phương trình có hai nghiệm trái dấu và tổng hai nghiệm bằng -3 .

D. Khi $m = -3$ thì phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ mà $x_1 < 0 < x_2$ và $|x_1| > |x_2|$.

Lời giải.

$$\Delta = (2m + 1)^2 - 8(m + 2) = 4m^2 - 4m - 15.$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm cùng dấu khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ -\frac{2m+1}{m+2} > 0 \\ \frac{2}{m+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 4m - 15 > 0 \\ 2m + 1 < 0 \\ m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 4m - 15 > 0 \\ m < -\frac{1}{2} \\ m > -2. \end{cases}$$

Vậy $m > -2$ chưa chắc phương trình có hai nghiệm cùng dấu.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 144. Cho phương trình $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 3m + 4 = 0$ với tham số m . Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm (nếu có) của phương trình. Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau?

A. Khi $m = -2$ thì $x_1^2 + x_2^2 = 8$.

B. Khi $m = -3$ thì $x_1^2 + x_2^2 = 20$.

C. Khi $m = 1$ thì $x_1^2 + x_2^2 = -4$.

D. Khi $m = 4$ thì $x_1^2 + x_2^2 = 20$.

Lời giải.

$$\Delta = (m - 1)^2 - (m^2 - 3m + 4) = m - 3.$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 khi và chỉ khi $\Delta = m - 3 \geq 0$ hay $m \geq 3$.

$$\text{Với } m \geq 3 \text{ ta có } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4(m - 1)^2 - 2(m^2 - 3m + 4) = 2m^2 - 2m - 4.$$

$$\text{Vậy khi } m = 4 \text{ thì } x_1^2 + x_2^2 = 20.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 145. Cho phương trình $\frac{(2m + 1)x - m}{x - 1} = x + m$. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

A. với mọi m .

B. $m \neq -2$.

C. $m \neq -1$.

D. $m \neq -1$ và $m \neq -2$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x \neq 1$.

Phương trình đã cho tương đương

$$(2m + 1)x - m = (x + m)(x - 1) \Leftrightarrow 2mx + x - m = x^2 + mx - x - m$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (m + 2)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = m + 2. \end{cases}$$

$$\text{Để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thì } \begin{cases} m + 2 \neq 0 \\ m + 2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq -1 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 146. Cho phương trình $(mx + 1)\sqrt{x - 1} = 0$ với tham số m . Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi

A. $m > 0$.

B. $m = -1$.

C. $m < -1$.

D. $-1 < m < 0$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x > 1$.

- Xét $m = 0$ phương trình đã cho tương đương $\sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
- Xét $m \neq 0$, phương trình đã cho tương đương
$$\begin{cases} mx+1=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{m} \\ x=1 \end{cases}.$$

Để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi

$$\begin{cases} -\frac{1}{m} \neq 1 \\ -\frac{1}{m} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ -\frac{1}{m} - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 147. Cho phương trình $mx + 3 - \frac{2x}{x-2} = \frac{x-6}{x-2}$ với tham số m . Trong các kết luận sau, kết luận nào đúng?

- A. Phương trình đã cho tương đương với phương trình $mx^2 - 2mx = 0$.
- B. Khi $m = 0$, phương trình đã cho có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.
- C. Khi $m \neq 0$, phương trình đã cho có tập nghiệm là $\{0; 2\}$.
- D. Khi $m \neq 0$, phương trình đã cho có tập nghiệm là $\{0\}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x \neq 2$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x \neq 2 \\ (mx+3)(x-2) - 2x = x-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ mx^2 - 2mx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ \begin{cases} x=2 \\ mx=0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ mx=0 \end{cases}$$

Vậy khi $m \neq 0$ thì phương trình đã cho có tập nghiệm là $\{0\}$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 148. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $x^2 - (m+1)x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

- A. $m < 1$.
- B. $m = 1$.
- C. $m > 1$.
- D. $m \neq 1$.

Lời giải.

$$\Delta = (m+1)^2 - 4m = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2.$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta > 0$ hay $m \neq 1$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 149. Cho phương trình $mx^2 + 2x + 1 = 0$. Hãy chỉ ra khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

- A. Khi $m = 0$ hoặc $m = 1$ thì phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.
- B. Khi $m \neq 0$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm.
- C. Khi $m > 1$, phương trình đã cho vô nghiệm.
- D. Khi $m < 1$ và $m \neq 0$, phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải.

- Xét $m = 0$, khi đó phương trình đã cho tương đương với phương trình $2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.
- Xét $m \neq 0$, phương trình có $\Delta' = 1 - m$. Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta > 0$ hay $m < 1$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 150. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm

$$\frac{3x - m}{\sqrt{x - 2}} + \sqrt{x - 2} = \frac{2x + 2m - 1}{\sqrt{x - 2}}.$$

A. $m \geq 1$.B. $m > 1$.C. $m < 1$.D. $m > 2$.**Lời giải.**Điều kiện xác định: $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

Khi đó phương trình đã cho tương đương

$$3x - m + x - 2 = 2x + 2m - 1 \Leftrightarrow 2x = 3m + 1 \Leftrightarrow x = \frac{3m + 1}{2}$$

Kết hợp với điều kiện trên, phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi

$$\frac{3m + 1}{2} > 2 \Leftrightarrow 3m + 1 > 4 \Leftrightarrow 3m > 3 \Leftrightarrow m > 1.$$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 151. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $|3mx - 1| = 5$ có hai nghiệm phân biệt?A. $m = 0$.B. $m \neq 0$.C. $m \neq 1$.D. $m \notin \{0; 1\}$.**Lời giải.**

Phương trình đã cho tương đương $\begin{cases} 3mx - 1 = 5 \\ 3mx - 1 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx = 2 \\ mx = -\frac{4}{3} \end{cases}.$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} m \neq 0 \\ \frac{2}{m} \neq -\frac{4}{3m} \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 0.$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 152. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $|3x + m| = |2x - 2m|$ có nghiệm duy nhất?A. $m = 1$.B. $m = -1$.C. $m = 0$.D. $m \notin \{0; 1\}$.**Lời giải.**

Phương trình đã cho tương đương $\begin{cases} 3x + m = 2x - 2m \\ 3x + m = 2m - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3m \\ 5x = m \end{cases}.$

Phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\begin{cases} x = -3m \\ 5x = 3m \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$

Chọn đáp án (C)

□

Câu 153. Cho hàm số $y = x^2 - (m + 1)x + 1 - m^2$. Tìm tham số m để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại hai điểm A, B sao cho gốc tọa độ O nằm giữa A và B , đồng thời $OB = 2OA$.A. $m = 1$.B. $m = -\frac{1}{2}$.C. $m = -2$.D. $m = -3$.

Lời giải.

Để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại hai điểm A, B khi và chỉ khi phương trình

$$x^2 - (m+1)x + 1 - m^2 = 0 \quad (1)$$

có hai nghiệm phân biệt.

Ta có $\Delta = (m+1)^2 - 4(1-m^2) = 5m^2 + 2m - 3$.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > \frac{3}{5} \end{cases}$.

Khi đó, giả sử đồ thị hàm số cắt trục hoành tại $A(x_1, 0)$ và $B(x_2, 0)$, trong đó x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1).

Theo giả thiết ta có $OB = 2OA \Leftrightarrow |x_2| = 2|x_1|$.

Vì gốc tọa độ O nằm giữa A và B nên x_1 và x_2 trái dấu. Do đó, $x_2 = -2x_1$.

Khi đó yêu cầu bài toán tương đương với

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_2 = -2x_1 \\ x_1 + x_2 = m+1 \\ x_1x_2 = 1-m^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -2x_1 \\ x_1 = -m-1 \\ x_1x_2 = 1-m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2m+2 \\ x_1 = -m-1 \\ 2(m+1)^2 = 1-m^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2m+2 \\ x_1 = -m-1 \\ m^2 + 4m + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2m+2 \\ x_1 = -m-1 \\ \begin{cases} m = -1 \text{ (không thỏa mãn điều kiện)} \\ m = -3 \text{ (thỏa mãn điều kiện)} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 154. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2 - 4x + 3} = \sqrt{1-x}$ là

A. Vô số.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Lời giải.

Biến đổi theo công thức, ta có phương trình tương đương với

$$\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ \begin{cases} x = 1 \Leftrightarrow x = 1. \\ x = 2 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy phương trình có đúng một nghiệm duy nhất.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 155. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $|2x-3| = |mx+1|$ có hai nghiệm dương.

A. $m < -2 \vee m > 2$.

B. $-2 < m < 2$.

C. $-2 \leq m \leq 2$.

D. $m \leq -2 \vee m \geq 2$.

Lời giải.

Biến đổi phương trình ta được

$$|2x-3| = |mx+1| \Leftrightarrow \begin{cases} mx+1 = 2x-3 \\ mx+1 = 3-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)x = -4 \\ (m+2)x = 2. \end{cases}$$

Với $m \neq 2$ và $m \neq -2$, phương trình có hai nghiệm là $x = \frac{-4}{m-2}$ và $x = \frac{2}{m+2}$.

Để phương trình có hai nghiệm dương thì

$$\begin{cases} \frac{-4}{m-2} > 0 \\ \frac{2}{m+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2 < 0 \\ m+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m > -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 2.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 156. Giá trị của m để hai đường thẳng $d_1: (m-1)x + my - 5 = 0$, $d_2: mx + (2m-1)y + 7 = 0$ cắt nhau tại một điểm trên trục hoành là

A. $m = 4$.

B. $m = \frac{1}{2}$.

C. $m = \frac{5}{12}$.

D. $m = \frac{7}{12}$.

Lời giải.

Nếu $m = 1$ thì $d_1: y - 5 = 0$ là một đường thẳng song song với Ox nên $m = 1$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nếu $m \neq 1$ thì $d_1 \cap Ox = A\left(\frac{5}{m-1}; 0\right)$.

Để d_1, d_2 cắt nhau tại một điểm trên trục hoành thì

$$\begin{aligned} A \in d_2 &\Leftrightarrow \frac{5m}{m-1} + 7 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{12m-7}{m-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow m = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 157. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $-2x^2 - 4x + 3 = m$ có nghiệm.

A. $m < 5$.

B. $m \geq 5$.

C. $m > 5$.

D. $m \leq 5$.

Lời giải.

Phương trình $-2x^2 - 4x + 3 = m \Leftrightarrow 2x^2 + 4x + m - 3 = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta' = 4 - 2(m-3) \geq 0 \Leftrightarrow 10 - 2m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 5.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 158. Giá trị nào sau đây của x thỏa mãn phương trình $\sqrt{2x-3} = x-3$.

A. $x = 7$.

B. $x = 6$.

C. $x = 8$.

D. $x = 9$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{2x-3} = x-3 &\Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 2x-3 = (x-3)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 8x + 12 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \begin{cases} x = 2 \\ x = 6 \end{cases} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = 6.\end{aligned}$$

Chú ý: Có thể thay trực tiếp các giá trị của x trong các phương án vào kiểm tra.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 159. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $m^2(x+m) = x+m$ có vô số nghiệm.

A. $m = 0$ hoặc $m = -1$.

B. $-1 < m < 1, m \neq 0$.

C. $m = \pm 1$.

D. $m = 0$ hoặc $m = 1$.

Lời giải.

Ta có $m^2(x+m) = x+m \Leftrightarrow (m^2-1)x = m-m^3$.

Suy ra phương trình đã cho có vô số nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m^2-1=0 \\ m-m^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m=1 \\ m=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} m=0 \\ m=1 \\ m=-1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-1 \end{cases}.$$

Vậy $m = \pm 1$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 160. Tập nghiệm S của phương trình $2x + \frac{3}{x-1} = \frac{3x}{x-1}$ là

A. $S = \{1\}$.

B. $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

C. $S = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

D. $S = \left\{1; \frac{3}{2}\right\}$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 1$.

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương

$$2x(x-1) + 3 = 3x \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện, phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 161. Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - m = 0$. Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 3x_1x_2$.

A. $m = 3$.

B. $m = 5$.

C. $m = 0$ hoặc $m = 5$.

D. $m = 0$ hoặc $m = -5$.

Lời giải.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta' = m^2 - m^2 + m > 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Khi đó, theo Vi-ét ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1x_2 = m^2 - m. \end{cases}$$

Theo giả thiết có

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 = 3x_1x_2 &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 5x_1x_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4m^2 - 5(m^2 - m) = 0 \\ &\Leftrightarrow -m^2 + 5m = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 5. \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện $m > 0$ ta được giá trị cần tìm là $m = 5$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 162. Tập nghiệm S của phương trình $\frac{(m^2 + 1)x - 1}{x + 1} = 1$ trong trường hợp $m \neq 0$ là

A. $S = \mathbb{R}$.

B. $S = \left\{ \frac{2}{m^2} \right\}$.

C. $S = \left\{ \frac{m + 1}{m^2} \right\}$.

D. $S = \emptyset$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -1$.

$$\frac{(m^2 + 1)x - 1}{x + 1} = 1 \Leftrightarrow (m^2 + 1)x - 1 = x + 1 \Leftrightarrow m^2x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{m^2} \text{ (do } m \neq 0 \text{)}.$$

Do $\frac{2}{m^2} \neq -1 \forall m \neq 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{2}{m^2}$, với mọi $m \neq 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 163. Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình $\frac{x^2 + mx + 2}{x^2 - 1} = 1$ vô nghiệm?

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 0.

Lời giải.

Điều kiện $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$.

$$\text{Với điều kiện trên, ta có } \frac{x^2 + mx + 2}{x^2 - 1} = 1 \Leftrightarrow x^2 + mx + 2 = x^2 - 1 \Leftrightarrow mx = -3.$$

Suy ra phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m = 0 \\ -\frac{3}{m} = 1 \\ -\frac{3}{m} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -\frac{1}{3} \\ m = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Vậy có 3 giá trị của m để phương trình đã cho vô nghiệm.

Chọn đáp án (A) □

Câu 164. Giá trị của m làm cho phương trình $mx + 2 = x - 4$ vô nghiệm là

- A. $m = -1$. B. Không tồn tại m . C. $m = 1$. D. $m = 0$.

Lời giải.

Ta có $mx + 2 = x - 4 \Leftrightarrow (m - 1)x = -6$ nên phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $m = 1$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 165. Phương trình $x^2 + mx - 2 = 0$ có số nghiệm là

- A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

Lời giải.

Phương trình có $\Delta = m^2 + 8 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 166. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} \mid (x^3 - 9x)(2x^2 - 5x + 2) = 0\}$. Tập A được viết theo kiểu liệt kê là

- A. $\{2; 3\}$. B. $\left\{-3; 0; \frac{1}{2}; 2; 3\right\}$. C. $\{-3; 0; 2; 3\}$. D. $\{0; 2; 3\}$.

Lời giải.

Ta thấy $(x^3 - 9x)(2x^2 - 5x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 9x = 0 \\ 2x^2 - 5x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ hoặc } x = \pm 3 \\ x = 2 \text{ hoặc } x = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Vậy tập $A = \left\{-3; 0; \frac{1}{2}; 2; 3\right\}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 167. Phương trình $-x^2 + mx + 7 = 0$ có một nghiệm là $x = -3$. Giá trị của m và nghiệm còn lại của phương trình là

- A. $m = -\frac{2}{3}; x = \frac{7}{3}$. B. $m = \frac{2}{3}; x = \frac{7}{3}$. C. $m = -\frac{2}{3}; x = -\frac{7}{3}$. D. $m = -\frac{2}{3}; x = \frac{17}{3}$.

Lời giải.

$x = -3$ là nghiệm của phương trình nên ta suy ra $-(-3)^2 - 3m + 7 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{2}{3}$.

Khi đó ta được phương trình $-x^2 - \frac{2}{3}x + 7 = 0$. Suy ra nghiệm còn lại là $x = \frac{7}{3}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 168. Tập nghiệm của phương trình $(x + 3)\sqrt{10 - x^2} = x^2 - x - 12$ là

- A. $\{-3; 1\}$. B. $\{-3; 3\}$. C. $\{-3; 1; 3\}$. D. $\{-3\}$.

Lời giải.

Điều kiện $10 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10}$.

$$\begin{aligned} & (x + 3)\sqrt{10 - x^2} = x^2 - x - 12 \\ \Leftrightarrow & (x + 3)\sqrt{10 - x^2} - (x + 3)(x - 4) = 0 \\ \Leftrightarrow & (x + 3)(\sqrt{10 - x^2} - (x - 4)) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + 3 = 0 \\ \sqrt{10 - x^2} - (x - 4) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = -3 \text{ (Nhận)} \\ \sqrt{10 - x^2} = x - 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} & \sqrt{10 - x^2} = x - 4 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x \geq 4 \\ 10 - x^2 = (x - 4)^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x \geq 4 \\ x^2 - 8x + 16 = -x^2 + 10 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x \geq 4 \\ 2x^2 - 8x + 6 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x \geq 4 \\ \begin{cases} x = 1 \text{ (loại)} \\ x = 3 \text{ (loại)} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{-3\}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 169. Giá trị của m để phương trình $(x - 2)(x - mx + 3) = 0$ có hai nghiệm phân biệt là

A. $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq \frac{5}{2} \end{cases}$ B. $\begin{cases} m \neq 1 \\ m = \frac{5}{2} \end{cases}$ C. $m \neq 1$. D. $\begin{cases} m = 1 \\ m \neq \frac{5}{2} \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $(x - 2)(x - mx + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ x - mx + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ (1 - m)x = 3 \end{cases} \quad (*)$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất khác 2 hay

$$\begin{cases} m \neq 1 \\ (1 - m)2 \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq \frac{5}{2} \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 170. Cho phương trình $x^2 + mx - 2 = 0$, giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho biểu thức $T = x_1^2 + x_2^2 - 2(x_1 + x_2)$ đạt giá trị nhỏ nhất là

A. $m = \frac{1}{2}$. B. $m = 1$. C. $m = -1$. D. $m = 2$.

Lời giải.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta = m^2 + 8 > 0$ đúng với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Theo định lý Vi-ét, ta có $x_1 + x_2 = -m, x_1x_2 = -2$.

Ta có $T = x_1^2 + x_2^2 - 2(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) = m^2 + 2m + 4 = (m + 1)^2 + 3 \geq 3$.

Vậy min $T = 3$ khi $m = -1$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 171. Số giá trị nguyên của m để phương trình $x^2 - 3|x| - m + 1 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt là

A. 1. B. 3. C. 0. D. 2.

Lời giải.

Đặt $t = |x|$ điều kiện $t \geq 0$. Phương trình trở thành $t^2 - 3t - m + 1 = 0$ (*).

Phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm dương

$$\text{phân biệt hay } \begin{cases} \Delta = 9 - 4(-m + 1) > 0 \\ S = 3 > 0 \\ P = -m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m + 5 > 0 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{5}{4} < m < 1 \Rightarrow m \in \{-1; 0\}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 172. Gọi S là tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{x+3}(x^2 + 3x - 4) = 0$. Tính S .

- A. $S = -3$. B. $S = -6$. C. $S = 3$. D. $S = -2$.

Lời giải.

$$\text{Phương trình } \sqrt{x+3}(x^2 + 3x - 4) = 0. \quad (1)$$

Điều kiện: $x \geq -3$.

$$\text{Với điều kiện trên, } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = 0 \\ x^2 + 3x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \\ x = -4. \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta được $x = 1, x = -3$. Vậy $S = -2$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 173. Tổng các nghiệm của phương trình $|2x + 1| = |x - 2|$ bằng

- A. 4. B. $-\frac{5}{3}$. C. $-\frac{8}{3}$. D. -3.

Lời giải.

$$\text{Phương trình đã cho tương đương với } \begin{cases} 2x + 1 = x - 2 \\ 2x + 1 = -x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 174. Cho phương trình $x^2 - x - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Giá trị $x_1^2 + x_2^2$ bằng

- A. 4. B. 2. C. 3. D. 5.

Lời giải.

Áp dụng định lý Vi-et, ta có $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 1$ và $x_1x_2 = \frac{c}{a} = -1$.

$$\text{Suy ra } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 3.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 175. Cho phương trình $(m^2 - 4)x + 3m - 1 = 0$, với m là tham số. Tìm tất cả giá trị m để phương trình có nghiệm duy nhất.

- A. $m \neq 2$. B. $m \notin \{-2; 2\}$. C. $\begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq 2 \end{cases}$. D. $m \neq -2$.

Lời giải.

$$\text{Để phương trình } (m^2 - 4)x + 3m - 1 = 0 \text{ có nghiệm duy nhất thì } m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq 2. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 176. Phương trình $x^2 + (m+1)x + m - 2 = 0$ (với m là tham số) có hai nghiệm trái dấu khi

- A. $0 < m < 2$. B. $m \geq 2$. C. $m < 2$. D. $m > 2$.

Lời giải.

Phương trình có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $1 \cdot (m - 2) < 0 \Leftrightarrow m < 2$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 177. Tìm tất cả giá trị m để phương trình $mx^2 - 3(m + 1)x - 2 = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

- A. $m > 0$. B. $m < 0$. C. $m > 2$. D. $-1 < m < 0$.

Lời giải.

Phương trình có nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow -2m < 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 178. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 3x - 1 = 0$. Tính tổng $x_1^2 + x_2^2$.

- A. 11. B. 9. C. 8. D. 10.

Lời giải.

Ta có $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left[-\frac{(-3)}{1}\right]^2 - 2 \cdot \frac{-1}{1} = 11$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 179. Tìm m để phương trình $(m^2 - 5m + 6)x = m^2 - 2m$ vô nghiệm.

- A. $m = 3$. B. $m = 2$. C. $m = 1$. D. $m = 6$.

Lời giải.

Phương trình $(m^2 - 5m + 6)x = m^2 - 2m$ vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 5m + 6 = 0 \\ m^2 - 2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 3 \\ m^2 - 2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 180. Tập nghiệm của phương trình $|2x - 1| = |-5x - 2|$ là

- A. $\{-1\}$. B. $\left\{-\frac{1}{7}; -1\right\}$. C. $\left\{-\frac{1}{5}; 5\right\}$. D. $\left\{-\frac{1}{7}\right\}$.

Lời giải.

Ta có $|2x - 1| = |-5x - 2| \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = -5x - 2 \\ 2x - 1 = 5x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{7} \\ x = -1 \end{cases}$.

Vậy phương trình có nghiệm $\left\{-\frac{1}{7}; -1\right\}$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 181. Gọi S là tổng tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $m^3x - 2 = m(4x + 1)$ vô nghiệm. Tính giá trị của S ?

- A. $S = 4$. B. $S = 2$. C. $S = -2$. D. $S = 0$.

Lời giải.

$$m^3x - 2 = m(4x + 1) \Leftrightarrow (m^3 - 4m)x - m - 2 = 0.$$

Phương trình vô nghiệm khi $\begin{cases} m^3 - 4m = 0 \\ -m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$.

Vậy $S = 2 + 0 = 2$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 182. Cho phương trình $(x-1)(x^2-4mx-4)=0$. Phương trình có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

- A. $m \neq 0$. B. $m \neq -\frac{3}{4}$. C. $m \neq \frac{3}{4}$. D. $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

$$(x-1)(x^2-4mx-4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ g(x)=x^2-4mx-4=0. \end{cases}$$

Để phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt thì phương trình $g(x)=0$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 1, điều kiện

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2+4 > 0 \\ -4m-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq -\frac{3}{4}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 183. Tổng các nghiệm của phương trình $(x-2)\sqrt{2x+7}=x^2-4$ bằng

- A. 0. B. 3. C. 2. D. 1.

Lời giải.

Điều kiện $2x+7 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{7}{2}$.

$$\begin{aligned} (x-2)\sqrt{2x+7}=x^2-4 &\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \sqrt{2x+7}=x+2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 2x+7=(x+2)^2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2+2x-3=0 \end{cases} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=1 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện).} \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 184. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $(m-2)x=m+2$ có nghiệm duy nhất.

- A. $m \neq 2$. B. $m = 0$. C. $m \neq 0$. D. $m = 2$.

Lời giải.

Phương trình $(m-2)x=m+2$ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m-2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 185. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2-2mx+m^2-m+2=0$ (m là tham số). Đặt $P=x_1x_2-\frac{1}{2}(x_1+x_2)$. Chọn đáp án đúng?

- A. Giá trị nhỏ nhất của P bằng 1. B. Giá trị nhỏ nhất của P bằng -2 .
C. Giá trị nhỏ nhất của P bằng 2. D. Biểu thức P không tồn tại giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

Để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thì $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m - 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 2$.

Theo định lí Vi-ét ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = m^2 - m + 2. \end{cases}$$

Do đó $P = x_1 x_2 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = m^2 - m + 2 - m = m^2 - 2m + 2$.

Bảng biến thiên

m	2	$+\infty$
P	2	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra giá trị nhỏ nhất của P bằng 2.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 186. Số nghiệm của phương trình $|2x - 4| = x - 2$ là

A. 0.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải.

Điều kiện có nghiệm của phương trình là $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

Ta có

$$|2x - 4| = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 = x - 2 \\ 2x - 4 = -x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy phương trình có 1 nghiệm.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 187. Nghiệm của phương trình $\frac{x-3}{x+1} = \frac{x+1}{x-3}$ là

A. -3.

B. $-\frac{1}{2}$.

C. 1.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Điều kiện để phương trình có nghĩa là $\begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 3 \end{cases}$ hay phương trình có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$.

Ta có

$$\frac{x-3}{x+1} = \frac{x+1}{x-3} \Rightarrow (x-3)^2 = (x+1)^2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy phương trình có duy nhất một nghiệm $x = 1$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 188. Tìm tập nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2 - 4x} = \sqrt{4x - x^2}$.

A. $S = \{4\}$.

B. $S = \{0\}$.

C. $S = \{0; 4\}$.

D. $S = \emptyset$.

Lời giải.

Điều kiện có nghĩa của phương trình là

$$\begin{cases} x^2 - 4x \geq 0 \\ 4x - x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty) \\ x \in [0; 4] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Vậy tập xác định của phương trình là $\mathcal{D} = \{0; 4\}$.

Thế hai giá trị $x = 0$ và $x = 4$ vào phương trình ta thấy thỏa nên phương trình có tập nghiệm $S = \{0; 4\}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 189. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(m^2 - 4m + 3)x = m^2 - 3m + 2$ vô nghiệm.

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

Lời giải.

Phương trình $(m^2 - 4m + 3)x = m^2 - 3m + 2$ vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m^2 - 4m + 3 = 0 \\ m^2 - 3m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 3 \\ m^2 - 3m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$$

Chọn đáp án **B** □

Câu 190. Nghiệm của phương trình $|4x + 1| = |7 - x|$ là

A. $\frac{5}{6}; \frac{3}{8}$.

B. $\frac{6}{5}; -\frac{8}{3}$.

C. $\frac{5}{6}; -\frac{3}{8}$.

D. $\frac{6}{5}; \frac{8}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$|4x + 1| = |7 - x| \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 1 = 7 - x \\ 4x + 1 = x - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ x = -\frac{8}{3} \end{cases}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $\frac{6}{5}; -\frac{8}{3}$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 191. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $mx^2 - 2(m - 2)x + m - 3 = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

A. $m \leq 0$.

B. $m < 3$.

C. $0 < m < 3$.

D. $m < 0$.

Lời giải.

Phương trình có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $\begin{cases} m \neq 0 \\ P < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m(m - 3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 3$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 192. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $(mx + 2)(x + 1) = (mx + m^2)x$ có nghiệm duy nhất.

A. $m \neq -1$ và $m \neq 0$. B. $m \neq -1$ và $m \neq 2$. C. $m \neq 1$ và $m \neq -2$. D. $m \neq 2$ và $m \neq 0$.

Lời giải.

Phương trình được biến đổi thành $(m^2 - m - 2)x = 2$.

Phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m^2 - m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$ và $m \neq 2$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 193. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $(m+2)x^2 + 2(3m-2)x + m+2 = 0$ có nghiệm kép $x = 1$.

A. $m = 2$.B. $m = 1$.C. $m = 0$.D. $m = -1$.

Lời giải.

$$\text{Phương trình có nghiệm kép } x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ \Delta' = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 194. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $mx^2 + 2(m+3)x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu.

A. $m < -\frac{3}{2}$.B. $m > -\frac{3}{2}$ và $m \neq 0$.C. $-\frac{3}{2} < m < 0$.D. $m \neq 0$.

Lời giải.

$$\text{Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt cùng dấu thì } \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ P > 0 \end{cases}$$

$$\text{Do đó ta có } \begin{cases} m \neq 0 \\ (m+3)^2 - m^2 > 0 \\ \frac{m}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 6m+9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 195. Số nghiệm của phương trình $x^2 + 3x + 1 = (x+3)\sqrt{x^2+1}$ là

A. 3.

B. 1.

C. 4.

D. 2.

Lời giải.

Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}-3) - x(\sqrt{x^2+1}-3) = 0 \\ \Leftrightarrow & (\sqrt{x^2+1}-3)(\sqrt{x^2+1}-x) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \sqrt{x^2+1}-3=0 \\ \sqrt{x^2+1}-x=0 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases} \Leftrightarrow x^2+1=9 \Leftrightarrow x^2=8 \Leftrightarrow x=\pm 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 196. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{x+3}(x^2+3x-4)=0$ là

A. $T = \{-3\}$.B. $T = \{1\}$.C. $T = [-3; +\infty)$.D. $T = \{-1; 3\}$.

Lời giải.

Xét phương trình $\sqrt{x+3}(x^2+3x-4)=0$, điều kiện xác định là $x \in [-3; +\infty)$.

Với điều kiện trên phương trình

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+3}(x^2+3x-4)=0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \sqrt{x+3}=0 \\ x^2+3x-4=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x=-3 \\ x=1 \\ x=-4. \end{cases} \end{aligned}$$

So sánh với điều kiện ta được tập nghiệm của phương trình là $T = \{-1; 3\}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 197. Giải phương trình $|3x+1|=x+3$ ta được số nghiệm của phương trình là

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

$$\text{Xét phương trình } |3x+1|=x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ 3x+1=x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x < -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 198. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\frac{x+1}{x-1}-1=\frac{3x}{x+1}$.

A. $S = \{-1; 1\}$.

B. $S = \left\{-1; \frac{2}{3}\right\}$.

C. $S = \left\{-\frac{1}{3}; 2\right\}$.

D. $S = \{0\}$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq \pm 1$.

Phương trình tương đương với

$$(x+1)^2-(x-1)(x+1)=3x(x-1) \Leftrightarrow 3x^2-5x-2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ x=2. \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện, ta có tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{-\frac{1}{3}; 2\right\}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 199. Tính tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2-8x}=3$.

A. 10.

B. 8.

C. -10.

D. -9.

Lời giải.

Phương trình tương đương với $x^2-8x=9 \Leftrightarrow x^2-8x-9=0$.

Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình, khi đó ta có $x_1+x_2=\frac{-b}{a}=\frac{8}{1}=8$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 200. Tích các nghiệm của phương trình $|2x - 4| = x - 1$ là

- A. 5. B. 4. C. 0. D. Một giá trị khác.

Lời giải.

Ta có

$$|2x - 4| = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x - 4 = x - 1 \\ 2x - 4 = -x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 3 \\ x = \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{5}{3} \end{cases}.$$

Vậy tích các nghiệm của phương trình đã cho là 5.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 201. Tổng các nghiệm của phương trình $2x^2 - 5\sqrt{2x^2 - 1} + 3 = 0$ là

- A. -3. B. 2. C. -1. D. 0.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt{2x^2 - 1}, t \geq 0$. Khi đó, phương trình có dạng

$$t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 4. \end{cases}$$

- Với $t = 1 \Rightarrow \sqrt{2x^2 - 1} = 1 \Leftrightarrow 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm 1$.
- Với $t = 4 \Rightarrow \sqrt{2x^2 - 1} = 4 \Leftrightarrow 2x^2 = 17 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{34}}{2}$.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình đã cho là 0.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 202. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^2 - 4x + m = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt?

- A. Vô số. B. 2. C. 3. D. 1.

Lời giải.

Phương trình đã cho có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta' = 4 - m > 0 \\ P = m > 0 \\ S = 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 4.$$

Do m nguyên nên $m = 1$ hoặc $m = 2$ hoặc $m = 3$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 203. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2 - x - 4} = \sqrt{x - 1}$ là

- A. 0. B. 2. C. vô số. D. 1.

Lời giải.

Ta có

$$\sqrt{x^2 - x - 4} = \sqrt{x - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - x - 4 = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 204. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình $(m^2 - 9)x - m^2 + 3m = 0$ vô nghiệm?

A. 1.

B. Vô số.

C. 0.

D. 2.

Lời giải.

$$(m^2 - 9)x - m^2 + 3m = 0 \text{ vô nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 9 = 0 \\ m^2 - 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 205. Tập nghiệm của phương trình $\frac{(x-3)(x^2-1)}{\sqrt{x}} = 0$ có bao nhiêu phần tử?

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải.

Ta có

$$\frac{(x-3)(x^2-1)}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = 3 \\ x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3. \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho có 2 phần tử.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 206. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\sqrt{x^2 - x - m} = x - 1$ có nghiệm là

A. $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

B. $[0; +\infty)$.

C. $(0; +\infty)$.

D. $[1; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có

$$\sqrt{x^2 - x - m} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - x - m = (x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = m + 1. \end{cases}$$

Suy ra phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m + 1 \geq 1 \Leftrightarrow m \geq 0$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 207. Tìm tất cả các số thực m để phương trình $2x^2 - 4x + 1 + m^2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $-1 < m < 1$.

B. $-1 \leq m < 1$.

C. $0 \leq m \leq 1$.

D. $0 \leq m < 1$.

Lời giải.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 4 - 2(1 + m^2) > 0 \Leftrightarrow 1 - m^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 208. Tìm tất cả các số thực m để phương trình $(mx^2 + 2x - m + 1)\sqrt{x} = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $\begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \end{cases}$.

B. $1 \leq m \leq 0$.

C. $\begin{cases} m \geq 1 \\ m < 0 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq 0 \end{cases}$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$.

Phương trình tương đương $\begin{cases} mx^2 + 2x - m + 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$. Vậy để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì phương trình $mx^2 + 2x - m + 1 = 0$ chỉ có 1 nghiệm $x > 0$.

- Trường hợp với $m = 0$ thì $mx^2 + 2x - m + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ (loại).
- Trường hợp $m \neq 0$, ta có $\Delta' = 1 - m(-m + 1) = m^2 - m + 1 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Vậy phương trình $mx^2 + 2x - m + 1 = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt. Để phương trình $mx^2 + 2x - m + 1 = 0$ chỉ có 1 nghiệm $x > 0$ thì nó phải có một nghiệm $x \leq 0$ và một nghiệm $x > 0$. Xét trường hợp $x = 0 \Leftrightarrow m = 1$. Thử lại thấy không thỏa mãn. Vậy phương trình

$$mx^2 + 2x - m + 1 = 0 \text{ phải có 2 nghiệm trái dấu, hay } a \cdot c < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \end{cases}$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 209. Phương trình $(m + 1)x^2 - mx + m - 1 = 0$ có một nghiệm $x_1 = -1$. Tìm nghiệm x_2 còn lại của phương trình.

- A. $x_2 = -2$. B. $x_2 = 0$. C. $x_2 = 1$. D. $x_2 = 2$.

Lời giải.

Thay $x_1 = -1$ vào phương trình đã cho ta được $3m = 0 \Leftrightarrow m = 0$. Khi đó $x_2 = -\frac{m-1}{m+1} = 1$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 210. Tìm tất cả các số thực m để phương trình $(m + 1)x^2 - 2mx + m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

- A. $m > 0$. B. $\begin{cases} m < 0 \\ m \neq -1 \end{cases}$. C. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 1 \end{cases}$. D. $m \neq -1$.

Lời giải.

Với $m = -1$ ta có phương trình $2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (không thỏa mãn).

Với $m \neq -1$ ta có phương trình bậc hai $(m + 1)x^2 - 2mx + m - 1 = 0$ với $\Delta' = 1 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m \neq -1$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 211. Hãy chỉ ra phương trình bậc nhất trong các phương trình sau.

- A. $\frac{1}{x} + x = 2$. B. $-x^2 + 4 = 0$. C. $\sqrt{2} \cdot x - 7 = 0$. D. $x(x + 5) = 0$.

Lời giải.

$\sqrt{2} \cdot x - 7 = 0$ là phương trình bậc nhất với $a = \sqrt{2}$ và $b = -7$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 212. Cho phương trình $\frac{x^2 - 3x - 2}{x - 3} = -x$ có nghiệm a . Khi đó a thuộc tập

- A. $\left(\frac{1}{3}; 3\right)$. B. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. C. $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$. D. $\emptyset$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \neq 3$. Ta có

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 3x - 2}{x - 3} = -x &\Leftrightarrow x^2 - 3x - 2 = -x(x - 3) \\ &\Leftrightarrow x^2 - 3x - 2 = -x^2 + 3x \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 6x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} & (\text{thỏa}) \\ x = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} & (\text{thỏa}). \end{cases}\end{aligned}$$

Ta thấy $x = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ còn $x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$ không thuộc khoảng nào ở trên.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 213. Một xe hơi khởi hành từ Krông Năng đi đến Nha Trang cách nhau 175 km. Khi về xe tăng vận tốc trung bình hơn vận tốc trung bình lúc đi là 20 km/h. Biết rằng thời gian dùng để đi và về là 6 h. Vận tốc trung bình lúc đi là

- A. 60 km/h. B. 45 km/h. C. 55 km/h. D. 50 km/h.

Lời giải.

Gọi vận tốc trung bình lúc đi là x km/h ($x > 0$). Khi đó, thời gian đi là $\frac{175}{x}$ h; thời gian về là $\frac{175}{x + 20}$ h. Do thời gian cả đi và về là 6 h nên ta có

$$\frac{175}{x} + \frac{175}{x + 20} = 6 \Leftrightarrow 6x^2 - 230x - 3500 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \\ x = -\frac{35}{3}. \end{cases} \quad (\text{Loại})$$

Vậy vận tốc trung bình lúc đi là 50 km/h.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 214. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $mx^2 - 2(m + 1)x + m + 1 = 0$ vô nghiệm.

- A. $m < -1$. B. $m \leq -1$ hoặc $m \geq 0$.
C. $m = 0$ hoặc $m < -1$. D. $m > -1$ và $m \neq 0$.

Lời giải.

- Trường hợp $m = 0$, phương trình trở thành $-2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.
- Trường hợp $m \neq 0$, phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow m + 1 < 0 \Leftrightarrow m < -1$.

Vậy $m < -1$ thỏa mãn.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 215. Số các nghiệm nguyên của phương trình $x(x + 5) = 2\sqrt[3]{x^2 + 5x - 2} - 2$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải.

Ta có $x(x + 5) = 2\sqrt[3]{x^2 + 5x - 2} - 2 \Leftrightarrow x^2 + 5x = 2\sqrt[3]{x^2 + 5x - 2} - 2$. (*)

Đặt $t = \sqrt[3]{x^2 + 5x - 2}$, ta có $x^2 + 5x = t^3 + 2$. Khi đó, (*) trở thành

$$\begin{aligned} t^3 + 2 &= 2t - 2 \\ \Leftrightarrow t^3 - 2t + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t^2 - 2t + 2 = 0 \quad (\text{vô nghiệm}) \end{cases} &\Leftrightarrow t = -2. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\sqrt[3]{x^2 + 5x - 2} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -3. \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm nguyên.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 216. Tập nghiệm của phương trình $|4x - 5| + |6x + 9| = |10x + 4|$ là

A. $S = \{2; 4\}$.

B. $S = [-2; 2]$.

C. $S = \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{4}; +\infty\right)$.

D. $S = \{-2; 4\}$.

Lời giải.

Ta có bảng sau:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{5}{4}$	$+\infty$
$ 4x - 5 $	$5 - 4x$	$5 - 4x$	$5 - 4x$	0	$4x - 5$
$ 6x + 9 $	$-6x - 9$	0	$6x + 9$	$6x + 9$	$6x + 9$
$ 10x + 4 $	$-10x - 4$	$-10x - 4$	0	$10x + 4$	$10x + 4$

a) Với $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$, phương trình đã cho tương đương với

$$(5 - 4x) + (-6x - 9) = -10x - 4 \Leftrightarrow 0 = 0.$$

Trường hợp này, phương trình có nghiệm với $\forall x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$.

b) Với $x \in \left[-\frac{3}{2}; -\frac{2}{5}\right)$, phương trình đã cho tương đương với

$$(5 - 4x) + (6x + 9) = -10x - 4 \Leftrightarrow 12x = -18 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \in \left[-\frac{3}{2}; -\frac{2}{5}\right).$$

Trường hợp này, phương trình có nghiệm $x = -\frac{3}{2}$.

c) Với $x \in \left[-\frac{2}{5}; \frac{5}{4}\right)$, phương trình đã cho tương đương với

$$(5 - 4x) + (6x + 9) = 10x + 4 \Leftrightarrow 8x = 10 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4} \notin \left[-\frac{2}{5}; \frac{5}{4}\right).$$

Trường hợp này, phương trình đã cho không có nghiệm.

d) Với $x \in \left[\frac{5}{4}; \infty\right)$, phương trình đã cho tương đương với

$$(4x - 5) + (6x + 9) = 10x + 4 \Leftrightarrow 0 = 0.$$

Trường hợp này, phương trình đã cho không có nghiệm với $\forall x \in \left[\frac{5}{4}; \infty\right)$.

Vậy, tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{4}; +\infty\right)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 217. Các giá trị của tham số m để phương trình $\frac{m^2x - m}{x - 1} = 1$ có nghiệm là

A. $m \neq \pm 1, m \neq 0$. B. $m \neq -1$. C. $m \neq -1, m \neq 0$. D. $m \neq \pm 1$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 1$.

Với điều kiện đó, ta có

$$\frac{m^2x - m}{x - 1} = 1 \Leftrightarrow m^2x - m = x - 1 \Leftrightarrow (m^2 - 1)x = m - 1 \quad (1).$$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm $x \neq 1$.

- Nếu $m = 1$ thì phương trình (1) trở thành: $0 \cdot x = 0$, có nghiệm với $\forall x \in \mathbb{R}$, suy ra phương trình đã cho có nghiệm $\forall x \neq 1$. Do đó $m = 1$ thỏa mãn đề bài.
- Nếu $m = -1$ thì phương trình (1) trở thành: $0 \cdot x = -2$, phương trình này vô nghiệm, suy ra phương trình đã cho vô nghiệm.
- Nếu $m \neq \pm 1$ thì

$$(1) \Leftrightarrow x = \frac{m - 1}{m^2 - 1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{m + 1}.$$

Đề $x = \frac{1}{m + 1}$ là nghiệm của phương trình đã cho, điều kiện là

$$\frac{1}{m + 1} \neq 1 \Leftrightarrow m \neq 0.$$

Vậy, điều kiện để phương trình đã cho có nghiệm là $m \neq -1, m \neq 0$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 218. Tìm điều kiện của m để phương trình $x^2 + 4mx + m^2 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

A. $m \geq 0$. B. $m < 0$. C. $m > 0$. D. $m \neq 0$.

Lời giải.

Điều kiện để phương trình $x^2 + 4mx + m^2 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt là

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m)^2 - m^2 > 0 \\ m^2 > 0 \\ -4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 > 0 \\ m^2 > 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0.$$

Vậy, điều kiện cần tìm là $m < 0$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 219. Tìm m để phương trình $\sqrt{2x^2 - x - 2m} = x + 2$ có 2 nghiệm thực phân biệt.

- A. $10 < m \leq \frac{41}{4}$. B. $-\frac{41}{8} < m \leq 5$. C. $-\frac{41}{4} < m \leq 10$. D. $-5 \leq m < \frac{41}{4}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{2x^2 - x - 2m} = x + 2 &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 2x^2 - x - 2m = (x + 2)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 - 5x - 4 = 2m \quad (*) \end{cases}\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = x^2 - 5x - 4$ với $x \geq -2$. Ta có bảng biến thiên

x	-2	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	10	$-\frac{41}{4}$	$+\infty$

Phương trình đã cho có 2 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm thực phân biệt $x \geq -2$.

Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$, suy ra các giá trị của m thỏa mãn là

$$-\frac{41}{4} < 2m \leq 10 \Leftrightarrow -\frac{41}{8} < m \leq 5.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 220. Phương trình $x^2 - 4x + m^2 - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi

- A. $m \in (-3; 3)$. B. $m \in [-3; 3]$. C. $m \in (3; +\infty)$. D. $m \in (-\infty; -3)$.

Lời giải.

Điều kiện để phương trình $x^2 - 4x + m^2 - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt là

$$\Delta' = 4 - (m^2 - 5) > 0 \Leftrightarrow 9 - m^2 > 0 \Leftrightarrow -3 < m < 3.$$

Vậy, điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt là $m \in (-3; 3)$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 221. Cho phương trình $m^2x + m = 4x + 2$. Tìm m để phương trình vô số nghiệm.

- A. $m = 1$. B. $m = 2$. C. $m = 2$ và $m = -2$. D. $m = -2$.

Lời giải.

$$m^2x + m = 4x + 2 \Leftrightarrow (m^2 - 4)x = 2 - m.$$

$$\text{Để phương trình vô số nghiệm thì } \begin{cases} m^2 - 4 = 0 \\ 2 - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 222. Tìm tất cả các giá trị của m để hai phương trình: $2x - 1 = 0$ và $(-2m + 4)x - 2m - 5 = 0$ tương đương.

A. $m = -1$.

B. $m = 1$.

C. $m = 2$.

D. $m = -2$.

Lời giải.

$$2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Để } "2x - 1 = 0 \Leftrightarrow (-2m + 4)x - 2m - 5 = 0" \text{ thì } \begin{cases} -2m + 4 \neq 0 \\ (2m + 4)\frac{1}{2} - 2m - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m = -1. \end{cases}$$

Suy ra $m = -1$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 223. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $2x^2 - (3a - 1)x - 2 = 0$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{3}{2}(x_1 - x_2)^2 + 2\left(\frac{x_1 - x_2}{2} + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right)^2$.

A. 40.

B. 12.

C. 24.

D. 42.

Lời giải.

$\Delta = (3a - 1)^2 + 16 > 0$ ($\forall a \in \mathbb{R}$) nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

$$\text{Ta có } \begin{cases} (x_1 - x_2)^2 = \frac{\Delta}{2^2} = \frac{(3a - 1)^2 + 16}{4} \\ x_1 x_2 = -1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{3}{2}(x_1 - x_2)^2 + 2\left(\frac{x_1 - x_2}{2} + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right)^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 \left[\frac{3}{2} + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x_1 x_2}\right)^2 \right] \\ &= \left(\frac{(3a - 1)^2 + 16}{4}\right) \left[\frac{3}{2} + 2\left(\frac{1}{2} + 1\right)^2 \right] \\ &= \frac{3}{2}(3a - 1)^2 + 24 \Rightarrow P \geq 24. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = \frac{1}{3}$. Suy ra $P_{\min} = 24$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 224. Để giải phương trình $|x - 2| = 2x - 3$ (1). Một học sinh trình bày theo các bước sau

1. Bước 1. Bình phương hai vế (1) $\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 4x^2 - 12x + 9$ (2).

2. Bước 2. (2) $\Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 5 = 0$ (3).

$$3. \text{ Bước 3. (3) } \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{5}{3}. \end{cases}$$

4. Bước 4. Vậy (1) có 2 nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = \frac{5}{3}$.

Cách giải trên **sai** từ bước nào?

A. Bước 1.

B. Bước 4.

C. Bước 2.

D. Bước 3.

Lời giải.

Khi bình phương 2 vế ở bước 1 ta chỉ đưa tới phương trình hệ quả. Do đó khi giải ra 2 nghiệm ở bước 3, ta cần thử lại vào phương trình (1) ban đầu trước khi kết luận.

Thử lại ta thấy phương trình (1) chỉ có nghiệm là $x = \frac{5}{3}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 225. Cho phương trình $x^2 + 7x - 260 = 0$ (1). Phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 . Biết rằng $x_1 = 13$ thì x_2 bằng bao nhiêu?

- A. $x_2 = 20$. B. $x_2 = -20$. C. $x_2 = -27$. D. $x_2 = 8$.

Lời giải.

Do phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 nên theo định lí Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = -7$. Suy ra $x_2 = -7 - x_1 = -13 - 7 = -20$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 226. Tập nghiệm S của phương trình $(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x - 3} = 0$ là

- A. $S = \{1; 2; 3\}$. B. $S = \{2; 3\}$. C. $S = \{3\}$. D. $S = \{1; 2\}$.

Lời giải.

$$(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x - 3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 227. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{2x - x^2} = x - 2$ là

- A. $\{1\}$. B. $\{1; 2\}$. C. $\{2; 3\}$. D. $\{2\}$.

Lời giải.

$$\sqrt{2x - x^2} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 2x - x^2 = (x - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 2x^2 - 6x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 228. Phương trình $x^4 - 2016x^2 - 2017 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.

Lời giải.

$$\text{Ta có } x^4 - 2016x^2 - 2017 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)(x^2 - 2017) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2017 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2017} \\ x = -\sqrt{2017} \end{cases}.$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 229. Cho phương trình $(x - 1)(x^2 + x + m) = 0$ (1) có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 2$. Khi đó giá trị của m là

- A. $m < 0$. B. $m = \frac{1}{4}$. C. $m > \frac{1}{4}$. D. $m < \frac{1}{4}$.

Lời giải.

$$\text{Xét phương trình } (x - 1)(x^2 + x + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 + x + m = 0 \end{cases} \quad (2).$$

Phương trình (1) có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 2$ khi và chỉ khi phương trình (2) có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + 1^2 > 2$ (*).

Ta có $x_1^2 + x_2^2 + 1^2 > 2 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 > 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 > 1$.

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4m > 0 \\ (-1)^2 - 2m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{4} \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 230. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x-4}(x^2 - 3x + 2) = 0$ là

- A. 1 nghiệm. B. 2 nghiệm. C. 3 nghiệm. D. vô nghiệm.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$.

$$\text{Ta có } \sqrt{x-4}(x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 = 0 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Vậy phương trình có 1 nghiệm.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 231. Điều kiện để phương trình $x^2 - mx - 1 = 0$ có hai nghiệm là

- A. $\forall m \in \mathbb{R}$. B. $m < 0$. C. $m > 0$. D. $m \neq 0$.

Lời giải.

Vì $ac = -1$ nên phương trình luôn có hai nghiệm trái dấu với $\forall m$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 232. Số nghiệm của phương trình $(x^2 - 16)\sqrt{3-x} = 0$ là

- A. 1. B. 3. C. 0. D. 2.

Lời giải.

$$\text{Với điều kiện } 3 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3 \text{ ta có } (x^2 - 16)\sqrt{3-x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 16 = 0 \\ 3 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 4 \\ x = 3. \end{cases}$$

So với điều kiện ta nhận $x = 3$ và $x = -4$. Vậy phương trình có 2 nghiệm.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 233. Phương trình $-2x^2 - 4x + 3 - m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

- A. $m > 5$. B. $m \leq 5$. C. $m < 5$. D. $m \geq 5$.

Lời giải.

Phương trình $-2x^2 - 4x + 3 - m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow (-2)^2 - (-2)(3 - m) > 0 \Leftrightarrow 4 + 6 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < 5.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 234. Với điều kiện nào của m thì phương trình $mx + 5 = x - 1$ có nghiệm duy nhất?

- A. $m \neq 1$. B. $\forall m$. C. $m \neq 0$. D. $m = 1$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } mx + 5 = x - 1 \Leftrightarrow (m - 1)x + 6 = 0.$$

Do đó, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 235. Số nghiệm của phương trình $|x + 2| = 2x - 4$ là

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

Lời giải.Ta có: $|x + 2| = 2x - 4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 \geq 0 \\ (x + 2)^2 = (2x - 4)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 3x^2 - 20x + 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \begin{cases} x = 6 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 6.$$

 $\Rightarrow$ Số nghiệm của phương trình là 1.Chọn đáp án **(A)** □**Câu 236.** Phương trình $\sqrt{x+2} = x-1$ có nghiệm x thỏa mãnA. $-1 < x < 0$.B. $0 \leq x < 1$.C. $x \leq -1$.D. $x \geq 1$.**Lời giải.**Nếu x là nghiệm của phương trình thì $x-1 = \sqrt{x+1} \geq 0$ hay $x \geq 1$.Chọn đáp án **(D)** □**Câu 237.** Phương trình $\sqrt{x^2 + 2x + 1} = x - 3$

A. vô nghiệm.

B. có hai nghiệm phân biệt.

C. có đúng một nghiệm âm.

D. có một nghiệm duy nhất.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương

$$|x+1| = x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \begin{cases} x+1 = x-3 \\ x+1 = 3-x \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \begin{cases} 1 = -3 \\ x = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Chọn đáp án **(A)** □**Câu 238.** Tổng và tích các nghiệm của phương trình $x^2 - 6x - 4\sqrt{x^2 - 6x - 4} - 9 = 0$ lần lượt làA. -6 và -29 .B. 6 và -29 .C. 3 và -29 .D. 4 và -5 .**Lời giải.**

$$\text{Điều kiện xác định: } \begin{cases} x \geq 3 + \sqrt{13} \\ x \leq 3 - \sqrt{13} \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \sqrt{x^2 - 6x - 4} = t \quad (t \geq 0).$$

Khi đó, phương trình đã cho trở thành

$$t^2 - 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = 5 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 - 6x - 4} = 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 29 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \sqrt{38} \\ x = 3 - \sqrt{38} \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

$\Rightarrow$ Tổng và tích lần lượt là 6 và -29 .

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 239. Tập nghiệm T của phương trình $\frac{|x+1|}{\sqrt{x-2}} = \frac{x+1}{\sqrt{x-2}}$ là

A. $T = \mathbb{R}$.

B. $T = (-1; +\infty)$.

C. $T = [2; +\infty)$.

D. $T = (2; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x > 2$.

Ta có: $\frac{|x+1|}{\sqrt{x-2}} = \frac{x+1}{\sqrt{x-2}}$

$$\Leftrightarrow |x+1| = x+1$$

$$\Leftrightarrow x \geq -1.$$

Kết hợp điều kiện xác định ta có $T = (2; +\infty)$ là tập nghiệm của phương trình đã cho.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 240. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x-3}(x^2 - 3x + 2) = 0$ là

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x \geq 3$.

Ta có:

$$\sqrt{x-3}(x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-3} = 0 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \\ x = 2. \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện xác định ta được $x = 3$.

$\Rightarrow$ Số nghiệm phương trình đã cho là 1.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 241. Số nghiệm của phương trình $5\sqrt{x^2 - 3x + 4} = x(x - 3) + 10$ là

A. 3.

B. 4.

C. 0.

D. 2.

Lời giải.

Ta có

$$5\sqrt{x^2 - 3x + 4} = x(x - 3) + 10 \Leftrightarrow 5\sqrt{x^2 - 3x + 4} = x^2 - 3x + 10.$$

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 3x + 4}$, $t \geq 0$ suy ra $t^2 - 4 = x^2 - 3x$. Phương trình ban đầu trở thành

$$5t = t^2 - 4 + 10 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 2. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Với } t = 3 &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 4} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 4 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 - \sqrt{29}}{2} \\ x = \frac{3 + \sqrt{29}}{2} \end{cases} \\ \text{Với } t = 2 &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 4} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 4 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 242. Tìm giá trị của m để phương trình $x^2 + 2(m - 2)x + m^2 - 2m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2 = 8$.

A. $m = -2$.

B. $m = -4$.

C. $m = 4$.

D. $m = -2; m = 4$.

Lời giải.

Yêu cầu bài toán tương ứng với

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ P = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m - 2)^2 - (m^2 - 2m) > 0 \\ m^2 - 2m = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m + 4 > 0 \\ m^2 - 2m - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ \begin{cases} m = -2 & (\text{nhận}) \\ m = 4 & (\text{loại}) \end{cases} \end{cases}$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 243. Phương trình $\sqrt{x^2 + 2x + 4} = \sqrt{2 - x}$ có nghiệm là

A. $x = -1; x = -2$.

B. $x = 0$.

C. $x = -1$.

D. $x = -2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 2x + 4} = \sqrt{2 - x} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ x^2 + 2x + 4 = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x^2 + 3x + 2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ \begin{cases} x = -1 & (\text{nhận}) \\ x = -2 & (\text{nhận}) \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 244. Phương trình $|7x - 3| = 3x + 1$ có nghiệm là

A. $x = 4; x = \frac{1}{5}$.

B. $x = \frac{1}{2}; x = \frac{1}{5}$.

C. $x = \frac{1}{2}; x = 4; x = \frac{1}{2}; x = \frac{1}{5}$.

D. $x = 1; x = \frac{1}{5}$.

Lời giải.

Ta có

$$|7x - 3| = 3x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 1 \geq 0 \\ \begin{cases} 7x - 3 = 3x + 1 \\ 7x - 3 = -3x - 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ \begin{cases} x = 1 & (\text{nhận}) \\ x = \frac{1}{5} & (\text{nhận}) \end{cases} \end{cases}$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 245. Điều kiện của phương trình $3x - 3 = \sqrt{3 - 2x}$ là

- A. $x \leq \frac{3}{2}$. B. $x \geq \frac{3}{2}$. C. $x < \frac{3}{2}$. D. $x > \frac{3}{2}$.

Lời giải.

Điều kiện của phương trình là $3 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 246. Cho phương trình $2m^2x + 6 = 8x + 3m$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình vô nghiệm.

- A. $m \neq 2$. B. $m \neq \pm 2$. C. $m = -2$. D. $m = 2$.

Lời giải.

Ta có $2m^2x + 6 = 8x + 3m \Leftrightarrow 2(m^2 - 4)x = 3(m - 2)$.

Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} 2(m^2 - 4) = 0 \\ 3(m - 2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 247. Cho hệ phương trình $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 5 \\ \frac{3}{x} - \frac{1}{y} = 1 \end{cases}$ có nghiệm $(x_0; y_0)$. Tính giá trị của biểu thức $P = x_0 - 2y_0$.

- A. $P = 2$. B. $P = 1$. C. $P = -1$. D. $P = 0$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 5 \\ \frac{3}{x} - \frac{1}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = 1 \\ \frac{1}{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow P = x_0 - 2y_0 = 0$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 248. Cho phương trình $2\sqrt{x^2 - 2x + 2} = 1 - x^2 + 2x$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- A. Phương trình có một nghiệm duy nhất $x \geq 1$.
 B. Phương trình có một nghiệm duy nhất $x < 1$.
 C. Phương trình có hai nghiệm thỏa $x_1 > x_2 \geq 0$.
 D. Phương trình có hai nghiệm thỏa $x_1 < x_2 \leq 0$.

Lời giải.

Ta có $x^2 - 2x + 2 + 2\sqrt{x^2 - 2x + 2} - 3 = 0$. Đặt $t = \sqrt{x^2 - 2x + 2} \geq 0$.

Ta được phương trình $t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (thỏa mãn)} \\ t = -3 \text{ (loại)} \end{cases}$.

Với $t = 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 249. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y = \sqrt{x + y} \\ 2x - 5y = 7 \end{cases}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

- A. Hệ có ba nghiệm. B. Hệ vô nghiệm.
 C. Hệ có một nghiệm duy nhất. D. Hệ có hai nghiệm.

Lời giải.

Điều kiện $x + y \geq 0$.

$$\text{Ta có } x + y = \sqrt{x+y} \Leftrightarrow \sqrt{x+y}(\sqrt{x+y} - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ \sqrt{x+y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 1. \end{cases}$$

$$\text{Khi đó ta có hệ } \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - 5y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - 5y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{12}{7} \\ y = -\frac{5}{7}. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(1; -1)$ và $(\frac{12}{7}; -\frac{5}{7})$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 250. Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 2m^2 + 2m - 3 = 0$, (m là tham số). Xác định tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

- A. $\begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases}$. B. $-3 \leq m \leq 3$. C. $-2 < m < 2$. D. với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

$$x^2 - 2(m+1)x + 2m^2 + 2m - 3 = 0.$$

$$\text{Ta có } \Delta' > 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 2m^2 - 2m + 3 > 0 \Leftrightarrow 4 - m^2 > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 251. Cho phương trình $m^2(x-1) = x + 4m + 3$, m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm $x > 0$.

- A. $-3 < m < 1$. B. $-3 < m \leq 1$.
C. $m < -3$ hoặc $m > 1$ hoặc $m = -1$. D. $m < -3$ hoặc $m > 1$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } m^2(x-1) = x + 4m + 3 \Leftrightarrow (m^2 - 1)x = m^2 + 4m + 3.$$

Với $m = 1 \Rightarrow x \in \emptyset$, nên $m = 1$ (loại).

Với $m = -1 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$, nên $m = -1$ (nhận).

$$\text{Với } m \neq \pm 1 \Rightarrow x = \frac{m^2 + 4m + 3}{m^2 - 1} = \frac{m + 3}{m - 1}.$$

$$\text{Phương trình có nghiệm dương khi } \frac{m + 3}{m - 1} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -3. \end{cases}$$

Vậy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m < -3$ hoặc $m > 1$ hoặc $m = -1$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 252. Cho phương trình $(2+x)\sqrt{x-2} = x^2 - 4$. Chọn phát biểu đúng?

- A. Phương trình có ba nghiệm nhỏ hơn 4. B. Phương trình có một nghiệm lớn hơn 4.
C. Phương trình có hai nghiệm lớn hơn 4. D. Phương trình có hai nghiệm nhỏ hơn 4.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$.

$$\text{Khi đó } (2+x)\sqrt{x-2} = x^2 - 4 \Leftrightarrow (x+2)\sqrt{x-2}(\sqrt{x-2} - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \\ x = 3. \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta có hai nghiệm $x = 2, x = 3$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 253. Gọi P là tập hợp các giá trị của m để phương trình $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$ (m là tham số) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1(3x_2 - x_1 + x_2(3x_1 - x_2)) = -8$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. P không có phần tử nào.

B. P có hai phần tử có tổng bằng 3.

C. P có hai phần tử có tổng bằng 4.

D. P có một phần tử.

Lời giải.

Ta có $\Delta' = m^2 - 2m + 1 = (m - 1)^2$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi và chỉ khi $m \neq 1$.

$$\text{Khi đó theo định lí Vi-ét, ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = 2m - 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & x_1(3x_2 - x_1) + x_2(3x_1 - x_2) = -8 \\ \Leftrightarrow & 6x_1 x_2 - x_1^2 - x_2^2 = 6x_1 x_2 - [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2] = -8 \\ \Leftrightarrow & -(x_1 + x_2)^2 + 8x_1 x_2 = -8 \\ \Rightarrow & -4m^2 + 16m - 8 = -8 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} m = 4 \\ m = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy P có hai phần tử có tổng bằng 4.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 254. Cho phương trình bậc hai $x^2 - 2mx + m^2 - 2m + 4 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm không âm x_1, x_2 thỏa mãn biểu thức $P = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $m = 1$.

B. $m = 3$.

C. $m = 2$.

D. $m = 4$.

Lời giải.

- Điều kiện phương trình có hai nghiệm dương

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m - 4 \geq 0 \\ 2m > 0 \\ m^2 - 2m + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m > 0 \\ \forall m \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow m \geq 2.$$

- Ta có $P^2 = x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 \cdot x_2} = 2m + 2\sqrt{m^2 - 2m + 4} \geq 4 + 2\sqrt{2^2 - 2 \cdot 2 + 4} = 8$.

Dấu “=” xảy ra khi $m = 2$.

- Vậy giá trị m cần tìm là $m = 2$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 255. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Điểm N di động trên đoạn BC (N khác B, C). Kẻ NJ vuông góc với AB , NK vuông góc với AC . Tìm giá trị nhỏ nhất của $|\vec{NJ} + \vec{NK}|$ theo a .

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.

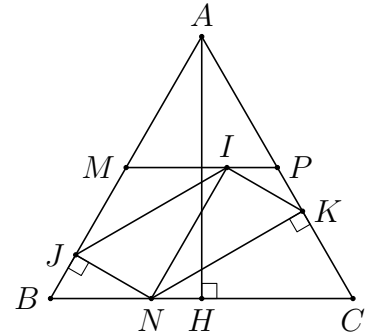
Gọi M, P lần lượt là trung điểm của AB, AC . Gọi I là đỉnh thứ tư của hình bình hành $JNKI$.

Ta có $|\vec{NJ} + \vec{NK}| = |\vec{NI}| = NI$, suy ra I thuộc PQ .

Mà NI nhỏ nhất khi NI bằng khoảng cách BC và MP , hay N là trung điểm của BC .

Vậy AN là trung tuyến của tam giác ABC đều cạnh a . Nên $NI = \frac{1}{2}AN = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Chọn đáp án **(B)**



□

Câu 256. Tập nghiệm của phương trình $2x + \frac{3}{x-1} = \frac{3x}{x-1}$ là

- A. $S = \left\{1; \frac{3}{2}\right\}$. B. $S = \{1\}$. C. $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$. D. $S = \emptyset$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \neq 1$. Phương trình đã cho tương đương

$$2x + \frac{3-3x}{x-1} = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 257. Với giá trị nào của tham số a thì phương trình $(x^2 - 5x + 4)\sqrt{x-a} = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

- A. $a \geq 4$. B. $a \in \emptyset$. C. $a < 1$. D. $1 \leq a < 4$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq a$.

$$\text{Phương trình} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0 \\ x - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \\ x = a \end{cases}.$$

Phương trình ban đầu có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $1 \leq a < 4$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 258. Phương trình $(x^2 - 3x + m)(x - 1) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khi

- A. $m \leq \frac{9}{4}$ và $m \neq 2$. B. $m < \frac{9}{4}$. C. $m > \frac{9}{4}$. D. $m < \frac{9}{4}$ và $m \neq 2$.

Lời giải.

Phương trình $(x^2 - 3x + m)(x - 1) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $x^2 - 3x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt và khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 1^2 - 3 \cdot 1 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 4m > 0 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{9}{4} \\ m \neq 2 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 259. Phương trình nào sau đây luôn là phương trình bậc nhất một ẩn x với mọi giá trị của tham số m ?

A. $m^2x + 2 = -x + 3m$.

B. $mx^2 + x - 1 = 0$.

C. $(m - 1)x + m - 2 = 0$.

D. $m^2x - 2m = 3$.

Lời giải.

Ta có $m^2x + 2 = -x + 3m \Leftrightarrow (m^2 + 1)x + 2 - 3m = 0$ có hệ số $a = m^2 + 1 \neq 0, \forall m$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 260. Cho phương trình bậc hai $2x^2 + 9x - 35 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Trong các phương trình dưới đây, phương trình nào nhận $\frac{1}{x_1}$ và $\frac{1}{x_2}$ làm nghiệm?

A. $-35x^2 + 9x + 2 = 0$.

B. $9x^2 + 2x - 35 = 0$.

C. $-35x^2 + 2x + 9 = 0$.

D. $2x^2 - 35x + 9 = 0$.

Lời giải.

Theo định lý Vi-et ta có $x_1 + x_2 = -\frac{9}{2}$ và $x_1x_2 = -\frac{35}{2}$.

Khi đó, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{9}{35}$ và $\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = -\frac{2}{35}$.

Vậy $\frac{1}{x_1}$ và $\frac{1}{x_2}$ là nghiệm của phương trình $-35x^2 + 9x + 2 = 0$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 261. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(m - 1)x^2 + 2mx + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $m \geq 0$.

B. $m \geq 0$ và $m \neq 1$.

C. $m > 0$.

D. $m > 0$ và $m \neq 1$.

Lời giải.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m - 1 \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - (m - 1)m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > 0. \end{cases}$$

Vậy giá trị m cần tìm là $m > 0$ và $m \neq 1$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 262. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $m^3x = mx + m^2 - m$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

A. $m \in \{-1; 1\}$.

B. $m \in \{0; -1\}$.

C. $m \in \{0; 1\}$.

D. $m \in \{-1; 1; 0\}$.

Lời giải.

Ta có $m^3x = mx + m^2 - m \Leftrightarrow (m^3 - m)x = m^2 - m$.

Để phương trình có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ thì $\begin{cases} m^3 - m = 0 \\ m^2 - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(m^2 - 1) = 0 \\ m(m - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1. \end{cases}$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 263. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-5; 5)$ để phương trình $x^2 - 4x + m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa hệ thức $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 2\sqrt{2}$.

A. 2.

B. 0.

C. 3.

D. 1.

Lời giải.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi và chỉ khi

$$\Delta' = 4 - (m + 1) > 0 \Leftrightarrow 3 - m > 0 \Leftrightarrow m < 3.$$

Khi đó, theo Vi-et thì
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 x_2 = m + 1. \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} &= 2\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow x_1 + 2\sqrt{x_1 x_2} + x_2 &= 8 \\ \Leftrightarrow 4 + 2\sqrt{m + 1} &= 8 \\ \Leftrightarrow \sqrt{m + 1} &= 2 \\ \Leftrightarrow m + 1 &= 4 \\ \Leftrightarrow m &= 3. \end{aligned}$$

Vì $m = 3$ không thỏa mãn $m < 3$ nên không có giá trị m thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 264. Tìm số nghiệm của phương trình $|x - 2| = 3x^2 - x - 2$?

A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. 3.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} |x - 2| &= 3x^2 - x - 2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - x - 2 \geq 0 \\ \begin{cases} x - 2 = 3x^2 - x - 2 \\ x - 2 = -3x^2 + x + 2 \end{cases} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - x - 2 \geq 0 \\ \begin{cases} 3x^2 - 2x = 0 \\ 3x^2 = 4 \end{cases} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - x - 2 \geq 0 \quad (*) \\ \begin{cases} x = 0 & \text{(không thỏa mãn (*))} \\ x = \frac{2}{3} & \text{(không thỏa mãn (*))} \\ x = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} & \text{(thỏa mãn (*))}. \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}, x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 265. Tìm số nghiệm của phương trình $\sqrt{2(x-3)^2(x+2)^2+9} = |2x-1|$?

A. 3.

B. 4.

C. 1.

D. 2.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \sqrt{2(x-3)^2(x+2)^2+9} = |2x-1| \\ \Leftrightarrow & 2(x-3)^2(x+2)^2+9 = 4x^2-4x+1 \\ \Leftrightarrow & 2(x^2-x-6)^2+9 = 4(x^2-x-6)+25 \\ \Leftrightarrow & 2(x^2-x-6)^2-4(x^2-x-6)-16=0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2-x-6=4 \\ x^2-x-6=-2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2-x-10=0 \\ x^2-x-4=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{1 \pm \sqrt{41}}{2} \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 266. Cho phương trình $mx^2-2x+m-1=0$. Tính biệt thức Δ của phương trình (theo m).

A. $\Delta = -4m^2+4m-4$.B. $\Delta = -4m^2+4m+4$.C. $\Delta = -m^2+m+1$.D. $\Delta = -m^2+m+4$.

Lời giải.

Ta có $\Delta = (-2)^2 - 4m(m-1) = -4m^2 + 4m + 4$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 267. Cho phương trình $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) có biệt thức $\Delta = 12$. Phương trình có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

Phương trình $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) có biệt thức $\Delta = 12 > 0$ nên phương trình có 2 nghiệm thực phân biệt.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 268. Phương trình nào ở các phương trình dưới đây có hai nghiệm âm phân biệt?

A. $x^2-9x+2=0$.B. $x^2+2x+9=0$.C. $x^2+9x+2=0$.D. $x^2+9x-2=0$.

Lời giải.

Ta có

$$\bullet \quad x^2-9x+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9+\sqrt{73}}{4} > 0 \\ x = \frac{9-\sqrt{73}}{4} > 0. \end{cases}$$

• $x^2 + 2x + 9 = 0$ (phương trình vô nghiệm).

• $x^2 + 9x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-9 + \sqrt{73}}{4} < 0 \\ x = \frac{-9 - \sqrt{73}}{4} < 0. \end{cases}$

• $x^2 + 9x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-9 + \sqrt{89}}{4} > 0 \\ x = \frac{-9 - \sqrt{81}}{4} < 0. \end{cases}$

Chọn đáp án **C** □

Câu 269. Trong các phương trình sau đây, phương trình nào vô nghiệm?

A. $2x - 1 = 3 - x$.

B. $2x - 1 = 3 - 2x$.

C. $2x - 1 = 2(x - 1)$.

D. $2x - 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Ta có

• $2x - 1 = 3 - x \Leftrightarrow 3x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$.

• $2x - 1 = 3 - 2x \Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1$.

• $2x - 1 = 2(x - 1) \Leftrightarrow 0x = -1$ (phương trình vô nghiệm).

• $2x - 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 2x - 1 = 2x - 1 \Leftrightarrow 0x = 0$ (phương trình vô số nghiệm).

Chọn đáp án **C** □

Câu 270. Tìm điều kiện của tham số m để phương trình $m(x - 1) = x(m^2 - 2) + 1$ có nghiệm duy nhất.

A. $m \neq -1$ và $m \neq 2$.

B. $m = -1$.

C. $m \neq \pm\sqrt{2}$.

D. $m \neq 0$.

Lời giải.

Ta có phương trình ban đầu tương đương với $(m^2 - m - 2)x = -m - 1$.

Để phương trình có nghiệm duy nhất thì $m^2 - m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 2. \end{cases}$

Chọn đáp án **A** □

Câu 271. Tìm điều kiện của tham số m để phương trình $mx^2 - x + 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $m \leq \frac{1}{12}$.

B. $m < \frac{1}{12}$ và $m \neq 0$.

C. $m < -\frac{1}{12}$.

D. $m > \frac{1}{12}$ và $m \neq 0$.

Lời giải.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a = m \neq 0 \\ \Delta = 1 - 12m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < \frac{1}{12}. \end{cases}$

Chọn đáp án **B** □

Câu 272. Phương trình $|x - 1| = |2x + 2|$ có tổng các nghiệm là bao nhiêu?

A. $\frac{10}{3}$.

B. $-\frac{10}{3}$.

C. -4 .

D. 4 .

Lời giải.

Ta có $|x - 1| = |2x + 2| \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 2x + 2 \\ x - 1 = -2x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -\frac{1}{3}. \end{cases}$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình đã cho bằng $-\frac{10}{3}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 273. Tìm điều kiện của m để phương trình $\frac{x^2 + 2x + m}{x - 1} = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

- A. $m > -1$. B. $m \leq 1$. C. $m < 1$ và $m \neq -3$. D. $m > 1$ và $m \neq -3$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \neq 1$.

$$\frac{x^2 + 2x + m}{x - 1} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + m = 0.$$

Phương trình $\frac{x^2 + 2x + m}{x - 1} = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $x^2 + 2x + m = 0$

$$\text{có hai nghiệm phân biệt khác } 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + m \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -3 \\ 4 - 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -3 \\ m < 1. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 274. Phương trình $\frac{1}{\sqrt{1-x}+1} - \frac{1}{\sqrt{1-x}+2} = \frac{1}{6}$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.

Lời giải.

Điều kiện: $x \leq 1$.

Đặt $t = \sqrt{1-x} \geq 0$ ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2} &= \frac{1}{6} \Leftrightarrow 6t + 12 - 6t - 6 = t^2 + 3t + 2 \\ &\Leftrightarrow t^2 + 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -4 \end{cases} \text{ (loại)} \\ &\Rightarrow \sqrt{1-x} = 1 \Rightarrow x = 0 \text{ (nhận).} \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 275. Tìm điều kiện của m để phương trình $x^4 - 3x^2 + m = 0$ có bốn nghiệm phân biệt.

- A. $m > \frac{9}{4}$. B. $m < \frac{9}{4}$. C. $0 < m < \frac{9}{4}$. D. $0 \leq m \leq \frac{9}{4}$.

Lời giải.

Đặt $t = x^2$, ta được phương trình $t^2 - 3t + m = 0$ (*).

Phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9 - 4m > 0 \\ P = m > 0 \\ S = 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{9}{4}.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 276. Cho phương trình $-x^2 + 2x + m - 2 = 0$. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1^2 + x_2^2 = 4$?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải.

Phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' = m - 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 1$.

Theo định lý Vi-ét ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = 2 - m. \end{cases}$$

Ta có $x_1^2 + x_2^2 = 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 4 \Leftrightarrow 4 - 2(2 - m) = 4 \Leftrightarrow m = 2$ (thỏa $m \geq 1$).

Vậy có một giá trị m cần tìm.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 277. Phương trình $\sqrt{x-1} = 3-x$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt và nghiệm nhỏ nhất là bao nhiêu?

A. 2 nghiệm, nghiệm nhỏ nhất $x_0 = 2$.

B. 1 nghiệm, nghiệm nhỏ nhất $x_0 = 2$.

C. 1 nghiệm, nghiệm nhỏ nhất $x_0 = \frac{-5 - \sqrt{57}}{2}$.

D. 2 nghiệm, nghiệm nhỏ nhất $x_0 = \frac{5 - \sqrt{65}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{x-1} = 3-x \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x-1 = (3-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 278. Tìm điều kiện của m để phương trình $|x^2 + 2x - 1| = m$ có 4 nghiệm phân biệt.

A. $m > 0$.

B. $m < 2$.

C. $0 < m < 2$.

D. $0 \leq m \leq 2$.

Lời giải.

Ta có $|x^2 + 2x - 1| = \begin{cases} x^2 + 2x - 1, & \text{nếu } x \in (-\infty; -1 - \sqrt{2}] \cup [-1 + \sqrt{2}; +\infty) \\ -x^2 - 2x + 1, & \text{nếu } x \in (-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}) \end{cases}$ nên bảng biến thiên của hàm số $y = |x^2 + 2x - 1|$ như sau

x	$-\infty$	$-1 - \sqrt{2}$	-1	$-1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
y	$+\infty$	0	2	0	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $|x^2 + 2x - 1| = m$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m < 2$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 279. Mật độ dân số ở Wichita, bang Kasas, Mỹ được tính bởi công thức $D = \frac{4500x}{x^2 + 32}$. Trong đó D là mật độ dân số (người trên dặm vuông), x là khoảng cách tính từ trung tâm của thành phố (dặm). Tìm khoảng cách mà ở đó dân số là 375 người trên dặm vuông.

A. 8 dặm.

B. 10 dặm.

C. 4 dặm và 8 dặm.

D. 12 dặm.

Lời giải.

Xét phương trình $\frac{4500x}{x^2 + 32} = 375 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 32 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 8. \end{cases}$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 280. Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) thỏa $P = x_1 \cdot x_2 < 0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Phương trình vô nghiệm.
- B. Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt.
- C. Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.
- D. Phương trình có hai nghiệm trái dấu.

Lời giải.

Áp dụng hệ quả của định lý Vi-ét.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 281. Tập nghiệm của phương trình $|x - 2| = x^2 - x - 5$ là

- A. $S = \{3, \sqrt{7}\}$.
- B. $S = \{-1, 3, \pm\sqrt{7}\}$.
- C. $S = \{-1, 3, \sqrt{7}\}$.
- D. $S = \{3, -\sqrt{7}\}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } |x - 2| = x^2 - x - 5 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x - 2 = x^2 - x - 5 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x - 2 < 0 \\ -x + 2 = x^2 - x - 5 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x < 2 \\ x^2 - 7 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x < 2 \\ x = \pm\sqrt{7} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = 3 \text{ hoặc } x = -\sqrt{7}. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \{3, -\sqrt{7}\}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 282. Số nghiệm của phương trình $|2x - 3| = x + 1$ là

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 0.

Lời giải.

$$\text{Ta có } |2x - 3| = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ \begin{cases} 2x - 3 = x + 1 \\ 2x - 3 = -x - 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 283. Hai số $1 - \sqrt{2}$ và $1 + \sqrt{2}$ là các nghiệm của phương trình nào sau đây?

- A. $x^2 + 2x + 1 = 0$.
- B. $x^2 + 2x - 1 = 0$.
- C. $x^2 - 2x - 1 = 0$.
- D. $x^2 - 2x + 1 = 0$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} (1 - \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2}) = 2 \\ (1 - \sqrt{2}) \cdot (1 + \sqrt{2}) = -1. \end{cases}$$

Theo định lý Vi-ét, hai số $1 - \sqrt{2}$ và $1 + \sqrt{2}$ là nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 1 = 0$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 284. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2 + 2x + 4} = \sqrt{2 - x}$ là

A. $S = \{-2, -1\}$.

B. $S = \{1\}$.

C. $S = \{-2\}$.

D. $S = \{-1\}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \sqrt{x^2 + 2x + 4} = \sqrt{2 - x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ x^2 + 2x + 4 = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x^2 + 3x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1. \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{-2, -1\}$.Chọn đáp án **(A)** □**Câu 285.** Tìm giá trị của tham số m để phương trình $(m - 1)x^2 + 2mx + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $m > 0$.

B. $m \geq 0$.

C. $m > 0$ và $m \neq 1$.

D. $m \geq 0$ và $m \neq 1$.

Lời giải.

$$\text{Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi } \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \neq 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > 0 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(C)** □**Câu 286.** Cho phương trình $\sqrt{-x^2 + 10x - 25} = 0$. Phương trình đã cho có bao nhiêu nghiệm?

A. 2.

B. 1.

C. vô số.

D. vô nghiệm.

Lời giải.

Điều kiện: $-x^2 + 10x - 25 \geq 0$.

Với điều kiện đó phương trình đã cho tương đương $-x^2 + 10x - 25 = 0 \Leftrightarrow x = 5$ (thỏa điều kiện). Vậy phương trình có duy nhất nghiệm $x = 5$. □**Câu 287.** Tìm giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2x + 1 + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $m < 0$.

B. $m \geq 0$.

C. $m > 0$.

D. $m \leq 0$.

Lời giải.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow (-1)^2 - (1 + m) > 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Chọn đáp án **(A)** □**Câu 288.** Tìm tham số m để phương trình $(m^2 - 2)(x + 1) = x + 2$ vô nghiệm.

A. $m = 0$.

B. $m = \pm 1$.

C. $m = \pm 2$.

D. $m = \pm\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $(m^2 - 2)(x + 1) = x + 2 \Leftrightarrow (m^2 - 3)x = 4 - m^2$.

$$\text{Phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi } \begin{cases} m^2 - 3 = 0 \\ 4 - m^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{3}.$$

Chọn đáp án **(D)** □**Câu 289.** Giả sử x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 + 3x - 10 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

A. $\frac{10}{3}$.

B. $\frac{3}{10}$.

C. $-\frac{10}{3}$.

D. $-\frac{3}{10}$.

Lời giải.

Ta có $x_1 + x_2 = -3$ và $x_1 \cdot x_2 = -10$ nên $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{3}{10}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 290. Tìm tổng hai nghiệm của phương trình $2x^2 - 3x - 5 = 0$.

A. $-\frac{3}{2}$.

B. $-\frac{3}{4}$.

C. $\frac{3}{2}$.

D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải.

Theo định lí Vi-ét thì tổng hai nghiệm là $S = \frac{3}{2}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 291. Nghiệm của phương trình $\sqrt{2x-1} = 3$ là

A. $x = \frac{1}{2}$.

B. $x = 3$.

C. $x \geq \frac{1}{2}$.

D. $x = 5$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x \geq \frac{1}{2}$. Với điều kiện trên phương trình đã cho tương đương

$$\sqrt{2x-1} = 3 \Leftrightarrow 2x-1 = 9 \Leftrightarrow x = 5 \text{ (nhận)}.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 292. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $2m^2x = 2x + m + 1$ vô nghiệm.

A. $m = -1$ hoặc $m = 1$.

B. $m \neq \pm 1$.

C. $m = 1$.

D. $m = -1$.

Lời giải.

Ta có $2m^2x = 2x + m + 1 \Leftrightarrow 2(m^2 - 1)x = m + 1$.

Phương trình đã cho vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ 2(m^2-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 293. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{x-2}(x^2 - 3x + 2) = 0$ là

A. $S = \{-2; 2\}$.

B. $S = \{2\}$.

C. $S = \{1; 2\}$.

D. $S = \{1\}$.

Lời giải.

ĐK: $x \geq 2$.

Với điều kiện trên phương trình đã cho tương đương

$$\begin{cases} \sqrt{x-2} = 0 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 2 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (loại)} \\ x = 2 \text{ (nhận)} \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{2\}$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 294. Tập nghiệm của phương trình $3x + \frac{5}{x-4} = 12 + \frac{5}{x-4}$ là

A. $S = \emptyset$.

B. $S = \{12\}$.

C. $S = \{4\}$.

D. $S = \{3\}$.

Lời giải.

ĐK: $x \neq 4$.

Với điều kiện trên phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} 3x(x-4)+5 &= 12(x-4)+5 \\ \Leftrightarrow 3x^2-24x+48 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 4 \text{ (loại)}. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 295. Nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2+3x-2} = \sqrt{1+x}$ là

- A. 1 và 2. B. 1 và -3. C. -3. D. 1.

Lời giải.

$$\text{ĐK: } \begin{cases} x^2+3x-2 \geq 0 \\ 1+x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{-3-\sqrt{17}}{2} \text{ hoặc } x \geq \frac{-3+\sqrt{17}}{2} \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{-3+\sqrt{17}}{2}.$$

Với điều kiện trên phương trình đã cho tương đương

$$x^2+3x-2=1+x \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 & \text{(nhận)} \\ x=-3 & \text{(loại)}. \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=1$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 296. Nghiệm của phương trình $x+1+\frac{3}{x+3}=\frac{x+6}{x+3}$ là

- A. -3. B. 0 và -3. C. 0. D. -1.

Lời giải.

ĐK: $x \neq -3$.

Với điều kiện trên phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} (x+1)(x+3)+3-x-6 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2+3x &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 & \text{(nhận)} \\ x=-3 & \text{(loại)}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=0$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 297. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $(x-2)(x-2mx+1)=0$ có hai nghiệm phân biệt.

- A. $m \neq \frac{1}{2}$ và $m \neq -\frac{3}{4}$. B. $m \neq -\frac{1}{2}$ và $m \neq \frac{4}{5}$. C. $m \neq \frac{1}{2}$. D. $m \neq \frac{1}{2}$ và $m \neq \frac{3}{4}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } (x-2)(x-2mx+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ (1-2m)x+1=0 \end{cases} \quad (*).$$

Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow (*) \text{ có nghiệm khác } 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2m \neq 0 \\ \frac{-1}{1 - 2m} \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{1}{2} \\ m \neq \frac{3}{4} \end{cases}$$

Vậy $m \neq \frac{1}{2}$ và $m \neq \frac{3}{4}$ là các giá trị cần tìm.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 298. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{2x+7} = x-4$ là

A. $S = \{1; 9\}$.

B. $S = \{9\}$.

C. $S = \emptyset$.

D. $S = \{1; 2\}$.

Lời giải.

ĐK: $2x+7 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{7}{2}$.

Với điều kiện trên phương trình đã cho tương đương

$$\begin{cases} x-4 \geq 0 \\ 2x+7 = x^2-8x+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x = 9 \text{ hoặc } x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 9.$$

So sánh điều kiện ta được tập nghiệm của phương trình là $S = \{9\}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 299. Tập nghiệm của phương trình $3 + \sqrt{1-x} = x + \sqrt{x-2}$ là

A. $S = \{0; 2\}$.

B. $S = \emptyset$.

C. $S = \{1; 2\}$.

D. $S = \{1; 3\}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 2 \end{cases}$ (vô lí).

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \emptyset$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 300. Biết a và b lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của m để phương trình $\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} - \sqrt{(x+1)(3-x)} = m$ có nghiệm thực. Tính tổng $T = (a+b)^2 + 2b^3$

A. $T + 22$.

B. $T = 24$.

C. $T = 27$.

D. $T = 30$.

Lời giải.

Điều kiện: $-1 \leq x \leq 3$.

Đặt $t = \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} \Rightarrow t^2 = x+1 + 3-x + 2\sqrt{(x+1)(3-x)} \Rightarrow \sqrt{(x+1)(3-x)} = \frac{t^2-4}{2}$.

Ta có: $t^2 = 4 + 2\sqrt{(x+1)(3-x)} \geq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ \begin{cases} t \leq -2 \Leftrightarrow t \geq 2 \\ t \geq 2 \end{cases} \end{cases} \quad (1)$

Dấu “=” xảy ra khi $x = -1$ hay $x = 3$.

Ta lại có: $\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} \leq \sqrt{(1^2+1^2)[(\sqrt{x+1})^2 + (\sqrt{3-x})^2]} \Leftrightarrow t \leq 2\sqrt{2}. \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $t \in [2; 2\sqrt{2}]$.

Ta có, pt $\Leftrightarrow t - \frac{t^2 - 4}{2} = m \Leftrightarrow 2m = -t^2 + 2t + 4$.

Xét hàm số $f(t) = -t^2 + 2t + 4$ trên đoạn $[2; 2\sqrt{2}]$. Ta có bảng biến thiên như hình vẽ.

Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình có nghiệm

t	2	$2\sqrt{2}$
$f(t)$	4	$4\sqrt{2} - 4$

$$4\sqrt{2} - 4 \leq 2m \leq 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} - 2 \leq m \leq 2.$$

Vậy khi đó, ta có $T = (a + b)^2 + 2b^3 = (2\sqrt{2})^2 + 2 \times 2^3 = 24$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 301. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x + m + (1 - x)\sqrt{2x + m} = 0$ có 2 nghiệm phân biệt là nửa khoảng $(a; b]$. Tính $S = a + b$.

A. 1.

B. $\frac{3}{2}$.

C. -1.

D. 2.

Lời giải.

Ta có $x + m + (1 - x)\sqrt{2x + m} = 0$

$$\Leftrightarrow 2x + m + \sqrt{2x + m} - x\sqrt{2x + m} - x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x + m}(\sqrt{2x + m} + 1) - x(\sqrt{2x + m} + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2x + m} + 1)(\sqrt{2x + m} - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x + m} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2x = m \end{cases} (*)$$

Ycbt $\Leftrightarrow (*)$ có 2 nghiệm phân biệt thỏa $x \geq 0$. Ta có bảng biến thiên như hình vẽ

x	0	1	$+\infty$
$x^2 - 2x$	0	-1	$+\infty$

Suy ra $m \in (-1; 0] \Rightarrow a = -1, b = 0 \Rightarrow S = a + b = -1$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 302. Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2x - \sqrt{x + m} = m$ có nghiệm duy nhất là $\left\{-\frac{a}{b}\right\} \cup (-c; d)$, với a, b, c, d là các số tự nhiên và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị biểu thức $S = a + 2b + 3c + 4d$.

A. $S = 10$.

B. $S = 15$.

C. $S = 16$.

D. $S = 18$.

Lời giải.

Gọi phương trình đã cho là (1).

Đặt $\sqrt{x + m} = t$, điều kiện $t \geq 0$, phương trình (1) trở thành:

$$m^2 + (1 - 2t^2)m + t^4 - 2t^2 - t = 0. \quad (2)$$

Giải (2) theo m ta được
$$\begin{cases} m = t^2 + t \\ m = t^2 - t - 1. \end{cases} \quad (3)$$

Ta thấy với mỗi giá trị $t \geq 0$, cho ta duy nhất một giá trị x , do đó (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi hệ (3) có nghiệm duy nhất $t \in [0; +\infty)$.

Vẽ hai đồ thị hàm số $y = t^2 + t$ và $y = t^2 - t - 1$ với $t \geq 0$ trên cùng một hệ trục tọa độ.

Căn cứ đồ thị ta có hệ (3) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi đường thẳng $y = m$ giao với cả hai nhánh đồ thị trên tại một điểm duy nhất, suy ra $m = -\frac{5}{4}$ hoặc $-1 < m < 0$.

Vậy $a = 5$, $b = 4$, $c = 1$, $d = 0$, do đó $S = 16$.

Cách 2: (của cô Lưu Thêm)

Gọi phương trình đã cho là (1).

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow x^2 - (x + m) = (x + \sqrt{x + m}) \\ &\Leftrightarrow (x + \sqrt{x + m})(x - \sqrt{x + m} - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x + m} = -x \\ \sqrt{x + m} = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ m = x^2 - x \\ x \geq 1 \\ m = x^2 - 3x + 1. \end{cases} \quad (2) \end{aligned}$$

Vẽ hai đồ thị hàm số $y = x^2 - x$ với $x \leq 0$ và $y = x^2 - 3x + 1$ với $x \geq 1$ trên cùng một hệ trục tọa độ. Căn cứ đồ thị ta có hệ (2) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi đường thẳng $y = m$ giao với cả hai nhánh đồ thị trên tại một điểm duy nhất, suy ra $m = -\frac{5}{4}$ hoặc $-1 < m < 0$.

Vậy $a = 5$, $b = 4$, $c = 1$, $d = 0$, do đó $S = 16$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 303. Tìm số giá trị nguyên của m để phương trình sau có đúng hai nghiệm phân biệt.

$$(x - 2\sqrt{x - m} - 2m)(x - 2\sqrt{x - m} - 3) = 0$$

A. 2.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải.

Gọi phương trình đã cho là (1).

Đặt $\sqrt{x-m} = t$, điều kiện $t \geq 0$, phương trình (1) trở thành:

$$(t^2 - 2t - m)(t^2 - 2t - 3 + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = t^2 - 2t \\ m = -t^2 + 2t + 3. \end{cases} \quad (2)$$

Ta thấy với mỗi giá trị $t \geq 0$, cho ta duy nhất một giá trị x , do đó (1) có đúng 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi hệ (2) có đúng 2 nghiệm phân biệt thuộc nửa khoảng $[0; +\infty)$.

Vẽ hai đồ thị hàm số $y = t^2 - 2t$ và $y = -t^2 + 2t + 3$ với $t \geq 0$ trên cùng một hệ trục tọa độ.

Căn cứ đồ thị ta có hệ (2) đúng 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y = m$ giao với cả hai nhánh đồ thị trên tại 2 điểm phân biệt. Suy ra $m = -1$, $m = 4$ hoặc $m \in (0; 3) \setminus \left\{ \frac{2 + \sqrt{10}}{2} \right\}$.

Do m nhận giá trị nguyên nên $m \in \{-1; 1; 2; 4\}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 304. Tìm số giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để phương trình $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x^2 - mx + 1}$ có nghiệm.

A. 8.

B. 10.

C. 16.

D. 21.

Lời giải.

Gọi phương trình đã cho là (1).

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ 2x - 1 = x^2 - mx + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x^2 - (m+2)x + 2 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Ta thấy (2) $\Leftrightarrow (x-1)^2 + 1 = mx$ nên nếu (2) có nghiệm $x \geq \frac{1}{2}$ thì $m > 0$.

Ta thấy nếu (2) có nghiệm x_1, x_2 thì $x_1 + x_2 = m + 2 > 2$ nên (2) luôn có ít nhất một nghiệm $x \geq \frac{1}{2}$.

Do đó (1) có nghiệm khi và chỉ khi (2) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta = (m+2)^2 - 8 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -2 + 2\sqrt{2} \\ m \leq -2 - 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $m \geq -2 + 2\sqrt{2}$.

Do m nguyên và thuộc đoạn $[-10; 10]$ nên $m \in \{1; 2; \dots; 10\}$, vậy có 10 giá trị của m thỏa mãn.

Cách 2: (Của thầy Lâm Lê Văn)

Gọi phương trình đã cho là (1).

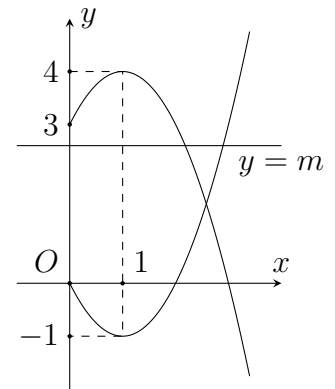
$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ 2x - 1 = x^2 - mx + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ m = \frac{x^2 - 2x + 2}{x}. \end{cases} \quad (2)$$

Với $x > 0$ ta có

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x} = x + \frac{2}{x} - 2 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{2}{x}} - 2 = 2\sqrt{2} - 2.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = \sqrt{2} > \frac{1}{2}$.

Do đó (2) có nghiệm $x \geq \frac{1}{2}$ khi và chỉ khi $m \geq 2\sqrt{2} - 2$.



Vậy phương trình đã cho có nghiệm khi $m \geq 2\sqrt{2} - 2$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 305. Số nghiệm của phương trình $\frac{6-2x}{\sqrt{5-x}} + \frac{6+2x}{\sqrt{5+x}} = \frac{8}{3}$ là

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải.

Điều kiện: $-5 < x < 5$.

Đặt $\sqrt{5-x} = u; \sqrt{5+x} = v, 0 < u, v < \sqrt{10}$. (*)

$$\text{Ta có hệ: } \begin{cases} u^2 + v^2 = 10 \\ -\frac{4}{u} - \frac{4}{v} + 2(u+v) = \frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2 = 10 + 2uv \\ (u+v) \left(1 - \frac{2}{uv}\right) = \frac{4}{3}. \end{cases}$$

Lại đặt $\frac{2}{uv} = t \Leftrightarrow uv = \frac{2}{t}, t > \frac{1}{5}$.

$$\text{Ta được hệ: } \begin{cases} (u+v)^2 = 10 + \frac{4}{t} \\ (u+v)^2 = \frac{16}{9(1-t)^2} \\ uv = \frac{2}{t}. \end{cases}$$

Suy ra t phải thoả mãn:

$$\begin{aligned} 10 + \frac{4}{t} &= \frac{16}{9(1-t)^2} \Leftrightarrow 8t = 45t(1-t)^2 + 18(1-t)^2 \\ &\Leftrightarrow 45t^3 - 72t^2 + t + 18 = 0 \Leftrightarrow (3t-2)(15t^2 - 14t - 9) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{3} \Rightarrow uv = 3 \\ t = \frac{7+2\sqrt{46}}{15} \Rightarrow uv = \frac{30}{7+2\sqrt{46}} = a. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy u, v là nghiệm của một trong hai hệ sau:

$$(I) \quad \begin{cases} (u+v)^2 = 10 + 2uv = 16 \\ (u-v)^2 = 10 - 2uv = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v = 4 \\ u-v = \pm 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 3, v_1 = 1 \\ u_2 = 1, v_2 = 3. \end{cases}$$

$$(II) \quad \begin{cases} (u+v)^2 = 10 + 2a \\ (u-v)^2 = 10 - 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_3 = \frac{\sqrt{10+2a} + \sqrt{10-2a}}{2} \\ v_3 = \frac{\sqrt{10+2a} - \sqrt{10-2a}}{2} \\ u_4 = \frac{\sqrt{10+2a} - \sqrt{10-2a}}{2} \\ v_4 = \frac{\sqrt{10+2a} + \sqrt{10-2a}}{2}. \end{cases}$$

Các nghiệm này đều thoả mãn điều kiện (*). Vậy pt đã cho có 4 nghiệm $x_k = 5 - u_k^2, k = 1, 2, 3, 4$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 306. Tìm số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^2 + 2x - 3\sqrt{x^2 + 2x + m} + m + 2 = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt trên $[1; 2]$.

A. 12.

B. 9.

C. 6.

D. 3.

Lời giải.

Ta có

$$x^2 + 2x - 3\sqrt{x^2 + 2x + m} + m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x + m} = 1 \\ \sqrt{x^2 + 2x + m} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x = 1 - m \\ x^2 + 2x = 4 - m. \end{cases}$$

Hàm số $y = x^2 + 2x$ đồng biến trên $(-1; +\infty)$ nên đồng biến trên $[1; 2]$.

Do đó, phương trình $x^2 + 2x - 3\sqrt{x^2 + 2x + m} + m + 2 = 0$ có đúng hai nghiệm trên $[1; 2]$ khi chỉ khi

$$\begin{cases} 1 - m \neq 4 - m \\ y(1) \leq 1 - m \leq y(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq 1 - m \leq 8 \\ 3 \leq 4 - m \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7 \leq m \leq -2 \\ -4 \leq m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq m \leq -2.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 307. Cho phương trình bậc hai $px^2 + qx + r = 0$ có hai nghiệm α, β . Tính giá trị biểu thức $p^2(\alpha - \beta)^2$.

A. $q^2 - 4p$.

B. $q^2 - 4rp$.

C. $q^2 - 4r$.

D. $q^2 - 2p$.

Lời giải.

Theo định lí Vi-et, $\alpha + \beta = -\frac{p}{q}$ và $\alpha \cdot \beta = \frac{r}{q}$.

$$\text{Ta có } p^2(\alpha - \beta)^2 = p^2[(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta] = p^2\left[\left(-\frac{q}{p}\right)^2 - 4\frac{r}{p}\right] = q^2 - 4rp.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 308. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + a = 0$; x_3, x_4 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 12x + b = 0$ và biết rằng $\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = \frac{x_4}{x_3}$, b dương. Hỏi a thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(-2; 1)$.

B. $(-1; 3)$.

C. $(2; 6)$.

D. $(3; 7)$.

Lời giải.

$$\text{Đặt } \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = \frac{x_4}{x_3} = k, k \neq 0.$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x_2 = kx_1 \\ x_3 = kx_2 = k^2x_1 \\ x_4 = kx_3. \end{cases}$$

Áp dụng hệ thức Viet cho hai phương trình đã cho, ta được:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_3 + x_4 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (k+1)x_1 = 3 \\ (k+1)x_3 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (k+1)x_1 = 3 \\ (k+1)k^2x_1 = 12 \end{cases} \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = -2. \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác } b = x_3 \cdot x_4 = kx_3^2 > 0 \Rightarrow k > 0 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow x_1 = 1; a = kx_1^2 = 2.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 309. Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $2x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m + 3 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của $A = |x_1x_2 - 2(x_1 + x_2)|$.

A. 4.

B. 9.

C. 8.

D. $\frac{9}{2}$.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có phương trình $2x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m + 3 = 0$.

$$\text{Phương trình có nghiệm} \Leftrightarrow \Delta' = -(m^2 + 6m + 5) \geq 0 \Leftrightarrow -5 \leq m \leq -1.$$

Theo hệ thức Vi-et, $\begin{cases} x_1 + x_2 = -(m+1) \\ x_1 x_2 = \frac{1}{2}(m^2 + 4m + 3) \end{cases}$.

Ta có: $A = \frac{1}{2}|m^2 + 8m + 7|$.

Xét hàm số $f(m) = m^2 + 8m + 7$ có BBT trên $[-5; -1]$ là

m	-5	-4	-1
$f(m)$	-8	-9	0

Do đó $\max_{[-5; -1]} |f(m)| = 9$.

Vậy giá trị lớn nhất của A là $\frac{9}{2}$ khi và chỉ khi $m = -4$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 310. Số nghiệm của phương trình $20x^3(1-x)^3 = \frac{4}{25}$ trên khoảng $(0; 1)$ là

A. 6.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 20x^3(1-x)^3 &= \frac{4}{25} \\ \Leftrightarrow (5x - 5x^2)^3 &= 1 \\ \Leftrightarrow -5x^2 + 5x - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \in (0; 1) \\ x = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \in (0; 1) \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 311. Cho phương trình: $\frac{x^2 - 3x - 2}{x - 3} = -x$ có nghiệm a . Khi đó a thuộc tập

A. $\left(\frac{1}{3}; 3\right)$.

B. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

C. $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$.

D. $\emptyset$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \neq 3$.

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 3x - 2}{x - 3} = -x &\Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x - 2 + x(x - 3)}{x - 3} = 0 \\ \Rightarrow 2x^2 - 6x - 2 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn điều kiện}) \end{aligned}$$

Ta có: $-\frac{1}{2} < \frac{3 - \sqrt{13}}{2} < 0$. Vậy nghiệm của phương trình đã cho thuộc tập $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 312. Có tất cả bao nhiêu giá trị của m để phương trình $\frac{(x+2)(mx+3)}{x-1} = 0$ có nghiệm duy nhất?

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải.

Điều kiện: $x \neq 1$.

$$\frac{(x+2)(mx+3)}{x-1} = 0 \Leftrightarrow (x+2)(mx+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = \frac{-3}{m} \end{cases}$$

Vậy để phương trình có nghiệm duy nhất thì $m = 0$ hoặc $\frac{-3}{m} = 1 \Leftrightarrow m = -3$

hoặc $\frac{-3}{m} = -2 \Leftrightarrow m = 6$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 313. Cho phương trình $|x^2 - 4|x| - 5| - m = 0$, hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong nửa khoảng $(0; 2017]$ để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt?

A. 2016.

B. 2008.

C. 2009.

D. 2017.

Lời giải.

Đặt $t = |x| \geq 0$, phương trình đề bài được viết lại là

$$|t^2 - 4t - 5| = m. \quad (*)$$

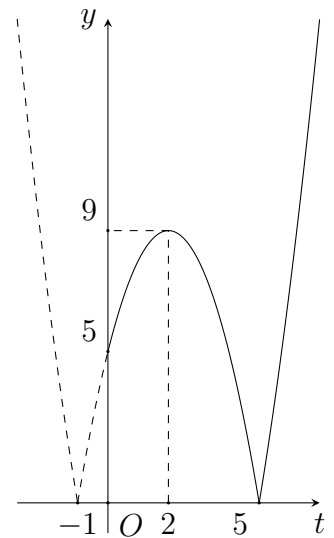
Xét đồ thị hàm số $y = |t^2 - 4t - 5|$ với $t \geq 0$, ta có hình vẽ bên.

Để phương trình đề bài có hai nghiệm phân biệt thì $(*)$ phải có đúng một nghiệm t dương duy nhất.

Từ đồ thị, ta suy ra giá trị m thỏa mãn là $m > 9$ hoặc $m = 0$.

Do m là số nguyên thuộc nửa khoảng $(0; 2017]$ nên $10 \leq m \leq 2017$.

Vậy có 2008 giá trị m thỏa bài toán.



Chọn đáp án **(B)** □

Câu 314. Tìm phương trình đường thẳng $d: y = ax + b$. Biết đường thẳng d đi qua điểm $I(1; 3)$ và tạo với hai tia Ox, Oy một tam giác có diện tích bằng 6 ?

A. $y = -3x + 6$.

B. $y = (9 - \sqrt{72})x + \sqrt{72} - 6$.

C. $y = (9 + \sqrt{72})x - \sqrt{72} - 6$.

D. $y = 3x + 6$.

Lời giải.

Do đường thẳng d đi qua điểm $I(1; 3)$ nên $a + b = 3 \Rightarrow a = 3 - b$.

Giao điểm của d và các tia Ox, Oy lần lượt là $M\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$ và $N(0; b)$

(với $b > 0, a < 0$ suy ra $0 < b < 3$).

Do đó: $S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2} \cdot OM \cdot ON = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{b}{a} \right| \cdot |b| = \frac{b^2}{2|a|}$. Mà $S_{\triangle OMN} = 6 \Leftrightarrow b^2 = 12|a| \Leftrightarrow b^2 = 12|3 - b|$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 36 - 12b \\ b^2 = -36 + 12b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 6 \\ b = -6 + \sqrt{72} \text{ (L)} \\ b = -6 - \sqrt{72} \text{ (L)} \end{cases}$$

Với $b = 6 \Rightarrow a = -3 \Rightarrow d: y = -3x + 6$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 315. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 4\sqrt{1-x^2} = m$ có nghiệm là

A. $[\sqrt{2}; +\infty)$.

B. $[6; +\infty)$.

C. $[\sqrt{2}; 6]$.

D. $[\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]$.

Lời giải.

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 4\sqrt{1-x^2} = m \quad (1)$$

Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$.

$$\text{Đặt } t = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \Rightarrow t^2 = 2 + 2\sqrt{1-x^2} \Rightarrow t \in [\sqrt{2}; 2].$$

$$(1) \text{ trở thành } t + 2(t^2 - 2) = m \Leftrightarrow 2t^2 + t - (4 + m) = 0 \quad (2).$$

Để (1) có nghiệm thì (2) có nghiệm $t \in [\sqrt{2}; 2]$

$$\text{Tức là } \begin{cases} \Delta = 1 + 4 \cdot 2(4 + m) = 8m + 33 \geq 0 \\ \begin{cases} \sqrt{2} \leq \frac{-1 - \sqrt{8m+33}}{4} \leq 2 \\ \sqrt{2} \leq \frac{-1 + \sqrt{8m+33}}{4} \leq 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\frac{33}{8} \\ 4\sqrt{2} + 1 \leq \sqrt{8m+33} \leq 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\frac{33}{8} \\ \sqrt{2} \leq m \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq m \leq 6.$$

Vậy $m \in [\sqrt{2}; 6]$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 316. Cho biết tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2m + 1 = 0$ có nghiệm là $S = \left[-\frac{a}{b}; +\infty\right)$, với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản.

Tính $T = a + b$.

A. $T = 13$.

B. $T = 17$.

C. $T = 49$.

D. $T = 3$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện xác định: } x \neq 0. \text{ Đặt } t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow t^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2 \Rightarrow |t| \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 2 \\ t \leq -2 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình đã cho trở thành } 2(t^2 - 2) - 3t - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 3t - 2m - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2t^2 - 3t - 3 = 2m \quad (1)$$

Xét hàm số $y = f(t) = 2t^2 - 3t - 3$ có bảng biến thiên

t	$-\infty$	-2	$\frac{3}{4}$	2	$+\infty$
y	$+\infty$	11	$-\frac{33}{8}$	-1	$+\infty$

(1) có nghiệm t thỏa $\begin{cases} t \geq 2 \\ t \leq -2 \end{cases}$ khi $\begin{cases} 2m \geq -1 \\ 2m \geq 11 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow S = \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Vậy $T = 3$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 317. Cho biết tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 5m + 1 = 0$ có nghiệm là $S = \left[-\frac{a}{b}; +\infty\right)$, với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $T = a.b$

A. $T = -5$.

B. $T = 5$.

C. $T = 11$.

D. $T = 55$.

Lời giải.

Đặt $x + \frac{1}{x} = t$, $|t| \geq 2$ khi đó phương trình trở thành $2t^2 - 3t - 5m - 3 = 0$ (*)

Phương trình $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 5m + 1 = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm t thỏa mãn $|t| \geq 2$.

Số nghiệm của phương trình (*) bằng số giao điểm của parabol $(P): y = 2t^2 - 3t - 3$ và đường thẳng $d: y = 5m$.

Xét parabol $(P): y = 2t^2 - 3t - 3$ ta có bảng biến thiên như sau

t	$-\infty$	-2	$\frac{3}{4}$	2	$+\infty$
y	$+\infty$	11	$-\frac{33}{8}$	-1	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi $5m \geq -1 \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{5}$.

Vậy khi $m \in \left[-\frac{1}{5}; +\infty\right)$ thì phương trình có nghiệm $\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow T = 5$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 318. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trên đoạn $[-6; 60]$ để phương trình

$$\sqrt{x^2 - 2x + 2} + 2x^2 = 2m + 1 + 4x$$

có nghiệm?

A. Vô số giá trị.

B. 61.

C. 63.

D. 62.

Lời giải.

Điều kiện xác định $\mathbb{R}$. Phương trình tương đương với $2m + 1 = \sqrt{x^2 - 2x + 2} + 2x^2 - 4x$. Đặt $t = \sqrt{x^2 - 2x + 2} \Rightarrow x^2 - 2x = t^2 - 2$. Do đó $2m + 1 = 2t^2 + t - 4$. Ta có $t \geq 1$. Suy ra $2m + 1 \geq -1 \Leftrightarrow m \geq -1$. Vậy có 62 giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-6; 60]$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 319. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để phương trình $\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} + 2\sqrt{-x^2+4} + 2m+3 = 0$ có nghiệm.

A. 1.

B. 3.

C. 0.

D. 2.

Lời giải.

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} \Rightarrow t^2 = 4 + 2\sqrt{4-x^2} \Rightarrow \sqrt{4-x^2} = \frac{t^2-4}{2}.$$

Điều kiện $2 \leq t \leq 2\sqrt{2}$.

$$\text{Phương trình trở thành: } t + 2\frac{t^2-4}{2} + 2m + 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t + 2m - 1 = 0(*)$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t - 1$, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	2	$2\sqrt{2}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\frac{1}{4}$	5	$7+2\sqrt{2}$	$+\infty$

Phương trình (*) có nghiệm thỏa mãn

$$2 \leq t \leq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 5 \leq -2m \leq 7 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{-7-2\sqrt{2}}{2} \leq m \leq -\frac{5}{2}.$$

Vậy có 2 giá trị m nguyên là $m = -3, m = -4$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 320. Biết phương trình $3x + 1 - \sqrt{3x^2 + 7x} - \sqrt{3x - 1} = 0$ có một nghiệm có dạng $x = \frac{a + \sqrt{b}}{c}$, trong đó a, b, c là các số nguyên tố. Tính $S = a + b + c$.

A. $S = 14$.

B. $S = 21$.

C. $S = 10$.

D. $S = 12$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 3x^2 + 7x \geq 0 \\ 3x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3} (*).$$

Với điều kiện trên, phương trình tương đương

$$\begin{aligned} & [(2x+1) - \sqrt{3x^2+7x}] + [x - \sqrt{3x-1}] = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-3x+1}{(2x+1) + \sqrt{3x^2+7x}} + \frac{x^2-3x+1}{x + \sqrt{3x-1}} = 0 \\ \Leftrightarrow & (x^2-3x+1) \left(\frac{1}{2x+1 + \sqrt{3x^2+7x}} + \frac{1}{x + \sqrt{3x-1}} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & x^2-3x+1 = 0 \text{ (do } (*) \Rightarrow \frac{1}{2x+1 + \sqrt{3x^2+7x}} + \frac{1}{x + \sqrt{3x-1}} > 0) \\ \Leftrightarrow & x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \text{ hoặc } x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Theo yêu cầu đề bài ta chọn nghiệm $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

Vậy $a = 3, b = 5, c = 2 \Rightarrow S = a + b + c = 10$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 321. Phương trình $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}$ có bao nhiêu nghiệm.

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} &= \sqrt[3]{2x+11} \\ \Leftrightarrow x+5 + x+6 + 3\sqrt[3]{x+5}\sqrt[3]{x+6} &= 2x+11 \\ \Rightarrow 3\sqrt[3]{x+5}\sqrt[3]{x+6} &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = -6 \\ x = -\frac{11}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Thử lại ta được các nghiệm đều thỏa mãn.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 322. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt[4]{x - \sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 2$ là

A. $\emptyset$.

B. $\left\{\frac{7}{2}; 1\right\}$.

C. $\{0\}$.

D. $\{1\}$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt[4]{x - \sqrt{x^2 - 1}}, t > 0 \Rightarrow \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{t^2}$

$$\text{Ta có phương trình: } t + \frac{1}{t^2} = 2 \Leftrightarrow t^3 - 2t^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ t = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

So sánh với điều kiện $t > 0$ ta tìm được $t = 1, t = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Trường hợp 1:

$$\begin{aligned} t = 1 &\Rightarrow \sqrt[4]{x - \sqrt{x^2 - 1}} = 1 \Leftrightarrow x - \sqrt{x^2 - 1} = 1 \\ \Leftrightarrow x - 1 &= \sqrt{x^2 - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 1 = x^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Trường hợp 2:

$$\begin{aligned} t = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} &\Rightarrow \sqrt[4]{x - \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ \Leftrightarrow x - \sqrt{x^2 - 1} &= \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x - \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} = \sqrt{x^2 - 1} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} \\ \left(x - \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}\right)^2 = x^2 - 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 323. Có nhiều nhất bao nhiêu số nguyên m thuộc nửa khoảng $[-2017; 2017)$ để phương trình $\sqrt{2x^2 - x - 2m} = x - 2$ có nghiệm:

A. 2014.

B. 2021.

C. 2013.

D. 2020.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} x \geq 2 \\ 2x^2 - x - 2m = x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 + 3x - 4 = 2m \end{cases}$.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
y	$+\infty$		$-\frac{25}{4}$	$+\infty$

$\swarrow$ $\searrow$ $\nearrow$
 6

Để phương trình đã cho có nghiệm điều kiện là $2m \geq 6 \Leftrightarrow m \geq 3$.

mà $m \in [-2017; 2017)$ suy ra $3 \leq m < 2017$.

Vậy có nhiều nhất 2014 số nguyên thuộc nửa khoảng $[3; 2017)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 324. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 - (1 - m)x - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt và nghiệm này bằng hai lần nghiệm kia.

A. $m = 2$ hoặc $m = -3$.

B. $m = -2$ hoặc $m = -\frac{1}{2}$.

C. $m = -\frac{1}{2}$ hoặc $m = \frac{1}{3}$.

D. $m = -\frac{1}{2}$ hoặc $m = 3$.

Lời giải.

- Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (1 - m)^2 + 4m > 0 \Leftrightarrow (m + 1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq -1.$$

- Theo định lý Vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - m \\ x_1 x_2 = -m \end{cases}$.

- Xét phương trình

$$\begin{aligned} (x_1 - 2x_2)(x_2 - 2x_1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 5x_1 x_2 - 2(x_1^2 + x_2^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow 9x_1 x_2 &= 2(x_1 + x_2)^2 \\ \Leftrightarrow -9m &= 2(1 - m)^2 \\ \Leftrightarrow 2m^2 + 5m + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases} & \text{(thỏa mãn).} \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 325. Cho biết $m \neq 0$ và $n \neq 0$ là các nghiệm của phương trình $x^2 + mx + n = 0$. Tính tổng $m + n$.

- A. $m + n = \frac{1}{2}$. B. $m + n = -\frac{1}{2}$. C. $m + n = -1$. D. $m + n = 1$.

Lời giải.

Gọi m, n là các nghiệm của phương trình $x^2 + mx + n = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m^2 + n = 0 \\ n^2 + mn + n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -2m^2 \\ n + m + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -2m^2 \\ m = 1; m = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = -2 \\ m = -\frac{1}{2} \\ n = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow m + n = -1.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 326. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x^2 - 4\sqrt{x^2 + 1} - (m - 1) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt

- A. 1. B. 0. C. 2. D. Vô số.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x \in \mathbb{R}$.

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 1}$, $t \geq 1$.

Phương trình trở thành $t^2 - 1 - 4t - m + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t = m$. (2)

Để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì phương trình 2 có hai nghiệm phân biệt lớn hơn (1).

Vẽ bảng biến thiên $y = t^2 - 4t$

x	1	2	$+\infty$
y	-3		$+\infty$
		-4	

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $-4 < m < -3$.

Vậy không có giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 327. Để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt: $|10x - 2x^2 - 8| = x^2 - 5x + a$. Giá trị của tham số a là

- A. $a \in (1; 10)$. B. $a = 1$. C. $4 < a < \frac{43}{4}$. D. $a \in \left[4; \frac{45}{4}\right]$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương: $2|x^2 - 5x + 4| = x^2 - 5x + a$, (1).

Đặt $t = x^2 - 5x + a$.

Phương trình (1) trở thành: $2|t + 4 - a| = t$, (2)

$$\text{Phương trình (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ \begin{cases} t = 2a - 8 \\ t = \frac{2a - 8}{3} \end{cases} \end{cases}, \text{ để phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt thì (2) phải có 2}$$

nhịệm phân biệt, tức là $2a - 8 > 0 \Leftrightarrow a > 4, (*)$.

Khi đó, thay lại ta có: $\begin{cases} x^2 - 5x + a = 2a - 8 \\ 3x^2 - 15x + 3a = 2a - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 8 - a = 0 \\ 3x^2 - 15x + a + 8 = 0 \end{cases}$. Điều kiện để (1) có 4

nhịệm phân biệt là mỗi phương trình bậc 2 ở trên có 2 nhịệm phân biệt.

$$\text{Vậy } \begin{cases} \Delta_1 = 25 - 4(8 - a) > 0 \\ \Delta_2 = 15^2 - 4.3.(a + 8) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > \frac{7}{4} \\ a < \frac{43}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{7}{4} < a < \frac{43}{4}.$$

So với điều kiện (*), suy ra $4 < a < \frac{43}{4}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 328. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên không dương của tham số m để phương trình $\sqrt{2x + m} = x - 1$ có nhịệm duy nhất?

A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải.

$$\sqrt{2x + m} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 2x + m = (x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 4x + 1 - m = 0 (*) \end{cases}.$$

Phương trình có nhịệm duy nhất khi hệ có nhịệm duy nhất.

Xét $x^2 - 4x + 1 - m = 0$; $\Delta' = 3 + m$.

TH1: $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = -3$ thì (*) có nhịệm kép $x = 2 \geq 1$ (thỏa).

TH2: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > -3$ thì phương trình có nhịệm duy nhất khi (*) có 2 nhịệm thỏa $x_1 < 1 < x_2 \Leftrightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0 \Leftrightarrow x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1 < 0 \Leftrightarrow 1 - m - 4 + 1 < 0 \Leftrightarrow m > -2$.

m không dương nên $m \in \{-3; -1; 0\}$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 329. Phương trình $(m^2 - 4m + 3)x = m^2 - 3m + 2$ có nhịệm duy nhất khi

A. $m \neq 3$.

B. $m \neq 1$ và $m \neq 3$.

C. $m \neq 1$.

D. $m \neq 1$ hoặc $m \neq 3$.

Lời giải.

Phương trình $(m^2 - 4m + 3)x = m^2 - 3m + 2$ có nhịệm duy nhất $\Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 3 \end{cases}$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 330. Tìm m để phương trình $(m - 1)x^4 - mx^2 + m^2 - 1 = 0$ có ba nhịệm phân biệt.

A. $m = \pm 1$.

B. $m = 1$.

C. $m = -1$.

D. $m = 0$.

Lời giải.

Khi $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ phương trình cho trở thành: $-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Do đó: $m = 1$ không thỏa mãn đề bài.

Khi $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$

Đặt $t = x^2 (t \geq 0)$.

Phương trình cho trở thành $(m - 1)t^2 - mt + m^2 - 1 = 0$.

Phương trình cho có ba nhịệm phân biệt $\Leftrightarrow$ 1 có hai nhịệm t_1, t_2 thỏa $t_1 = 0 < t_2$

Khi $t_1 = 0 \Rightarrow m = \pm 1$. Do có hai nhịệm phân biệt nên $m \neq 1$.

Với $m = -1 \Rightarrow t_2 = \frac{1}{2}$ (nhận)

Chọn đáp án **C**

□

Câu 331. Cho phương trình $(m - 1)x^2 + 3x - 1 = 0$. Phương trình có nghiệm khi

- A. $m \geq -\frac{5}{4}$. B. $m = 1$. C. $m = \frac{5}{4}$. D. $m \leq -\frac{5}{4}$.

Lời giải.

Từ phương trình $(m - 1)x^2 + 3x - 1 = 0$ (1)

- Nếu $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ thì phương trình (1) trở thành: $3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$.
Do đó phương trình (1) có nghiệm khi $m = 1$. (*)
- Nếu $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ thì phương trình (1) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 3^2 - 4 \cdot (m - 1) \cdot (-1) \geq 0 \Leftrightarrow 5 + 4m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{5}{4}.$$

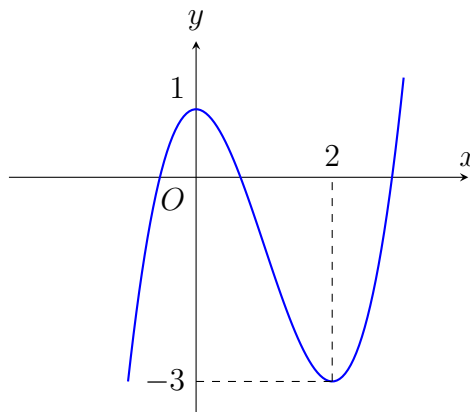
$$\text{Do đó phương trình (1) có nghiệm khi } \begin{cases} m \geq -\frac{5}{4} \\ m \neq 1 \end{cases} \quad (**)$$

Từ (*) và (**) phương trình (1) có nghiệm $m \geq -\frac{5}{4}$.

Chọn đáp án **A**

□

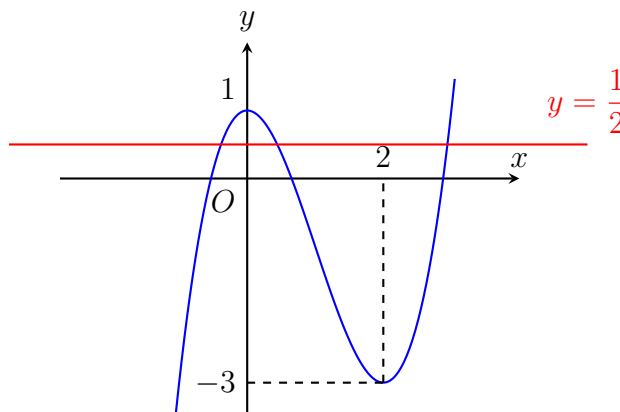
Câu 332. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.



Phương trình $2f(x) - 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

Lời giải.



$$2f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}.$$

Số nghiệm phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \frac{1}{2}$.

Dựa vào đồ thị hàm số suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 333. Số nghiệm của phương trình $|2x - 1| = 3x - 2$ bằng

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải.

$$\text{Có } |2x - 1| = 3x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2 \geq 0 \\ \begin{cases} 2x - 1 = 3x - 2 \\ 2x - 1 = 2 - 3x \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{3}{5} \end{cases} \end{cases}$$

nghiệm.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 334. Tìm số nghiệm của phương trình $|2x - 4| = |x - 3|$.

A. 0.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải.

$$|2x - 4| = |x - 3| \Leftrightarrow (2x - 4)^2 = (x - 3)^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{7}{3} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 335. Phương trình $\sqrt{5x + 10} + x - 8 = 0$ có nghiệm là

A. 3 và 18.

B. 5 và 12.

C. 3.

D. 18.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \sqrt{5x + 10} + x - 8 = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{5x + 10} = 8 - x \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 8 - x \geq 0 \\ 5x + 10 = (8 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 8 \\ x^2 - 21x + 54 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 8 \\ \begin{cases} x = 3 \\ x = 18 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 336. Tổng nghiệm bé nhất và lớn nhất của phương trình $|x + 1| + |3x - 3| = |4 - 2x|$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} |x + 1| + |3x - 3| &= |4 - 2x| \Leftrightarrow (|x + 1| + |3x - 3|)^2 = (4 - 2x)^2 \\ &\Leftrightarrow 10x^2 - 16x + 10 + 2|3x^2 - 3| = 16 - 16x + 4x^2 \Leftrightarrow 6|x^2 - 1| = 6 - 6x^2 \\ &\Leftrightarrow |x^2 - 1| = 1 - x^2 \Leftrightarrow 1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Vậy tổng nghiệm lớn nhất và bé nhất bằng 0.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 337. Cho phương trình $\sqrt{x^2 + x + 3} = 3x - 2$ (1). Kết luận nào sau đây là đúng.

- A. Phương trình (1) có một nghiệm duy nhất $x = \frac{13 + \sqrt{137}}{16}$.
 B. Phương trình (1) có một nghiệm duy nhất $x = \frac{13 - \sqrt{137}}{16}$.
 C. Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.
 D. Phương trình (1) có tổng các nghiệm bằng $\frac{18}{8}$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{2}{3}$, phương trình (1) tương đương với $8x^2 - 13x + 1 = 0$ suy ra $x = \frac{13 + \sqrt{137}}{16}$, hoặc $x = \frac{13 - \sqrt{137}}{16}$ đối chiếu điều kiện chỉ có $x = \frac{13 + \sqrt{137}}{16}$ là nghiệm.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 338. Phương trình $|x^2 + 2x - 3| = x + 5$ có tổng các nghiệm nguyên là

- A. -2. B. -3. C. -1. D. -4.

Lời giải.

+ Với $x + 5 < 0 \Leftrightarrow x < -5$ ta có $VP \geq 0, VP < 0$ suy ra phương trình vô nghiệm

+ Với $x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -5$

Phương trình $\Leftrightarrow |x^2 + 2x - 3|^2 = (x + 5)^2 \Leftrightarrow (x^2 + 2x - 3)^2 = (x + 5)^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 8 = 0 \\ x^2 + 3x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{33}}{2} \\ x = \frac{-1 - \sqrt{33}}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Tổng các nghiệm bằng -4.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 339. Tìm m để phương trình $\frac{2(2 - 2m - x)}{x + 1} = x - 2m$ có 2 nghiệm phân biệt.

- A. $m \neq \frac{5}{2}$ và $m \neq 1$. B. $m \neq \frac{5}{2}$ và $m \neq \frac{3}{2}$. C. $m \neq \frac{5}{2}$ và $m \neq \frac{1}{2}$. D. $m \neq \frac{5}{2}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \neq -1$. Với điều kiện đó, phương trình đã cho tương đương với:

$$(x - 2m)(x + 1) = 2(2 - 2m - x) \Leftrightarrow x^2 - 2mx + x - 2m = 4 - 4m - 2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (2m - 3)x + 2m - 4 = 0(*).$$

Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

$$\text{khác } -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (2m - 3)^2 - 4(2m - 4) > 0 \\ (-1)^2 - (2m - 3)(-1) + 2m - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 20m + 25 > 0 \\ 4m - 6 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2m - 5)^2 > 0 \\ 4m \neq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{5}{2} \\ m \neq \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 340. Tập nghiệm của phương trình $(x - 3)(\sqrt{4 - x^2} - x) = 0$ là

- A. $\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$. B. $\{\sqrt{2}; 3\}$. C. $\{\sqrt{2}\}$. D. $\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}; 3\}$.

Lời giải.

Điều kiện $4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$ (*).

Với x thỏa mãn (*) thì phương trình ban đầu tương đương với

$$\sqrt{4 - x^2} - x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 341. Số nghiệm nguyên dương của phương trình $\sqrt{3x+1} = |x-3|$ là

A. 2.

B. 0.

C. 1.

D. 3.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x \geq \frac{1}{3}$.

$$\text{Ta có } \sqrt{3x+1} = |x-3| \Leftrightarrow 3x+1 = x^2 - 6x + 9 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (thỏa mãn)} \\ x = 8 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}.$$

Vậy số nghiệm nguyên dương của phương trình là 2.

Chọn đáp án **A** □

Câu 342. Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $x^2 + 5x + 2 + 2\sqrt{x^2 + 5x + 10} = 0$ là

A. 5.

B. 13.

C. 10.

D. 25.

Lời giải.

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2 + 5x + 10} \geq 0, \text{ phương trình trở thành } t^2 + 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \text{ (loại)} \\ t = 2. \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 2 \text{ ta có } \sqrt{x^2 + 5x + 10} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 10 = 4 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = -2.$$

Vậy tổng bình phương các nghiệm của phương trình là $S = (-3)^2 + (-2)^2 = 13$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 343. Tổng các bình phương các nghiệm của phương trình $(x-1)(x-3) + 3\sqrt{x^2 - 4x + 5} - 2 = 0$ bằng

A. 17.

B. 4.

C. 16.

D. 8.

Lời giải.

Điều kiện $x^2 - 4x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương

$$x^2 - 4x + 5 + 3\sqrt{x^2 - 4x + 5} - 4 = 0.$$

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$, $t \geq 1$. Thu được phương trình

$$t^2 + 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (nhận)} \\ t = -4 \text{ (loại)}. \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 1, \text{ suy ra } \sqrt{x^2 - 4x + 5} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy tổng các bình phương của các nghiệm bằng 4.

Chọn đáp án **B** □

Câu 344. Một học sinh đã giải phương trình $\sqrt{x^2 - 5} = 2 - x$ (1) như sau:

(I). Phương trình (1) tương đương $x^2 - 5 = (2 - x)^2$.

(II). Tương đương $4x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{9}{4}$

(III). Vậy phương trình có một nghiệm là $x = \frac{9}{4}$

Lý luận trên nếu **sai** thì **sai** từ giai đoạn nào?

- A. (I). B. (III). C. (II). D. Lý luận đúng.

Lời giải.

Giai đoạn (I) đã sai. Đúng là $(1) \Rightarrow x^2 - 5 = (2 - x)^2$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 345. Tập hợp các giá trị của m để phương trình $\sqrt{x-1} + \frac{x-m}{\sqrt{x-1}} = \frac{2m}{\sqrt{x-1}}$ có nghiệm là

- A. $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$. B. $(1; +\infty)$. C. $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$. D. $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 1$. Khi đó, ta có

$$\sqrt{x-1} + \frac{x-m}{\sqrt{x-1}} = \frac{2m}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow x-1 + x-m = 2m \Leftrightarrow 2x = 3m+1 \Leftrightarrow x = \frac{3m+1}{2}.$$

Phương trình đã cho có nghiệm khi $\frac{3m+1}{2} > 1 \Leftrightarrow m > \frac{1}{3}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 346. Cho phương trình $\frac{x^2-4x+2}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{x-2}$. Số nghiệm của phương trình này là

- A. 0. B. 2. C. 4. D. 1.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 2$ khi đó phương trình trở thành $x^2 - 4x + 2 = x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$.

Đối chiếu điều kiện suy ra phương trình có một nghiệm $x = 4$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 347. Cho phương trình $\frac{x^2-4x+2}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{x-2}$. Số nghiệm của phương trình này là

- A. 0. B. 2. C. 4. D. 1.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x > 2$ khi đó phương trình trở thành $x^2 - 4x + 2 = x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$.

Đối chiếu điều kiện suy ra phương trình có một nghiệm $x = 4$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 348. Số nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 8 = 4\sqrt{(4-x)(x+2)}$ là

- A. 3. B. 1. C. 4. D. 2.

Lời giải.

Điều kiện: $(4-x)(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-2; 4]$.

$$x^2 - 2x - 8 = 4\sqrt{(4-x)(x+2)} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 4\sqrt{-(x^2 - 2x - 8)}(1).$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{-(x^2 - 2x - 8)}, t \geq 0 \Leftrightarrow t^2 = -(x^2 - 2x - 8) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = -t^2.$$

$$(1) \Leftrightarrow -t^2 = 4t \Leftrightarrow t^2 + 4t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0(n) \\ t = -4(l) \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{-(x^2 - 2x - 8)} = 0 \Leftrightarrow -(x^2 - 2x - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2(n) \\ x = 4(l) \end{cases}. \text{ Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.}$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 349. Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $x^2 + 5x + 2 + 2\sqrt{x^2 + 5x + 10} = 0$ là

A. 5.

B. 13.

C. 10.

D. 25.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x^2 + 5x + 10 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Khi đó phương trình $\Leftrightarrow x^2 + 5x + 10 + 2\sqrt{x^2 + 5x + 10} - 8 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 5x + 10} = 2 \\ \sqrt{x^2 + 5x + 10} = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 5x + 10} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 = -3 \\ x = x_2 = -2 \end{cases}.$$

Vậy $x_1^2 + x_2^2 = 2^2 + 3^2 = 13$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 350. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 - 2x - 3 - m = 0$ có nghiệm $x \in [0; 4]$.

A. $m \in (-\infty; 5]$.B. $m \in [-4; -3]$.C. $m \in [-4; 5]$.D. $m \in [3; +\infty)$.

Lời giải.

Cách 1: Phương trình có nghiệm khi $\Delta' = 4 + m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -4$ (1).

Khi đó, phương trình có nghiệm $x_1 = 1 - \sqrt{4 + m}$, $x_2 = 1 + \sqrt{4 + m}$.

Để phương trình có nghiệm $x \in [0; 4]$ thì $\begin{cases} 0 \leq x_1 \leq 4 \\ 0 \leq x_2 \leq 4 \end{cases}$

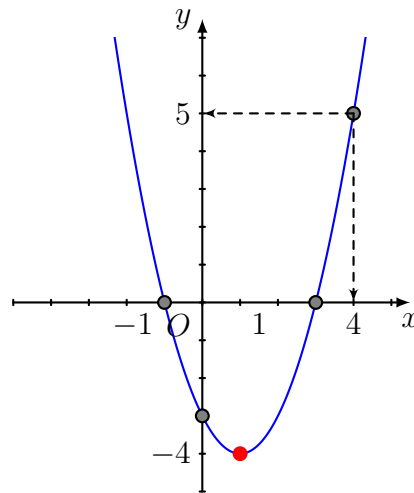
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq 1 - \sqrt{4 + m} \leq 4 \\ 0 \leq 1 + \sqrt{4 + m} \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4 + m} \leq 1 \\ \sqrt{4 + m} \geq -3 \\ \sqrt{4 + m} \geq -1 \\ \sqrt{4 + m} \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4 + m} \leq 1 \\ \sqrt{4 + m} \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ m \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 5.$$

So với điều kiện (1), $m \in [-4; 5]$ thì phương trình đã cho có nghiệm $x \in [0; 4]$.

Cách 2: Phương trình đã cho tương đương $m = x^2 - 2x - 3$.

Đặt $y = f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Ta có đồ thị hàm số $y = f(x)$ như sau:



Dựa vào đồ thị. Để phương trình $y = f(x) = x^2 - 2x - 3 = m$ có nghiệm $x \in [0; 4]$ thì $-4 \leq m \leq 5$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 351. Tập nghiệm của phương trình $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ là

A. $S = \{1; 4\}$.

B. $S = \{1; 2\}$.

C. $S = \emptyset$.

D. $S = \{-2; -1; 1; 2\}$.

Lời giải.

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm phương trình $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ là $S = \{-2; -1; 1; 2\}$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 352. Tích các nghiệm của phương trình $(x^2 - 4x - 5)\sqrt{4 - x} = 0$ là

A. 20.

B. -4.

C. -20.

D. -5.

Lời giải.

Điều kiện $x \leq 4$. Phương trình tương đương với

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 5 = 0 \\ 4 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 5 \text{ (loại)} \\ x = 4. \end{cases}$$

Tích các nghiệm của phương trình là $-1 \cdot 4 = -4$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 353. Để giải phương trình $|x - 2| = 2x - 3$ (1). Một học sinh trình bày theo các bước sau

a) Bước 1. Bình phương hai vế (1) $\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 4x^2 - 12x + 9$ (2).

b) Bước 2. (2) $\Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 5 = 0$ (3).

c) Bước 3. (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{5}{3} \end{cases}$.

d) Bước 4. Vậy (1) có 2 nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = \frac{5}{3}$.

Cách giải trên **sai** từ bước nào?

A. Bước 1.

B. Bước 4.

C. Bước 2.

D. Bước 3.

Lời giải.

Khi bình phương 2 về ở bước 1 ta chỉ đưa tới phương trình hệ quả. Do đó khi giải ra 2 nghiệm ở bước 3, ta cần thử lại vào phương trình (1) ban đầu trước khi kết luận.

Thử lại ta thấy phương trình (1) chỉ có nghiệm là $x = \frac{5}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 354. Tổng bình phương hai nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 7 = 0$ bằng.

A. 18.

B. 4.

C. 2.

D. 49.

Lời giải.

Giả sử $x_1; x_2$ là 2 nghiệm của phương trình, ta có

$$S = x_1 + x_2 = 2$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = -7.$$

$$\begin{aligned} \text{Theo yêu cầu của bài toán } x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \\ &= 2^2 - 2(-7) = 18. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 355. Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm phân biệt cùng dấu khi và chỉ khi

A. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \end{cases}$

Lời giải.

Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm phân biệt cùng dấu khi và chỉ

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 356. Biết phương trình $ax^2 + bx + c = 0$, ($a \neq 0$) có hai nghiệm x_1, x_2 . Khi đó:

A. $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{a}{b} \\ x_1x_2 = \frac{a}{c} \end{cases}$

B. $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{b}{a} \\ x_1x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

C. $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{2a} \\ x_1x_2 = \frac{c}{2a} \end{cases}$

D. $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

Lời giải.

Theo hệ thức Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

Chọn đáp án (D) □

Câu 357. Tìm tất cả các giá trị của m để $(m - 4)x + 3 = 0$ là phương trình bậc nhất.

A. $m = 4$.

B. $m = 3$.

C. $m \neq 3$.

D. $m \neq 4$.

Lời giải.

Để $(m - 4)x + 3 = 0$ là phương trình bậc nhất thì $m - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 4$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 358. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $(m - 4)x - 3m - 2 = 0$ có nghiệm duy nhất.

A. $m \neq 4$.

B. $m \neq 0$.

C. $m = 0$.

D. $m = 4$.

Lời giải.

Phương trình $(m - 4)x - 3m - 2 = 0$ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 4$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 359. Cặp số $(1; 2)$ là nghiệm của phương trình nào sau đây?

A. $x - 2y = 0$.

B. $2x + y = 2(x + 1)$.

C. $x - y = 1$.

D. $2x - y = 4$.

Lời giải.

Thay cặp số $(1; 2)$ vào đáp án

Nhận thấy $2 \cdot 1 + 2 = 2(1 + 1)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 360. Với giá trị nào của m thì phương trình $(m - 1)x^2 + 3x - 1 = 0$ có 2 nghiệm trái dấu?

A. $m < 1$.

B. $m > -\frac{5}{4}$.

C. $m > 1$.

D. Không tồn tại m .

Lời giải.

Để phương trình có 2 nghiệm trái dấu thì $\begin{cases} m \neq 1 \\ -1(m - 1) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > 1 \end{cases} \Rightarrow m > 1$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 361. Với m bằng bao nhiêu thì phương trình $mx + m - 1 = 0$ vô nghiệm?

A. $m = 0$.

B. $m = 0$ và $m = 1$.

C. $m = 1$.

D. $m = -1$.

Lời giải.

Phương trình $mx + m - 1 = 0$ vô nghiệm khi $\begin{cases} m = 0 \\ m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 362. Cho phương trình $ax + b = 0$. Chọn mệnh đề **sai**:

A. Phương trình có vô số nghiệm khi và chỉ khi $a = b = 0$.

B. Phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $a \neq 0$.

C. Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$.

D. Phương trình luôn có nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$.

Lời giải.

Mệnh đề “phương trình luôn có nghiệm khi và chỉ khi $a \neq 0$ và $b \neq 0$ ” là mệnh đề **sai**.

Chọn đáp án **(D)**

□

ĐÁP ÁN

1. B	2. A	3. C	4. B	5. A	6. D	7. B	8. C	9. D	10. C
11. A	12. B	13. D	14. D	15. C	16. B	17. B	18. B	19. C	20. B
21. B	22. C	23. C	24. D	25. C	26. A	27. C	28. C	29. C	30. D
31. D	32. A	33. A	34. B	35. A	36. C	37. D	38. A	39. C	40. B
41. A	42. A	43. D	44. A	45. B	46. A	47. C	48. B	49. B	50. A
51. D	52. C	53. C	54. C	55. B	56. B	57. B	58. C	59. C	60. D
61. A	62. C	63. A	64. D	65. D	66. B	67. D	68. D	69. D	70. B
71. A	72. D	73. B	74. B	75. C	76. A	77. D	78. D	79. A	80. B
81. D	82. B	83. D	84. D	85. B	86. C	87. B	88. D	89. A	90. B
92. D	93. B	94. C	95. B	96. A	97. C	98. A	99. A	100. C	101. A
102. B	103. B	104. C	105. B	106. D	107. B	108. B	109. A	110. C	111. A
112. B	113. A	114. A	115. B	116. B	117. B	118. A	119. C	120. C	121. A
122. A	123. C	124. B	125. A	126. D	127. A	128. B	129. C	130. C	131. D
132. C	133. A	134. C	135. B	136. A	137. D	138. B	139. D	140. A	141. C
142. D	143. B	144. D	145. D	146. D	147. D	148. D	149. B	150. B	151. B
152. C	153. D	154. C	155. B	156. D	157. D	158. B	159. C	160. B	161. B
162. B	163. A	164. C	165. B	166. B	167. A	168. D	169. A	170. C	171. D
172. D	173. C	174. C	175. B	176. C	177. A	178. A	179. A	180. B	181. B
182. B	183. B	184. A	185. C	186. A	187. C	188. C	189. B	190. B	191. C
192. B	193. C	194. B	195. D	196. D	197. C	198. C	199. B	200. A	201. D
202. C	203. D	204. A	205. D	206. B	207. A	208. A	209. C	210. D	211. C
212. B	213. D	214. A	215. C	216. C	217. C	218. B	219. B	220. A	221. B
222. A	223. C	224. B	225. B	226. C	227. D	228. C	229. A	230. A	231. A
232. D	233. C	234. A	235. A	236. D	237. A	238. B	239. D	240. A	241. B
242. A	243. A	244. D	245. A	246. C	247. D	248. A	249. D	250. A	251. C
252. D	253. C	254. C	255. B	256. C	257. D	258. D	259. A	260. A	261. D
262. C	263. B	264. A	265. B	266. B	267. C	268. C	269. C	270. A	271. B
272. B	273. C	274. B	275. C	276. B	277. B	278. C	279. C	280. D	281. D
282. B	283. C	284. A	285. C	287. A	288. D	289. B	290. C	291. D	292. C
293. B	294. A	295. D	296. C	297. D	298. B	299. B	300. B	301. C	302. C
303. B	304. B	305. C	306. D	307. B	308. B	309. D	310. C	311. B	312. C
313. B	314. A	315. C	316. D	317. B	318. D	319. D	320. C	321. B	322. D
323. A	324. B	325. C	326. B	327. C	328. B	329. B	330. C	331. A	332. B
333. D	334. D	335. C	336. A	337. A	338. D	339. B	340. C	341. A	342. B
343. B	344. A	345. C	346. D	347. D	348. D	349. B	350. C	351. D	352. B
353. B	354. A	355. A	356. D	357. D	358. A	359. B	360. C	361. A	362. D

§3 PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Khái niệm. Phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng tổng quát là

$$ax + by = c \quad (1),$$

trong đó a, b, c là các hệ số, với điều kiện a và b không đồng thời bằng 0.

a) Nếu $a = b = c = 0$ thì (1) có vô số nghiệm (mọi cặp số $(x_0; y_0)$ đều là nghiệm).

b) Nếu $a = b = 0, c \neq 0$ thì (1) vô nghiệm.

c) Nếu $b \neq 0$ thì (1) có dạng $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ (d). Khi đó $(x_0; y_0)$ là nghiệm của (1) $\Leftrightarrow M(x_0; y_0)$ thuộc đường thẳng (d).

Tổng quát, phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c, (a^2 + b^2 \neq 0)$ luôn có vô số nghiệm. Biểu diễn hình học tập nghiệm của phương trình là một đường thẳng trong mặt tọa độ Oxy .

2 HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Khái niệm. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng tổng quát là

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \quad (2),$$

trong đó x, y là hai ẩn; các chữ còn lại là hệ số. Nếu cặp số $(x_0; y_0)$ đồng thời là nghiệm của cả hai phương trình của hệ thì $(x_0; y_0)$ được gọi là nghiệm của hệ phương trình (2). Giải hệ phương trình (2) là tìm tập nghiệm của nó.

3 HỆ BA PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT BA ẨN

Khái niệm. Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn có dạng tổng quát là

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases} \quad (3),$$

trong đó x, y, z là ba ẩn; các chữ còn lại là hệ số. Nếu bộ ba số $(x_0; y_0; z_0)$ nghiệm đúng cả ba phương trình của hệ thì $(x_0; y_0; z_0)$ được gọi là nghiệm của hệ phương trình (3).

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp thế hoặc phương pháp cộng đại số

1. Quy tắc thế

Quy tắc thế dùng để biến đổi một hệ phương trình thành hệ phương trình tương đương. Quy tắc thế gồm hai bước sau:

- Bước 1: Từ một phương trình của hệ đã cho (coi là phương trình thứ nhất), ta biểu diễn một ẩn theo ẩn kia rồi thế vào phương trình thứ hai để được một phương trình mới (chỉ còn một ẩn).
- Bước 2: Dùng phương trình mới để thay thế cho phương trình thứ hai trong hệ (và giữ nguyên phương trình thứ nhất).

Tóm tắt cách giải hệ phương trình bằng phương pháp thế

- Bước 1: Dùng quy tắc thế biến đổi hệ phương trình đã cho để được một hệ phương trình mới, trong đó có một phương trình một ẩn.
- Bước 2: Giải phương trình một ẩn vừa có, rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho.

Chú ý: Nếu thấy xuất hiện phương trình có các hệ số của hai ẩn đều bằng 0 thì hệ phương trình đã cho có thể có vô số nghiệm hoặc vô nghiệm.

2. Quy tắc cộng đại số

Quy tắc cộng đại số dùng để biến đổi một hệ phương trình thành hệ phương trình tương đương.

Quy tắc cộng đại số gồm hai bước:

- Bước 1: Cộng hay trừ từng vế hai phương trình của hệ phương trình đã cho để được một phương trình mới.
- Bước 2: Dùng phương trình mới ấy thay thế cho một trong hai phương trình của hệ (và giữ nguyên phương trình kia).

Tóm tắt cách giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số

- Bước 1: Nhân các vế của hai phương trình với một số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình của hệ bằng nhau hoặc đối nhau.
- Bước 2: Sử dụng quy tắc cộng đại số để được hệ phương trình mới, trong đó có một phương trình mà hệ số của một trong hai ẩn bằng 0 (tức là phương trình một ẩn).
- Bước 3: Giải phương trình một ẩn vừa thu được rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho.

BÀI TẬP DẠNG 1

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x - 3y = 7. \end{cases}$$

Lời giải.

Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ 2x - 3(3x - 1) = 7. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 1 \\ -7x + 3 = 7. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 1 \\ x = -\frac{4}{7}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{7} \\ y = -\frac{19}{7}. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = \left(-\frac{4}{7}; -\frac{19}{7}\right)$. □

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{x+5} + \sqrt{y-8} = 11 \\ 5\sqrt{x+5} - 4\sqrt{y-8} = 8. \end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x+5 \geq 0 \\ y-8 \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ y \geq 8. \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x+5} \\ v = \sqrt{y-8}. \end{cases}$, $u, v \geq 0$. Hệ phương trình theo u, v :

$$\begin{cases} 2u + v = 11 \\ 5u - 4v = 8. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 11 - 2u \\ 5u - 4(11 - 2u) = 8. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 11 - 2 \cdot 4 = 3 \\ u = 4. \end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} \sqrt{x+5} = 4 \\ \sqrt{y-8} = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+5 = 16 \\ y-8 = 9. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ y = 17. \end{cases}$ (thỏa điều kiện)

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = (11; 17)$. □

Ví dụ 3. Ngày sinh nhật của cô giáo A gồm hai chữ số, biết rằng tổng của hai chữ số đó là 8. Nếu viết ngày sinh nhật theo thứ tự ngược lại thì được một số bằng 4 lần số ban đầu cộng thêm 3. Vậy ngày sinh nhật của cô giáo A là bao nhiêu?

Lời giải.

Gọi ngày sinh nhật là $\overline{ab}$ với $a, b \in \mathbb{N}$, $10 \leq \overline{ab} \leq 31$.

Theo đề bài ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a + b = 8 \\ \overline{ba} = 4\overline{ab} + 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 8 - a \\ 10b + a = 4(10a + b) + 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 8 - a \\ 39a - 6(8 - a) = -3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 7. \end{cases}$$

Vậy ngày sinh nhật của cô giáo A là 17. □

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 5y = 8 \\ 2x - 3y = 0. \end{cases}$

Lời giải.

Lấy phương trình thứ nhất trừ với phương trình thứ hai ta được $8y = 8$. Do đó hệ phương trình trên trở thành

$$\begin{cases} 2x + 5y = 8 \\ 8y = 8. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 1. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = \left(\frac{3}{2}; 1\right)$. □

Ví dụ 5. Nếu đem $\frac{1}{5}$ số trâu và $\frac{1}{3}$ số bò gộp lại thì được 25 con. Nếu đem $\frac{2}{5}$ số trâu và $\frac{1}{4}$ số bò gộp lại thì được 30 con. Tính số trâu và số bò.

Lời giải.

Gọi x và y lần lượt là số trâu và số bò (x, y là các số nguyên dương). Ta có

$$\begin{cases} \frac{1}{5}x + \frac{1}{3}y = 25 & (1) \\ \frac{2}{5}x + \frac{1}{4}y = 30 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{5}x + \frac{1}{3}y = 25 \\ \frac{5}{12}y = 20. \end{cases} \quad (\text{Lấy (1) nhân với 2 rồi trừ cho (2)})$$

Từ đó suy ra $x = 45, y = 48$. Vậy có 45 con trâu và 48 con bò. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (\sqrt{3} + 1)x + y = \sqrt{3} - 1 \\ 2x - (\sqrt{3} - 1)y = 2\sqrt{3}. \end{cases}$

Lời giải.

Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = -(\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3} - 1 \\ 2x + (\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)x - (\sqrt{3} - 1)^2 = 2\sqrt{3}. \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -(\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3} - 1 \\ 2x + 2x = 2\sqrt{3} + (\sqrt{3} - 1)^2. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -(\sqrt{3} + 1) \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{4} + \sqrt{3} - 1 \\ x = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = (1; -2)$. □

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x - 4y = 10. \end{cases}$

Lời giải.

Lấy phương trình thứ nhất nhân với 3, phương trình thứ hai nhân với 2 ta được

$$\begin{aligned} \begin{cases} 6x + 9y = 3 & (a) \\ 6x - 8y = 20 & (b) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 9y = 3 \\ 17y = -17. \end{cases} \quad (\text{Lấy (a) trừ cho (b)}) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = (2; -1)$. □

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{10}{4x - y} + \frac{1}{x + y} = 1 \\ \frac{25}{4x - y} + \frac{3}{x + y} = 2. \end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} 4x - y \neq 0 \\ x + y \neq 0. \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{4x - y} \\ v = \frac{1}{x + y}. \end{cases}$. Hệ phương trình theo u, v :

$$\begin{cases} 10u + v = 1 \\ 25u + 3v = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 1 - 10u \\ 25u + 3(1 - 10u) = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 1 \\ u = \frac{1}{5}. \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \frac{1}{4x - y} = \frac{1}{5} \\ \frac{1}{x + y} = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - y = 5 \\ x + y = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x - 5 \\ x + 4x - 5 = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = -\frac{1}{5}. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = \left(\frac{6}{5}; -\frac{1}{5}\right)$. □

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 0, 4x - 0, 3y = 0, 6 \\ 0, 3x - 0, 2y = 1, 3. \end{cases}$

Lời giải.

Lấy phương trình thứ nhất nhân với 3, phương trình thứ hai nhân với 4 ta được

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 1, 2x - 0, 9y = 1, 8 \\ 1, 2x - 0, 8y = 5, 2. \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 1, 2x - 0, 9y = 1, 8 \\ -0, 1y = -3, 4. \end{cases} \quad (\text{Lấy phương trình trên trừ phương trình dưới}) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 27 \\ y = 34. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = (27; 34)$. □

Bài 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{3}{4}x + \frac{3}{7}y = \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5}x + \frac{2}{7}y = \frac{1}{3}. \end{cases}$

Lời giải.

Lấy phương trình thứ nhất nhân với $\frac{2}{5}$, phương trình thứ hai nhân với $\frac{3}{4}$ ta được

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{3}{10}x + \frac{6}{35}y = \frac{6}{25} \\ \frac{3}{10}x + \frac{3}{14}y = \frac{1}{4}. \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \frac{3}{10}x + \frac{6}{35}y = \frac{6}{25} \\ -\frac{3}{70}y = -\frac{1}{100}. \end{cases} \quad (\text{Lấy phương trình trên trừ phương trình dưới}) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{7}{30}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = \left(\frac{2}{3}; \frac{7}{30}\right)$. □

Bài 6. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{3x} + \frac{3}{5y} = 4 \\ \frac{3}{2x} + \frac{1}{5y} = 2. \end{cases}$$

Lời giải.

Điều kiện: $x \neq 0, y \neq 0$. Ta xem đây là hệ phương trình bậc nhất theo $X = \frac{1}{x}$ và $Y = \frac{1}{y}$.

Nhân phương trình thứ nhất với $\frac{3}{2}$, phương trình thứ hai với $\frac{1}{3}$ ta được

$$\begin{cases} \frac{1}{2}X + \frac{9}{10}Y = 6 \\ \frac{1}{2}X + \frac{1}{15}Y = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}X + \frac{9}{10}Y = 6 \\ \frac{5}{6}Y = \frac{16}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{12}{25} \\ Y = \frac{32}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{25}{12} \\ y = \frac{5}{32} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x; y) = \left(\frac{25}{12}; \frac{5}{32}\right)$. □

Bài 7. Cho đường thẳng $d : y = ax + b$ ($a \neq 0$). Viết phương trình của d biết nó đi qua hai điểm $A(3; 2), B(1; -2)$.

Lời giải.

Vì d đi qua A và B nên tọa độ của A và B thỏa mãn phương trình của d . Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 3a + b = 2 \\ a + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \end{cases}.$$

Vậy $d : y = 2x - 4$. □

Bài 8. Một bài kiểm tra có 15 câu hỏi. Mỗi câu trả lời đúng được cộng 5 điểm. Mỗi câu trả lời sai hoặc bỏ trống bị trừ 5 điểm. Một học sinh làm bài kiểm tra và đạt 25 điểm. Hỏi bạn đó đã trả lời đúng bao nhiêu câu?

Lời giải.

Gọi số câu trả lời đúng là x , số câu trả lời sai hoặc không trả lời là y (x, y là các số nguyên không âm). Ta có

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ 5x - 5y = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 15 \\ 10x = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 5 \end{cases}.$$

Vậy học sinh đó trả lời đúng 10 câu. □

Bài 9. Có 2 loại xe khách (loại I và loại II). Nếu chọn phương án vận chuyển hành khách bằng 2 chuyến xe loại I và 5 chuyến xe loại II thì vận chuyển được tối đa 190 hành khách (không tính tài xế). Nếu chọn phương án vận chuyển bằng 3 chuyến xe loại I và 3 chuyến xe loại II thì vận chuyển được tối đa 195 hành khách (không tính tài xế). Hỏi mỗi loại xe có thể chứa tối đa bao nhiêu hành khách (không tính tài xế)?

Lời giải.

Gọi x và y lần lượt là số hành khách tối đa có thể chở được của xe loại I và xe loại II (x, y là các số nguyên dương). Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + 5y = 190 \\ 3x + 3y = 195. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 45 \\ y = 20. \end{cases}$$

□

Bài 10. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2|x + y| + |x - y| = 7 \\ -|x + y| + 4|x - y| = 10. \end{cases}$

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = |x + y| \\ v = |x - y| \end{cases}, u, v \geq 0$. Hệ phương trình theo u, v :

$$\begin{cases} 2u + v = 7 \\ -u + 4v = 10. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 7 - 2u \\ -u + 4(7 - 2u) = 10. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3 \\ u = 2. \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} |x + y| = 2 \\ |x - y| = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = -2 \end{cases} \\ |x - y| = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y = 2 - x \\ |x - y| = 3. \end{cases} \\ \begin{cases} y = -2 - x \\ |x - y| = 3. \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Xét hệ } \begin{cases} y = 2 - x \\ |x - y| = 3. \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ |x - (2 - x)| = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ \begin{cases} 2x - 2 = 3 \\ 2x - 2 = -3. \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ x = -\frac{1}{2}. \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = -\frac{1}{2}. \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{5}{2}. \end{cases} \end{cases} \\ \text{Xét hệ } \begin{cases} y = -2 - x \\ |x - y| = 3. \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 - x \\ |x - (-2 - x)| = 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 - x \\ \begin{cases} 2x + 2 = 3 \\ 2x + 2 = -3. \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 - x \\ \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{5}{2}. \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{5}{2}. \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{5}{2} \\ y = \frac{1}{2}. \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm là $\left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right); \left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right); \left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right); \left(-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$. □

Dạng 2. Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn

- Bước 1: Dùng phương pháp cộng đại số đưa hệ đã cho về dạng tam giác.
- Bước 2: Giải hệ và kết luận

❖❖❖ **BÀI TẬP DẠNG 2** ❖❖❖

Chú ý

- Cách giải hệ dạng tam giác: từ phương trình cuối ta tìm z , thay vào phương trình thứ hai ta tìm được y và cuối cùng thay y, z vào phương trình thứ nhất ta tìm được x .
- Nếu trong quá trình biến đổi ta thấy xuất hiện phương trình chỉ có một ẩn thì ta giải tìm ẩn đó rồi thay vào hai phương trình còn lại để giải hệ hai phương trình hai ẩn.
- Ta có thể thay đổi thứ tự các phương trình trong hệ để việc biến đổi dễ hơn.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 2y + z = 10 \\ y - z = 5 \\ 2z = 4. \end{cases}$$

Lời giải.

Từ phương trình (3) suy ra $z = 2$.

Thay $z = 2$ vào phương trình (2) ta được $y - 2 = 5 \Leftrightarrow y = 7$.

Thay $y = 7, z = 2$ vào phương trình (3) ta được $x + 2 \cdot 7 + 2 = 10 \Leftrightarrow x = -6$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(-6; 7; 2)$. □

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x - y + z = -3 \\ 3x + 2y + 3z = 6 \\ 2x - y - 4z = 3. \end{cases}$$

Lời giải.

Nhân hai vế của phương trình (1) với -3 rồi cộng vào phương trình (2) theo từng vế tương ứng, nhân hai vế của phương trình (1) với -2 rồi cộng vào phương trình (3) theo từng vế tương ứng, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y + z = -3 \\ -5y = -15 \\ y - 6z = 9. \end{cases}$$

Giải phương trình (2) ta được $y = 3$.

Thay $y = 3$ vào phương trình (3) ta được $3 - 6z = 9 \Leftrightarrow z = -1$

Thay $y = 3, z = -1$ vào phương trình (1) ta được $x - 3 + (-1) = -3 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(1; 3; -1)$. □

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 2x + y - z = -1 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$$

Lời giải.

Nhân hai vế của phương trình (1) với -2 rồi cộng vào phương trình (2) theo từng vế tương ứng, Nhân hai vế của phương trình (1) với -1 rồi cộng vào phương trình (2) theo từng vế tương ứng, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 3y - 5z = -9 \\ 2y - z = 1 \end{cases}$$

Tiếp tục nhân hai vế của phương trình (2) với $-\frac{2}{3}$ rồi cộng vào phương trình (3) theo từng vế tương ứng, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 3y - 5z = -9 \\ \frac{7}{3}z = 7 \end{cases}$$

Từ phương trình (3) suy ra $z = 3$.

Thay $z = 3$ vào phương trình (2) ta được $3y - 5 \cdot 3 = -9 \Leftrightarrow y = 2$.

Thay $y = 2, z = 3$ vào phương trình (3) ta được $x - 2 + 2 \cdot 3 = 4 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(0; 2; 3)$. □

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 10 \\ \frac{2}{x} - \frac{1}{y} + \frac{3}{z} = 16 \\ \frac{1}{x} - \frac{2}{y} - \frac{1}{z} = -9 \end{cases}$$

Lời giải.

Ta đặt $u = \frac{1}{x}, v = \frac{1}{y}, t = \frac{1}{z}$. Khi đó hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} u + v + t = 10 \\ 2u - v + 3t = 16 \\ u - 2v - t = -9 \end{cases}$$

Dùng phép cộng đại số ta đưa hệ trên về dạng tam giác, ta được hệ

$$\begin{cases} u + v + t = 10 \\ -3v + t = -4 \\ -3t = -15 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $u = 2, v = 3, t = 5$.

Suy ra $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}, t = \frac{1}{5}$. □

Ví dụ 5. Ba bạn Vân, Anh, Khoa đi chợ mua trái cây. Bạn Anh mua 2 kí cam và 3 kí quýt hết 105 nghìn đồng, bạn Khoa mua 4 kí nho và 1 kí cam hết 215 nghìn đồng, bạn Vân mua 2 kí nho, 3 kí cam và 1 kí quýt hết 170 nghìn đồng. Hỏi giá mỗi loại cam, quýt, nho là bao nhiêu?

Lời giải.

Gọi x, y, z (nghìn đồng) lần lượt là giá một kí cam, quýt, nho. Điều kiện x, y, z là số dương.

Từ giả thiết bài toán ta có

$$\begin{cases} 2x + 3y = 105 \\ x + 4z = 215 \\ 3x + y + 2z = 170 \end{cases}$$

Dùng phép cộng đại số ta đưa hệ trên về dạng tam giác, ta được hệ

$$\begin{cases} x + 4y = 125 \\ y - 10z = -475 \\ 22z = 1100 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $x = 15, y = 25, z = 50$.

Vậy giá mỗi kí cam, quýt, nho lần lượt là 15, 25, 50 (nghìn đồng). □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y + 5z = -8 \\ 2y + z = -2 \\ -3z = 6 \end{cases}$

Lời giải.

Nghiệm của hệ phương trình là $(1; 0; -2)$. □

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y - z = 6 \\ 3y = 9 \\ 2x - z = 5 \end{cases}$

Lời giải.

Nghiệm của hệ phương trình là $(2; 3; -1)$. □

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} -x - y + z = 3 \\ 3x + y - z = -5 \\ 2x + 3y - 5z = -14 \end{cases}$

Lời giải.

Nghiệm của hệ phương trình là $(-1; 1; 3)$. □

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y + z = 19 \\ 3x + y - 3z = -9 \\ 2x - 2y + z = 5 \end{cases}$

Lời giải.

Nghiệm của hệ phương trình là $(4; 6; 9)$. □

Bài 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 5x - y + 2z = 20 \\ 2x + 2y - z = 23 \\ x + y - z = 11 \end{cases}$

Lời giải.

Nghiệm của hệ phương trình là $(5; 7; 1)$. □

Bài 6. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{6}{z} = 1 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{3}{z} = \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Lời giải.

Ta đặt $u = \frac{1}{x}, y = \frac{1}{y}, t = \frac{1}{z}$. Khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 2u + 3v + 6t = 1 \\ u - v + 3t = \frac{2}{3} \\ -u + v + 2t = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $u = \frac{1}{10}, v = -\frac{1}{15}, t = \frac{1}{6}$.

Suy ra $x = 10, y = -15, z = 6$. □

Bài 7. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{x+1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} = -11 \\ \frac{2}{x} - \frac{2y+4}{y} + \frac{1}{z} = -7 \\ -\frac{3}{x} + \frac{1}{y} + \frac{-2-z}{z} = -6 \end{cases}$$

Lời giải.

Ta có $\frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}, \frac{2y+4}{y} = 2 + \frac{4}{y}, \frac{-2-z}{z} = -\frac{2}{z} - 1$ nên hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} = -12 \\ \frac{2}{x} - \frac{4}{y} + \frac{1}{z} = -5 \\ -\frac{3}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{z} = -5 \end{cases}$$

Đặt $u = \frac{1}{x}, v = \frac{1}{y}, t = \frac{1}{z}$ thì hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} u + 2v - 3t = -12 \\ 2u - 4v + t = -5 \\ -3u + v - 2t = -5 \end{cases}$$

Giải hệ ta được $u = -1, v = 2, t = 5$.

Suy ra $x = -1, y = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{5}$. □

Bài 8. Một cửa hàng bán quần, áo và nón. Ngày thứ nhất bán được 3 cái quần, 7 cái áo và 10 cái nón, doanh thu là 1930000 đồng. Ngày thứ hai bán được 5 cái quần, 6 cái áo và 8 cái nón, doanh thu là 2310000 đồng. Ngày thứ ba bán được 11 cái quần, 9 cái áo và 3 cái nón, doanh thu là 3390000 đồng. Hỏi giá bán mỗi quần, mỗi áo, mỗi nón là bao nhiêu?

Lời giải.

Gọi x, y, z (đồng) lần lượt là giá bán mỗi quần, mỗi áo, mỗi nón. Theo đề bài ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x + 7y + 10z = 1930000 \\ 5x + 6y + 8z = 2310000 \\ 11x + 9y + 3z = 3390000 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $x = 210000, y = 100000, z = 60$.

Vậy giá bán mỗi quần, mỗi áo, mỗi nón lần lượt là 210000 đồng, 100000 đồng, 60000 đồng. $\square$

Dạng 3. Giải và biện luận hệ 2 phương trình bậc nhất 2 ẩn có chứa tham số (PP Crame)

a) **Dạng:**
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (a_1^2 + b_1^2 \neq 0) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (a_2^2 + b_2^2 \neq 0). \end{cases}$$

Cách giải đã biết: Phép thế, phép cộng...

b) **Giải và biện luận hệ phương trình:**

Bước 1: Tính các định thức:

- $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$ (Gọi là định thức của hệ);
- $D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$ (Gọi là định thức của x);
- $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$ (Gọi là định thức của y).

Bước 2: Biện luận

- Nếu $D \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} \\ y = \frac{D_y}{D} \end{cases}$.
- Nếu $D = 0$ và $D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$ thì hệ vô nghiệm.
- Nếu $D = D_x = D_y = 0$ thì hệ có vô số nghiệm (tập nghiệm của hệ là tập nghiệm của phương trình $a_1x + b_1y = c_1$).

BÀI TẬP DẠNG 3

Ví dụ 1. Giải và biện luận hệ phương trình:
$$\begin{cases} mx + y = m + 1 \\ x + my = 2. \end{cases}$$

Lời giải.

$$D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1; D_x = \begin{vmatrix} m+1 & 1 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m^2 + m - 2; D_y = \begin{vmatrix} m & m+1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = m - 1.$$

a) Nếu $m = 1 \Rightarrow D = D_x = D_y = 0$. Hệ có vô số nghiệm $(x; y)$ thỏa $x + y = 2$.

b) Nếu $m = -1 \Rightarrow \begin{cases} D = 0 \\ D_x = -2. \end{cases}$ Hệ vô nghiệm.

c) Nếu $m \neq 1, m \neq -1$. Hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{m^2 + m - 2}{m^2 - 1} = \frac{m + 2}{m + 1} \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{m - 1}{m^2 - 1} = \frac{1}{m + 1}. \end{cases}$

□

Ví dụ 2. Với giá trị nguyên nào của tham số m , hệ phương trình $\begin{cases} mx + 4y = m + 2 \\ x + my = m. \end{cases}$ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ với x, y là các số nguyên.

Lời giải.

$$D = m^2 - 4 = (m - 2)(m + 2), D_x = m^2 + 2m - 4m = m^2 - 2m = m(m - 2),$$

$$D_y = m^2 - m - 2 = (m + 1)(m - 2).$$

$$D = m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2, \text{ hệ có nghiệm duy nhất } \begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{m}{m + 2} \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{m + 1}{m + 2}. \end{cases}$$

Ta có:

$$x = \frac{m}{m + 2} = 1 - \frac{2}{m + 2} \text{ nên để } x \text{ nguyên thì } m + 2 \text{ phải là ước của 2 (1);}$$

$$y = \frac{m + 1}{m + 2} = 1 - \frac{1}{m + 2} \text{ nên để } y \text{ nguyên thì } m + 2 \text{ phải là ước của 1 (2).}$$

$$\text{Từ (1),(2), suy ra } m + 2 \text{ là ước của 1} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 = 1 \\ m + 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -3. \end{cases}$$

□

Ví dụ 3. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + my = 1 \\ mx - y = -m. \end{cases}$

a) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m hệ phương trình đã cho luôn có nghiệm duy nhất.

b) Tìm các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $x < 1, y < 1$.

c) Tìm hệ thức liên hệ giữa x, y không phụ thuộc vào m .

Lời giải.

$$a) D = -1 - m^2 < 0, \quad \forall m$$

$$D_x = -1 + m^2$$

$$D_y = -m - m = -2m$$

$$\text{Ta có: } D \neq 0, \quad \forall m \text{ nên hệ phương trình có nghiệm duy nhất } \begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{m^2 - 1}{-m^2 - 1} \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{-2m}{-m^2 - 1}. \end{cases}$$

$$b) x < 1 \Leftrightarrow \frac{m^2 - 1}{-m^2 - 1} < 1 \Leftrightarrow m^2 - 1 > -m^2 - 1 \Leftrightarrow m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0.$$

$$y < 1 \Leftrightarrow \frac{-2m}{-m^2 - 1} < 1 \Leftrightarrow -2m > -m^2 - 1 \Leftrightarrow (m - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 1.$$

Vậy với $m \neq 0 \wedge m \neq 1$ thì hệ có nghiệm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

$$c) \quad x^2 + y^2 = \left(\frac{m^2 - 1}{m^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{2m}{m^2 + 1}\right)^2 = \frac{m^4 - 2m^2 + 1 + 4m^2}{m^4 + 2m^2 + 1} = \frac{m^4 + 2m^2 + 1}{m^4 + 2m^2 + 1} = 1.$$

Vậy $x^2 + y^2 = 1$ không phụ thuộc vào m .

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải và biện luận hệ phương trình sau:

$$a) \quad \begin{cases} (m - 1)x + 2y = 3m - 1 \\ (m + 2)x - y = 1 - m. \end{cases}$$

$$b) \quad \begin{cases} ax + by = a^2 + b^2 \\ by + ax = 2ab. \end{cases}$$

$$c) \quad \begin{cases} m\sqrt{x+1} + \sqrt{y} = m + 1 \\ \sqrt{x+1} + m\sqrt{y} = 2. \end{cases}$$

Bài 2. Tìm m để hệ sau vô nghiệm:
$$\begin{cases} 2m^2x + 3(m - 1)y = 3 \\ m(x + y) - 2y = 2. \end{cases}$$

Bài 3. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} mx + 2y = 3 \\ x + my = 1 \end{cases}$$
. Xác định tất cả các giá trị của tham số m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa $x > 1, y > 1$.

Bài 4. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + m^2y = m + 1 \\ m^2x + y = 3 - m \end{cases}$$
. Xác định tất cả các giá trị của tham số m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho $S = x + y$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.

$$D = 1 - m^4$$

$$D_x = m + 1 - m^2(3 - m) = m^3 - 3m^2 + m + 1$$

$$D_y = 3 - m - m^2(m + 1) = -m^3 - m^2 - m + 3$$

$$\text{Hệ có nghiệm duy nhất} \Leftrightarrow D \neq 0 \Leftrightarrow 1 - m^4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$$

$$\begin{aligned} x + y &= \frac{D_x}{D} + \frac{D_y}{D} = \frac{m^3 - 3m^2 + m + 1}{1 - m^4} + \frac{-m^3 - m^2 - m + 3}{1 - m^4} \\ &= \frac{-4m^2 + 4}{1 - m^4} = \frac{4(1 - m^2)}{(1 - m^2)(1 + m^2)} = \frac{4}{1 + m^2} \leq \frac{4}{1 + 0} = 4 \end{aligned}$$

Dấu "=" đạt khi $m = 0$ (thỏa điều kiện)

□

Bài 5. Cho
$$\begin{cases} ax + by = c \\ bx + cy = a \\ cx + ay = b \end{cases}$$
. Chứng minh $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Lời giải.

$$\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ bx + cy = a & (2) \\ cx + ay = b & (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a + b + c)x + (a + b + c)y = a + b + c$$

$$\Leftrightarrow (a + b + c)(x + y - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

- $a + b + c = 0$

Ta có: $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(ab + bc + ca)(a + b + c) - 3abc$
 $\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

- $x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 - y$ thế vào hệ, ta được:

$$\begin{cases} a(1 - y) + by = c \\ b(1 - y) + cy = a \\ c(1 - y) + ay = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b - a)y = c - a \\ (c - b)y = a - b \\ (a - c)y = b - c \end{cases}$$

Nếu $a = b$, để hệ có nghiệm ta suy ra $a = b = c \Rightarrow$ đpcm.

Nếu a, b, c khác nhau từng đôi một, từ hệ ta có:

$$(b - a)(c - b)(a - c)y^3 = (c - a)(a - b)(b - c) \Rightarrow (b - a)(c - b)(a - c)(y^3 - 1) = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 0$$

Thế $x = 0, y = 1$ vào hệ ban đầu ta được $a = b = c \Rightarrow$ đpcm. $\square$

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 6. Tìm tất cả các số nguyên m để hai đường thẳng $y = -\frac{2}{3}mx + \frac{1}{3}m$ và $y = -x + m + 1$ cắt nhau tại một điểm có các thành phần tọa độ là các số nguyên.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng đã cho là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{3}mx + \frac{1}{3}m \\ y = -x + m + 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2mx + 3y = m \\ x + y = m + 1. \end{cases} \quad (1)$$

Suy ra hai đường thẳng đã cho cắt nhau tại một điểm có các thành phần tọa độ là các số nguyên khi và chỉ khi hệ (1) có nghiệm duy nhất và nghiệm duy nhất đó nguyên.

Ta có

$$D = \begin{vmatrix} 2m & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2m - 3, D_x = \begin{vmatrix} m & 3 \\ m + 1 & 1 \end{vmatrix} = -2m - 3, D_y = \begin{vmatrix} 2m & m \\ 1 & m + 1 \end{vmatrix} = 2m^2 + m.$$

Hệ (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{3}{2}$. Khi đó nghiệm duy nhất của hệ (1) là

$$\begin{cases} x = -\frac{2m + 3}{2m - 3} \\ y = \frac{2m^2 + m}{2m - 3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - \frac{6}{2m - 3} \\ y = m + 2 + \frac{6}{2m - 3} \end{cases}.$$

Nghiệm này nguyên $\Rightarrow 2m - 3$ là ước của 6

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 3 = -1 \\ 2m - 3 = 1 \\ 2m - 3 = -2 \\ 2m - 3 = 2 \\ 2m - 3 = -3 \\ 2m - 3 = 3 \\ 2m - 3 = -6 \\ 2m - 3 = 6. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \\ m = \frac{1}{2} \\ m = \frac{5}{2} \\ m = 0 \\ m = 3 \\ m = -\frac{3}{2} \\ m = \frac{9}{2} \end{cases}.$$

Vậy $m \in \{0; 1; 2; 3\}$. □

Bài 7. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{3}{2x-y} - \frac{4}{x-2y} = -2 \\ \frac{5}{2x-y} + \frac{2}{x-2y} = 14. \end{cases}$$

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 2x - y \neq 0 \\ x - 2y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{y}{2} \\ x \neq 2y \end{cases} (*)$.

Với điều kiện (*), đặt $u = \frac{1}{2x-y}, v = \frac{1}{x-2y}$, hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} 3u - 4v = -2 \\ 5u + 2v = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u - 4v = -2 \\ 10u + 4v = 28. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u - 4v = -2 \\ 13u = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 2. \end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} 2x - y = \frac{1}{2} \\ x - 2y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{1}{2} \\ x - 2y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{6} \\ y = -\frac{1}{6} \end{cases}$ (Thỏa mãn (*)).

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $\begin{cases} x = \frac{1}{6} \\ y = -\frac{1}{6} \end{cases}$. □

Bài 8. Giải và biện luận hệ phương trình $\begin{cases} (m+n)x + (m-n)y = 2m(m^2 - n^2) \\ x - y = -4mn \end{cases}$ theo hai tham số m, n .

Lời giải.

Ta có

$$D = \begin{vmatrix} m+n & m-n \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(m+n) - (m-n) = -2m,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2m(m^2 - n^2) & m-n \\ -4mn & -1 \end{vmatrix} = -2m(m^2 - n^2) + 4mn(m-n) = -2m(m-n)^2,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} (m+n) & 2m(m^2 - n^2) \\ 1 & -4mn \end{vmatrix} = -4mn(m+n) - 2m(m^2 - n^2) = -2m(m+n)^2.$$

- Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$ thì hệ đã cho có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \frac{-2m(m-n)^2}{-2m} = (m-n)^2 \\ y = \frac{-2m(m+n)^2}{-2m} = (m+n)^2 \end{cases}$.
- Nếu $D = 0 \Leftrightarrow m = 0 \Rightarrow D_x = D_y = 0$: Hệ có vô số nghiệm $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = x. \end{cases}$

□

Bài 9. Tìm tất cả các giá trị của a, b, c để ít nhất một trong các hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x + cy = b \\ cx + y = a \end{cases} (1); \quad \begin{cases} cx + y = a \\ bx + ay = 1 \end{cases} (2); \quad \begin{cases} bx + ay = 1 \\ x + cy = b \end{cases} (3).$$

Lời giải.

Ta giải bài toán gián tiếp: Tìm tất cả các giá trị của a, b, c để cả ba hệ đã cho đều vô nghiệm.

Xét hệ $\begin{cases} x + cy = b \\ cx + y = a \end{cases} (1).$

Ta có $D_{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{vmatrix} = 1 - c^2$; $D_x = \begin{vmatrix} b & c \\ a & 1 \end{vmatrix} = b - ac$; $D_y = \begin{vmatrix} 1 & b \\ c & a \end{vmatrix} = a - bc$.

Hệ (1) vô nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} D_{(1)} = 0 \\ \begin{bmatrix} D_x \neq 0 \\ D_y \neq 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - c^2 = 0 \\ \begin{bmatrix} b - ac \neq 0 \\ a - bc \neq 0 \end{bmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b - a \neq 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} c = -1 \\ b + a \neq 0 \end{cases} \end{cases}$.

- Xét trường hợp $\begin{cases} c = 1 \\ b - a \neq 0 \end{cases}$. Thay $c = 1$ vào hệ (2), ta có: $\begin{cases} x + y = a \\ bx + ay = 1 \end{cases}$

Ta có $D_{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & a \end{vmatrix} = a - b \neq 0$. Do đó (2) có nghiệm duy nhất.

- Xét trường hợp $\begin{cases} c = -1 \\ b + a \neq 0 \end{cases}$. Thay $c = -1$ vào (3) ta có $\begin{cases} bx + ay = 1 \\ x - y = b \end{cases}$

Ta có $D_{(3)} = \begin{vmatrix} b & a \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -b - a = -(b + a) \neq 0$. Do đó (3) có nghiệm duy nhất.

Suy ra nếu (1) vô nghiệm thì các hệ (2), (3) đều có nghiệm. Do đó không tồn tại giá trị nào của a, b, c để cả ba hệ phương trình đã cho cùng vô nghiệm.

Vậy, với mọi giá trị của a, b, c thì ít nhất một trong các hệ đã cho có nghiệm.

□

Bài 10. Tập thể giáo viên (Toán và $\text{\LaTeX}$) gồm 128 người được chia thành ba nhóm ra đề kiểm tra: Nhóm 1, Nhóm 2 và Nhóm 3. Sau một ngày làm việc, cả ba nhóm hoàn thành được 476 câu trắc nghiệm và 375 câu tự luận; trong đó, mỗi thành viên Nhóm 1 hoàn thành được 3 câu trắc nghiệm và 4 câu tự luận, mỗi thành viên Nhóm 2 hoàn thành được 2 câu trắc nghiệm và 5 câu tự luận, mỗi thành viên Nhóm 3 hoàn thành được 6 câu trắc nghiệm. Hỏi mỗi nhóm có bao nhiêu giáo viên?

Lời giải.

Gọi số giáo viên của Nhóm 1, Nhóm 2, Nhóm 3 lần lượt là x, y, z (ĐK: x, y, z nguyên dương).

Theo đề bài, ta lập được hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 128 & (1) \\ 3x + 2y + 6z = 476 & (2) \\ 4x + 5y = 375 & (3) \end{cases}$$

Nhân hai vế của (1) với -6 rồi cộng vào (2), ta được hệ

$$\begin{cases} x + y + z = 128 & (1) \\ 3x + 4y = 292 & (4) \\ 4x + 5y = 375 & (5) \end{cases}$$

Từ (4) và (5) ta có $\begin{cases} x = 40 \\ y = 43. \end{cases}$ Thế vào (1) ta được $z = 45$ (thỏa mãn ĐK).

Vậy số giáo viên của các nhóm 1, 2, 3 lần lượt là 40, 43, 45. □

Bài 11. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + ay + a^2z + a^3 = 2017 \\ x + by + b^2z + b^3 = 2017 \\ x + cy + c^2z + c^3 = 2017. \end{cases}$ (1), với a, b, c là các tham số đôi một khác

nhau.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} x + ay + a^2z + a^3 = 2017 \\ (b-a)y + (b^2-a^2)z + b^3-a^3 = 0 \\ (c-a)y + (c^2-a^2)z + c^3-a^3 = 0. \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + ay + a^2z + a^3 = 2017 \\ y + (b+a)z + b^2 + ab + a^2 = 0 \\ y + (c+a)z + c^2 + ac + a^2 = 0. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + ay + a^2z + a^3 = 2017 \\ y + (b+a)z + b^2 + ab + a^2 = 0 \\ (b-c)z + b^2 - c^2 + a(b-c) = 0. \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + ay + a^2z + a^3 = 2017 \\ y + (b+a)z + b^2 + ab + a^2 = 0 \\ z = -(a+b+c). \end{cases} \\ & &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -ay - a^2z - a^3 + 2017 \\ y = ab + bc + ca \\ z = -(a+b+c). \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ (1) có nghiệm là $\begin{cases} x = -abc + 2017 \\ y = ab + bc + ca \\ z = -(a+b+c). \end{cases}$ □

C CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + z = 11 \\ 2x - y + z = 5 \\ 3x + 2y + z = 24 \end{cases}$$
 là

- A. $(x; y; z) = (5; 3; 3)$. B. $(x; y; z) = (4; 5; 2)$. C. $(x; y; z) = (2; 4; 5)$. D. $(x; y; z) = (3; 5; 3)$.

Lời giải.

Cách 1. Từ phương trình $x + y + z = 11$ suy ra $z = 11 - x - y$. Thay vào hai phương trình còn lại ta được hệ phương trình, ta được
$$\begin{cases} 2x - y + 11 - x - y = 5 \\ 3x + 2y + 11 - x - y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -6 \\ 2x + y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$$
. Từ đó ta được $z = 11 - 4 - 5 = 2$. Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y; z) = (4; 5; 2)$.

Cách 2. Bằng cách sử dụng MTCT ta được $(x; y; z) = (4; 5; 2)$ là nghiệm của hệ phương trình

Chọn đáp án **B** □

Câu 2. Nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ y + 2z = 2 \\ z + 2x = 3 \end{cases}$$
 là:

- A. $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$.

Lời giải.

Cách 1. Từ phương trình $z + 2x = 3$ suy ra $z = 3 - 2x$. Thay vào hai phương trình còn lại ta được hệ phương trình, ta được
$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ y + 2(3 - 2x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 \\ -4x + y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$
. Từ đó ta được $z = 3 - 2 \cdot 1 = 1$. Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y; z) = (1; 0; 1)$.

Cách 2. Bằng cách sử dụng MTCT ta được $(x; y; z) = (1; 0; 1)$ là nghiệm của hệ phương trình

Chọn đáp án **D** □

Câu 3. Bộ $(x; y; z) = (2; -1; 1)$ là nghiệm của hệ phương trình nào sau đây ?

- A. $\begin{cases} x + 3y - 2z = -3 \\ 2x - y + z = 6 \\ 5x - 2y - 3z = 9 \end{cases}$. B. $\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ 2x + 6y - 4z = -6 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$.
C. $\begin{cases} 3x - y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x + y + z = -2 \\ 2x - y + z = 6 \\ 10x - 4y - z = 2 \end{cases}$.

Lời giải.

Bằng cách sử dụng MTCT ta được $(x; y; z) = (2; -1; 1)$ là nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 3y - 2z = -3 \\ 2x - y + z = 6 \\ 5x - 2y - 3z = 9 \end{cases}$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 4. Bộ $(x; y; z) = (1; 0; 1)$ là nghiệm của hệ phương trình nào sau đây ?

A.
$$\begin{cases} 2x + 3y + 6z - 10 = 0 \\ x + y + z = -5 \\ y + 4z = -17 \end{cases}.$$

B.
$$\begin{cases} x + 7y - z = -2 \\ -5x + y + z = 1. \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}.$$

C.
$$\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ -x + y - z = -2 \end{cases}.$$

D.
$$\begin{cases} x + 2y + z = -2 \\ x - y + z = 4 \\ -x - 4y - z = 5 \end{cases}.$$

Lời giải.

Bằng cách sử dụng MTCT ta được $(x; y; z) = (1; 0; 1)$ là nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ -x + y - z = -2 \end{cases}$$

Chọn đáp án  □

Câu 5. Gọi $(x_0; y_0; z_0)$ là nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x + y - 3z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ -x + 2y + 2z = 3 \end{cases}.$$
 Tính giá trị của biểu thức

$P = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2.$

A. $P = 1.$

B. $P = 2.$

C. $P = 3.$

D. $P = 14.$

Lời giải.

Ta có
$$\begin{cases} 3x + y - 3z = 1 & (1) \\ x - y + 2z = 2 & (2) \\ -x + 2y + 2z = 3 & (3) \end{cases}.$$
 Phương trình (2) $\Leftrightarrow x = y - 2z + 2$. Thay vào (1), ta được

$$3(y - 2z + 2) + y - 3z = 1 \Leftrightarrow 4y - 9z = -5 \quad (*)$$

Phương trình (3) $\Leftrightarrow x = 2y + 2z - 3$. Thay vào (1), ta được

$$3(2y + 2z - 3) + y - 3z = 1 \Leftrightarrow 7y + 3z = 10 \quad (**)$$

Từ (*) và (**), ta có
$$\begin{cases} 4y - 9z = -5 \\ 7y + 3z = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ z = 1 \end{cases}.$$
 Suy ra $x = 1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y; z) = (1; 1; 1) \Rightarrow P = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3$.

Chọn đáp án  □

Câu 6. Gọi $(x_0; y_0; z_0)$ là nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + z = 11 \\ 2x - y + z = 5 \\ 3x + 2y + z = 24 \end{cases}.$$
 Tính giá trị của biểu thức

$P = x_0 y_0 z_0.$

A. $P = -40.$

B. $P = 40.$

C. $P = 1200.$

D. $P = -1200.$

Lời giải.

Ta có
$$\begin{cases} x + y + z = 11 & (1) \\ 2x - y + z = 5 & (2) \\ 3x + 2y + z = 24 & (3) \end{cases}.$$
 Phương trình (3) $\Leftrightarrow z = 24 - 3x - 2y$. Thay vào (1) và (2) ta được hệ

phương trình

$$\begin{cases} x + y + 24 - 3x - 2y = 11 \\ 2x - y + 24 - 3x - 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - y = -13 \\ -x - 3y = -19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5. \end{cases}$$

Suy ra $z = 24 - 3.4 - 2.5 = 2$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y; z) = (4; 5; 2) \Rightarrow P = 4.5.2 = 40$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 7. Tìm giá trị thực của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 3y + 4 = 0 \\ 3x + y - 1 = 0 \\ 2mx + 5y - m = 0 \end{cases}$ có duy nhất một

nghiệm.

A. $m = \frac{10}{3}$.

B. $m = 10$.

C. $m = -10$.

D. $m = -\frac{10}{3}$.

Lời giải.

Từ hệ phương trình đã cho ta suy ra $\begin{cases} 2x + 3y + 4 = 0 \\ 3x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$.

Hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 3y + 4 = 0 \\ 3x + y - 1 = 0 \\ 2mx + 5y - m = 0 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất khi $(1; -2)$ là nghiệm của phương trình

$2mx + 5y - m = 0$ tức là $2m.1 + 5.(-2) - m = 0 \Leftrightarrow m = 10$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 8. Tìm giá trị thực của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = 1 \\ my + z = 1 \\ x + mz = 1 \end{cases}$ vô nghiệm.

A. $m = -1$.

B. $m = 0$.

C. $m = 1$.

D. $m = 1$.

Lời giải.

Cách 1. Từ hệ phương trình đã cho suy ra $z = 1 - my$. Thay vào hai phương trình còn lại, ta được

$$\begin{aligned} & \begin{cases} mx + y = 1 \\ x + m(1 - my) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx + y = 1 \\ x - m^2y = 1 - m \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y = 1 - mx \\ x - m^2(1 - mx) = 1 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - mx \\ (1 + m^3)x = m^2 - m + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Hệ phương trình đã cho vô nghiệm khi $\begin{cases} 1 + m^3 = 0 \\ m^2 - m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m^2 - m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$.

Cách 2. (Thử trực tiếp) Thay $m = -1$ vào hệ phương trình ta được hệ phương trình $\begin{cases} -x + y = 1 \\ -y + z = 1 \\ x - z = 1 \end{cases}$

Sử dụng MTCT ta thấy hệ vô nghiệm.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 9. Một đoàn xe tải chở 290 tấn xi măng cho một công trình xây đập thủy điện. Đoàn xe có 57 chiếc gồm ba loại, xe chở 3 tấn, xe chở 5 tấn và xe chở 7,5 tấn. Nếu dùng tất cả xe 7,5 tấn chở ba chuyến thì được số xi măng bằng tổng số xi măng do xe 5 tấn chở ba chuyến và xe 3 tấn chở hai chuyến. Hỏi số xe mỗi loại?

- A. 18 xe chở 3 tấn, 19 xe chở 5 tấn và 20 xe chở 7,5 tấn.
- B. 20 xe chở 3 tấn, 19 xe chở 5 tấn và 18 xe chở 7,5 tấn.
- C. 19 xe chở 3 tấn, 20 xe chở 5 tấn và 18 xe chở 7,5 tấn.
- D. 20 xe chở 3 tấn, 18 xe chở 5 tấn và 19 xe chở 7,5 tấn.

Lời giải.

Gọi x là số xe tải chở 3 tấn, y là số xe tải chở 5 tấn và z là số xe tải chở 7,5 tấn.

Điều kiện: x, y, z nguyên dương.

$$\text{Theo giả thiết của bài toán ta có } \begin{cases} x + y + z = 57 \\ 3x + 5y + 7,5z = 290. \\ 22,5z = 6x + 15y \end{cases}$$

Giải hệ ta được $x = 20, y = 19, z = 18$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 10. Có ba lớp học sinh 10A, 10B, 10C gồm 128 em cùng tham gia lao động trồng cây. Mỗi em lớp 10A trồng được 3 cây bạch đàn và 4 cây bàng. Mỗi em lớp 10B trồng được 2 cây bạch đàn và 5 cây bàng. Mỗi em lớp 10C trồng được 6 cây bạch đàn. Cả ba lớp trồng được là 476 cây bạch đàn và 375 cây bàng. Hỏi mỗi lớp có bao nhiêu học sinh?

- A. 10A có 40 em, lớp 10B có 43 em, lớp 10C có 45 em.
- B. 10A có 45 em, lớp 10B có 43 em, lớp 10C có 40 em.
- C. 10A có 45 em, lớp 10B có 40 em, lớp 10C có 43 em.
- D. 10A có 43 em, lớp 10B có 40 em, lớp 10C có 45 em.

Lời giải.

Gọi số học sinh của lớp 10A, 10B, 10C lần lượt là x, y, z .

$$\text{Điều kiện: } x, y, z \text{ nguyên dương. Theo đề bài, ta lập được hệ phương trình } \begin{cases} x + y + z = 128 \\ 3x + 2y + 6z = 476. \\ 4x + 5y = 375 \end{cases}$$

Giải hệ ta được $x = 40, y = 43, z = 45$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 11. Trong một cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 24 gam hương liệu, 9 lít nước và 210 gam đường để pha chế nước ngọt loại I và nước loại II. Để pha 1 lít nước ngọt loại I cần 10 gam đường, 1 lít nước và 4 gam hương liệu. Để pha chế 1 lít nước ngọt loại II cần 30 gam đường, 1 lít nước và 1 gam hương liệu. Mỗi lít nước ngọt loại I được thưởng 80 điểm, mỗi lít nước ngọt loại II được thưởng 60 điểm. Hỏi số điểm thưởng cao nhất có thể của mỗi đội trong cuộc thi là bao nhiêu?

- A. 540.
- B. 600.
- C. 640.
- D. 720.

Lời giải.

Gọi x là số lít nước ngọt loại I, y là số lít nước ngọt loại II.

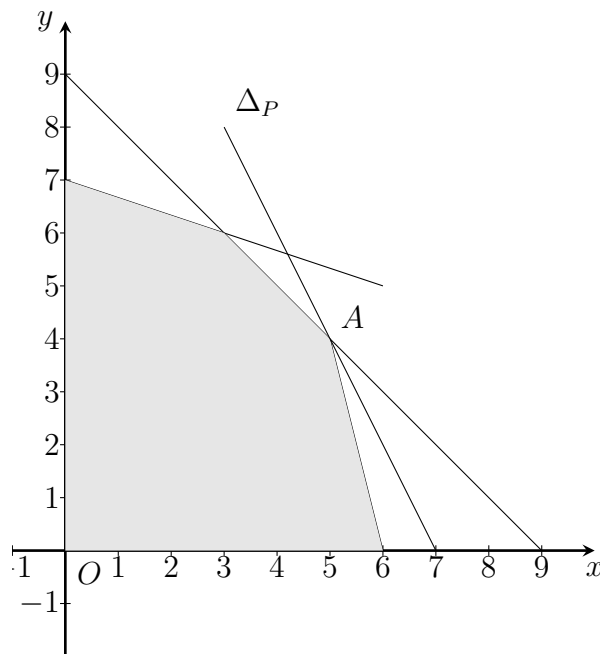
Ta có điều kiện về vật liệu ban đầu
$$\begin{cases} 10x + 30y \leq 210 \\ 4x + y \leq 24 \\ x + y \leq 9 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y \leq 21 \\ 4x + y \leq 24 \\ x + y \leq 9 \\ x, y \geq 0. \end{cases} \quad (*)$$

Điểm thưởng đạt được là $P = 80x + 60y$.

Bài toán đưa về tìm giá trị lớn nhất của P trong miền D được cho bởi hệ điều kiện (*).

Biến đổi $P = 80x + 60y \Leftrightarrow 80x + 60y - P = 0$ là họ đường thẳng Δ_P trong hệ tọa độ Oxy .

Miền D được xác định trong hình vẽ bên dưới



Giá trị lớn nhất của P ứng với Δ_P đi qua $A(5; 4)$, suy ra $80 \cdot 5 + 60 \cdot 4 - P = 0 \Leftrightarrow P = 640$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 12. Hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{5}{x+3} - \frac{9}{y-2} = 50 \\ \frac{3}{x+3} + \frac{1}{y-2} = 154 \end{cases}$$
 có nghiệm là $(x_0; y_0)$. Khi đó $x_0 + y_0$ bằng

A. $x_0 + y_0 = \frac{121}{140}$.

B. $x_0 + y_0 = 38$.

C. $x_0 + y_0 = \frac{-121}{140}$.

D. $x_0 + y_0 = -38$.

Lời giải.

Đặt $u = \frac{1}{x+3}$, $v = \frac{1}{y-2}$. Khi đó, hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 5u - 9v = 50 \\ 3u + 7v = 154 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+3} = 28 \\ \frac{1}{y-2} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{83}{28} \\ y = \frac{21}{10} \end{cases}$$

Vậy $x_0 + y_0 = -\frac{121}{140}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 13. Tìm tất cả các giá trị của m để hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2y + xy^2 = 4m^2 - 2m \end{cases}$ có nghiệm.

A. $\left[0; \frac{1}{2}\right]$. B. $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$. C. $[1; +\infty)$. D. $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Lời giải.

Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 2m^2 - m \end{cases}$ nên x, y là nghiệm của phương trình

$$X^2 - 2X + 2m^2 - m = 0. \quad (1)$$

Hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi (1) có nghiệm, tức là

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -2m^2 + m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq 1.$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 14. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} x - my = 1 \\ mx + y = 3 \end{cases}$ có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 + y^2 = 10$.

A. $m = 1$. B. $m = \pm 1$. C. $m = -1$. D. $m = 0$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} x - my = 1 \\ mx + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + 3m}{m^2 + 1} \\ y = \frac{3 - m}{m^2 + 1} \end{cases}.$$

Theo bài ra ta có

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 10 &\Leftrightarrow \left(\frac{1 + 3m}{m^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{3 - m}{m^2 + 1}\right)^2 = 10 \\ &\Leftrightarrow 1 + 6m + 9m^2 + 9 - 6m + m^2 = 10(m^4 + 2m^2 + 1) \\ &\Leftrightarrow 10m^4 + 10m^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 0 \\ m^2 = -1 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow m = 0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 15. Gọi m_1, m_2 là các giá trị của m để hệ phương trình $\begin{cases} (y - 2)x - y - 1 = 0 \\ x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5 = m^2 \end{cases}$ có đúng 4 nghiệm nguyên. Khi đó $m_1^2 + m_2^2$ bằng

A. 10. B. 9. C. 20. D. 4.

Lời giải.

$$\text{Hệ phương trình đã cho tương đương với } \begin{cases} (y - 2)(x - 1) = 3 \\ (y - 2)^2 + (x - 1)^2 = m^2. \end{cases}$$

Hệ có nghiệm nguyên $(x_0; y_0)$ thì $(x_0 - 1) \in \mathcal{U}(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$.

- Nếu $(x_0 - 1)^2 = 1$ thì $(y_0 - 2)^2 = 9 \Rightarrow m^2 = 10$.
- Nếu $(x_0 - 1)^2 = 9$ thì $(y_0 - 2)^2 = 1 \Rightarrow m^2 = 10$.

Do đó $m_1 = -\sqrt{10}$, $m_2 = \sqrt{10}$ nên $m_1^2 + m_2^2 = 20$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 16. Gọi $(x; y)$ là nghiệm dương của hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 4 \\ x^2 + y^2 = 128 \end{cases}$. Tổng $x+y$ bằng

A. 12. B. 8. C. 16. D. 0.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x+y \geq 0 \\ x-y \geq 0 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 4 \\ x^2 + y^2 = 128 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - y^2} = 8 - x \\ x^2 + y^2 = 128 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 8 \\ -y^2 = 64 - 16x \\ x^2 + y^2 = 128 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 8 \\ x^2 + 16x - 192 = 0 \\ y^2 = 128 - x^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y^2 = 64 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -24 \\ y^2 = -448 \end{cases} \text{ (vô lý)} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 8 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 8 \\ y = -8. \end{cases} \end{aligned}$$

Vì $(x; y)$ là nghiệm dương nên $x+y=16$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 17. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 4x-6y=-2. \end{cases}$

A. $(x; y) = (1; 2)$. B. $(x; y) = (2; 1)$. C. $(x; y) = (1; 1)$. D. $(x; y) = (-1; -1)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 4x-6y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+6y=10 \\ 4x-6y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x=8 \\ 4x-6y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1. \end{cases}$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 18. Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn đồng thời các biểu thức $x+2y+3z-10=0$; $3x+y+2z-13=0$ và $2x+3y+z-13=0$. Tính $T=2(x+y+z)$

A. $T=12$. B. $T=-12$. C. $T=-6$. D. $T=6$.

Lời giải.

Ta có $(x; y; z)$ thỏa hệ:
$$\begin{cases} x + 2y + 3z - 10 = 0 \\ 3x + y + 2z - 13 = 0 \\ 2x + 3y + z - 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 1. \end{cases}$$

Khi đó $T = 2(x + y + z) = 2(3 + 2 + 1) = 12$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 19. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ xy - 2x + 2 = 0 \end{cases}$ có nghiệm là $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$. Tính $S = x_1 + x_2$.

A. $S = 2$. B. $S = 0$. C. $S = -1$. D. $S = 1$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ xy - 2x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ x(3 - x) - 2x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ \begin{bmatrix} x = 2 \\ x = -1 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = 2 - 1 = 1$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 20. Tìm các giá trị của m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x + y = 2 & (1) \\ x^2y + xy^2 = 4m^2 - 2m & (2) \end{cases}$$

A. $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$. B. $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$. C. $\left[0; \frac{1}{2}\right]$. D. $[1; +\infty)$.

Lời giải.

Phương trình (2) tương đương $xy(x + y) = 4m^2 - 2m$.

Từ phương trình (1), thế $y = 2 - x$ xuống (2) ta có $x(2 - x) \cdot 2 = 4m^2 - 2m$, hay

$$x^2 - 2x + 2m^2 - m = 0.$$

Hệ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình này có nghiệm, hay $\Delta' \geq 0$. Điều này tương đương với

$$1 - (2m^2 - m) \geq 0.$$

Giải bất phương trình trên ta được $-\frac{1}{2} \leq m \leq 1$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 21. Biết m là giá trị để hệ bất phương trình $\begin{cases} 0 < x + y \leq 1 \\ x + y + \sqrt{2xy + m} \geq 1 \end{cases}$ có nghiệm thực duy nhất.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m \in \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right)$. B. $m \in \left(-\frac{3}{4}; 0\right)$. C. $m \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$. D. $m \in (-2; -1)$.

Lời giải.

Hệ phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} 0 < x + y \leq 1 \\ \sqrt{2xy + m} \geq 1 - (x + y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x + y \leq 1 \\ 2xy + m \geq 1 - 2x - 2y + (x + y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x + y \leq 1(I) \\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq m + 1(II) \end{cases}$$

Tập nghiệm của (I) là phần nằm giữa hai đường thẳng $d: y = -x$; $d': y = -x + 1$ và trên d' .

Nếu $m \leq -1$ thì hệ phương trình vô nghiệm.

Nếu $m > -1$ thì tập nghiệm của (II) là hình tròn (C) (kể cả biên) có tâm $A(1; 1)$ bán kính $R = \sqrt{m+1}$.

Do đó hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi d' là tiếp tuyến của đường tròn (C).

Nghĩa là: $\sqrt{m+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi $m = -\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 22. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ xy - 2x + 2 = 0 \end{cases}$ có nghiệm là $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$. Tính $(x_1 + x_2)$.

A. 2.

B. 0.

C. -1.

D. 1.

Lời giải.

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ xy - 2x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ x(3 - x) - 2x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \\ x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = 1.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 23. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m (biết $m \geq -2019$) để hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x^2 + x - \sqrt[3]{y} = 1 - 2m \\ 2x^3 - x^2 \sqrt[3]{y} - 2x^2 + x \sqrt[3]{y} = m \end{cases} \quad (I)$$

có nghiệm thực?

A. 2021.

B. 2019.

C. 2020.

D. 2018.

Lời giải.

Đặt $z = \sqrt[3]{y}$ khi đó hệ phương trình (I) trở thành

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 + x - z = 1 - 2m \\ 2x^3 - x^2 z - 2x^2 + xz = m \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 2x - z = 1 - 2m \\ 2x(x^2 - x) - z(x^2 - x) = m \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 2x - z = 1 - 2m \\ (x^2 - x)(2x - z) = m \end{cases} \quad (II). \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x^2 - x \\ v = 2x - z \end{cases} \text{ điều kiện } u \geq -\frac{1}{4}.$$

$$\text{Hệ phương trình (II) trở thành } \begin{cases} u + v = 1 - 2m \\ uv = m. \end{cases}$$

Khi đó u, v là nghiệm của phương trình $X^2 - (1 - 2m)X + m = 0$ (*).

Để thỏa mãn bài toán khi (*) có hai nghiệm trong đó có ít nhất một nghiệm thuộc $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

Mà (*) $\Leftrightarrow X - X^2 = (2X + 1)m$.

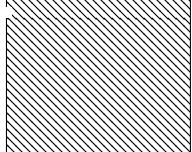
Để thấy $X = -\frac{1}{2}$ không là nghiệm của phương trình (*) nên (*) $\Leftrightarrow m = \frac{X - X^2}{2X + 1}$.

Xét hàm số $g(X) = \frac{X - X^2}{2X + 1}$ trên $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

Ta có $g'(X) = \frac{(1 - 2X)(2X + 1) - (X - X^2)}{(2X + 1)^2} = \frac{1 - X - 3X^2}{(2X + 1)^2}$.

Xét $g'(X) = 0$ suy ra $1 - X - 3X^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \\ X = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên

X	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1+\sqrt{13}}{2}$	$+\infty$	
$g'(X)$		+	0	-
$g(X)$		$-\frac{5}{8}$	$-\frac{\sqrt{13}}{2}$	$-\infty$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 24. Gọi $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$ là hai nghiệm phân biệt của hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 - xy + x + y = 8 \\ xy + 3(x + y) = 1 \end{cases}$.

Tính $|x_1 - x_2|$.

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$, điều kiện: $S^2 - 4P \geq 0$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - xy + x + y = 8 \\ xy + 3(x + y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 - 3xy + x + y = 8 \\ xy + 3(x + y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 + S - 3P = 8 \quad (1) \\ P + 3S = 1 \quad (2) \end{cases}$$

Từ (1) $\Rightarrow P = 1 - 3S$. Thay vào (2) ta được:

$$S^2 + S - 3(1 - 3S) = 8 \Leftrightarrow S^2 + 10S - 11 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} S = 1 \\ S = -11 \end{cases}.$$

$$\text{TH1: } S = 1 \Rightarrow P = -2 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ x = -1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

TH2: $S = -11 \Rightarrow P = 34$ (không thỏa mãn điều kiện).

Vậy $|x_1 - x_2| = 3$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 25. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + \sqrt{y^2 - x^2} = 12 - y \\ x\sqrt{y^2 - x^2} = 12 \end{cases}$ ta được hai nghiệm $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$. Tính giá trị biểu thức $T = x_1^2 + x_2^2 - y_1^2$

A. $T = -25$.

B. $T = 0$.

C. $T = 25$.

D. $T = 50$.

Lời giải.

Phương pháp

- Đặt điều kiện cho hệ phương trình xác định.
- Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế sau đó tính giá trị của biểu thức.

Cách giải:

Điều kiện: $y^2 \geq x^2$.

$$\begin{cases} x + \sqrt{y^2 - x^2} = 12 - y & (1) \\ x\sqrt{y^2 - x^2} = 12 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 12 - y \geq 0 \\ x^2 + 2x\sqrt{y^2 - x^2} + y^2 - x^2 = 144 - 24y + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 12 \\ 2x\sqrt{y^2 - x^2} = 144 - 24y \end{cases} (*)$$

Thế (2) vào (*) ta được: $2.12 = 144 - 24y \Leftrightarrow y = 5$ (tm)

$$\Rightarrow x\sqrt{25 - x^2} = 12 \Leftrightarrow x^2(25 - x^2) = 144$$

$$x^4 - 25x^2 + 144 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 16 \\ x^2 = 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = x_1^2 + x_2^2 - y_1^2 = 16 + 9 - 5^2 = 0$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 26. Trong các hệ phương trình được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây, hệ phương trình nào vô nghiệm?

A. $\begin{cases} x - y = -1 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x - y = -1 \\ -x + y = 1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x - y = -1 \\ -x - y = 1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x - y = -1 \\ -x + y = -1 \end{cases}$

Lời giải.Hệ phương trình $\begin{cases} x - y = -1 \\ -x + y = -1 \end{cases}$ có $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ nên vô nghiệm.Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 27. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - 3y + 5 = 0 \\ 2y - 4 = 0 \end{cases}$

A. $(-1; -2)$.

B. $(10; 5)$.

C. $(-10; -5)$.

D. $(1; 2)$.

Lời giải.Hệ phương trình đã cho tương đương $\begin{cases} x = 3y - 5 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 28. Hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$ tương đương với hệ phương trình nào sau đây?

A. $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x - y = 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ x = 2 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$

Lời giải.

Cộng theo vế hai phương trình của hệ phương trình đã cho ta được $2x + y = 8$. Vậy hệ phương trình đã cho tương đương $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x + y = 8. \end{cases}$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 29. Tìm tập nghiệm của phương trình $2x - y = 4$.

- A. $\{(2; 0)\}$. B. $\{(x; 2x - 4) | x \in \mathbb{R}\}$.
C. $\{2x - 4; x | x \in \mathbb{R}\}$. D. $\emptyset$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 2x - 4. \end{cases}$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 30. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 4x - 6y = 8 \\ 3x - 6y = 6. \end{cases}$

Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $(2; 0)$ là một nghiệm của hệ phương trình.
B. Biểu diễn tập nghiệm của hệ phương trình trên là một đường thẳng.
C. Biểu diễn tập nghiệm của hệ phương trình trên là một điểm.
D. Tập nghiệm của hệ phương trình là $\{(2; 0)\}$.

Lời giải.

Hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(2; 0)$. Do đó khẳng định “Biểu diễn tập nghiệm của hệ phương trình trên là một đường thẳng” là sai.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 31. Gọi $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 4y = 6 \end{cases}$. Giá trị của biểu thức $A = \frac{2x_0^2 + 3y_0^2}{4}$ là

A. $A = \frac{11}{4}$. B. $A = \frac{9}{4}$. C. $A = \frac{13}{2}$. D. $A = 4$.

Lời giải.

Có $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 4y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$

Vậy $(x_0; y_0) = (2; 1)$, suy ra $A = \frac{2x_0^2 + 3y_0^2}{4} = \frac{11}{4}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 32. Phương trình nào sau đây là phương trình bậc nhất hai ẩn?

- A. $x - 2y = 1$. B. $x^2 - 2y - 1 = 0$. C. $x - 2y + z - 1 = 0$. D. $xy - 2y - 1 = 0$.

Lời giải.

Phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng $ax + by = c$ trong đó a, b, c là các hệ số với điều kiện a, b không đồng thời bằng không.

Vậy $x - 2y = 1$ là phương trình bậc nhất hai ẩn.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 33. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 2y - 3z + 4 = 0 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2z = 9. \end{cases}$$

A. $(1; 2; 3)$.

B. $(-1; -2; -3)$.

C. $\left(\frac{29}{13}; \frac{34}{13}; \frac{15}{13}\right)$.

D. $\left(\frac{19}{17}; \frac{48}{17}; \frac{61}{17}\right)$.

Lời giải.

Hệ phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x + 2y - 3z = -4 \\ 4x - 2y + 2z = 6 \\ 3x + 2z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -4 \\ 5x - z = 2 \\ 3x + 2z = 9 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -4 \\ 10x - 2z = 4 \\ 3x + 2z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -4 \\ 13x = 13 \\ 3x + 2z = 9 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 34. Một hình chữ nhật có chu vi 200 cm, chiều dài hơn chiều rộng là 10 cm. Số đo chiều dài, chiều rộng lần lượt là bao nhiêu?

A. 55 cm, 45 cm.

B. 105 cm, 95 cm.

C. 45 cm, 55 cm.

D. 20 cm, 10 cm.

Lời giải.

Gọi x (cm), y (cm) lần lượt là chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật ($0 < y \leq x$). Khi đó ta có

$$\begin{cases} 2(x + y) = 200 \\ x - y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 100 \\ x - y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 55 \\ y = 45. \end{cases}$$

Vậy chiều dài, chiều rộng của hình chữ nhật lần lượt là 55 cm, 45 cm.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 35. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} mx + y = m \\ x + my = m. \end{cases}$$

Tìm tất cả giá trị của tham số m để hệ có nghiệm duy nhất.

A. $m \neq 1$.

B. $m \neq -1$.

C. $m \neq \pm 1$.

D. $m = \pm 1$.

Lời giải.

- Xét $m = 0$ khi đó ta có hệ $\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$. Khi đó, hệ phương trình có nghiệm $(0; 0)$.
- Xét $m \neq 0$, hệ phương trình đã cho tương đương

$$\begin{cases} m^2x + my = m^2 \\ x + my = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m^2 - 1)x = m^2 - m \\ x + my = m. \end{cases}$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 36. Tìm nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x - 5y + z = 10 \\ x + 2y - 3z = 10 \\ -x + 2z + 3y = -16. \end{cases}$$

A. $(2; -2)$.

B. $(-2; 2; 4)$.

C. $(2; -2; -4)$.

D. $(2; -1; 1)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x - 5y + z = 10 \\ x + 2y - 3z = 10 \\ -x + 3y + 2z = -16 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5y + z = 10 \\ x + 2y - 3z = 10 \\ 5y - z = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5y + z = 10 \\ 2x + 4y - 6z = 20 \\ 5y - z = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5y + z = 10 \\ 9y - 7z = 10 \\ 5y - z = -6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5y + z = 10 \\ 9y - 7z = 10 \\ 35y - 7z = -42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5y + z = 10 \\ 9y - 7z = 10 \\ 26y = -52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5 \cdot (-2) - 4 = 10 \\ y = -2 \\ z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \\ z = -4 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x, y, z) = (2; -2; -4)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 37. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:
$$\begin{cases} x + my = 1 \\ 2x - 3y = 2018. \end{cases}$$

A. $m \neq \frac{3}{2}$.

B. $m \neq -\frac{2}{3}$.

C. $m \neq -\frac{3}{2}$.

D. $m \neq \frac{2}{3}$.

Lời giải.

Hệ phương trình đã cho tương đương

$$\begin{cases} 2x + 2my = 1 \\ 2x - 3y = 2018 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m + 3)y = -2017 \\ 2x - 3y = 2018 \end{cases}$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $2m + 3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -\frac{3}{2}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 38. Tính tổng $3a + b$, biết rằng $(a; b)$ là nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 5y = 2 \\ 2x - 4y = 3. \end{cases}$$

A. $3a + b = 2$.

B. $3a + b = 3$.

C. $3a + b = 4$.

D. $3a + b = 5$.

Lời giải.

Dễ thấy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $\left(\frac{23}{14}; \frac{1}{14}\right)$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 39. Tìm độ dài hai cạnh của một tam giác vuông biết rằng khi ta tăng mỗi cạnh lên 2 thì diện tích tăng lên 17, khi ta giảm chiều dài cạnh này đi 3 và cạnh kia đi 1 thì diện tích giảm đi 11. Độ dài hai cạnh lần lượt là

A. 5 và 10.

B. 4 và 7.

C. 2 và 3.

D. 5 và 6.

Lời giải.

Gọi hai cạnh có độ dài lần lượt là x và y .

$$\text{Khi đó ta có } \frac{1}{2}(x+2)(y+2) = \frac{1}{2}xy + 17 \Leftrightarrow x+y = 15 \quad (1).$$

$$\text{Mặt khác } \frac{1}{2}(x-3)(y-1) = \frac{1}{2}xy - 11 \Leftrightarrow -x-3y = -25 \Leftrightarrow x+3y = 25 \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình } \begin{cases} x+y=15 \\ x+3y=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=5. \end{cases}$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 40. Tìm số tự nhiên có hai chữ số biết chữ số hàng đơn vị lớn hơn chữ số hàng chục là 3 và tích hai chữ số đó lớn hơn tổng hai chữ số đó 17 đơn vị.

A. 36.

B. 47.

C. 58.

D. 69.

Lời giải.

Gọi số cần tìm $\overline{ab}$ với $a \in \mathbb{N}^*, b \in \mathbb{N}$ và $a, b \leq 9$.

$$\text{Theo giả thiết ta có } b = a + 3, \quad (1).$$

$$\text{Mặt khác ta có } ab = a + b + 17, \quad (2).$$

$$\text{Thay (1) vào (2) ta được } a(a+3) = a + a + 3 + 17 \Leftrightarrow a^2 + a - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ a=-5 \text{ (loại)}. \end{cases}$$

Vậy $a = 4 \Rightarrow b = 7$ nên số cần tìm là 47.

Chọn đáp án **B** □

Câu 41. Tìm tập nghiệm S của hệ phương trình $\begin{cases} x+3|y|=1 \\ x+y=-3. \end{cases}$

A. $S = \{(-5; 2), (-2; -1)\}.$ B. $S = \{(-5; -2), (-2; -1)\}.$
 C. $S = \{(5; -2), (5; 2)\}.$ D. $S = \{(2; 1), (-2; 1)\}.$

Lời giải.

$$\text{*Với } y \geq 0, \text{ ta có } \begin{cases} x+3y=1 \\ x+y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=2 \end{cases} \text{ (nhận).}$$

$$\text{*Với } y < 0, \text{ ta có } \begin{cases} x-3y=1 \\ x+y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases} \text{ (nhận).}$$

Vậy các nghiệm của hệ là $(-5; 2)$ và $(-2; -1)$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 42. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} mx+y=m+1 \\ x+my=2 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

A. $m = 1.$

B. $m \neq \pm 1.$

C. $m = -1.$

D. $m \neq 1.$

Lời giải.

$$\text{Ta có } D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = m^2 - 1.$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1 = m(m+1) - 2 = m^2 + m - 2.$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1 = 2m - (m+1) = m - 1.$$

Để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì điều kiện là $D \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 43. Hệ phương trình $\begin{cases} x - my = 0 \\ mx - y = m + 1 \end{cases}$ có vô số nghiệm khi nào?

A. $m \neq \pm 1$.

B. $m = 0$.

C. $m = 0$ hoặc $m = -1$.

D. $m = -1$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = m^2 - 1.$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - c_2 b_1 = m^2 + m.$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1 = m + 1.$$

Hệ phương trình có vô số nghiệm khi $D = D_x = D_y = 0$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ m^2 + m = 0 \Leftrightarrow m = -1. \\ m + 1 = 0 \end{cases}$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 44. Giả sử hệ phương trình $\begin{cases} x - my = 0 \\ mx - y = m + 1 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất (x_0, y_0) . Đẳng thức nào sau đây luôn đúng với mọi giá trị của m ?

A. $x_0 + y_0 = 0$.

B. $x_0 + y_0 = 1$.

C. $x_0 - y_0 = 1$.

D. $x_0^2 - y_0^2 = 1$.

Lời giải.

Từ phương trình đầu ta có $x = my$.

Thay vào phương trình còn lại ta có $(m^2 - 1)y = m + 1 \Leftrightarrow y = \frac{m + 1}{m^2 - 1} = \frac{1}{m - 1}, (m \neq \pm 1)$.

Suy ra $x = \frac{m}{m - 1}$, hay $(x_0; y_0) = \left(\frac{m}{m - 1}; \frac{1}{m - 1}\right)$.

Vậy $x_0 - y_0 = 1$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 45. Điều kiện của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = 1 \\ x + (2 - m)y = m \end{cases}$ có nghiệm duy nhất là

A. $m \neq \pm 1$.

B. $m \neq 1$.

C. $m \neq -1$.

D. $m = \pm 1$.

Lời giải.

Để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = -m^2 + 2m - 1 \neq 0$.

Suy ra $m \neq 1$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 46. Phương trình $(m + 1)x - (2m - 1)y = 3m$ luôn có nghiệm cố định (a, b) với mọi giá trị của m . Tính ab .

A. 1.

B. -1.

C. 0.

D. 2.

Lời giải.

Có $(m+1)x - (2m-1)y = 3m \Leftrightarrow mx + x - 2my + y = 3m \Leftrightarrow m(x-2y-3) + x+y = 0$.

Để phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của m thì $\begin{cases} x-2y-3=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1. \end{cases}$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 47. Tìm tất cả giá trị của m để hệ phương trình $\begin{cases} 2mx+3y=5 \\ (m+1)x+y=0 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất (x, y)

thỏa mãn $x+y > 0$.

A. $-3 < m < 0$.

B. $m > 0$ hoặc $m < -3$.

C. $m \geq 0$.

D. $m < -3$.

Lời giải.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} 2mx+3y=5 & (1) \\ (m+1)x+y=0 & (2) \end{cases}$.

Từ phương trình (2) ta có $y = -(m+1)x$, thay vào phương trình (1) ta được

$$2mx - 3(m+1)x = 5 \Leftrightarrow -(m+3)x = 5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{m+3} \quad (m \neq -3).$$

$$\text{Suy ra } y = \frac{5(m+1)}{m+3} = \frac{5m+5}{m+3}.$$

$$\text{Do đó } x+y = \frac{5m}{m+3}.$$

$$\text{Vậy } x+y > 0 \Leftrightarrow \frac{5m}{m+3} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -3 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 48. Khi m thay đổi, quỹ tích giao điểm của hai đường thẳng $d: \frac{mx}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{y}{\sqrt{m^2+1}} = 0$ và

$$d': -\frac{x}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{my}{\sqrt{m^2+1}} = 1 \text{ là}$$

A. một đường thẳng.

B. tập rỗng.

C. một đường tròn.

D. mặt phẳng Oxy .

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng d và d' là nghiệm của hệ $\begin{cases} \frac{mx}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{y}{\sqrt{m^2+1}} = 0 \\ -\frac{x}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{my}{\sqrt{m^2+1}} = 1. \end{cases}$

$$\text{Ta có } D = \left(\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}\right)^2 = 1, D_x = \frac{-1}{\sqrt{m^2+1}}, D_y = \frac{m}{\sqrt{m^2+1}}.$$

Do đó nghiệm của hệ phương trình là $(x, y) = \left(\frac{-1}{\sqrt{m^2+1}}, \frac{m}{\sqrt{m^2+1}}\right)$. Dễ thấy $x^2 + y^2 = 1$ nên quỹ tích giao điểm là đường tròn.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 49. Hệ phương trình $\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = -7 \\ \frac{5}{x} - \frac{3}{y} = 1 \end{cases}$ có nghiệm là

A. $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$.

B. $(1; 2)$.

C. $(-1; 2)$.

D. $(-1; -2)$.

Lời giải.

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = -7 \\ \frac{5}{x} - \frac{3}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = -1 \\ \frac{1}{y} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 50. Tập hợp các nghiệm (x, y) của hệ phương trình $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ -6x + 9y = -12 \end{cases}$ là

A. một đường thẳng.

B. toàn bộ mặt phẳng Oxy .

C. nửa mặt phẳng.

D. $\emptyset$.

Lời giải.

Ta có $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = -\frac{1}{3}$ nên hệ vô số nghiệm hay hai đường thẳng trùng nhau nên tập hợp nghiệm của hệ chính là một đường thẳng.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 51. Hệ phương trình $\begin{cases} \frac{3}{x-1} + \frac{2}{y+1} = 4 \\ \frac{2}{x-1} + \frac{3}{y+1} = 5 \end{cases}$ có nghiệm là

A. $\left(\frac{7}{2}; -\frac{2}{7}\right)$.

B. $\left(\frac{2}{5}; -\frac{7}{5}\right)$.

C. $\left(-\frac{2}{7}; \frac{7}{2}\right)$.

D. $\left(-\frac{2}{5}; \frac{7}{5}\right)$.

Lời giải.

Đặt $u = \frac{1}{x-1}; v = \frac{1}{y+1}$, hệ trở thành $\begin{cases} 3u + 2v = 4 \\ 2u + 3v = 5 \end{cases}$, giải hệ ta được $u = \frac{2}{5}; v = \frac{7}{5}$.

Suy ra $x = \frac{7}{2}; y = -\frac{2}{7}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 52. Số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{5}{y} = 3 \\ \frac{9}{x} - \frac{10}{y} = 1 \end{cases}$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải.

$$\text{Có } \begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{5}{y} = 3 \\ \frac{9}{x} - \frac{10}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 53. Hệ phương trình $\begin{cases} 2x + 3y + 4 = 0 \\ 3x + y - 1 = 0 \\ 2mx + 5y - m = 0 \end{cases}$ có duy nhất nghiệm khi

A. $m = 10$.

B. $m = \frac{10}{3}$.

C. $m = -10$.

D. $m = -\frac{10}{3}$.

Lời giải.

$$\text{Có } \begin{cases} 2x + 3y + 4 = 0 \\ 3x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2. \end{cases}$$

Thay vào phương trình còn lại ta được $2m - 10 - m = 0 \Leftrightarrow m = 10$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 54. Hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{3(x+y)}{x-y} = -7 \\ \frac{5x-y}{y-x} = \frac{5}{3} \end{cases}$$
 có

A. 0 nghiệm.

B. 1 nghiệm.

C. 2 nghiệm.

D. 3 nghiệm.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x \neq y$.

Hệ phương trình tương đương với
$$\begin{cases} 3(x+y) = -7(x-y) \\ 3(5x-y) = 5(y-x) \end{cases}$$

Khi đó hệ trở thành
$$\begin{cases} 10x - 4y = 0 \\ 20x - 8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ (Không thỏa điều kiện).}$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 55. Số nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} (x+3)(y-5) = xy \\ (x-2)(y+5) = xy \end{cases}$$
 là

A. 1 nghiệm.

B. 0 nghiệm.

C. 2 nghiệm.

D. 3 nghiệm.

Lời giải.

Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} xy - 5x + 3y - 15 = xy \\ xy + 5x - 2y - 10 = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 3y = 15 \\ 5x - 2y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 25 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có một nghiệm $(12; 25)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 56. Số nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{6x-3}{y-1} - \frac{2y}{x+1} = 5 \\ \frac{4x-2}{y-1} - \frac{4y}{x+1} = 2 \end{cases}$$
 là

A. 1 nghiệm.

B. 2 nghiệm.

C. 3 nghiệm.

D. 0 nghiệm.

Lời giải.

Điều kiện:
$$\begin{cases} x \neq -1 \\ y \neq 1 \end{cases}$$

Đặt
$$\begin{cases} u = \frac{2x-1}{y-1} \\ v = \frac{y}{x+1} \end{cases}$$
. Hệ trở thành
$$\begin{cases} 3u - 2v = 5 \\ 2u - 4v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ta được hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{2x-1}{y-1} = 2 \\ \frac{y}{x+1} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = -1 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 57. Xét tập hợp các điểm có tọa độ $(x; y)$ là nghiệm của phương trình $ax + by = c$. Tìm điều kiện của a, b, c để tập hợp các điểm đó là một đường thẳng đi qua gốc tọa độ.

- A. $a^2 + b^2 \neq 0, c = 0$. B. $a = b = 0, c \neq 0$. C. $a = b = c = 0$. D. $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$.

Lời giải.

Điều kiện để tập hợp điểm biểu diễn là đường thẳng đi qua gốc tọa độ là $a^2 + b^2 \neq 0, c = 0$.

Chọn đáp án **A** ☐

Câu 58. Xét tập hợp các điểm có tọa độ $(x; y)$ là nghiệm của phương trình $ax + by = c$. Tìm điều kiện của a, b, c để tập hợp các điểm đó là một đường thẳng song song với trục tung.

- A. $a = 0, b \neq 0, c = 0$. B. $a = 0, b \neq 0, c \neq 0$. C. $a \neq 0, b = 0, c \neq 0$. D. $a \neq 0, b = c = 0$.

Lời giải.

Để đường thẳng song song với trục tung thì $b = 0$, còn a, c đều phải khác 0.

Chọn đáp án **C** ☐

Câu 59. Xét tập hợp các điểm có tọa độ $(x; y)$ là nghiệm của phương trình $ax + by = c$. Tìm điều kiện của a, b, c để tập hợp các điểm đó là một đường thẳng song song với trục hoành.

- A. $a \neq 0, b = c = 0$. B. $a \neq 0, b = 0, c \neq 0$. C. $a = 0, b \neq 0, c \neq 0$. D. $a = 0, b \neq 0, c = 0$.

Lời giải.

Để đường thẳng song song trục hoành thì $a = 0, b$ và c khác 0.

Chọn đáp án **C** ☐

Câu 60. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{5}{y} = 3 \\ \frac{9}{x} - \frac{10}{y} = 1. \end{cases}$$

A. $(x; y) = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{5}\right)$.

B. $(x; y) = \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{5}\right)$.

C. $(x; y) = (3; 5)$.

D. $(x; y) = (-3; -5)$.

Lời giải.

Có
$$\begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{5}{y} = 3 \\ \frac{9}{x} - \frac{10}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5. \end{cases}$$

Chọn đáp án **C** ☐

Câu 61. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{135}{x+y} + \frac{63}{x-y} = 8 \\ \frac{27}{x+y} + \frac{21}{x-y} = 2. \end{cases}$$

A. $(x; y) = (24; 3)$.

B. $(x; y) = (3; 24)$.

C. $(x; y) = \left(\frac{8}{189}; -\frac{1}{189}\right)$.

D. $(x; y) = \left(-\frac{8}{189}; \frac{1}{189}\right)$.

Lời giải.

Có
$$\begin{cases} \frac{135}{x+y} + \frac{63}{x-y} = 8 \\ \frac{27}{x+y} + \frac{21}{x-y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+y} = \frac{1}{27} \\ \frac{1}{x-y} = \frac{1}{21}. \end{cases}$$

Suy ra
$$\begin{cases} x+y = 27 \\ x-y = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 3. \end{cases}$$

Chọn đáp án **A** ☐

Câu 62. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3|x| + 5y = 9 \\ 2x - |y| = 7. \end{cases}$

A. $(x; y) = \left(-\frac{43}{13}; \frac{3}{13}\right).$

B. $(x; y) = \left(-\frac{26}{7}; \frac{3}{7}\right).$

C. $(x; y) = \left(\frac{43}{13}; -\frac{3}{13}\right).$

D. $(x; y) = \left(\frac{26}{7}; -\frac{3}{7}\right).$

Lời giải.

+ Với $x \geq 0, y \geq 0$ ta có $\begin{cases} 3x + 5y = 9 \\ 2x - y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{44}{13} \\ y = -\frac{3}{13} \end{cases}$ (loại).

+ Với $x \geq 0, y < 0$ ta có $\begin{cases} 3x + 5y = 9 \\ 2x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{26}{7} \\ y = -\frac{3}{7} \end{cases}$ (nhận).

+ Với $x < 0, y \geq 0$ ta có $\begin{cases} -3x + 5y = 9 \\ 2x - y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{44}{7} \\ y = \frac{39}{7} \end{cases}$ (loại).

+ Với $x < 0, y < 0$ ta có $\begin{cases} -3x + 5y = 9 \\ 2x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ (loại).

Chọn đáp án **D**

□

Câu 63. Một lớp học có 36 học sinh được phân thành 3 nhóm A, B, C để thảo luận trong giờ học toán. Biết nhóm A ít hơn nhóm B là 2 học sinh, tổng số học sinh nhóm A và C gấp đôi số học sinh nhóm B . Hỏi số lượng học sinh từng nhóm A, B, C lần lượt là bao nhiêu?

A. 10; 12; 14.

B. 12; 10; 14.

C. 14; 12; 10.

D. 12; 14; 16.

Lời giải.

Gọi A, B, C lần lượt là số học sinh của 3 nhóm A, B, C ($0 < A, B, C < 36; A, B, C \in \mathbb{N}$). Theo đề ta có

$$\begin{cases} A + B + C = 36 \\ B - 2 = A \\ A + C = 2B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B + C = 36 \\ A - B = -2 \\ A - 2B + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 10 \\ B = 12 \\ C = 14. \end{cases}$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 64. Hiện nay, tuổi của cha gấp bốn lần tuổi của con và tổng số tuổi của hai cha con là 50. Hỏi bao nhiêu năm nữa tuổi cha gấp ba lần tuổi con ?

A. 6 năm.

B. 7 năm.

C. 5 năm.

D. 8 năm.

Lời giải.

Gọi tuổi của con hiện nay là x ($x > 0$). Theo đề bài tuổi của cha là $4x$ và $4x + x = 50$, hay $x = 10$.

Gọi số năm nữa mà tuổi cha gấp ba lần tuổi con là y ($y > 0$). Ta có $40 + y = 3(10 + y)$, hay $y = 5$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 65. Biết hai hệ phương trình $\begin{cases} x + 3y - 1 = 0 \\ 2x + 3y - z = 1 \\ (m + 1)x + 2z = 2m - 1 \end{cases}$ và $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - y - z = 0 \\ x + ny - 2nz = 3 \end{cases}$ có nghiệm chung.

Tính giá trị $m + n$.

A. 5.

B. 3.

C. -5.

D. -3.

Lời giải.

Gọi $(x_0; y_0; z_0)$ là nghiệm chung của hai hệ đã cho.

$$\text{Suy ra } (x_0; y_0; z_0) \text{ sẽ là nghiệm của hệ phương trình } \begin{cases} x + 3y - 1 = 0 \\ 2x + 3y - z = 1. \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được $(x_0; y_0; z_0) = (1; 0; 1)$.

Thay vào các phương trình còn lại ta tìm được $m = 4, n = -1$.

Vậy $m + n = 3$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 66. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2ax + 3y = 5 \\ (a + 1)x + y = 0. \end{cases}$ Tìm điều kiện của tham số a để hệ đã cho có nghiệm duy nhất và tìm nghiệm duy nhất đó.

A. $a \neq -3, (x; y) = \left(\frac{-5}{a+3}; \frac{5a+5}{a+3} \right)$.

B. $a = -3, (x; y) = \left(\frac{-5}{a+3}; \frac{5a+5}{a+3} \right)$.

C. $a = -3, (x; y) = \left(\frac{-5}{a+1}; \frac{5a+5}{a+3} \right)$.

D. $a \neq -3, (x; y) = \left(\frac{-5}{a+1}; \frac{5a+5}{a+3} \right)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } D = \begin{vmatrix} 2a & 3 \\ a+1 & 1 \end{vmatrix} = -a-3, D_x = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 5, D_y = \begin{vmatrix} 2a & 5 \\ a+1 & 0 \end{vmatrix} = -5(a+1).$$

Để hệ đã cho có nghiệm duy nhất thì $D \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -3$.

$$\text{Với } a \neq -3, \text{ hệ có nghiệm duy nhất là } \begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{-5}{a+3} \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{5a+5}{a+3} \end{cases}$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 67. Cho đồng nhất thức $\frac{x^2-1}{x^3-3x-2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1}$. Tính $A + B + C$.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

$$\text{Với } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}, \text{ ta có } \frac{x^2-1}{x^3-3x-2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-1}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2 + B(x-2) + C(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2-1 = (A+C)x^2 + (2A+B-C)x + A-2B-2C.$$

Đẳng thức trên đúng với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} A+C=1 \\ 2A+B-C=0 \\ A-2B-2C=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{3} \\ B=0 \\ C=\frac{2}{3} \end{cases}.$$

Do đó $A + B + C = 1$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 68.

Cho bảng 3x3 như hình bên, hãy tìm e biết rằng $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ là các số khác nhau thuộc tập số tự nhiên từ 1 đến 9, và tổng các hàng ngang, hàng dọc, đường chéo đều bằng nhau.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

A. 3. B. 5. C. 7. D. 9.

Lời giải.

Ta có $a + b + c = d + e + f = g + h + i = k$ với k là số tự nhiên.

Do đó $a + b + c + d + e + f + g + h + i = 3k$.

Mà $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ là một hoán vị của các số tự nhiên từ 1 đến 9 nên

$$1 + 2 + \dots + 9 = 3k \Leftrightarrow \frac{9(1+9)}{2} = 3k \Leftrightarrow k = 15$$

a	b	c
d	e	f
g	h	i

$$\text{Lại có: } \begin{cases} d + e + f = k \\ b + e + h = k \\ a + e + i = k \\ c + e + g = k \end{cases} \text{ suy ra } a + b + c + d + 4e + f + g + h + i = 4k$$

$$\Leftrightarrow 3e + (a + b + c + d + e + f + g + h + i) = 4k \Leftrightarrow e = 5.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 69. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(a; b)$ sao cho hệ sau vô nghiệm $\begin{cases} ax + y = 2 \\ 10x + by = 4. \end{cases}$

- A. $(a; b) \in \{(1; 10), (10; 1), (2; 5), (5; 2)\}$.
 B. $(a; b) \in \{(1; 10), (10; 1), (2; 5)\}$.
 C. $(a; b) \in \{(1; 10), (10; 1), (-1; -10), (-10; -1), (2; 5), (-2; -5), (-5; -2)\}$.
 D. $(a; b) \in \{(1; 10), (10; 1), (-1; -10), (-10; -1), (2; 5), (5; 2), (-2; -5), (-5; -2)\}$.

Lời giải.

Ta có $D = ab - 10, D_x = 2b - 4, D_y = 4a - 20$.

Điều kiện cần để hệ vô nghiệm là: $D = 0 \Leftrightarrow ab = 10$ vì $a, b \in \mathbb{Z}$ nên các cặp số thỏa mãn:

$$(a; b) \in \{(1; 10), (10; 1), (-1; -10), (-10; -1), (2; 5), (5; 2), (-2; -5), (-5; -2)\}.$$

Điều kiện đủ để hệ vô nghiệm là $D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$. Kiểm tra thì cặp $\begin{cases} a = 5 \\ b = 2 \end{cases}$ không thỏa mãn.

Vậy có 7 cặp số thỏa yêu cầu bài toán là

$$(a, b) \in \{(1, 10), (10, 1), (-1, -10), (-10, -1), (2, 5), (-2, -5), (-5, -2)\}.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 70. Tìm a, b để hệ $\begin{cases} (m+3)x + 4y = 5a + 3b + m \\ x + my = ma - 2b + 2m - 1 \end{cases}$ có nghiệm với mọi giá trị của m .

- A. $(a; b) = (14; -1)$. B. $(a; b) = (14; -1)$. C. $(a; b) = (14; -1)$. D. $(a; b) = (14; -1)$.

Lời giải.

$$(I) \begin{cases} (m+3)x + 4y = 5a + 3b + m \\ x + my = ma - 2b + 2m - 1. \end{cases}$$

Ta có: $D = m^2 + 3m - 4$.

Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ và $m \neq 4$ hệ có nghiệm với mọi a, b .

Để hệ có nghiệm với mọi m thì hệ phải có nghiệm với $m = 1$ và $m = -4$.

$$\bullet m = 1 \text{ thì } (I) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 4y = 5a + 3b + 1 \\ x + y = a - 2b + 1. \end{cases}$$

$$\text{Suy ra hệ có nghiệm} \Leftrightarrow 5a + 3b + 1 = 4(a - 2b + 1) \Leftrightarrow 5a + 3b + 1 = 4a - 8b + 4 \Leftrightarrow a + 11b = 3 \quad (1)$$

$$\bullet m = -4 \text{ thì } (I) \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 4y = 5a + 3b - 4 \\ x - 4y = -4a - 2b - 9. \end{cases}$$

$$\text{Suy ra hệ có nghiệm} \Leftrightarrow 5a + 3b - 4 = 4a + 2b + 9 \Leftrightarrow a + b = 13 \quad (2)$$

$$\text{Vậy hệ có nghiệm với mọi } m \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 11b = 3 \\ a + b = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 14 \\ b = -1. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 71. Tìm m nguyên để hệ $\begin{cases} mx + y - 2m = 0 \\ x + my - (m + 1) = 0 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất (x, y) và x, y là các số nguyên.

A. $m = -2$ hoặc $m = 0$.

B. $m = \pm 1$.

C. $m = 2$.

D. $m = 1$.

Lời giải.

Ta có $D = m^2 - 1$, $D_x = 2m^2 - m - 1$, $D_y = m^2 - m$.

Để hệ có nghiệm duy nhất thì $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$ (*)

Với điều kiện (*), hệ có nghiệm là $(x, y) = \left(\frac{2m+1}{m+1}; \frac{m}{m+1} \right) = \left(2 - \frac{1}{m+1}; 1 - \frac{1}{m+1} \right)$.

Để nghiệm của hệ thỏa mãn x, y là các số nguyên thì $m + 1$ là ước của 1.

TH1: $m + 1 = 1 \Leftrightarrow m = 0$.

TH2: $m + 1 = -1 \Leftrightarrow m = -2$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 72. Tìm điều kiện của số nguyên m để hệ phương trình $\begin{cases} mx - y = a \\ x + (m + 1)y = b \end{cases}$ có nghiệm duy nhất (x, y) (x, y là các số nguyên) với mọi giá trị nguyên của a, b .

A. $m = 0$.

B. $m = \pm 1$.

C. $m = 0$ hoặc $m = -1$.

D. $m = 1$ hoặc $m = -1$.

Lời giải.

Ta có $D = m(m + 1) + 1 = m^2 + m + 1$, $D_x = a(m + 1) + b$, $D_y = bm - a$. Để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) trong đó x, y là các số nguyên với mọi a, b nguyên thì D là ước của 1.

TH1: $m^2 + m + 1 = 1 \Leftrightarrow m^2 + m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -1. \end{cases}$

TH2: $m^2 + m + 1 = -1 \Leftrightarrow m^2 + m + 2 = 0$ (vô nghiệm).

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 73. Tìm điều kiện của tham số m để nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = m - 1 \\ 2x - y = m + 3 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất (a, b) và $a^2 + b^2$ nhỏ nhất.

A. $m = -\frac{3}{2}$.

B. $m = \frac{1}{2}$.

C. $m = -1$.

D. $m = 1$.

Lời giải.

Nghiệm của hệ phương trình cho bởi công thức $(a, b) = \left(\frac{3m+5}{5}; \frac{m-5}{5}\right)$.

$$a^2 + b^2 = \frac{10m^2 + 20m + 50}{25} = \frac{10(m+1)^2 + 40}{25} \geq \frac{8}{5}. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } m+1=0 \Leftrightarrow m=-1.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 74. Biết rằng khi a, b thay đổi thỏa mãn $ab \neq 0$ thì giao điểm của hai đường thẳng $d: ax+by=0$ và $d': bx-ay=1$ luôn nằm trên đường tròn đơn vị tâm $O(0,0)$. Tìm giá trị lớn nhất của ab .

A. $\frac{1}{4}$.

B. 1.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 2.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm M của d và d' là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} ax+by=0 \\ bx-ay=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{b}{a^2+b^2} \\ y=\frac{-a}{a^2+b^2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{b}{a^2+b^2}; \frac{-a}{a^2+b^2}\right).$$

Vì M thuộc vào đường tròn tâm $O(0,0)$, bán kính 1 nên $\left(\frac{b}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\frac{-a}{a^2+b^2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow a^2+b^2=1$.

Ta có $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{1}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=\frac{1}{\sqrt{2}}$ hoặc $a=b=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 75.

Cho một bảng ô vuông 3×3 như hình bên. Ta điền các số từ 1 đến 9 vào các ô vuông trong bảng sao cho mỗi số được điền vào đúng một ô và tổng các số trên mỗi hàng ngang, mỗi cột và hai đường chéo đều bằng nhau. Hỏi số ở vị trí trung tâm của bảng là bao nhiêu?

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

Lời giải.

Ta kí hiệu các số lần lượt từ trái qua phải, từ trên xuống là $a_1, a_2, \dots, a_9$. Vì tổng của các số trên mỗi hàng ngang, mỗi cột và hai đường chéo bằng nhau nên mỗi tổng đó bằng 15. Ta có hệ phương trình

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

$$\begin{cases} a_1 + a_5 + a_9 = 15 \\ a_3 + a_5 + a_7 = 15 \\ a_2 + a_5 + a_8 = 15 \\ a_4 + a_5 + a_6 = 15. \end{cases}$$

Cộng bốn phương trình trên ta có $\sum_{i=1}^9 a_i + 3a_5 = 60 \Leftrightarrow 45 + 3a_5 = 60 \Leftrightarrow a_5 = 5$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 76. Số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2|x-6| + 3|y+1| = 5 \\ 5|x-6| - 4|y+1| = 1 \end{cases}$ là

A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = |x-6| \\ v = |y+1| \end{cases}$, $u \geq 0, v \geq 0$.

Hệ phương trình trở thành $\begin{cases} 2u + 3v = 5 \\ 5u - 4v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 1. \end{cases}$

Khi đó, ta nhận được $\begin{cases} 1 = |x-6| \\ 1 = |y+1| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-6 = \pm 1 \\ y+1 = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = 5 \\ y = 0 \\ y = -2. \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(7; 0)$, $(7; -2)$, $(5; 0)$, $(5; -2)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 77. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} 2m^2x + 3(m-1)y = 3 \\ m(x+y) - 2y = 2 \end{cases}$ vô nghiệm.

A. $m = 3$ hoặc $m = \frac{1}{2}$. B. $m = 6$ hoặc $m = \frac{1}{5}$. C. $m = 1$ hoặc $m = \frac{1}{3}$. D. $m = 2$ hoặc $m = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} 2m^2x + 3(m-1)y = 3 \\ mx + (m-2)y = 2 \end{cases}$

Ta có $D = 2m^3 - 7m^2 + 3m$, $D_x = -3m$, $D_y = 4m^2 - 3m$.

Hệ đã cho vô nghiệm trong hai trường hợp:

TH1: $\begin{cases} D = 0 \\ D_x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^3 - 7m^2 + 3m = 0 \\ -3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$

TH2: $\begin{cases} D = 0 \\ D_y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^3 - 7m + 3m = 0 \\ 4m^2 - 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$

Vậy hệ đã cho vô nghiệm khi $m = 3$ hoặc $m = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 78. Tìm các giá trị của b sao cho với mọi a thì hệ phương trình $\begin{cases} x + 2ay = b \\ ax + (1-a)y = b^2 \end{cases}$ có nghiệm.

A. $b = 0$.B. $b = 1$.C. $b = 2$.D. $b = 4$.

Lời giải.

Ta có $D = 1 - a - 2a^2$.

Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -1 \\ a \neq \frac{1}{2} \end{cases}$ thì hệ phương trình có nghiệm.

Khi $a = -1$, hệ trở thành $\begin{cases} x - 2y = b \\ x - 2y = -b^2 \end{cases}$.

Hệ có nghiệm khi và chỉ khi $b = -b^2 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = -1 \end{cases}$.

Khi $a = \frac{1}{2}$, hệ trở thành $\begin{cases} x + y = b \\ x + y = 2b^2 \end{cases}$.

Hệ có nghiệm khi và chỉ khi $b = 2b^2 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Vậy hệ có nghiệm với mọi $a \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} \begin{cases} b = 0 \\ b = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} b = 0 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow b = 0$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 79. Cho hệ phương trình $\begin{cases} (2m+1)x - 3y = 3m - 2 \\ (m+3)x - (m+1)y = 2m \end{cases}$ Tìm m để hệ có duy nhất nghiệm $(x; y)$

thỏa $x \geq 2y$.

A. $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \neq 2 \\ m < -2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \neq 2 \\ m < -4 \end{cases}$

C. $\begin{cases} m \geq 0 \\ m \neq 2 \\ m < -2 \end{cases}$

D. $\begin{cases} m \geq 0 \\ m \neq 2 \\ m < -4 \end{cases}$

Lời giải.

Ta có $D = -2(m-2)(m+2)$, $D_x = -(m-2)(3m+1)$, $D_y = (m-2)(m-3)$.

Hệ có duy nhất nghiệm khi và chỉ khi $m \neq \pm 2$

(*)

Với điều kiện (*), hệ có nghiệm duy nhất và $\begin{cases} x = \frac{3m+1}{2(m+2)} \\ y = -\frac{m-3}{2(m+2)} \end{cases}$

Ta có $x \geq 2y \Leftrightarrow \frac{3m+1}{2(m+2)} \geq -\frac{2(m-3)}{2(m+2)} \Leftrightarrow \frac{5m-5}{2(m+2)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m < -2 \end{cases}$.

Kết hợp điều kiện (*) ta được $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \neq 2 \\ m < -2 \end{cases}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 80. Cho hệ phương trình $\begin{cases} (2m+1)x - 3y = 3m - 2 \\ (m+3)x - (m+1)y = 2m \end{cases}$ Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$

sao cho $P = x^2 + 3y^2$ nhỏ nhất.

A. $m = \frac{4}{3}$.

B. $m = \frac{8}{9}$.

C. $m = \frac{3}{4}$.

D. $m = \frac{1}{9}$.

Lời giải.

Ta có $D = -2(m-2)(m+2)$, $D_x = -(m-2)(3m+1)$, $D_y = (m-2)(m-3)$.

Hệ có duy nhất nghiệm khi và chỉ khi $m \neq \pm 2$ (*)

Với điều kiện (*), hệ có nghiệm duy nhất và
$$\begin{cases} x = \frac{3m+1}{2(m+2)} \\ y = -\frac{m-3}{2(m+2)} \end{cases}$$

$$P = x^2 + 3y^2 = \frac{3m^2 - 3m + 7}{m^2 + 4m + 4} \Leftrightarrow (3-P)m^2 - (3+4P)m + 7 - 4P = 0 \quad (1)$$

* $P = 3$ thì (1) có nghiệm $m = -\frac{1}{3}$.

* $P \neq 3$ thì (1) có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta = 100P - 75 \geq 0 \Leftrightarrow P \geq \frac{3}{4}$.

Đẳng thức xảy ra khi $m = \frac{4}{3}$.

Vậy P nhỏ nhất khi và chỉ khi $m = \frac{4}{3}$ và $\text{Min} P = \frac{3}{4}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 81. Tìm giá trị của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases} 3x + 2y = 9 \\ mx - 2y = 2 \end{cases}$ vô nghiệm.

A. $m = -3$.

B. $m \neq 0$.

C. $m \neq -3$.

D. $m = 0$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} 3x + 2y = 9 \\ mx - 2y = 2 \end{cases}$, suy ra $(m+3)x = 11$. Phương trình $(m+3)x = 11$ vô nghiệm khi và chỉ khi

$m = -3$. Do đó hệ phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi $m = -3$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 82. Xét tập hợp các điểm có tọa độ $(x; y)$ là nghiệm của phương trình $ax + by = c$. Tìm điều kiện của a, b, c để tập hợp các điểm đó là một đường thẳng cắt hai trục Ox và Oy tại hai điểm phân biệt.

A. $a \neq 0, b \neq 0, c = 0$. B. $a = 0, b \neq 0, c \neq 0$. C. $a \neq 0, b = 0, c \neq 0$. D. $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$.

Lời giải.

Xét các điểm $(x; y)$ là nghiệm của phương trình $ax + by = c$. Tập hợp các điểm đó là một đường thẳng cắt trục Ox và Oy khi và chỉ khi $a \neq 0$ và $b \neq 0$. Các giao điểm của đường thẳng đó và các trục Ox, Oy lần lượt là $A\left(\frac{c}{a}; 0\right)$ và $B\left(0; \frac{c}{b}\right)$. Do đó hai điểm A, B phân biệt khi và chỉ khi $c \neq 0$. Vậy điều kiện của a, b, c thỏa mãn yêu cầu bài toán là $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 83. Tìm một số có hai chữ số, biết hiệu của hai chữ số đó bằng 3. Nếu viết các chữ số đó theo thứ tự ngược lại thì được một số bằng $\frac{4}{5}$ số ban đầu trừ đi 10.

A. 85.

B. 58.

C. 80.

D. 47.

Lời giải.

Gọi số hàng chục là x , chữ số hàng đơn vị là y . Điều kiện bài toán là x, y là các số nguyên, $1 \leq x \leq 9$, $0 \leq y \leq 9$. Vì số viết theo thứ tự ngược lại nhỏ hơn số ban đầu nên $x > y$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ x + 10y = \frac{4}{5}(10x + y) - 10. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta được $(x; y) = (8; 5)$. Từ đó suy ra số phải tìm là 85.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 84. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} 2|x| - y = 1 \\ mx + y = m + 1. \end{cases}$$

Tìm giá trị của tham số m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

A. $m \neq -2$.

B. $m = 2$.

C. $m = -2$.

D. $m \neq 2$ và $m \neq -2$.

Lời giải.

- Xét $x \geq 0$, khi đó hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 2x - y = 1 \\ mx + y = m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y = 2x - 1 \\ (m + 2)x = m + 2. \end{cases} \quad (1)$$

- Xét $x < 0$, khi đó hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} x < 0 \\ -2x - y = 1 \\ mx + y = m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ y = -2x - 1 \\ (m - 2)x = m + 2. \end{cases} \quad (2)$$

Tập nghiệm của hệ phương trình đã cho là hợp hai tập nghiệm của hệ (1) và hệ (2).

Ta xét các trường hợp sau

- Xét $m = 2$, khi đó hệ phương trình (2) vô nghiệm. Hệ phương trình (1) có nghiệm duy nhất $(1; 1)$.
- Xét $m = -2$, cả hai hệ phương trình (1) và (2) đều vô nghiệm.
- Xét $m \neq 2$ và $m \neq -2$, khi đó hệ phương trình (1) luôn có nghiệm $(1; 1)$.

Hệ phương trình (2) tương đương

$$\begin{cases} x < 0 \\ y = -2x - 2 \\ x = \frac{m + 2}{m - 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m + 2}{m - 2} < 0 \\ y = -2x - 2 \\ x = \frac{m + 2}{m - 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ y = -2x - 2 \\ x = \frac{m + 2}{m - 2} \end{cases}$$

Hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi hệ (2) vô nghiệm hay $m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 85. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x + (m - 5)y = 6 \\ 2x + (m - 1)y = 4. \end{cases}$$

Kết luận nào sau đây **sai**?

A. Hệ luôn có nghiệm với mọi giá trị của m .

B. Tồn tại giá trị của m để hệ vô nghiệm.

C. Hệ có vô số nghiệm khi $m = -7$.

D. Khi $m = -7$ thì biểu diễn tập nghiệm của hệ trên mặt phẳng tọa độ Oxy là đường thẳng $y = \frac{1}{4}(x - 2)$.

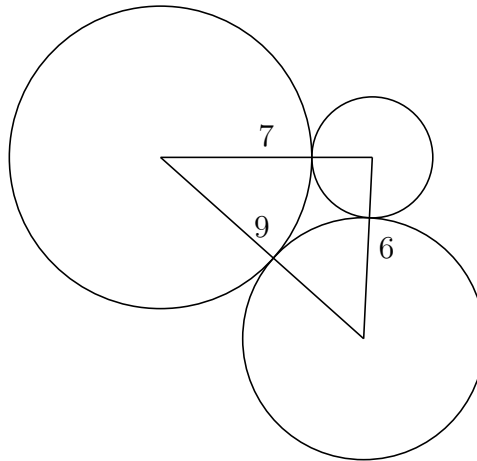
Lời giải.

Hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{m-5}{m-1} \neq \frac{6}{4} \Rightarrow$ không tồn tại giá trị của m .

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 86. Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh AB, BC, CA lần lượt là 9, 7 và 6. Ba đường tròn tâm A , tâm B , tâm C đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. Bán kính của ba đường tròn đó lần lượt là

- A. 6; 5 và 2. B. 4; 5 và 3. C. 4; 5 và 2. D. 8; 5 và 1.

Lời giải.

Gọi bán kính ba đường tròn tâm A , tâm B , tâm C lần lượt là a, b, c . Ba đường tròn đôi một tiếp xúc ngoài với nhau nên ta lập được hệ sau:

$$\begin{cases} a+b=9 \\ b+c=7 \\ a+c=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=5 \\ c=3 \end{cases}$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 87. Hai vòi nước chảy chung vào một bể thì sau $4\frac{4}{5}$ giờ thì đầy bể. Mỗi giờ lượng nước vòi 1 chảy bằng $\frac{3}{2}$ lượng nước vòi 2. Vậy mỗi vòi chảy riêng thì bao lâu sẽ đầy bể?

- A. Vòi 1 là 8 h, vòi 2 là 12 h. B. Vòi 1 là 12 h, vòi 2 là 8 h.
C. Vòi 1 là 12 h, vòi 2 là 16 h. D. Vòi 1 là 16 h, vòi 2 là 12 h.

Lời giải.

Gọi thời gian để vòi 1 và vòi 2 chảy riêng đầy bể là x và y .

Suy ra mỗi giờ vòi 1 và 2 chảy được là $\frac{1}{x}$ và $\frac{1}{y}$ bể.

Ta có $\frac{1}{x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{y}$.

Mặt khác $\frac{24}{5} \cdot \frac{1}{x} + \frac{24}{5} \cdot \frac{1}{y} = 1$.

$$\text{Vậy ta có hệ } \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{y} = 0 \\ \frac{24}{5} \cdot \frac{1}{x} + \frac{24}{5} \cdot \frac{1}{y} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{8} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 12. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 88. Tìm độ dài hai cạnh của một tam giác vuông, biết rằng khi ta tăng mỗi cạnh 2 cm thì diện tích tăng 17 cm^2 ; khi ta giảm chiều dài cạnh này 3 cm và cạnh kia 1 cm thì diện tích giảm 11 cm^2 . Độ dài hai cạnh lần lượt là

- A. 5 cm và 10 cm. B. 4 cm và 7 cm. C. 2 cm và 3 cm. D. 5 cm và 6 cm.

Lời giải.

Gọi hai cạnh có độ dài lần lượt là x và y .

$$\text{Khi đó ta có } \frac{1}{2}(x+2)(y+2) = \frac{1}{2}xy + 17 \Leftrightarrow x + y = 15 \quad (1).$$

$$\text{Mặt khác } \frac{1}{2}(x-3)(y-1) = \frac{1}{2}xy - 11 \Leftrightarrow -x - 3y = -25 \Leftrightarrow x + 3y = 25 \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình } \begin{cases} x + y = 15 \\ x + 3y = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 5. \end{cases}$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 89. Một công ti có 100 xe chở khách gồm hai loại, xe chở được 4 khách và xe chở được 7 khách. Dùng tất cả số xe đó, tối đa công ti chở một lần được 490 khách. Gọi x, y lần lượt là số xe chở được 4 khách và số xe chở được 7 khách. Tìm x và y .

- A. $x = 30, y = 70$. B. $x = 40, y = 60$. C. $x = 70, y = 30$. D. $x = 60, y = 40$.

Lời giải.

$$\text{Ta có hệ phương trình } \begin{cases} x + y = 100 \\ 4x + 7y = 490 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 70 \\ y = 30. \end{cases}$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 90. Một miếng đất hình chữ nhật có chu vi $4p$ m. Nếu mở rộng miếng đất đó bằng cách tăng một cạnh thêm 4 m và cạnh kia tăng thêm 3 m thì diện tích miếng đất tăng thêm 252 m^2 . Tìm điều kiện của p và tính các kích thước x và y của miếng đất đó theo p .

- A. $x = 8p - 240, y = 240 - 6p$ với $p > 0$.
 B. $x = 16p - 240, y = 240 - 12p$ với $p > 0$.
 C. $x = 8p - 240, y = 240 - 6p$ với $30 < p < 40$.
 D. $x = 16p - 240, y = 240 - 12p$ với $15 < p < 20$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2(x+y) = 4p \\ (x+4)(y+3) = xy + 252 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2p \\ 3x + 4y = 240 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được: $x = 8p - 240$ và $y = 240 - 6p$

$$\text{Vì } x > 0, y > 0 \text{ nên } \begin{cases} 8p - 240 > 0 \\ 240 - 6p > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 30 < p < 40.$$

Vậy kích thước miếng đất là $x = 8p - 240$ m và $y = 240 - 6p$ m với điều kiện $30 < p < 40$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 91. Có ba lớp 10A, 10B và 10C gồm 128 em học sinh cùng tham gia lao động trồng cây. Mỗi em lớp 10A trồng được 3 cây bạch đàn và 4 cây bàng. Mỗi em lớp 10B trồng được 2 cây bạch đàn và 5 cây bàng. Mỗi em lớp 10C trồng được 6 cây bạch đàn. Cả ba lớp trồng được là 476 cây bạch đàn và 375 cây bàng. Gọi x, y, z lần lượt là số học sinh của lớp 10A, 10B, 10C. Tìm x, y và z .

A. $x = 45, y = 45, z = 38$.

B. $x = 38, y = 45, z = 45$.

C. $x = 40, y = 43, z = 45$.

D. $x = 45, y = 40, z = 43$.

Lời giải.Điều kiện x, y, z là các số nguyên dương. Từ giả thiết bài toán ta có

$$\begin{cases} x + y + z = 128 \\ 4x + 3y = 60 \\ 3x + 2y + 6z = 476 \\ 4x + 5y = 375. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta được $(x, y, z) = (40; 43; 45)$.Chọn đáp án **C**

□

Câu 92. Ba cô Lan, Hương và Thúy cùng thuê một loại áo giống nhau. Số áo của Lan thuê trong 1 giờ ít hơn tổng số áo của Hương và Thúy thuê trong 1 giờ là 5 áo. Tổng số áo của Lan thuê trong 4 giờ và Hương thuê trong 3 giờ là 60 áo. Số áo của Lan thuê trong 2 giờ cộng với số áo của Hương thuê trong 5 giờ và số áo của Thúy thuê trong 3 giờ tất cả được 76 áo. Trong 1 giờ số áo thuê được của Lan, Hương và Thúy lần lượt là x, y và z . Tìm x, y và z .

A. $x = 5, y = 6, z = 10$.

B. $x = 9, y = 8, z = 6$.

C. $x = 10, y = 6, z = 5$.

D. $x = 9, y = 6, z = 8$.

Lời giải.Điều kiện x, y, z là các số nguyên dương. Từ giả thiết bài toán ta có

$$\begin{cases} x = y + z - 5 \\ 4x + 3y = 60 \\ 2x + 5y + 3z = 76. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta được $(x, y, z) = (9; 8; 6)$.Chọn đáp án **B**

□

Câu 93. Một chủ cửa hàng bán lẻ mang 1500000 đồng đến ngân hàng đổi tiền xu để trả lại cho người mua. Ông ta đổi được tất cả 1450 đồng tiền xu các loại 2000 đồng, 1000 đồng và 500 đồng. Biết rằng số tiền xu loại 1000 đồng bằng hai lần hiệu của số tiền xu loại 500 đồng với số tiền xu loại 2000 đồng. Gọi x, y, z lần lượt là số đồng xu loại 2000 đồng, 1000 đồng, 500 đồng. Tìm x, y và z .

A. $x = 600, y = 500, z = 350$.

B. $x = 412, y = 313, z = 725$.

C. $x = 350, y = 500, z = 600$.

D. $x = 725, y = 313, z = 412$.

Lời giải.Điều kiện x, y, z là các số nguyên dương. Từ giả thiết bài toán ta có

$$\begin{cases} x + y + z = 1450 \\ 2000x + 1000y + 500z = 1500000 \\ y = 2(z - x). \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta được $(x, y, z) = (350; 500; 600)$.Chọn đáp án **C**

□

Câu 94. Tìm tất cả các giá trị của a để hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 2a - 1 \end{cases}$ có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $x > y$.

A. $a > \frac{1}{2}$. B. $a > \frac{1}{3}$. C. $a > -\frac{1}{2}$. D. $a < \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Hệ có nghiệm $\begin{cases} x = a \\ y = 1 - a. \end{cases}$

Theo giả thiết thì $x > y \Leftrightarrow a > 1 - a \Leftrightarrow 2a > 1 \Leftrightarrow a > \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 95. Tìm độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông, biết rằng khi tăng mỗi cạnh 2 cm thì diện tích tăng 17 cm², khi giảm chiều dài cạnh này 3 cm và cạnh kia 1 cm thì diện tích giảm 11 cm².

A. 5 cm và 6 cm. B. 5 cm và 10 cm. C. 4 cm và 7 cm. D. 2 cm và 3 cm.

Lời giải.

Gọi độ dài hai cạnh góc vuông là a và b , ($a, b > 0$). Khi đó, theo đề bài ta có hệ

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(a+2)(b+2) = \frac{1}{2}ab + 17 \\ \frac{1}{2}(a-3)(b-1) = \frac{1}{2}ab - 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 15 \\ a+3b = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 5. \end{cases}$$

Vậy hai cạnh của tam giác vuông đã cho là 5 cm và 10 cm.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 96. Hai vòi nước cùng chảy vào bể thì sau $\frac{24}{5}$ giờ sẽ đầy bể. Trong mỗi giờ, lượng nước của vòi một chảy được bằng $\frac{3}{2}$ lần lượng nước của vòi thứ hai. Hỏi vòi thứ hai chảy riêng một mình thì sau bao lâu sẽ đầy bể?

A. 12 giờ. B. 10 giờ. C. 8 giờ. D. 3 giờ.

Lời giải.

Giả sử, trong một giờ vòi thứ hai chảy được x phần của bể ($x > 0$).

Suy ra, trong một giờ vòi một chảy được $\frac{3}{2}x$ phần của bể.

Khi đó, trong một giờ cả hai vòi cùng chảy được $\frac{3}{2}x + x = \frac{5}{2}x$ phần của bể. (1)

Mặt khác, hai vòi nước cùng chảy vào bể thì sau $\frac{24}{5}$ giờ sẽ đầy bể. Suy ra, trong một giờ hai vòi cùng chảy được $\frac{5}{24}$ bể. (2)

Từ (1) và (2) ta được $\frac{5}{2}x = \frac{5}{24} \Leftrightarrow x = \frac{1}{12}$.

Do đó, trong một giờ vòi thứ hai chảy được $\frac{1}{12}$ phần của bể.

Vậy nếu vòi thứ hai chảy riêng một mình thì sau 12 giờ sẽ đầy bể.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 97. Hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ có số nghiệm là

A. 1.

B. 3.

C. 0.

D. 2.

Lời giải.

Từ phương trình $x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$ thế vào phương trình $x^2 + y^2 = 5$ ta được.

$$x^2 + (1 - x)^2 = 5 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 2 \\ x = 2 \Rightarrow y = -1. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(-1, 2)$ và $(2, -1)$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 98. Hệ phương trình $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 4x + y = 1 \end{cases}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. vô số.

Lời giải.

$$\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 4x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{13} \\ y = \frac{9}{13} \end{cases}. \text{ Vậy hệ có 1 nghiệm.}$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 99. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = 3 \\ x + my = 2m + 1 \end{cases}$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất?

A. $m \in \{-1; 1; 0\}$.B. $m \in \mathbb{R}$.C. $m \in \{-1; 1\}$.D. $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.**Lời giải.**

$$\text{Ta có (I): } \begin{cases} mx + y = 3 \\ x + my = 2m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2x + my = 3m \\ x + my = 2m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m^2 - 1)x = m - 1 \\ y = 3 - mx. \end{cases} \quad (1)$$

Hệ (I) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 100. Tìm nghiệm $(x; y)$ của hệ: $\begin{cases} 0,3x - 0,2y - 0,33 = 0 \\ 1,2x + 0,4y - 0,6 = 0. \end{cases}$

A. Vô nghiệm.

B. $(0,7; 0,6)$.C. $(0,7; 0,6)$.D. $(0,6; 0,7)$.**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \begin{cases} 0,3x - 0,2y - 0,33 = 0 \\ 1,2x + 0,4y - 0,6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,3x - 0,2y = 0,33 \\ 1,2x + 0,4y = 0,6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,7 \\ y = -0,6. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(0,7; -0,6)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 101. Hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} x + y = 1 & (1) \\ x^2 + y^2 = 5 & (2). \end{cases}$$

Từ (1) $\Leftrightarrow x = 1 - y$ thay vào (2) ta được

$$(1 - y)^2 + y^2 = 5 \Leftrightarrow 2y^2 - 2y - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = 2. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$ và $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2. \end{cases}$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 102. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - y^2 + 6x + 2y = 0 \\ x + y = 8 \end{cases}$ với $(x_0; y_0)$ là nghiệm. Tính $A = x_0^2 + y_0^2$.

A. $A = \frac{298}{25}$. B. $A = \frac{982}{25}$. C. $A = \frac{228}{25}$. D. $A = \frac{928}{25}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 6x + 2y = 0 & (1) \\ x + y = 8 & (2). \end{cases}$$

Từ (2) $\Leftrightarrow x = 8 - y$ thay vào (1) ta được

$$(8 - y)^2 - y^2 + 6(8 - y) + 2y = 0 \Leftrightarrow 112 - 20y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{28}{5} \Rightarrow x = \frac{12}{5}$$

Hay hệ phương trình có nghiệm là $\begin{cases} x_0 = \frac{12}{5} \\ y_0 = \frac{28}{5}. \end{cases}$

$$\text{Vậy } A = x_0^2 + y_0^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{28}{5}\right)^2 = \frac{928}{25}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 103. Có ba đội học sinh gồm 128 em cùng tham gia lao động trồng cây. Mỗi em ở đội số 1 trồng được 3 cây bạch đàn và 4 cây bàng. Mỗi em ở đội số 2 trồng được 2 cây bạch đàn và 5 cây bàng. Mỗi em ở đội số 3 trồng được 6 cây bạch đàn. Cả ba đội trồng được là 476 cây bạch đàn và 375 cây bàng. Hỏi mỗi đội có bao nhiêu em học sinh?

- A. Đội 1 có 43 em, đội 2 có 45 em, đội 3 có 40 em.
- B. Đội 1 có 40 em, đội 2 có 43 em, đội 3 có 45 em.
- C. Đội 1 có 45 em, đội 2 có 43 em, đội 3 có 40 em.
- D. Đội 1 có 45 em, đội 2 có 40 em, đội 3 có 43 em.

Lời giải.

Gọi số học sinh ở ba đội lần lượt là x, y, z (điều kiện $x, y, z \in \mathbb{N}$).

Theo bài ra ta có hệ

$$\begin{cases} x + y + z = 128 \\ 3x + 2y + 6z = 476 \\ 4x + 5y = 375 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 43 \\ z = 45. \end{cases}$$

Vậy đội 1 có 40 em, đội 2 có 43 em, đội 3 có 45 em.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 104. Hệ phương trình $\begin{cases} x - 2my = 1 - m^2 \\ 2mx - 4y = 3 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

- A. $m \neq 1$.
 B. $m \neq 1$ hoặc $m \neq -1$.
 C. $m \neq -1$.
 D. $m \neq 1$ và $m \neq -1$.

Lời giải.

Hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi

$$1 \cdot (-4) - 2m \cdot (-2m) \neq 0 \Leftrightarrow -4 + 4m^2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1.$$

Vậy $m \neq -1$ và $m \neq 1$ thì hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 105. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2y + xy^2 = m^2 + m \end{cases}$. Tập tất cả các giá trị của tham số m để hệ có nghiệm là $[a; b]$. Tính $a + 2b$.

- A. -3 .
 B. 0 .
 C. -1 .
 D. 3 .

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2y + xy^2 = m^2 + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ xy(x + y) = m^2 + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = \frac{m^2 + m}{2} \end{cases}.$$

Khi đó x, y là nghiệm của phương trình

$$t^2 - 2t + \frac{m^2 + m}{2} = 0. \quad (*)$$

Hệ phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có nghiệm, tức là

$$1 - \frac{m^2 + m}{2} \geq 0 \Leftrightarrow -m^2 - m + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4} \Leftrightarrow \left|m + \frac{1}{2}\right| \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 1.$$

Vậy $m \in [-2; 1]$ thì hệ phương trình đã cho có nghiệm.

Suy ra $a = -2, b = 1$. Cho nên $a + 2b = -2 + 2 \cdot 1 = 0$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 106. Hệ phương trình $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ có nghiệm $(x_0; y_0)$. Khi đó giá trị của biểu thức $S = x_0 + y_0$

bằng

- A. -2 .
 B. 1 .
 C. 0 .
 D. 2 .

Lời giải.

$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Khi đó $S = 1 + 1 = 2$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 107. Hệ phương trình $\begin{cases} mx + 2y = 3 \\ 4x - 5y = 7 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất khi

A. $m = -\frac{8}{5}$. B. $m \neq \frac{8}{5}$. C. $m = \frac{8}{5}$. D. $m \neq -\frac{8}{5}$.

Lời giải.

Ta có định thức $D = \begin{vmatrix} m & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -5m - 8$.

Để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -\frac{8}{5}$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 108. Trong thư viện một trường THPT X trên địa bàn tỉnh Bạc Liêu có 3 kệ sách lớn (được đánh dấu là kệ (I), kệ (II), kệ (III)) và có tất cả 1035 cuốn sách, biết số sách ở kệ (I) nhiều hơn số sách ở kệ (II) là 93 cuốn nhưng ít hơn tổng số sách ở kệ (II) và kệ (III) là 517 cuốn. Số cuốn sách ở kệ (III) là

- A. 166 cuốn. B. 259 cuốn. C. 529 cuốn. D. 610 cuốn.

Lời giải.

Gọi x (cuốn) là số cuốn sách ở kệ (I) ($x \in \mathbb{N}^*$). Khi đó số sách ở kệ (II) là $x - 93$.

Số cuốn sách ở kệ (III) là $1035 - x - (x - 93) = 1128 - 2x$.

Theo giả thiết số cuốn sách ở kệ (I) ít hơn tổng số sách ở kệ (II) và kệ (III) là 517 cuốn nên ta có

$$x = (x - 93) + (1128 - 2x) - 517 \Leftrightarrow x = 259 \text{ thỏa mãn.}$$

Vậy số cuốn sách ở kệ (III) là $1128 - 2x = 610$ cuốn.

Chọn đáp án **D** □

Câu 109. Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} -2x + 5y = 9 \\ 4x + 2y = 11 \end{cases}$ là

- A. $\left(\frac{37}{24}; -\frac{29}{12}\right)$. B. $\left(-\frac{37}{24}; \frac{29}{12}\right)$. C. $\left(\frac{37}{24}; \frac{29}{12}\right)$. D. $\left(-\frac{37}{24}; -\frac{29}{12}\right)$.

Lời giải.

Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} -2x + 5y = 9 \\ 4x + 2y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{37}{24} \\ y = \frac{29}{12} \end{cases}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\left(\frac{37}{24}; \frac{29}{12}\right)$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 110. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + 4y - 2z = 1 \\ -2x + 3y + z = -6 \\ 3x + 8y - z = 12 \end{cases}$

- A. $\left(\frac{181}{43}; -\frac{7}{43}; -\frac{83}{43}\right)$. B. $\left(-\frac{181}{43}; \frac{7}{43}; -\frac{83}{43}\right)$. C. $\left(-\frac{181}{43}; -\frac{7}{43}; \frac{83}{43}\right)$. D. $\left(\frac{181}{43}; \frac{7}{43}; \frac{83}{43}\right)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} x + 4y - 2z = 1 \\ -2x + 3y + z = -6 \\ 3x + 8y - z = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{181}{43} \\ y = \frac{7}{43} \\ z = \frac{83}{43} \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 111. Hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y - 2z = -4 \\ 4x + 3y + 3z = 4 \\ 6x + 5y + 4z = 4 \end{cases}$ có nghiệm là

A. (1; 2; 0).

B. (1; -2; 2).

C. (0; 1; 2).

D. (-1; -2; 0).

Lời giải.

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = -4 \\ 4x + 3y + 3z = 4 \\ 6x + 5y + 4z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 2z = -4 \\ y + 7z = 12 \\ y + 5z = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 2z = -4 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 2 \end{cases}.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là (1; -2; 2).

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 112. Một cửa hàng bán giày dép, ngày thứ nhất cửa hàng bán được tổng cộng 30 đôi giày gồm và giày và dép. Ngày thứ 2 của hàng khuyến mại giảm giá nên số đôi giày bán được tăng 10%, số đôi dép bán được tăng 20% so với ngày thứ nhất và dép bán được ngày thứ hai là 35 đôi. Hỏi trong ngày thứ nhất cửa hàng bán được số đôi giày và dép lần lượt là bao nhiêu?

A. 15 và 15.

B. 20 và 10.

C. 10 và 20.

D. 25 và 5.

Lời giải.

Gọi số dép bán được ngày thứ nhất là x với $x \in \mathbb{N}^*$ và $x < 30$.

Số đôi dép bán được ngày thứ hai là $x + 20\%x = \frac{6x}{5}$.

Gọi số dép bán được ngày thứ nhất là y với $y \in \mathbb{N}^*$ và $y < 30$.

Số đôi dép bán được ngày thứ hai là $y + 10\%x = \frac{11x}{10}$.

Theo giả thiết ta được hệ $\begin{cases} x + y = 30 \\ \frac{6x}{5} + \frac{11y}{10} = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 10 \end{cases}.$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 113. Cặp số $(x; y)$ nào sau đây là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x - 3y = 7 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$?

A. (10; 1).

B. (2; 1).

C. (-1; -8).

D. (1; -2).

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} x - 3y = 7 \\ 3x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = 7 \\ 9x - 3y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = 7 \\ 8x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 114. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn các điều kiện $a - b - c = 6$, $b = a - 9$, $c = b + 7$. Tính giá trị của biểu thức $\mathcal{P} = 3a - 2b + c$.

- A. $\mathcal{P} = 4$. B. $\mathcal{P} = 10$. C. $\mathcal{P} = -48$. D. $\mathcal{P} = 26$.

Lời giải.

Ta có $b = a - 9$ và $c = b + 7 = a - 9 + 7 = a - 2$.

Thay vào $a - b - c = 6 \Rightarrow a - (a - 9) - (a - 2) = 6 \Leftrightarrow a = 5 \Rightarrow b = -4$ và $c = 3$.

Khi đó $\mathcal{P} = 3a - 2b + c = 15 + 8 + 3 = 26$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 115. Hiện nay tuổi của cha gấp bốn lần tuổi của con và tổng số tuổi của hai cha con là 50. Hỏi sau bao nhiêu năm nữa tuổi cha gấp ba lần tuổi con?

- A. 5 năm. B. 7 năm. C. 6 năm. D. 8 năm.

Lời giải.

Gọi tuổi cha và con hiện nay lần lượt là $4x$ và x , với $x > 0$.

Theo bài ra ta có $4x + x = 50 \Leftrightarrow x = 10$.

Giả sử sau y năm, ($y > 0$) thì tuổi cha gấp ba lần tuổi con, khi đó ta có

$$40 + y = 3(10 + y) \Leftrightarrow 2y = 10 \Leftrightarrow y = 5.$$

Vậy, sau 5 năm nữa thì tuổi cha gấp ba lần tuổi con.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 116. Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ đi qua các điểm $A(1; 3)$, $B(-2; 0)$. Khi đó $a - b$ bằng

- A. 2. B. -1. C. 0. D. 3.

Lời giải.

$$\text{Đồ thị hàm số } y = ax + b \text{ đi qua } A, B \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ -2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2. \end{cases}$$

Vậy $a - b = -1$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 117. Hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = m + 1 \\ x + my = 2 \end{cases}$ vô nghiệm khi

- A. $m = 1$. B. $m \neq -1$ và $m \neq 1$. C. $m = -1$. D. $m \neq 1$.

Lời giải.

Ta có $D = m^2 - 1$, $D_x = m^2 + m - 2$ và $D_y = m - 1$.

Hệ phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} D = 0 \\ \begin{cases} D_x \neq 0 \\ D_y \neq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ \begin{cases} m^2 + m - 2 \neq 0 \\ m - 1 \neq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \\ m \neq 1 \\ m \neq -2 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 118. Cho x, y thỏa mãn $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x + 5y = 10 \end{cases}$. Kết quả của $x + y$ là

A. $\frac{27}{11}$. B. $\frac{4}{5}$. C. $\frac{5}{4}$. D. $\frac{11}{27}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x + 5y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{25}{11} \\ y = \frac{2}{11} \end{cases} \text{ Do đó } x + y = \frac{17}{11}.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 119. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 3 \\ x + y^2 + xy = 1 \end{cases}$. Cặp số $(x; y)$ nào dưới đây là nghiệm của hệ phương trình đã cho?

- A. $(1; 1)$. B. $(-1; 1)$. C. $(1; -1)$. D. $(-1; 0)$.

Lời giải.

Nhận thấy $x = 1, y = -1$ thỏa mãn hệ phương trình nên $(1; -1)$ là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 120. Tìm tất cả các hệ số thực m để hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 3 \\ x + y = m + 1 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

- A. $m < 0$ hoặc $m = \frac{-\sqrt{2} + 2}{2}$. B. $m \in \left\{ \frac{3\sqrt{2}}{2}; \frac{-3\sqrt{2}}{2} \right\}$.
- C. $m \in \left\{ \frac{3\sqrt{2} - 2}{2}; \frac{-3\sqrt{2} - 2}{2} \right\}$. D. $m \in \left\{ \frac{3\sqrt{2} + 2}{2}; \frac{3\sqrt{2} - 2}{2} \right\}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 3 \\ x + y = m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-y + m + 1)^2 + 2y^2 = 3 \\ x = -y + m + 1 \end{cases}.$$

Hệ đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $(-y + m + 1)^2 + 2y^2 = 3$ có nghiệm duy nhất.

Ta có $(-y + m + 1)^2 + 2y^2 = 3 \Leftrightarrow 3y^2 - 2(m + 1)y + (m + 1)^2 - 3 = 0$ là phương trình bậc hai có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\Delta' = -2(m + 1)^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow m \in \left\{ \frac{3\sqrt{2} - 2}{2}; \frac{-3\sqrt{2} - 2}{2} \right\}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 121. Cặp số $(x_0; y_0)$ với $x_0 > 0$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 - 3xy = 19 \end{cases}$. Giá trị của biểu thức $A = x_0^2 - y_0$ bằng

- A. 10. B. 11. C. 9. D. 12.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 - 3xy = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ (x + y)^2 - 5xy = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -3 \end{cases} \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \\ x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy $(x_0; y_0) = (3; -1)$ nên $A = x_0^2 - y_0 = 10$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 122. Bộ $(x; y; z) = (2; -1; 1)$ là nghiệm của hệ phương trình nào sau đây?

A.
$$\begin{cases} x + 3y - 2z = -3 \\ 2x - y + z = 6 \\ 5x - 2y - 3z = 9. \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ 2x + 6y - 4z = -6. \\ x + 2y = 5. \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} 3x - y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x - y - z = 0. \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} x + y + z = -2 \\ 2x - y + z = 6 \\ 10x - 4y - z = 2. \end{cases}$$

Lời giải.

Ta có
$$\begin{cases} 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 = -3 \\ 2 \cdot 2 - (-1) + 1 \cdot 1 = 6 \\ 5 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 = 9 \end{cases} \quad \text{nên } (2; -1; 1) \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} x + 3y - 2z = -3 \\ 2x - y + z = 6 \\ 5x - 2y - 3z = 9. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 123. Nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{4}{x-2} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{5}{x-2} - \frac{2}{y} = 3 \end{cases}$$
 là

A. $(x; y) = (3; 11)$.

B. $(x; y) = (-3; 1)$.

C. $(x; y) = (13; 1)$.

D. $(x; y) = (3; 1)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \neq 2, y \neq 0$. Đặt
$$\begin{cases} a = \frac{1}{x-2} \\ b = \frac{1}{y} \end{cases}$$
 thì hệ phương trình được viết lại

$$\begin{cases} 4a + b = 5 \\ 5a - 2b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a + 2b = 10 \\ 5a - 2b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13a = 13 \\ 5a - 2b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 5 \cdot 1 - 2b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1. \end{cases}$$

• $a = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} = 1 \Leftrightarrow x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 3$ (thỏa mãn).

• $b = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{y} = 1 \Leftrightarrow y = 1$ (thỏa mãn).

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (3; 1)$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 124. Tìm một số có hai chữ số, biết hiệu của hai chữ số đó bằng 3. Nếu viết các chữ số theo thứ tự ngược lại thì được một số bằng $\frac{4}{5}$ số ban đầu trừ đi 10.

A. 85.

B. 75.

C. 57.

D. 58.

Lời giải.

Gọi số cần tìm là $\overline{ab}$, với $a, b \in \{0; 1; 2; \dots; 8; 9\}$ và $a \neq 0$.

Theo đề bài ta có $\overline{ba} = \frac{4}{5} \cdot \overline{ab} - 10 \Rightarrow 10b + a = \frac{4}{5} \cdot (10a + b) - 10 \Leftrightarrow 35a - 46b = 50$.

Ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} a - b = 3 \\ 35a - 46b = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 5 \end{cases}.$$

Vậy, số cần tìm là 85.

Chọn đáp án **A** □

Câu 125. Cặp số $(x; y)$ nào dưới đây là nghiệm của phương trình $2x - y - 4 = 0$?

- A. $(x; y) = (1; -2)$. B. $(x; y) = (3; -2)$. C. $(x; y) = (2; 1)$. D. $(x; y) = (1; 2)$.

Lời giải.

Thay $x = 1, y = -2$ vào phương trình thấy thỏa mãn. Do đó cặp số $(x; y) = (1; -2)$ là nghiệm của phương trình.

Chọn đáp án **A** □

Câu 126. Tìm x sao cho
$$\begin{cases} x + 2y + 2z = \frac{1}{2} \\ -y + z = -3 \\ 10z = -5 \end{cases}.$$

- A. $x = \frac{5}{2}$. B. $x = -\frac{5}{2}$. C. $x = \frac{7}{2}$. D. $x = -\frac{7}{2}$.

Lời giải.

Ta có
$$\begin{cases} x + 2y + 2z = \frac{1}{2} & (1) \\ -y + z = -3 & (2) \\ 10z = -5 & (3) \end{cases}.$$

Từ (3) $\Rightarrow z = -\frac{1}{2}$. Thay $z = -\frac{1}{2}$ vào (2) ta được $-y - \frac{1}{2} = -3 \Leftrightarrow y = \frac{5}{2}$. Thay $y = \frac{5}{2}$ và $z = -\frac{1}{2}$ vào (1) ta được $x + 2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right) + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x + 4 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{7}{2}$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 127. Tìm nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x - 3y + 1 = 0. \end{cases}$$

- A. $(-2; -1)$. B. $(3; 1)$. C. $(2; 3)$. D. $(2; 1)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x - 3y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ x - 3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 3y = 9 \\ x - 3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 8 \\ x - 3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 128. Hệ phương trình nào sau đây có nghiệm là $(1; 1)$?

- A. $\begin{cases} 4x + y = 3 \\ y = 7 \end{cases}$. B. $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -4x = -2 \end{cases}$. C. $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$.

Lời giải.

Thay $x = 1, y = 1$ vào từng hệ phương trình ta thấy thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y = 3. \end{cases}$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 129. Hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x - 4y = -4 \end{cases}$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 1 nghiệm. B. 2 nghiệm. C. vô nghiệm. D. vô số nghiệm.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x - 4y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 12 \\ 2x - 4y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 6 \\ 4x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 130. Hệ phương trình: $\begin{cases} x - y = 0 \\ mx - y = m + 1 \end{cases}$ vô nghiệm với giá trị của m là

- A. $m = 0$. B. $m = -1$. C. $m = 1$. D. $m = 2$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & \begin{cases} x - y = 0 \\ mx - y = m + 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y = x \\ x(m - 1) = m + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Hệ phương trình đã cho vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 = 0 \\ m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 131. Hệ phương trình $\begin{cases} \frac{4}{x-2} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{5}{x-2} - \frac{2}{y} = 3 \end{cases}$ có nghiệm $(x; y)$. Tính $S = x + y$.

- A. $S = 3$. B. $S = 1$. C. $S = 2$. D. $S = 4$.

Lời giải.

ĐKXD: $x \neq 2; y \neq 0$.

Đặt $\frac{1}{x-2} = a; \frac{1}{y} = b$.

Khi đó, hệ đã cho trở thành: $\begin{cases} 4a + b = 5 \\ 5a - 2b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x-2} = 1 \\ \frac{1}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$\Rightarrow S = 1 + 3 = 4.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 132. Nghiệm của hệ phương trình:
$$\begin{cases} -3x + 2y + z = 9 \\ 2x - 3y - 2z = -3 \\ 4x + 3y - z = -11 \end{cases}$$
 là

- A. $\left(-\frac{11}{3}; \frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right)$. B. $\left(-\frac{11}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right)$. C. $\left(\frac{11}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{8}{3}\right)$. D. $\left(-\frac{11}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{8}{3}\right)$.

Lời giải.

Nghiệm của hệ là $\left(-\frac{11}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{8}{3}\right)$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 133. Hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$
 có bao nhiêu nghiệm?

- A. 1. B. 0. C. 2. D. Vô số.

Lời giải.

Vì $\frac{2}{1} \neq \frac{3}{-2}$ nên hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 134. Trong một ngày hội mua sắm, cửa hàng T đã tiến hành giảm giá và bán đồng giá nhiều sản phẩm. Các loại áo bán đồng giá x (đồng), các loại mũ bán đồng giá y (đồng), các loại túi xách bán đồng giá z (đồng). Ba người bạn Nga, Lan, Hòa đã cùng nhau mua sắm tại cửa hàng T . Nga mua 2 chiếc áo, 1 mũ, 3 túi xách hết 730.000 đồng; Lan mua 1 chiếc áo, 2 mũ, 1 túi xách hết 410.000 đồng; Hòa mua 3 chiếc áo, 2 túi xách hết 600.000 đồng. Hỏi x, y, z lần lượt là bao nhiêu?

- A. 150.000; 80.000; 100.000. B. 200.000; 100.000; 250.000.
C. 100.000; 80.000; 150.000. D. 150.000; 250.000; 350.000.

Lời giải.

Theo giả thiết đề bài, ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + y + z = 730.000 \\ x + 2y + z = 410.000 \\ 3x + 2z = 600.000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 100.000 \\ y = 80.000 \\ z = 150.000 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 135. Gọi $(x_0; y_0; z_0)$ là nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x + y - 3z - 1 = 0 \\ x - y + 2z - 2 = 0 \\ -x + 2y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$$
. Tính giá trị biểu

thức $P = x_0 + y_0 + z_0$.

- A. $P = 1$. B. $P = -3$. C. $P = 3$. D. $P = 0$.

Lời giải.

$$\begin{cases} 3x + y - 3z - 1 = 0 \\ x - y + 2z - 2 = 0 \\ -x + 2y + 2z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow P = x + y + z = 3.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 136. Hệ phương trình nào sau đây vô nghiệm?

A. $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 6y = 3 \end{cases}$ B. $\begin{cases} 5x + 2y = 9 \\ x + y = 3 \end{cases}$ C. $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ -6x + 2y = -4 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 5 \end{cases}$

Lời giải.

- Hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 6y = 3 \end{cases}$ có $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ nên có vô số nghiệm.
- Hệ phương trình $\begin{cases} 5x + 2y = 9 \\ x + y = 3 \end{cases}$ có $\frac{5}{1} \neq \frac{2}{1}$ nên có nghiệm duy nhất.
- Hệ phương trình $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ -6x + 2y = -4 \end{cases}$ có $\frac{3}{-6} = \frac{-1}{2} = \frac{2}{-4}$ nên có vô số nghiệm.
- Hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 5 \end{cases}$ có $\frac{2}{4} = \frac{-1}{-2} \neq \frac{1}{5}$ nên vô nghiệm.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 137. Cho hệ phương trình $\begin{cases} ax + y = b \\ x + ay = c^2 + c \end{cases}$ với a, b, c là các tham số. Tìm điều kiện của b để với mọi a luôn tìm được c sao cho hệ phương trình có nghiệm.

A. $-\frac{3}{4} \leq b \leq \frac{3}{4}$. B. $-\frac{1}{2} \leq b \leq \frac{1}{2}$. C. $-\frac{1}{4} \leq b \leq \frac{1}{4}$. D. $-\frac{1}{3} \leq b \leq \frac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $D = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1$, $D_x = \begin{vmatrix} b & 1 \\ c^2 + c & a \end{vmatrix} = ba - c^2 - c$, $D_y = \begin{vmatrix} a & b \\ 1 & c^2 + c \end{vmatrix} = ac^2 + ac - b$.

Trường hợp $D \neq 0 \Leftrightarrow a^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1$ và $a \neq -1$ thì hệ phương trình luôn có nghiệm.

Trường hợp $D = 0 \Leftrightarrow a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$ hoặc $a = -1$. Khi đó hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $D = D_x = D_y = 0$.

- Khi $a = 1$ thì $D_x = b - c - c^2$ và $D_y = c^2 + c - b$. Do đó, hệ phương trình có nghiệm khi

$$D_x = D_y = 0 \Leftrightarrow c^2 + c - b = 0.$$

Như thế, điều kiện của b để tìm được c sao cho hệ có nghiệm là $\Delta = 1 + 4b \geq 0 \Leftrightarrow b \geq -\frac{1}{4}$.

- Khi $a = -1$ thì $D_x = -c^2 - c - b$ và $D_y = -c^2 - c - b$. Do đó, hệ phương trình có nghiệm khi

$$D_x = D_y = 0 \Leftrightarrow -c^2 - c - b = 0 \Leftrightarrow c^2 + c + b = 0.$$

Như thế, điều kiện của b để tìm được c sao cho hệ có nghiệm là $\Delta = 1 - 4b \geq 0 \Leftrightarrow b \leq \frac{1}{4}$.

Vậy điều kiện của b là $-\frac{1}{4} \leq b \leq \frac{1}{4}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 138. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx - y = 1 \\ x + 4(m+1)y = 4m \end{cases}$ với m là tham số. Khi hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x_0; y_0)$, hãy tìm hệ thức liên hệ giữa x_0, y_0 không chứa tham số m .

A. $x_0 + 2y_0 = 2$. B. $x_0 + 3y_0 = 1$. C. $x_0 - 2y_0 = 6$. D. $x_0 + 5y_0 = 1$.

Lời giải.

Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} y = mx - 1 \\ (2m + 1)^2 x = 4(2m + 1). \end{cases}$$

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m \neq -\frac{1}{2}$. Khi đó nghiệm duy nhất của hệ là

$$\begin{cases} x_0 = \frac{4}{2m+1} \\ y_0 = \frac{2m-1}{2m+1} = 1 - \frac{2}{2m+1} \end{cases} \Rightarrow 2y_0 + x_0 = 2.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 139. Gọi $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} \frac{27}{2x-y} + \frac{32}{x+3y} = 7 \\ \frac{45}{2x-y} - \frac{48}{x+3y} = -1 \end{cases}$. Tính giá trị của biểu

thức $M = x_0 + y_0$.

A. $M = 7$.

B. $M = 5$.

C. $M = 4$.

D. $M = 6$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq \frac{y}{2}$ và $x \neq -3y$. Đặt $\begin{cases} u = \frac{1}{2x-y} \\ v = \frac{1}{x+3y} \end{cases}$.

Theo giả thiết ta có hệ $\begin{cases} 27u + 32v = 7 \\ 45u - 48v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{9} \\ v = \frac{1}{8} \end{cases}$.

Suy ra $\begin{cases} \frac{1}{2x-y} = \frac{1}{9} \\ \frac{1}{x+3y} = \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=9 \\ x+3y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}$.

Vậy $M = 6$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 140. Cho hệ phương trình $\begin{cases} \frac{1}{2}x + y = 2 \\ 4x - 2y = 1 \end{cases}$ có nghiệm $(x_0; y_0)$. Khi đó $x_0 + y_0$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{3}{2}$.

B. $-\frac{3}{2}$.

C. $-\frac{5}{2}$.

D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \frac{1}{2}x + y = 2 \\ 4x - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow x + y = \frac{5}{2}$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 141. Khi quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt đến độ cao nào đó rồi rơi xuống. Biết rằng quỹ đạo chuyển động của nó là một cung parabol trong mặt phẳng, phương trình quỹ đạo có dạng $h = at^2 + bt + c$ (trong đó h là độ cao của quả bóng so với mặt đất (m) và t là thời gian tính từ lúc bị đá lên (s)). Giả

thiết rằng quả bóng được đá từ độ cao 1,2 m. Sau 1 giây nó đạt độ cao 8,5 m và sau 2 giây khi đá lên nó ở độ cao 6 m. Phương trình quỹ đạo chuyển động của quả bóng là

A. $h = -4,9t^2 + 12,2t + 1,2$.

B. $h = 4,9t^2 + 12,2t + 1,2$.

C. $h = -4,9t^2 - 12,2t + 1,2$.

D. $h = 4,9t^2 - 12,2t + 1,2$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} h(0) = 1,2 \\ h(1) = 8,5 \\ h(2) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1,2 \\ a + b + c = 8,5 \\ 4a + 2b + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4,9 \\ b = 12,2 \\ c = 1,2 \end{cases} \Rightarrow h = -4,9t^2 + 12,2t + 1,2.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 142. Hệ phương trình $\begin{cases} \frac{3}{2x+1} - \frac{5}{y+2} = -2 \\ \frac{2}{2x+1} + \frac{3}{y+2} = 5 \end{cases}$ có nghiệm là $(x_0; y_0)$. Tổng $x_0 + y_0$ bằng bao nhiêu?

A. -2.

B. 0.

C. -1.

D. 1.

Lời giải.

$$\text{Đặt } u = \frac{1}{2x+1}; v = \frac{1}{y+2} \text{ ta có hệ phương trình } \begin{cases} 3u - 5v = -2 \\ 2u + 3v = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 1. \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} \frac{1}{2x+1} = 1 \\ \frac{1}{y+2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow x + y = -1.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 143. Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2x - 3y + z = 11 \\ 7x + 4y - 2z = -7 \\ x - y + z = 6 \end{cases}$ là

A. $(-1; 2; -3)$.

B. $(1; -2; 3)$.

C. $(1; -2; -3)$.

D. $(-1; 2; 3)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} 2x - 3y + z = 11 \\ 7x + 4y - 2z = -7 \\ x - y + z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y; z) = (1; -2; 3)$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 144. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases}$.

A. $(x; y) = (1; 2)$.

B. $(x; y) = (2; 1)$.

C. $(x; y) = (-2; 1)$.

D. $(x; y) = (-1; 2)$.

Lời giải.

Nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = (1; 2)$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 145. Hệ phương trình nào sau đây có nghiệm là $(1; 1; -1)$?

$$\text{A. } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ 3x + y + 5z = -1 \end{cases}.$$

$$\text{B. } \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ x - y + 3z = -1 \\ z = 0 \end{cases}.$$

$$\text{C. } \begin{cases} x = 3 \\ x - y + z = -2 \\ x + y - 7z = 0 \end{cases}.$$

$$\text{D. } \begin{cases} 4x + y = 3 \\ x + 2y = 7 \end{cases}.$$

Lời giải.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = -2 \\ 3x + y + 5z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3y = 3 \\ 2y - 2z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$. Vậy nghiệm hệ phương trình là $(1; 1; -1)$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 146. Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 6x - 2y = 4 \end{cases}$ là

A. $(1; -\frac{1}{2})$. B. $(0; -\frac{5}{2})$. C. $(1; 1)$. D. $(1; 2)$.

Lời giải.

$$\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 6x - 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 3x \\ 6x - 2(4 - 3x) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 3x \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 147. Tìm nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 3x - 2y - z = 7 \\ -4x + 3y - 2z = 15 \\ -x - 2y + 3z = -5 \end{cases}$.

A. $(-5; -7; 8)$. B. $(5; -7; -8)$. C. $(-5; -7; -8)$. D. $(-5; 7; -8)$.

Lời giải.

Cách 1

Lấy phương trình đầu trừ cho phương trình thứ 3 và cộng cho phương trình thứ 2 về theo về ta được

$$3y - 6z = 27 \Leftrightarrow y = 2z + 9.$$

Thế vào hai phương trình đầu ta được

$$\begin{cases} 3x - 5z = 25 \\ -4x + 4z = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ z = -8. \end{cases}$$

Do đó $y = -7$ và ta được nghiệm của hệ là $(-5; -7; -8)$.

Cách 2

Sử dụng tính năng giải hệ 3 phương trình bậc nhất 3 ẩn của máy tính ta được nghiệm là $(-5; -7; -8)$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 148. Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 37 \\ x + y + xy = 19 \end{cases}$ là

- A. $(4; 3); (3; 4)$. B. $(4; 3)$. C. $(3; 4)$. D. $(0; \sqrt{27}); (19; 0)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 37 \\ x + y + xy = 19 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 - xy = 37 \\ x + y = 19 - xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (19 - xy)^2 - xy = 37 \\ x + y = 19 - xy \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (xy)^2 - 39xy + 324 = 0 \\ x + y = 19 - xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 27 \\ xy = 12 \\ x + y = 19 - xy \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 27 \\ x + y = -8 \end{cases} \text{ (vô nghiệm)} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 27 \\ x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(4; 3); (3; 4)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 149. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x - 2y = m - 1 \end{cases}$ vô nghiệm, suy ra

- A. $m = 6$. B. $m = 11$. C. $m \neq 11$. D. $m \neq 6$.

Lời giải.

Theo bài ra, hệ phương trình đã cho vô nghiệm nên $\frac{5}{m-1} \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow m \neq 11$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 150. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx - y = m \\ x - my = 2 \end{cases}$. Tất cả các giá trị của m để hệ trên có nghiệm duy nhất là

- A. m khác 1 và -1 . B. $m \in \emptyset$.
C. m khác 0. D. $m = 1$ hoặc $m = -1$.

Lời giải.

Ta có $D = \begin{vmatrix} m & -1 \\ 1 & -m \end{vmatrix} = 1 - m^2$.

Hệ có nghiệm duy nhất khi $1 - m^2 \neq 0 \Leftrightarrow m$ khác 1 và -1 .

Chọn đáp án **A**

□

Câu 151. Tìm điều kiện của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases} mx - y = m \\ -x + my = -1 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

- A. $m = \pm 1$. B. $m \neq -1$. C. $m \neq 1$. D. $m \neq \pm 1$.

Lời giải.

Ta có $D = \begin{vmatrix} m & -1 \\ -1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1$.

Để hệ có nghiệm duy nhất thì $D \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 152. Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} \frac{4}{x-2} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{5}{x-2} - \frac{2}{y} = 3 \end{cases}$ là

- A. $(x; y) = (3; 11)$. B. $(x; y) = (-3; 1)$. C. $(x; y) = (13; 1)$. D. $(x; y) = (3; 1)$.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} \frac{4}{x-2} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{5}{x-2} - \frac{2}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x-2} = 1 \\ \frac{1}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 153. Hệ bất trình $\begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ (x-1)(x^2 + 5x + 4) \geq 0 \end{cases}$ có số nghiệm nguyên là

- A. 2. B. 1. C. Vô số. D. 3.

Lời giải.

x	$-\infty$	-4	-1	1	$+\infty$
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x^2 + 5x + 4$	$+$	0	$-$	0	$+$
$(x - 1)(x^2 + 5x + 4)$	$-$	0	$+$	0	$+$

$$\begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ (x-1)(x^2 + 5x + 4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 2 \\ \begin{cases} -4 \leq x \leq -1 \\ x \geq 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x \leq -1 \\ 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

do x là số nguyên nên $x \in \{-1; 1\}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 154. Tập nghiệm của bất phương trình $2 - 3x < x + 6$ là

- A. $(-1; \infty)$. B. $(-\infty; -1)$. C. $(-\infty; 1)$. D. $(1; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $2 - 3x < x + 6 \Leftrightarrow 4x > -4 \Leftrightarrow x > -1$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 155. Bất phương trình $|x - 5| \leq 4$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

- A. 10. B. 8. C. 9. D. 7.

Lời giải.

Ta có $|x - 4| \leq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 \geq -4 \\ x - 5 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 9$.

Trên $[1; 9]$, phương trình $|x - 5| \leq 4$ có 9 nghiệm nguyên.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 156. Tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $mx + 4 > 0$ nghiệm đúng với mọi $|x| < 8$ là

A. $m \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

B. $m \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$.

C. $m \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

D. $m \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right]$.

Lời giải.

Ta có: $|x| < 8 \Leftrightarrow x \in (-8; 8)$.

a) Xét $m = 0 \Leftrightarrow$ bất phương trình $mx + 4 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$, suy ra bất phương trình có nghiệm đúng với $|x| < 8$.

b) Xét $m > 0$: Bất phương trình $mx + 4 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{4}{m}$. Bất phương trình nghiệm đúng $\forall x \in (-8; 8) \Leftrightarrow -8 \geq -\frac{4}{m} \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2} \Rightarrow m \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$.

c) Xét $m < 0$: Bất phương trình $mx + 4 > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{4}{m}$. Bất phương trình nghiệm đúng $\forall x \in (-8; 8) \Leftrightarrow 8 \geq -\frac{4}{m} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m < 0$.

Kết hợp 3 trường hợp trên, ta được giá trị của $m \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 157. Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{x - 2007} > \sqrt{2017 - x}$ là

A. $[2017; +\infty)$.

B. $(-\infty; 2017)$.

C. $\{2017\}$.

D. $\emptyset$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x \geq 2017 \\ x \leq 2017 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2017$

Thử $x = 2017$ vào bất phương trình không thỏa mãn. Vậy bất phương trình vô nghiệm.

Chọn đáp án **D** □

Câu 158. Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} \frac{2x-1}{3} < -x+1 \\ \frac{4-3x}{2} < 3-x \end{cases}$ là

A. $\left(-2; \frac{4}{5}\right)$.

B. $\left[-2; \frac{4}{5}\right]$.

C. $\left(-2; \frac{3}{5}\right)$.

D. $\left[-1; \frac{1}{3}\right)$.

Lời giải.

Hệ bất phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 < -3x+3 \\ 4-3x < 6-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{4}{5} \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x < \frac{4}{5}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho $\left(-2; \frac{4}{5}\right)$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 159. Số nghiệm nguyên dương của bất phương trình $(2-x)(x+1)(3-x) \leq 0$ là

A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

Ta có $2-x=0 \Leftrightarrow x=2$; $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$; $3-x=0 \Leftrightarrow x=3$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	2	3	$+\infty$
VT	$-$	0	$+$	0	$+$

Suy ra $x \in (-\infty; -1] \cup [2; 3]$.

Vậy số nghiệm nguyên dương của bất phương trình là 2.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 160. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2mx - 2m + 3}$ có tập xác định $\mathbb{R}$.

A. 4.

B. 6.

C. 3.

D. 5.

Lời giải.

Hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2mx - 2m + 3}$ có tập xác định $\mathbb{R}$ khi $x^2 - 2mx - 2m + 3 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \leq 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 3 \leq 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 1. \text{ Do } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0; 1\}.$$

Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 161. Gọi S là tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{5x-1} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-4}$. Tập hợp nào sau đây là phần bù của S ?

A. $(-\infty; 0) \cup [10; +\infty)$.

B. $(-\infty; 2] \cup (10; +\infty)$.

C. $(-\infty; 2) \cup [10; +\infty)$.

D. $(0; 10)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x \geq 2$.

$$\text{Ta có } \sqrt{5x-1} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-4} \Leftrightarrow \sqrt{5x-1} > \sqrt{x-1} + \sqrt{2x-4}$$

$$\Leftrightarrow 5x-1 > x-1 + 2x-4 + 2\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{2x-4} \Leftrightarrow x+2 > \sqrt{2x^2-6x+4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 > 2x^2 - 6x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 10x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 10 \Rightarrow S = [2; 10].$$

Phần bù của S là $(-\infty; 2) \cup [10; +\infty)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 162. Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì biểu thức $f(x) = \frac{2-x}{2x+1}$ không âm?

A. $S = \left(-\frac{1}{2}; 2\right)$.

B. $S = \left(-\frac{1}{2}; 2\right]$.

C. $S = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

D. $S = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup [2; +\infty)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{2-x}{2x+1} \geq 0.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$2-x$	$+$	$+$	0	$-$
$2x+1$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	0	$-$

Vậy $S = \left(-\frac{1}{2}; 2\right]$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 163. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{2}{x^2 - 5x + 9}$ bằng

A. $\frac{8}{11}$.

B. $\frac{11}{4}$.

C. $\frac{11}{8}$.

D. $\frac{4}{11}$.

Lời giải.

Ta có $x^2 - 5x + 9 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \geq \frac{11}{4} \Rightarrow f(x) \leq \frac{2}{\frac{11}{4}} = \frac{8}{11}$.

Suy ra giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ bằng $\frac{8}{11}$ khi $x = \frac{5}{2}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 164. Với giá trị nào của m thì phương trình $(m-1)^2 - 2(m-2)x + m-3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2 < 1$?

A. $1 < m < 3$.

B. $1 < m < 2$.

C. $m > 2$.

D. $m > 3$.

Lời giải.

Phương trình $(m-1)x^2 - 2(m-2)x + m+3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m-1 \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ (m-2)^2 - (m-2)(m-3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 1.$$

Theo định lí Vi-et ta có: $x_1 + x_2 = \frac{2m-4}{m-1}, x_1 \cdot x_2 = \frac{m-3}{m-1}$.

Theo đề ta có: $x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2 < 1 \Leftrightarrow \frac{2m-4}{m-1} + \frac{m-3}{m-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{2m-6}{m-1} < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 3$.

Vậy $1 < m < 3$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 165. Ba kho hàng A, B và C có tất cả 1035 tấn thóc, biết số thóc ở kho A nhiều hơn số thóc ở kho B là 93 tấn nhưng ít hơn tổng số thóc ở kho B và kho C là 517 tấn. Tính số thóc ở kho C .

A. 166 tấn thóc.

B. 529 tấn thóc.

C. 259 tấn thóc.

D. 610 tấn thóc.

Lời giải.

Gọi số thóc ở các kho hàng A, B, C lần lượt là a, b, c tấn thóc.

Khi đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a+b+c=1035 \\ a-b=93 \\ b+c-a=517 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=259 \\ b+c=776 \\ a-b=93 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=259 \\ b=166 \\ c=610. \end{cases}$$

Vậy kho C có 610 tấn thóc.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 166. Bạn An và bạn Tâm đến một cửa hàng văn phòng phẩm để mua bút chì và bút bi. Bạn An mua 3 bút chì và 2 bút bi với giá 13500 đồng, bạn Tâm của 2 bút chì và 4 bút bi với giá 17000 đồng. Vậy giá mỗi bút chì và mỗi bút bi tương ứng là

- A. 3000 đồng và 3500 đồng.
C. 2500 đồng và 3500 đồng.

- B. 2000 đồng và 3000 đồng.
D. 2500 đồng và 3000 đồng.

Lời giải.

Gọi giá mỗi bút chì và mỗi bút bi lần lượt là x, y đồng. Theo bài ra ta có hệ

$$\begin{cases} 3x + 2y = 13500 \\ 2x + 4y = 17000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 13500 \\ x + 2y = 8500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 5000 \\ x + 2y = 8500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2500 \\ y = 3000. \end{cases}$$

Vậy giá mỗi bút chì và mỗi bút bi tương ứng là 2500 đồng và 3000 đồng.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 167. Tìm m để $f(x) = (m - 2)x + 2m - 1$ là nhị thức bậc nhất.

- A. $m \neq 2$.
B. $\begin{cases} m \neq 0 \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}$.
C. $m > 2$.
D. $m < 1$.

Lời giải.

Để $f(x) = (m - 2)x + 2m - 1$ là nhị thức bậc nhất thì $m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 168. Khi hệ phương trình $\begin{cases} x + 2my - z = 1 \\ 2x - my - 2z = 2 \\ x - (m + 4)y - z = 1 \end{cases}$ có nghiệm $(x; y; z)$ với $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -\frac{4}{3} \end{cases}$, giá trị

$T = 2017x - 2018y - 2017z$ là

- A. $T = -2017$.
B. $T = 2018$.
C. $T = 2017$.
D. $T = -2018$.

Lời giải.

Kí hiệu $\begin{cases} x + 2my - z = 1 & (1) \\ 2x - my - 2z = 2 & (2) \\ x - (m + 4)y - z = 1 & (3) \end{cases}$.

Do $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -\frac{4}{3} \end{cases}$, từ (1) và (3) ta có $\begin{cases} x - z = 1 \\ y = 0 \end{cases}$.

Ta có $T = 2017x - 2018y - 2017z = 2017(x - z) = 2017$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 169. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 2xy + 8x = 3y^2 + 12y + 9 \\ x^2 + 4y + 18 - 6\sqrt{x+7} - 2x\sqrt{3y+1} = 0 \end{cases}$ có nghiệm là $(a; b)$. Khi

đó giá trị biểu thức $T = 5a^2 + 4b^2$

- A. $T = 24$.
B. $T = 21$.
C. $T = 5$.
D. $T = 4$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x \geq -7 \\ y \geq -\frac{1}{3} \end{cases} (*)$

$\begin{cases} x^2 + 2xy + 8x = 3y^2 + 12y + 9 & (1) \\ x^2 + 4y + 18 - 6\sqrt{x+7} - 2x\sqrt{3y+1} = 0 & (2) \end{cases}$.

Có: (1) $\Leftrightarrow x^2 + 2(y+4)x - 3y^2 - 12y - 9 = 0$, ta coi (1) là phương trình bậc hai ẩn x và y là tham số, giải x theo y ta được $\begin{cases} x = -3y - 9 \\ x = y + 1 \end{cases}$,

$$\text{Với } x = -3y - 9 \text{ thì } (*) \Rightarrow \begin{cases} -3x - 9 \geq -7 \\ y \geq -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq -\frac{2}{3} \\ y \geq -\frac{1}{3} \end{cases} \text{ (Vô lý).}$$

Với $x = y + 1$ thì

$$(2) \Rightarrow x^2 + 4x - 6\sqrt{x+7} - 2x\sqrt{3x-2} + 14 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{3x-2})^2 + (\sqrt{x+7} - 3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3x-2} \\ \sqrt{x+7} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \text{ (thỏa mãn)} \Rightarrow y = 1 \text{ (thỏa mãn)}.$$

Hệ phương trình có nghiệm là $(2; 1) \Rightarrow a = 2, b = 1 \Rightarrow T = 24$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 170. Các nghiệm của hệ $\begin{cases} xy - 3x - 2y = 16 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 33 \end{cases}$ là

- A. $(x; y) = (-3 - \sqrt{3}; -2 + \sqrt{3}); (x; y) = (-3 + \sqrt{3}; -2 - \sqrt{3})$.
 B. $(x; y) = (-3 - \sqrt{3}; -3 + \sqrt{3}); (x; y) = (-2 - \sqrt{3}; -2 + \sqrt{3})$.
 C. $(x; y) = (-3; -2); (x; y) = (3; 2)$.
 D. $(x; y) = (-3; 3); (x; y) = (2; 2)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} xy - 3x - 2y = 16 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 33 \end{cases} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (xy - 2x - y + 2) - x + 1 - y + 2 = 21 \\ (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = 38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(y-2) - (x-1) - (y-2) = 21 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 38 \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Đặt } u = x - 1; v = y - 2 \text{ ta được hệ phương trình } \begin{cases} uv - (u+v) = 21 \\ u^2 + v^2 = 38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv - (u+v) = 21 \\ (u+v)^2 - 2uv = 38 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } S = u + v; P = uv \text{ ta được hệ phương trình } \begin{cases} P - S = 21 \\ S^2 - 2P = 38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = S + 21 \\ S^2 - 2S - 80 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S = -8 \\ P = 13 \end{cases} \text{ v } \begin{cases} S = 10 \\ P = 31 \end{cases}.$$

$$+ \text{ Khi } \begin{cases} S = -8 \\ P = 13 \end{cases} \text{ thì } u; v \text{ là nghiệm của phương trình: } X^2 + 8X + 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = -4 + \sqrt{3} \\ v = -4 - \sqrt{3} \end{cases} \text{ v } \begin{cases} u = -4 - \sqrt{3} \\ v = -4 + \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = -4 + \sqrt{3} \\ y - 2 = -4 - \sqrt{3} \end{cases} \text{ v } \begin{cases} x - 1 = -4 - \sqrt{3} \\ y - 2 = -4 + \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 + \sqrt{3} \\ y = -2 - \sqrt{3} \end{cases} \text{ v } \begin{cases} x = -3 - \sqrt{3} \\ y = -2 + \sqrt{3} \end{cases}.$$

+ Khi $\begin{cases} S = 10 \\ P = 31 \end{cases}$ thì $u; v$ là nghiệm của phương trình: $X^2 - 10X + 31 = 0$ (vô nghiệm).

Chọn đáp án **A**

□

Câu 171. Cho $(x; y)$ với x, y nguyên là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} xy + y^2 + x = 7y(1) \\ \frac{x^2}{y} + x = 12(2) \end{cases}$ thì tích

xy bằng

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải.

Điều kiện $y \neq 0$.

$$\text{Hệ phương trình tương đương với } \begin{cases} x + y + \frac{x}{y} = 7 & (1) \\ x \left(\frac{x}{y} + 1 \right) = 12 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) và x, y là số nguyên nên y là ước của x .

Từ (2) ta có x là ước của 12.

$$+ x = \pm 1 \text{ thì } \frac{\pm 1}{y} + 1 = \pm 12 \text{ (loại).}$$

$$+ x = \pm 2 \text{ thì } \frac{\pm 2}{y} + 1 = \pm 6 \text{ (loại).}$$

$$+ x = 3 \text{ thì } \frac{3}{y} + 1 = 4 \Leftrightarrow y = 1 \text{ (thỏa mãn)} \Rightarrow xy = 3.$$

$$+ x = -3 \text{ thì } -\frac{3}{y} + 1 = -4 \text{ (loại)}$$

$$+ x = 4 \text{ thì } \frac{4}{y} + 1 = 3 \text{ (loại).}$$

$$+ x = -4 \text{ thì } -\frac{4}{y} + 1 = -3 \Leftrightarrow y = 1 \text{ (loại vì không thỏa mãn (1)).}$$

$$+ x = 6 \text{ thì } \frac{6}{y} + 1 = 2 \Leftrightarrow y = 6 \text{ (loại vì không thỏa mãn (1)).}$$

$$+ x = -6 \text{ thì } -\frac{6}{y} + 1 = -2 \Leftrightarrow y = 2 \text{ (loại vì không thỏa mãn (1)).}$$

$$+ x = 12 \text{ thì } \frac{12}{y} + 1 = 1 \text{ vô nghiệm.}$$

$$+ x = -12 \text{ thì } -\frac{12}{y} + 1 = -1 \Leftrightarrow y = 6 \text{ (loại vì không thỏa mãn (1)).}$$

Vậy có duy nhất một nghiệm nguyên $x = 3; y = 1$ nên $xy = 3$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 172. Một hộ nông dân định trồng đậu và cà trên diện tích 800 m². Nếu trồng đậu thì cần 20 công và thu 3 triệu đồng trên 100 m² nếu trồng cà thì cần 30 công và thu 4 triệu đồng trên 100 m². Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên diện tích là bao nhiêu để thu được nhiều tiền nhất khi tổng số công không quá 180 công. Hãy chọn phương án đúng nhất trong các phương án sau

A. Trồng 600 m² đậu, 200 m² cà.

B. Trồng 500 m² đậu, 300 m² cà.

C. Trồng 400 m² đậu, 200 m² cà.

D. Trồng 200 m² đậu, 600 m² cà.

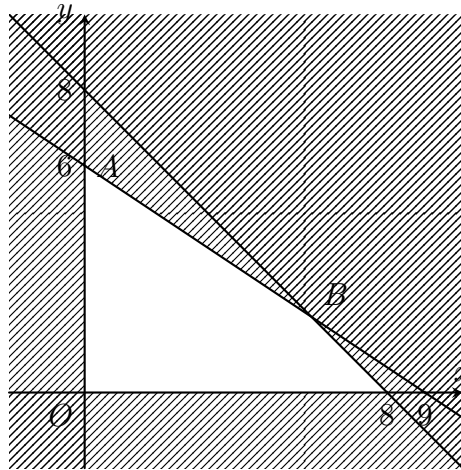
Lời giải.

Gọi x m² là diện tích đất trồng đậu, y m² là diện tích đất trồng cà. Điều kiện $x \geq 0, y \geq 0$.

Số tiền thu được là $T = 3x + 4y$ triệu đồng.

$$\text{Theo bài ra ta có } \begin{cases} x + y \leq 8 \\ 20x + 30y \leq 180 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \leq 8 \\ 2x + 3y \leq 18 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Đồ thị:



Dựa đồ thị ta có tọa độ các đỉnh $A(0; 6)$, $B(6; 2)$, $C(8; 0)$, $O(0; 0)$.

Thay vào $T = 3x + 4y$ ta được $T_{\max} = 26$ triệu đồng khi trồng 600 m^2 đậu và 200 m^2 cà.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 173. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} x - my = 1 \\ mx + y = 3 \end{cases}$ có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 + y^2 = 10$?

A. $m = 0$.

B. $m = 1$.

C. $m = -1$.

D. $m = \pm 1$.

Lời giải.

Từ phương trình thứ nhất suy ra $x = 1 + my$ (1), thay vào phương trình thứ hai ta có

$$m(1 + my) + y = 3 \Leftrightarrow (m^2 + 1)y = 3 - m \Leftrightarrow y = \frac{3 - m}{m^2 + 1}. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) có

$$x = 1 + \frac{m(3 - m)}{m^2 + 1} = \frac{3m + 1}{m^2 + 1}.$$

Vậy hệ luôn có nghiệm $(x; y)$ với mọi m .

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 10 &\Leftrightarrow \frac{(3m + 1)^2}{(m^2 + 1)^2} + \frac{(3 - m)^2}{(m^2 + 1)^2} = 10 \\ &\Leftrightarrow 9m^2 + 6m + 1 + 9 - 6m + m^2 = 10(m^4 + 2m^2 + 1) \\ &\Leftrightarrow 10m^2 + 10 = 10(m^4 + 2m^2 + 1) \\ &\Leftrightarrow m^4 + m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2(m^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow m = 0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 174. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = m - 1 \\ 3x + y = 4m + 1 \end{cases}$. Giá trị m thuộc khoảng nào sau đây để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x_0; y_0)$ thỏa mãn $2x_0 - 3y_0 = 1$?

- A. $m \in (5; 9)$. B. $m \in (-5; 1)$. C. $m \in (0; 3)$. D. $m \in (-4; 1)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} 2x - y = m - 1 \\ 3x + y = 4m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ y = m + 1. \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $(m; m + 1)$ mà $2x_0 - 3y_0 = 1 \Leftrightarrow 2m - 3(m + 1) = 1 \Leftrightarrow m = -4$.
 Vậy $m \in (-5; 1)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 175. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + my = 1 \\ mx + y = 1 \end{cases}$ (I), m là tham số. Mệnh đề nào **sai**?

- A. Hệ (I) có nghiệm duy nhất $\forall m \neq \pm 1$. B. Khi $m = 1$ thì hệ (I) có vô số nghiệm.
 C. Khi $m = -1$ thì hệ (I) vô nghiệm. D. Hệ (I) có vô số nghiệm.

Lời giải.

Hệ (I) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \frac{1}{m} \neq \frac{m}{1} \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

Hệ (I) vô số nghiệm $\Leftrightarrow \frac{1}{m} = \frac{m}{1} = 1 \Leftrightarrow m = 1$.

Hệ (I) vô nghiệm $\Leftrightarrow \frac{1}{m} = \frac{m}{1} \neq 1 \Leftrightarrow m = -1$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 176. Có bao nhiêu giá trị m nguyên dương để hệ phương trình $\begin{cases} mx - y = 3 \\ 2x + my = 9 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho biểu thức $A = 3x - y$ nhận giá trị nguyên

- A. 4. B. 2. C. 3. D. 1.

Lời giải.

Ta có $\mathcal{D} = \begin{vmatrix} m & -1 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m^2 + 2 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất.

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & m \end{vmatrix} = 3m + 9; D_y = \begin{vmatrix} m & 3 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 9m - 6.$$

Vậy hệ luôn có nghiệm duy nhất là $\begin{cases} x = \frac{3m + 9}{m^2 + 2} \\ y = \frac{9m - 6}{m^2 + 2} \end{cases}$.

$$\text{Ta có } A = 3x - y = \frac{3(3m + 9)}{m^2 + 2} - \frac{9m - 6}{m^2 + 2} = \frac{33}{m^2 + 2}.$$

Để A nguyên thì $m^2 + 2$ là ước của 33 mà $m^2 + 2 \geq 2$ nên ta có các trường hợp sau:

- + TH1: $m^2 + 2 = 3 \Leftrightarrow m = \pm 1$.
 + TH2: $m^2 + 2 = 11 \Leftrightarrow m = \pm 3$.
 + TH3: $m^2 + 2 = 33 \Leftrightarrow m = \pm \sqrt{31}$ (loại).

Vậy có 2 giá trị nguyên dương của m để A nguyên.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 177. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ x - 3y = -1 \\ y - 3z = -2 \end{cases}.$$

A. $(2; 1; 1)$.

B. $(-2; 1; 1)$.

C. $(2; -1; 1)$.

D. $(2; 1; -1)$.

Lời giải.

Rút y ở phương trình cuối ta có $y = -2 + 3z$ thay vào hai phương trình đầu ta được

$$\begin{cases} x - 4 + 6z - 3z = 1 \\ x + 6 - 9z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3z = 5 \\ x - 9z = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow y = 1. \text{ Vậy nghiệm là } (2; 1; 1).$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 178. Hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 13 \\ \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 12 \end{cases}$$
 có nghiệm là

A. $x = \frac{1}{2}; y = -\frac{1}{3}$.

B. $x = -\frac{1}{2}; y = \frac{1}{3}$.

C. $x = \frac{1}{2}; y = \frac{1}{3}$.

D. $x = \frac{1}{2}; y = \frac{1}{3}$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}.$

Đặt $a = \frac{1}{x}$ và $b = \frac{1}{y}$ thì hệ trở thành $\begin{cases} 2a + 3b = 13 \\ 3a + 2b = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}.$

Vậy nghiệm của hệ là $x = \frac{1}{2}; y = \frac{1}{3}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 179. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2y + xy^2 = 4m^2 - 2m \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của m để hệ trên có nghiệm.

A. $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

B. $[1; +\infty)$.

C. $[0; 2]$.

D. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$.

Lời giải.

Hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2y + xy^2 = 4m^2 - 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ xy(x + y) = 4m^2 - 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 2m^2 - m \end{cases}.$$

Hệ phương trình có nghiệm thì $2^2 \geq 4(2m^2 - m) \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq 1$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 180. Hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + xy = 3 \\ y^2 + xy = m^2 - 4 \end{cases}$ có nghiệm khi

A. $\begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases}$.

B. $m > 1$.

C. $m < -1$.

D. $m \neq \pm 1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} x^2 + xy = 3 \\ y^2 + xy = m^2 - 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy = m^2 - 1 \Rightarrow (x + y)^2 = m^2 - 1.$$

Phương trình này có nghiệm khi $m^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -1. \end{cases}$

Chọn đáp án **A** □

Câu 181. Hệ phương trình $\begin{cases} x^2 = 3x - y \\ y^2 = 3y - x \end{cases}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Lời giải.

$$\begin{cases} x^2 = 3x - y & (1) \\ y^2 = 3y - x & (2) \end{cases}.$$

Lấy (1) trừ (2) theo vế ta được: $x^2 - y^2 = 4x - 4y \Leftrightarrow (x - y)(x + y - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = 4 - x \end{cases}.$

$$\text{TH1: } \begin{cases} x^2 = 3x - y \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = 0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ x = y = 2 \end{cases}.$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} x^2 = 3x - y \\ y = 4 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 4 = 0 \\ y = 4 - x \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 2.$$

Vậy hệ có hai nghiệm.

Chọn đáp án **B** □

Câu 182. Hệ phương trình $\begin{cases} (2x + y)^2 - 5(4x^2 - y^2) + 6(4x^2 - 4xy + y^2) = 0 \\ 2x + y + \frac{1}{2x - y} = 3 \end{cases}$ có một nghiệm $(x_0; y_0)$.

Khi đó $P = x_0^2 + y_0^2$ có giá trị là

A. 1.

B. $\frac{17}{16}$.

C. 3.

D. 2.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} (2x + y)^2 - 5(4x^2 - y^2) + 6(4x^2 - 4xy + y^2) = 0 & (1) \\ 2x + y + \frac{1}{2x - y} = 3 & (2) \end{cases}.$$

$$(1) \Leftrightarrow 8x^2 + 12y^2 - 20xy = 0 \Leftrightarrow (x - y)(2x - 3y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x = 3y \end{cases}.$$

Với $x = y$ ta có (2) $\Rightarrow 3x + \frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow 3x^2 - 3x + 1 = 0$: phương trình vô nghiệm.

$$\text{Với } 2x = 3y \text{ ta có (2) } \Rightarrow 4y + \frac{1}{2y} = 3 \Leftrightarrow 8y^2 - 6y + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

$$\text{Với } y = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{4} \Rightarrow P = 1.$$

$$\text{Với } y = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{3}{8} \Rightarrow P = \frac{7}{16}$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 183. Tổng số tuổi của bố, mẹ và con bằng 70. Tuổi của bố và con bằng $\frac{4}{3}$ tuổi mẹ, tuổi mẹ gấp 6 lần tuổi con. Tuổi của bố, mẹ và con lần lượt bằng bao nhiêu?

- A. 35, 30, 5. B. 36, 28, 6. C. 30, 35, 5. D. 28, 36, 6.

Lời giải.

Gọi x, y, z , ($0 < x, y, z < 70$), lần lượt là tuổi của bố, mẹ và con.

Theo đề bài ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 70 \\ x + z = \frac{4}{3}y \\ y = 6z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 7z = 70 \\ x - 7z = 0 \\ y = 6z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 35 \\ y = 30 \\ z = 5. \end{cases}$$

Vậy tuổi của bố, mẹ và con lần lượt bằng 35, 30, 5.

Chọn đáp án **A** □

Câu 184. Một số tự nhiên có hai chữ số có dạng $\overline{ab}$, biết hiệu của hai chữ số đó bằng 3. Nếu viết các chữ số theo thứ tự ngược lại thì được một số bằng $\frac{4}{5}$ số ban đầu trừ đi 10. Khi đó $a^2 + b^2$ bằng

- A. 45. B. 89. C. 117. D. 65.

Lời giải.

Ta có: $|a - b| = 3$ ($a, b \in \mathbb{N}; 0 \leq a, b \leq 9$).

Khi viết ngược lại ta có: $10b + a = \frac{4}{5}(10a + b) - 10 \Leftrightarrow 35a - 46b = 50$.

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} a - b = 3 \\ 35a - 46b = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 5 \end{cases}$.

Hoặc $\begin{cases} -a + b = 3 \\ 35a - 46b = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{188}{11} \\ b = -\frac{155}{11} \end{cases}$ (loại). Với $a = 8, b = 5, a^2 + b^2 = 89$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 185. Một xe hơi khởi hành từ Krông Năng đi đến Nha Trang cách nhau 175 km. Khi về xe tăng vận tốc trung bình hơn vận tốc trung bình lúc đi là 20 km/giờ. Biết rằng thời gian dùng để đi và về là 6 giờ; vận tốc trung bình lúc đi là

- A. 60 km/giờ. B. 45 km/giờ. C. 55 km/giờ. D. 50 km/giờ.

Lời giải.

Gọi $x, y > 0$ (km/giờ) lần lượt là vận tốc trung bình lúc đi và vận tốc trung bình lúc về.

Theo đề bài ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} y - x = 20 \\ \frac{175}{x} + \frac{175}{y} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 20 + x(1) \\ \frac{175}{x} + \frac{175}{y} = 6(2) \end{cases}$$

Thế (1) vào (2) ta được

$$\frac{175}{x} + \frac{175}{20 + x} = 6 \Leftrightarrow 6x^2 - 230x - 3500 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \\ x = -\frac{35}{3} \end{cases} \Rightarrow x = 50 \text{ vì } x > 0.$$

Vậy vận tốc lúc đi là 50 km/giờ.

Chọn đáp án **D** □

Câu 186. Gọi S là tập hợp tất các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $(d): y = mx$ cắt parabol $\frac{25}{8}$ tại hai điểm phân biệt A và B sao cho trung điểm I của đoạn thẳng AB thuộc đường thẳng $(\Delta): y = x - 3$. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

A. 2.

B. 1.

C. 5.

D. 3.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm: $-x^2 + 2x + 3 = mx \Leftrightarrow x^2 + (m - 2)x - 3 = 0(1)$.

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow (1) \text{ có hai nghiệm phân biệt } \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \neq 0 \\ \Delta = (m - 2)^2 + 12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall m.$$

Khi đó (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; mx_1)$, $B(x_2; mx_2)$, với x_1, x_2 là nghiệm phương trình (1). Theo Viét, có: $x_1 + x_2 = 2 - m$, $x_1 x_2 = -3$.

$$I \text{ là trung điểm } AB \Rightarrow I = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{mx_1 + mx_2}{2} \right) = \left(\frac{2 - m}{2}; \frac{-m^2 + 2m}{2} \right).$$

$$\text{Mà } I \in (\Delta): y = x - 3 \Rightarrow \frac{-m^2 + 2m}{2} = \frac{2 - m}{2} - 3 \Leftrightarrow m^2 - 3m - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 = m_1 \\ m = 4 = m_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow m_1 + m_2 = 3.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 187. Hai bạn Vân và Lan đi mua trái cây. Vân mua 10 quả quýt, 7 quả cam với giá tiền là 17800. Lan mua 12 quả quýt, 6 quả cam hết 18000. Hỏi giá tiền mỗi quả quýt, quả cam là bao nhiêu?

A. Quýt 1400, cam 800.

B. Quýt 700, cam 200.

C. Quýt 800, cam 1400.

D. Quýt 600, cam 800.

Lời giải.

Cách 1: Gọi số tiền để mua một quả quýt là x đồng; số tiền để mua một quả cam là y đồng.

$$\text{Theo bài ra ta có hệ phương trình: } \begin{cases} 10x + 7y = 17\,800 \\ 12x + 6y = 18\,000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 800 \\ y = 1400 \end{cases}.$$

Vậy giá tiền mỗi quả quýt là 800 đồng, mỗi quả cam là 1400 đồng.

Cách 2: Thử các đáp án,.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 188. Cho hàm số $y = x + \frac{1}{x - 1}$ xác định trên $(1; +\infty)$. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số, giá trị của m nằm trong khoảng nào sau đây?

A. $(4; 7)$.B. $(-2; 3)$.C. $(5; +\infty)$.D. $(2; 8)$.

Lời giải.

$$x - 1 + \frac{1}{x - 1} \geq 2, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow x + \frac{1}{x - 1} \geq 3, \forall x \in (1; +\infty).$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } x - 1 + \frac{1}{x - 1} \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 2, \forall x \in (1; +\infty)$$

$$\text{Vậy } \min_{(1; +\infty)} y = 3.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 189. Tập xác định của bất phương trình $\sqrt[3]{x + 2} + \sqrt{x + 3} + \frac{1}{2} > 2x - 3$ là

A. $[-2; +\infty)$.B. $[-3; +\infty)$.C. $[-3; +\infty) \setminus \{0\}$.D. $[-2; +\infty) \setminus \{0\}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \neq 0 \end{cases}$

Vậy tập xác định của bất phương trình là $[-3; +\infty) \setminus \{0\}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 190. Cho các mệnh đề sau

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \text{ (I); } \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} \geq 3 \text{ (II); } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9 \text{ (III)}$$

Với mọi giá trị của a, b, c dương ta có

A. (I) đúng và (II), (III) sai.

B. (II) đúng và (I), (III) sai.

C. (III) đúng và (I), (II) sai.

D. (I), (II), (III) đúng.

Lời giải.

Với mọi a, b, c dương ta luôn có:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, \text{ dấu "=" xảy ra khi } a = b. \text{ Vậy (I) đúng.}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3, \text{ dấu "=" xảy ra khi } a = b = c. \text{ Vậy (II) đúng.}$$

$$(a+b+c) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 3\sqrt[3]{abc} \cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}, \text{ dấu "=" xảy ra khi } a = b = c.$$

Vậy (III) đúng.

Vậy (I), (II), (III) đúng.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 191. Tổng tất cả các nghiệm nguyên của hệ bất phương trình $\begin{cases} 5x-2 < 4x+5 \\ x^2 < (x+2)^2 \end{cases}$ bằng

A. 21.

B. 28.

C. 27.

D. 29.

Lời giải.

$$\begin{cases} 5x-2 < 4x+5 \\ x^2 < (x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 7 \\ x^2 < x^2 + 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 7 \\ -4x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 7 \\ x > -1 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-1; 7)$

Suy ra các nghiệm nguyên của hệ bất phương trình là 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6.

Vậy tổng tất cả các nghiệm nguyên của hệ bất phương trình là 21.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 192. Để bất phương trình $5x^2 - x + m \leq 0$ vô nghiệm thì m thỏa mãn điều kiện nào sau đây?

A. $m \leq \frac{1}{5}$.

B. $m > \frac{1}{20}$.

C. $m \leq \frac{1}{20}$.

D. $m > \frac{1}{5}$.

Lời giải.

Bất phương trình $5x^2 - x + m \leq 0$ vô nghiệm

$$\Leftrightarrow 5x^2 - x + m > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 20m < 0 \\ 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{1}{20}.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 193. Cho hàm số $f(x) = x^2 + 2x + m$. Với giá trị nào của tham số m thì $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

A. $m \geq 1$.

B. $m > 1$.

C. $m > 0$.

D. $m < 2$.

Lời giải.

Ta có $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta' = 1 - m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1.$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 194. Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x + y \geq 9 \\ x \geq y - 3 \\ 2y \geq 8 - x \\ y \leq 6 \end{cases}$ là phần mặt phẳng chứa điểm

A. (1; 2). B. (0; 0). C. (2; 1). D. (8; 4).

Lời giải.

Ta thay tọa độ điểm (1; 2), (0; 0), (2; 1) vào bất phương trình thứ nhất của hệ không thỏa mãn.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 195. Với x thuộc tập nào dưới đây thì nhị thức bậc nhất $f(x) = |2x - 5| - 3$ không dương?

- A. $x < 1$. B. $x = \frac{5}{2}$. C. $x = 0$. D. $1 \leq x \leq 4$.

Lời giải.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow |2x - 5| - 3 \leq 0 \Leftrightarrow |2x - 5| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq 2x - 5 \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 4$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 196. Bình phương của tổng hai nghiệm của phương trình $x^2 - 6x + 8 = 0$ là

- A. 9. B. 6. C. 20. D. 36.

Lời giải.

Phương trình $x^2 - 6x + 8 = 0$ có hai nghiệm là $x_1 = 2$ và $x_2 = 4$ nên $(x_1 + x_2)^2 = 36$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 197. Trong các phương trình sau, phương trình nào **không phải** là phương trình bậc hai?

- A. $x^2 - 3x + 2 = x(x + 5)$. B. $(1 - \sqrt{3}x^2 - 4\sqrt{3}x = 0)$.
C. $x^2 - 3x + 2 = -x(x + 5)$. D. $x^2 - 4 = 0$.

Lời giải.

Ta có $x^2 - 3x + 2 = x(x + 5) \Leftrightarrow 4x - 1 = 0$ là phương trình bậc nhất một ẩn.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 198. Cặp số (1; -1) là nghiệm của hệ phương trình nào sau đây?

- A. $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$. C. $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$.

Lời giải.

Thay cặp số (1; -1) vào từng hệ phương trình, ta nhận hệ $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 199. Hệ phương trình nào sau đây vô nghiệm?

- A. $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -2x - y + 1 = 0 \end{cases}$.

$$\text{C. } \begin{cases} 2x + y = 1 \\ -2x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{D. } \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x - y - 2 = 0 \end{cases}$$

Lời giải.

Ta nhận thấy hệ $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -2x - y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$, nên hệ phương trình đó vô nghiệm.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 200. Tìm nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ x + 2y = 8. \end{cases}$

A. $(x; y) = (-2; -4)$. B. $(x; y) = (-4; -2)$. C. $(x; y) = (4; 2)$. D. $(x; y) = (2; 4)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7y = 14 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2. \end{cases}$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 201. Bộ ba số $(2; -1; 1)$ là nghiệm của hệ phương trình nào sau đây?

$$\text{A. } \begin{cases} x + 3y - 2z = -3 \\ 2x - y + z = 6 \\ 5x - 2y - 3z = 9 \end{cases}$$

$$\text{B. } \begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ 2x + 6y - 4z = -6 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$\text{C. } \begin{cases} 3x - y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

$$\text{D. } \begin{cases} x + y + z = -2 \\ 2x - y + z = 6 \\ 10x - 4y - z = 2 \end{cases}$$

Lời giải.

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = -3 \\ 2x - y + z = 6 \\ 5x - 2y - 3z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 1. \end{cases}$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 202. Tìm nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ -x + 4y = 2. \end{cases}$

A. $(x; y) = (2; 1)$. B. $(x; y) = \left(\frac{10}{7}; \frac{1}{7}\right)$. C. $(x; y) = \left(-\frac{10}{7}; \frac{1}{7}\right)$. D. $(x; y) = (-2; -1)$.

Lời giải.

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ -x + 4y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = -3 \\ -x + 4y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = -3 \\ -2x + 8y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = -3 \\ 7y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{10}{7} \\ y = \frac{1}{7}. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $\left(-\frac{10}{7}; \frac{1}{7}\right)$.

Chọn đáp án **C**

□

ĐÁP ÁN

1. B	2. D	3. A	4. C	5. C	6. B	7. B	8. A	9. B	10. A
11. C	12. C	13. D	14. D	15. C	16. C	17. C	18. A	19. D	20. B
21. B	22. D	23. C	24. A	25. B	26. D	27. D	28. D	29. B	30. B
31. A	32. A	33. A	34. A	35. C	36. C	37. C	38. D	39. A	40. B
41. A	42. B	43. D	44. C	45. B	46. B	47. B	48. C	49. A	50. A
51. A	52. A	53. A	54. A	55. A	56. A	57. A	58. C	59. C	60. C
61. A	62. D	63. A	64. C	65. B	66. A	67. B	68. B	69. C	70. D
71. A	72. C	73. C	74. C	75. B	76. A	77. A	78. A	79. A	80. A
81. A	82. D	83. A	84. B	85. B	86. C	87. A	88. A	89. C	90. C
91. C	92. B	93. C	94. A	95. B	96. A	97. D	98. A	99. D	100. B
101. B	102. D	103. B	104. D	105. B	106. D	107. D	108. D	109. C	110. D
111. B	112. C	113. D	114. D	115. A	116. B	117. C	118. A	119. C	120. C
121. A	122. A	123. D	124. A	125. A	126. D	127. D	128. D	129. A	130. C
131. D	132. D	133. A	134. C	135. C	136. D	137. C	138. A	139. D	140. D
141. A	142. C	143. B	144. A	145. A	146. C	147. C	148. A	149. C	150. A
151. D	152. D	153. A	154. A	155. C	156. A	157. D	158. A	159. C	160. D
161. C	162. B	163. A	164. A	165. D	166. D	167. A	168. C	169. A	170. A
171. C	172. A	173. B	174. B	175. D	176. B	177. A	178. D	179. A	180. A
181. B	182. A	183. A	184. B	185. D	186. D	187. C	188. D	189. C	190. D
191. A	192. B	193. A	194. D	195. D	196. D	197. A	198. B	199. C	200. C
201. A	202. C								

§4 HỆ PHƯƠNG TRÌNH HAI ẨN

A HỆ PHƯƠNG TRÌNH GỒM CÁC PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI

Để giải các hệ phương trình dạng này, ta chủ đạo sử dụng phương pháp thế và phương pháp cộng đại số thông thường, đôi khi kết hợp thêm giải pháp đặt ẩn phụ để làm gọn bài toán.

Ví dụ 1. Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y = 1 \\ x^2 - y^2 = 2x - 1 - y \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x^2 + 2x - y^2 = 1 \\ y^2 + 4x = 8 \end{cases}$$

Lời giải.

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y = 1 & (1) \\ x^2 - y^2 = 2x - 1 - y & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow x = 1 - 2y.$$

$$(2) \Leftrightarrow (1 - 2y)^2 - y^2 = 2(1 - 2y) - 1 - y \Leftrightarrow 3y^2 + y = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = 1 \\ y = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{5}{3} \end{cases}.$$

Vậy hệ có hai nghiệm là $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}.$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x^2 + 2x - y^2 = 1 & (1) \\ y^2 + 4x = 8 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) + (2) ta được $3x^2 + 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}.$

Với $x = -3$, (2) $\Leftrightarrow y^2 = 8 - 4x = 20 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2\sqrt{5} \\ y = 2\sqrt{5} \end{cases}.$

Với $x = 1$, (2) $\Leftrightarrow y^2 = 8 - 4x = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ y = 2 \end{cases}.$

Vậy hệ có bốn nghiệm là $\begin{cases} x = -3 \\ y = \pm 2\sqrt{5} \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \\ y = \pm 2 \end{cases}.$

□

Ví dụ 2. Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x^3 + 4x^2 + x^2y = 9 - 2xy \\ x^2 + y = 6 - 4x \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} \\ 2x^2 - xy - 1 = 0 \end{cases}$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} 2x^3 + 4x^2 + x^2y = 9 - 2xy & (1) \\ x^2 + y = 6 - 4x & (2) \end{cases} \\ & (2) \Leftrightarrow y = -x^2 - 4x + 6 \\ & (1) \Leftrightarrow 2x^3 + 4x^2 + x^2(-x^2 - 4x + 6) = 9 - 2x(-x^2 - 4x + 6) \\ & \Leftrightarrow x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = -3 \Rightarrow y = 9 \end{cases}. \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = -3 \\ y = 9 \end{cases}$.

$$\text{b) } \begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} & (1) \\ 2x^2 - xy - 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Điều kiện: $x \neq 0$ và $y \neq 0$.

$$(1) \Leftrightarrow x - y - \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0 \Leftrightarrow (x - y) \left(1 + \frac{1}{xy}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ xy = -1 \end{cases}.$$

$$\text{Trường hợp 1: } x = y, (2) \Leftrightarrow 2x^2 - x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = -1 \Rightarrow y = -1 \end{cases}.$$

$$\text{Trường hợp 2: } xy = -1, (2) \Leftrightarrow 2x^2 + 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (loại)}.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$.

□

Ví dụ 3. Xác định các giá trị của m để hệ phương trình $\begin{cases} x - 2y = m \\ x^2 + 2xy - y^2 = 2m \end{cases}$ có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải.

$$\text{Ta có } (1) \Leftrightarrow x = 2y + m.$$

$$\text{Thế vào (2) ta được } (2) \Leftrightarrow (2y + m)^2 + 2y(2y + m) - y^2 = 2m \Leftrightarrow 7y^2 + 6my + m^2 - 2m = 0(*).$$

Để hệ có hai nghiệm phân biệt thì (*) phải có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 2m^2 + 14m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -7 \\ m > 0 \end{cases}.$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x^2 + y^2 = 17 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \\ y^2 - x^2 + 2x + 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - 2y = 1 \\ x^2 + 14y^2 = 1 + 4xy \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} (3x + y - 1)(x - 2y - 1) = 0 \\ 2x - 3y + 1 = 0 \end{cases}$$

Lời giải.

Đáp số:

$$\text{a) } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 4 \end{cases}.$$

$$\text{b) } \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{13}{3} \\ y = \frac{5}{3} \end{cases}.$$

$$\text{d) } \begin{cases} x = \frac{2}{11} \\ y = \frac{5}{11} \end{cases}, \begin{cases} x = -5 \\ y = -3 \end{cases}.$$

□

Bài 2. Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} \\ x^2 + 3xy + 4y^2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = 2x + 9 \\ x^2 + 2xy = 6x + 6 \end{cases}$$

Lời giải.

$$\text{a) } \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}, \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = \pm \frac{1}{2} \\ y = \pm \frac{1}{2} \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}, \begin{cases} x = -2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{b) } \text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + xy)^2 = 2x + 9 & (1) \\ xy = \frac{-x^2 + 6x + 6}{2} & (2) \end{cases}.$$

$$\text{Thế (2) và (1) ta được (1)} \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{-x^2 + 6x + 6}{2}\right)^2 = 2x + 9 \Leftrightarrow (x^2 + 6x + 6)^2 = 8x + 36$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 12x^3 + 48x^2 + 64x = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}.$$

Với $x = 0$, hệ vô lý.

$$\text{Với } x = -4, (2) \Leftrightarrow y = \frac{-x^2 + 6x + 6}{2x} = \frac{17}{4}.$$

$$\text{Vậy hệ có nghiệm là } \begin{cases} x = -4 \\ y = \frac{17}{4} \end{cases}.$$

□

Bài 3. Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} x^4 - x^3y + x^2y^2 = 1 \\ x^3y^2 + xy + 1 = x^2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \sqrt{2x + 5y - 1} - \sqrt{x - 2y} = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Lời giải.

Hướng dẫn:

$$\text{a) } \text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - xy)^2 + x^3y = 1 \\ x^2 - xy = x^3y + 1 \end{cases}.$$

$$\text{Sử dụng phương pháp thế ta có nghiệm là } \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

b) Đặt $a = \sqrt{2x + 5y - 1}$, $b = \sqrt{x - 2y}$.

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x + 5y - 1} - \sqrt{x - 2y} = 1 \\ 2x + 5y - 1 + x - 2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}.$$

$$\text{Giải hệ tìm } a, b \text{ rồi suy ra nghiệm là } \begin{cases} x = \frac{13}{9} \\ y = \frac{2}{9} \end{cases}.$$

□

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ x^2y^2 + xy + 1 = 13y^2 \end{cases}$

Lời giải.

Xét $y = 0$, khi đó hệ vô lý.

$$\text{Xét } y \neq 0, \text{ hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{y} + \frac{x}{y} = 7 \\ x^2 + \frac{1}{y^2} + \frac{x}{y} = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{y} = 7 - \frac{x}{y} \\ \left(x + \frac{1}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} = 13 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

$$\text{Thế (1) và (2) ta được } \left(7 - \frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} = 13 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = 3 \\ \frac{x}{y} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ x = 12y \end{cases}.$$

$$\text{Trường hợp 1: } x = 3y, (1) \Leftrightarrow 3y^2 + 3y + 1 = 7y \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = 3 \\ y = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

Trường hợp 2: $x = 12y$, (1) $\Leftrightarrow 12y^2 + 12y + 1 = 7y$ (vô nghiệm).

$$\text{Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là } \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

□

Bài 5. Xác định các giá trị của m để hệ phương trình $\begin{cases} x + y = m \\ 2x^2 - 3y^2 = 6 \end{cases}$ có nghiệm.

Lời giải.

$$\text{Đáp số: } \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 1 \end{cases}.$$

□

B HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG LOẠI 1

Định nghĩa. Hệ phương trình đối xứng loại 1 của hai ẩn x, y là hệ mà khi ta thay thế x bởi y và y bởi x thì ta được hệ mới không thay đổi (thứ tự các phương trình trong hệ giữ nguyên).

Phương pháp giải:

Bước 1: Đặt điều kiện nếu cần;

Bước 2: Đặt $x + y = S$; $xy = P$ ($S^2 \geq 4P$). Khi đó ta đưa về hệ mới của 2 ẩn S, P ;

Bước 3: Giải hệ ta tìm được S, P ;

Bước 4: x, y là nghiệm của phương trình $X^2 - SX + P = 0$.

Chú ý:

$$x^2 + y^2 = S^2 - 2P; \quad x^3 + y^3 = S^3 - 3SP.$$

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x + y + xy = 5, \\ x^2 + y^2 - 3xy = -1. \end{cases}$

Lời giải.

Hệ đã cho có thể viết lại là:

$$\begin{cases} S + P = 5 \\ S^2 - 5P = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 5 - S \\ S^2 + 5S - 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = -8 \\ S = 3 \end{cases}.$$

TH1:

$$\begin{cases} S = 3 \\ P = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \end{cases}.$$

TH2:

$$\begin{cases} S = -8 \\ P = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -8 \\ xy = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -4 + \sqrt{3} \\ y = -4 - \sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -4 - \sqrt{3} \\ y = -4 + \sqrt{3} \end{cases} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm là: $(1; 2), (2; 1), (-4 + \sqrt{3}; -4 - \sqrt{3}), (-4 - \sqrt{3}; -4 + \sqrt{3})$ □

Chú ý: 1. Đối với hệ đối xứng của hai ẩn x, y thì nếu $(x_0; y_0)$ là nghiệm thì $(y_0; x_0)$ cũng là nghiệm của hệ.

2. Có một số hệ phương trình không phải là hệ đối xứng loại 1, tuy nhiên ta có thể chọn biến phù hợp để đổi biến đưa về hệ đối xứng loại 1.

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2 + x = \frac{14}{3}y, \\ x^3 = 5y^2. \end{cases}$

Lời giải.

$$\text{Xét hệ } \begin{cases} x^2 + x = \frac{14}{3}y & (1), \\ x^3 = 5y^2 & (2). \end{cases}$$

• Nếu $y = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0; 0)$ là nghiệm của hệ.

• Nếu $y \neq 0$. Chia 2 vế của phương trình (1) cho y ta có: $\frac{x^2}{y} + \frac{x}{y} = \frac{14}{3}.$

Chia 2 vế của phương trình (2) cho y^2 ta được $\frac{x^2}{y} \frac{x}{y} = 5.$

Vậy ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y} = \frac{14}{3}, \\ \frac{x^2}{y} - \frac{x}{y} = 5 \end{cases}.$$

Đặt $\frac{x^2}{y} = u$; $\frac{x}{y} = v$ ta được hệ mới là:

$$\begin{cases} u + v = \frac{14}{3} \\ uv = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 \\ v = \frac{5}{3} \\ v = \frac{5}{3} \\ v = 3 \end{cases}.$$

TH1: $\begin{cases} u = 3 \\ v = \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{y} = 3 \\ \frac{x}{y} = \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{5} \\ y = \frac{27}{25} \end{cases}.$

TH2: Giải tương tự ta có

$$\begin{cases} x = \frac{27}{25} \\ y = \frac{9}{5} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm là: $\left(\frac{9}{5}; \frac{27}{25}\right), \left(\frac{27}{25}; \frac{9}{5}\right).$ □

Ví dụ 3. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \sqrt{x-2} + \sqrt{y+1} = 4, \\ x + y = 2m + 1. \end{cases}$$

Lời giải.

Đặt $u = \sqrt{x-2}$; $v = \sqrt{y+1}$ ($u, v \geq 0$). Khi đó hệ phương trình được viết lại là:
$$\begin{cases} u + v = 4 \\ u^2 + v^2 = 2m \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} u + v = 4 \\ uv = 8 - m \end{cases}$$

$\Leftrightarrow u, v$ là 2 nghiệm của phương trình: $x^2 - 4x + 8 - m = 0$. Để hệ phương trình đã cho có nghiệm thì phương trình trên phải có hai nghiệm không âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S \geq 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 4 \geq 0 \\ 8 - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4 \leq m \leq 8.$$

Vậy tất cả các giá trị m cần tìm là: $4 \leq m \leq 8$. □

Ví dụ 4. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm thực:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 1 - 6m. \end{cases}$$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0; y \geq 0$. Đặt $\sqrt{x} + \sqrt{y} = S; \sqrt{x}\sqrt{y} = P$ ($S, P \geq 0; S^2 \geq 4P$). Khi đó hệ phương trình được viết lại là:

$$\begin{cases} S = 1 \\ S^3 - 3PS = 1 - 6m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 1 \\ P = 2m \end{cases}.$$

Khi đó S, P là 2 nghiệm của phương trình: $x^2 - x + 2m = 0$.

Để hệ phương trình đã cho có nghiệm thì phương trình trên phải có hai nghiệm không âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \delta = 1 - 4m \geq 0 \\ P = 2m \geq 0 \\ S = 1 \geq 0 \quad (\text{luôn đúng}) \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{1}{4}. \text{ Vậy tất cả các giá trị } m \text{ cần tìm là: } 0 \leq m \leq \frac{1}{4}. \quad \square$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x + 2y + 2xy = 5, \\ x^2 + 4y^2 = 5. \end{cases}$

Lời giải.

Giải: Đặt $u = 2y$ ta được hệ $\begin{cases} x + u + xu = 5, \\ (x + u)^2 - 2xu = 5. \end{cases}$

Đặt $x + u = S; xu = P$ ($S^2 \geq 4P$). Khi đó ta đưa về hệ mới của 2 ẩn S, P là:

$$\begin{cases} S + P = 5 \\ S^2 - 2P = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 5 - S \\ S^2 + 2S - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = -5, P = 10 \\ S = 3, P = 2 \end{cases}.$$

Hệ có nghiệm $(1; 1), \left(2; \frac{1}{2}\right)$. $\square$

Bài 2. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 6xy^2 = 9, \\ x^2 + 4y^4 = 5. \end{cases}$

Lời giải.

Giải: Đặt $u = 2y^2$ ta được hệ $\begin{cases} x + u + 3xu = 9, \\ (x + u)^2 - 2xu = 5. \end{cases}$

Đặt $x + u = S; xu = P$ ($S^2 \geq 4P$). Khi đó ta đưa về hệ mới của 2 ẩn S, P là:

$$\begin{cases} S + 3P = 9 \\ S^2 - 2P = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 9 - 3P \\ 3S^2 + 2S - 33 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = -\frac{11}{3} \\ S = 3 \end{cases}.$$

Giải tiếp ta được các nghiệm $(1; 1), (1; -1), \left(2; \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(2; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. $\square$

Bài 3. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{y} = 2, \\ x + 2y = 2. \end{cases}$

Lời giải.

Giải: Đặt $u = \sqrt{x+y}; v = \sqrt{y}$ ta được hệ $\begin{cases} u + v = 2, \\ u^2 + v^2 = 2. \end{cases}$

Giải tiếp ta được nghiệm $(0; 1)$. $\square$

Bài 4. Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+y} + \sqrt[3]{x-y} = 2, \\ 2x + \sqrt[3]{x^2 - y^2} = 3. \end{cases}$$

Lời giải.

Giải tương tự bài 3 ta được $S = \{(1; 0)\}$. □

Bài 5. Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 4y - 1, \\ x^3 + x^2y + x - 3y = 0. \end{cases}$$

Lời giải.

Hệ đã cho có thể viết lại là:
$$\begin{cases} x^2 + 1 + y^2 + xy = 4y & (1), \\ (x^2 + 1)(x + y) = 4y & (2). \end{cases}$$

Dễ thấy $y = 0$ không thỏa mãn hệ phương trình. Chia cả hai vế phương trình (1), (2) cho y ta được

$$\text{hệ: } \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{y} + (x + y) = 4, \\ \frac{x^2 + 1}{y}(x + y) = 4. \end{cases}$$

Đặt $\frac{x^2 + 1}{y} = u; x + y = v$ ta được hệ phương trình:
$$\begin{cases} u + v = 4 \\ uv = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{y} = 2, \\ x + y = 2. \end{cases}$$

Giải hệ ta suy ra tập nghiệm của hệ là: $S = \{(1; 1); (-3; 5)\}$. □

Bài 6. Tìm tập giá trị thực của tham số m để hệ sau có nghiệm
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y = 2, \\ xy(x + 2)(y + 2) = m. \end{cases}$$

Lời giải.

Đặt $u = x^2 + 2x \geq -1; v = y^2 + 2y \geq -1 \Rightarrow \begin{cases} u + v = 2 \\ uv = m \end{cases} (*)$.

Hệ trên có nghiệm $\Leftrightarrow$ hệ (*) có hai nghiệm $\geq -1 \Leftrightarrow$ phương trình $t^2 - 2t + m = 0$ có hai nghiệm thỏa

$$\text{mãn } -1 \leq x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ (x_1 + 1)(x_2 + 1) \geq 0 \\ (x_1 + 1) + (x_2 + 1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ m + 3 \geq 0 \\ 4 \geq 0 \text{ (luôn đúng)} \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 1. \quad \square$$

C HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG LOẠI 2

Định nghĩa. Hệ phương trình đối xứng loại 2 là hệ phương trình có dạng
$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ f(y, x) = 0. \end{cases}$$

! Nếu hệ phương trình có nghiệm là (a, b) thì nó cũng có nghiệm (b, a) .

Dạng 1. Giải hệ phương trình đối xứng loại 2.

Phương pháp giải hệ phương trình đối xứng loại 2:

$$f(x, y) - f(y, x) = 0 \Leftrightarrow (x - y)h(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ h(x, y) = 0. \end{cases}$$

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 1 ❖❖❖

! Thường thì $h(x, y)$ là những phương trình dễ dàng tìm ra mối liên hệ giữa x và y ; hoặc $h(x, y)$ là phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - 2018x = 2017y \\ y^2 - 2018y = 2017x. \end{cases}$$

Lời giải.

$$\begin{cases} x^2 - 2018x = 2017y & (1) \\ y^2 - 2018y = 2017x. & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) về theo vế ta được

$$\begin{aligned} (x^2 - y^2) - 2018(x - y) &= 2017(y - x) \\ \Leftrightarrow (x - y)(x + y - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = -x + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với

$$(I) \begin{cases} y = x \\ x^2 - 2018x = 2017y \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad (II) \begin{cases} y = -x + 1 \\ x^2 - 2018x = 2017y \end{cases}$$

- Giải (I): $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ x = y = 4035. \end{cases}$
- Giải (II): $(II) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{8069}}{2} \\ y = \frac{1 - \sqrt{8069}}{2}. \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x = \frac{1 - \sqrt{8069}}{2} \\ y = \frac{1 + \sqrt{8069}}{2}. \end{cases}$

Kết luận, hệ phương trình có bốn nghiệm: $(0; 0)$, $(4035; 4035)$, $\left(\frac{1 - \sqrt{8069}}{2}; \frac{1 + \sqrt{8069}}{2}\right)$, $\left(\frac{1 + \sqrt{8069}}{2}; \frac{1 - \sqrt{8069}}{2}\right)$. □

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + 2 = 3y \\ y^3 + 2 = 3x. \end{cases}$$

Lời giải.

$$\begin{cases} x^3 + 2 = 3y & (1) \\ y^3 + 2 = 3x. & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) về theo vế ta được

$$\begin{aligned} (x - y)(x^2 + xy + y^2) &= 3(y - x) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2 + xy + y^2 + 3 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với

$$(I) \begin{cases} y = x \\ x^3 + 2 = 3y \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad (II) \begin{cases} x^2 + xy + y^2 + 3 = 0 \\ x^3 + 2 = 3y \end{cases}$$

- Giải (I): $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = -2. \end{cases}$
- Giải (II): Ta có $x^2 + xy + y^2 + 3 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 + 3 > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Nên hệ phương trình (II) vô nghiệm.

Kết luận, hệ phương trình có hai nghiệm: $(1; 1), (-2; -2)$. □

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+3} + \sqrt{5-y} = 16 \\ \sqrt{y+3} + \sqrt{5-x} = 16. \end{cases}$

Lời giải.

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} + \sqrt{5-y} = 16 & (1) \\ \sqrt{y+3} + \sqrt{5-x} = 16. & (2) \end{cases}$$

Điều kiện: $\begin{cases} -3 \leq x \leq 5 \\ -3 \leq y \leq 5. \end{cases}$

Lấy (1) trừ (2) về theo về ta được $(\sqrt{x+3} - \sqrt{y+3}) + (\sqrt{5-y} - \sqrt{5-x}) = 0$. (3)

- Với $x = y = -3$, hệ phương trình trở thành $\begin{cases} \sqrt{8} = 16 \\ \sqrt{8} = 16. \end{cases}$ (vô lí)
- Với $x = y = 5$, hệ phương trình trở thành $\begin{cases} \sqrt{8} = 16 \\ \sqrt{8} = 16. \end{cases}$ (vô lí)
- Với $\begin{cases} x \neq -3 \\ x \neq 5 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y \neq -3 \\ y \neq 5 \end{cases}$
(3) tương đương với

$$\begin{aligned} & \frac{x-y}{\sqrt{x+3} + \sqrt{y+3}} + \frac{x-y}{\sqrt{5-y} + \sqrt{5-x}} = 0 \\ \Leftrightarrow & (x-y) \left(\frac{1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{y+3}} + \frac{1}{\sqrt{5-y} + \sqrt{5-x}} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & y = x. \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y = x \\ \sqrt{x+3} + \sqrt{5-x} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 8 + 2\sqrt{(x+3)(5-x)} = 16 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y = x \\ \sqrt{(x+3)(5-x)} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1. \end{aligned}$$

Kết luận, hệ phương trình có nghiệm: $(1; 1)$. □

Dạng 2. Tìm điều kiện của tham số thỏa điều kiện cho trước.

Dựa vào tính chất nghiệm của hệ phương trình đối xứng để tìm tham số.

BÀI TẬP DẠNG 2

Ví dụ 1. Tìm điều kiện của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x - 2y = m\frac{y}{x} \\ y - 2x = m\frac{x}{y}. \end{cases}$$

Lời giải.

Vì hệ phương trình đối xứng nên giả sử nghiệm của hệ là $(x; y)$ thì $(y; x)$ cũng là nghiệm của hệ, vậy để hệ có nghiệm duy nhất thì $x = y$. Suy ra (1) trở thành

$$x - 2x = m \Leftrightarrow -x = m \Leftrightarrow x = -m.$$

Để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì $x = y = -m \neq 0$, suy ra $m \neq 0$.

Thử lại, với $m \neq 0, x \neq 0, y \neq 0$ thì hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} x^2 - 2xy = my & (1) \\ y^2 - 2xy = mx. & (2) \end{cases}$

Lấy (1) trừ (2) ta được $x^2 - y^2 = m(y - x) \Leftrightarrow (x - y)(x + y + m) = 0$

$$\Leftrightarrow (I) \begin{cases} y = x \\ x^2 - 2xy = my \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad (II) \begin{cases} y = -x - m \\ x^2 - 2xy = my \end{cases}$$

- Giải (I): $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0 \text{ (loại)} \\ x = y = -m. \end{cases}$
- Giải (II): Từ hệ (II) ta được phương trình $3x^2 + 3mx + m^2 = 0$. Có $\Delta = -3m^2 < 0, \forall m \neq 0$.
Nên hệ phương trình (II) vô nghiệm.

Kết luận, hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m \neq 0$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x - xy = \frac{1}{3}y \\ 4y - xy = \frac{1}{3}x. \end{cases}$

Lời giải.

$$\begin{cases} 4x - xy = \frac{1}{3}y & (1) \\ 4y - xy = \frac{1}{3}x. & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) về theo về ta được $(x - y)\frac{13}{3} = 0 \Leftrightarrow y = x$. Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} y = x \\ 4x - x^2 = \frac{1}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x = \frac{11}{3} \\ y = x = 0. \end{cases}$$

Kết luận, hệ phương trình có hai nghiệm: $\left(\frac{11}{3}; \frac{11}{3}\right), (0; 0)$. □

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + x = 2y \\ y^2 + y = 2x. \end{cases}$

Lời giải.

$$\begin{cases} x^2 + x = 2y & (1) \\ y^2 + y = 2x. & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) về theo về ta được

$$\begin{aligned} (x - y)(x + y + 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = -x - 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với

$$(I) \begin{cases} y = x \\ x^2 - x = 0 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad (II) \begin{cases} y = -x - 3 \\ x^2 + 3x + 6 = 0 \end{cases} \text{ (vô nghiệm)}$$

Kết luận, hệ phương trình có hai nghiệm: $(1; 1), (0; 0)$. □

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + x^2y = y \\ y^3 + y^2x = x. \end{cases}$

Lời giải.

$$\begin{cases} x^3 + x^2y = y & (1) \\ y^3 + y^2x = x. & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) về theo về ta được

$$\begin{aligned} (x - y)(x^2 + 2xy + y^2 + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ (x + y)^2 + 1 = 0. \end{cases} \text{ (vô nghiệm)} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} y = x \\ 2x^3 = x. \end{cases}$

Kết luận, hệ phương trình có ba nghiệm: $(0; 0), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. □

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 2xy = 2018\frac{y}{x} \\ y^2 - 2xy = 2018\frac{x}{y}. \end{cases}$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}.$$

$$\text{Hệ phương trình tương đương với hệ } \begin{cases} x^3 - 2x^2y = 2018y & (1) \\ y^3 - 2xy^2 = 2018x. & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) về theo về ta được

$$(x - y)(x^2 - xy + y^2 + 2018) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 + 2018 = 0. \text{ (vô nghiệm)} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} y = x \\ -x^2 = 2018. \text{ (vô lí)} \end{cases}$

Kết luận, hệ phương trình vô nghiệm. □

Bài 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + \frac{1}{x^2} = 2y - 2 \\ y^2 = 2x + \frac{2}{x}. \end{cases}$

Lời giải.

Hệ phương trình tương đương với hệ $\begin{cases} \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 2y \\ y^2 = 2\left(x + \frac{1}{x}\right). \end{cases}$

Điều kiện: $x \neq 0$.

Đặt $u = x + \frac{1}{x}$, hệ trên trở thành $\begin{cases} u^2 = 2y & (1) \\ y^2 = 2u. & (2) \end{cases}$

Lấy (1) trừ (2) về theo về ta được

$$(u - y)(u + y + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (I) \begin{cases} y = u \\ u^2 = 2u \end{cases} \text{ hoặc } (II) \begin{cases} y = -u - 2 \\ u^2 + 2u + 4 = 0 \end{cases} \text{ (vô nghiệm)}$$

Giải (I): $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} u = y = 0 \\ u = y = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \\ y = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2. \end{cases}$

Kết luận, hệ phương trình có nghiệm: $(1; 2)$. □

Bài 6. Cho hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+2} + \sqrt{7-y} = m \\ \sqrt{y+2} + \sqrt{7-x} = m. \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình trên với $m = 3$.

b) Tìm điều kiện của m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} -2 \leq x \leq 7 \\ -2 \leq y \leq 7. \end{cases}$

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} + \sqrt{7-y} = m & (1) \\ \sqrt{y+2} + \sqrt{7-x} = m. & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) về theo về ta được $(\sqrt{x+2} - \sqrt{y+2}) + (\sqrt{7-y} - \sqrt{7-x}) = 0$. (3)

- Với $x = y = -2$, hệ phương trình trở thành $\begin{cases} \sqrt{9} = m \\ \sqrt{9} = m. \end{cases}$

- Với $x = y = 7$, hệ phương trình trở thành $\begin{cases} \sqrt{9} = m \\ \sqrt{9} = m. \end{cases}$

- Với $\begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq 7 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y \neq -2 \\ y \neq 7 \end{cases}$

(3) tương đương với

$$\begin{aligned} & \frac{x-y}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}} + \frac{x-y}{\sqrt{7-y}+\sqrt{7-x}} = 0 \\ \Leftrightarrow & (x-y) \left(\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{y+2}} + \frac{1}{\sqrt{7-y}+\sqrt{7-x}} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & y = x. \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} y = x \\ \sqrt{x+2} + \sqrt{7-x} = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ 9 + 2\sqrt{(x+2)(7-x)} = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ \sqrt{(x+2)(7-x)} = \frac{m-9}{2} \end{cases} \quad (4)$$

a) Với $m = 3$, hệ phương trình có hai nghiệm $(x; y)$ bằng $(-2; -2)$, $(7; 7)$.

b) Ta xét các trường hợp sau:

⊕ Trường hợp 1. $m = 3$, hệ phương trình có hai nghiệm, loại.

⊕ Trường hợp 2. $\begin{cases} \frac{m-9}{2} < 0 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 9 \\ m \neq 3 \end{cases}$, hệ phương trình vô nghiệm, loại.

⊕ Trường hợp 3. $\frac{m-9}{2} \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 9$ thì (4) trở thành

$$-x^2 + 5x + 14 - \frac{m^2 - 18m + 81}{4} = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 5x + \frac{-m^2 + 18m - 25}{4} = 0.$$

Ta được $\Delta = 25 + (-m^2 + 18m - 25) = -m^2 + 18m$.

Để (4) có nghiệm duy nhất thì $m = 0$ (loại) hoặc $m = 18$. Với $m = 18$ phương trình (4) có nghiệm $x = \frac{5}{2}$ (thỏa điều kiện).

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi $m = 18$.

□

D HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP

Định nghĩa. Biểu thức $f(x, y)$ được gọi là biểu thức đẳng cấp bậc 2 nếu $f(mx, my) = m^2 f(x, y)$.

Định nghĩa. Biểu thức $f(x, y)$ được gọi là biểu thức đẳng cấp bậc 3 nếu $f(mx, my) = m^3 f(x, y)$.

Định nghĩa. Hệ phương trình đẳng cấp bậc 2 theo x, y có dạng tổng quát:

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2. \end{cases} \quad (3.2)$$

(Mỗi phương trình trong hệ (3.2) là các biểu thức đẳng cấp bậc 2)

Phương pháp giải:

- Xét $x = 0$. Thay $x = 0$ vào (3.2) để tìm y . Nếu không tìm được y thì hệ vô nghiệm trong trường hợp này.
- Xét $x \neq 0$.
 - (i) Nếu $d_1 = 0$ hoặc $d_2 = 0$, chẳng hạn, $d_1 = 0$ thì ta chia cả hai vế phương trình thứ nhất cho x^2 ta được phương trình có dạng: $c_1(\frac{y}{x})^2 + b_1(\frac{y}{x}) + a_1 = 0$. Giải phương trình này ta tìm được tỉ số $\frac{y}{x}$, sau đó thế vào phương trình còn lại để tìm nghiệm x, y .
 - (ii) Nếu $d_1 \neq 0$ và $d_2 \neq 0$ thì ta có thể tạo ra một phương trình đẳng cấp bậc 2 thuần nhất (phương trình có hệ số tự do bằng 0) bằng cách:
 $d_2(a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 - d_1) - d_1(a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 - d_2) = 0$. Sau đó giải giống (i).

Định nghĩa. Hệ phương trình đẳng cấp bậc 3 theo x, y có dạng tổng quát:

$$\begin{cases} F(x, y) = A \\ G(x, y) = B. \end{cases} \quad (3.3)$$

Trong đó, $F(x, y), G(x, y)$ là các biểu thức đẳng cấp bậc 3.

Phương pháp giải: Giải tương tự hệ phương trình (3.2).

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ 2x^2 + xy - 10y^2 = 0. \end{cases}$$

Lời giải.

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 & (1) \\ 2x^2 + xy - 10y^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

- Xét $x = 0$. Thay $x = 0$ vào hệ đã cho ta được hệ:
$$\begin{cases} 2y^2 = 0 \\ -10y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0.$$
- Xét $x \neq 0$. Chia hai vế (1) cho x^2 ta được phương trình:

$$2\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 3\left(\frac{y}{x}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} = 1 \\ \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 2y. \end{cases}$$
 - a) Với $x = y$, (2) $\Leftrightarrow -7x^2 = 0$ (vô nghiệm do $x \neq 0$).
 - b) Với $x = 2y$, (2) $\Leftrightarrow 0y^2 = 0 \Rightarrow y \in \mathbb{R}$. Mà $x \neq 0 \Rightarrow y \neq 0$.
- Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(2a, a), a \in \mathbb{R}$.

□

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 \\ x^2 + xy + 4y^2 = 19. \end{cases}$$

Lời giải.

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 & (1) \\ x^2 + xy + 4y^2 = 19 & (2) \end{cases}$$

- Xét $x = 0$. Thay $x = 0$ vào hệ đã cho ta được hệ:
$$\begin{cases} y^2 = 0 \\ 4y^2 = 19 \end{cases},$$
 hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

- Xét $x \neq 0$. Chia hai vế (1) cho x^2 ta được phương trình:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 3\left(\frac{y}{x}\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} = 1 \\ \frac{y}{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = 2x. \end{cases}$$

a) Với $y = x$, (2) $\Leftrightarrow 6x^2 = 19 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{114}}{6}$ hoặc $x = -\frac{\sqrt{114}}{6}$.

b) Với $y = 2x$, (2) $\Leftrightarrow 19x^2 = 19 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -1$.

- Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm: $\left(\frac{\sqrt{114}}{6}, \frac{\sqrt{114}}{6}\right), \left(-\frac{\sqrt{114}}{6}, -\frac{\sqrt{114}}{6}\right), (1, 2), (-1, -2)$.

□

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - 2xy - y^2 = 1 \\ x^2 + xy - y^2 = -5. \end{cases}$$

Lời giải.

- Xét $x = 0$. Thay $x = 0$ vào hệ đã cho ta được hệ: $\begin{cases} -y^2 = 1 \\ -y^2 = -5 \end{cases}$, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

- Xét $x \neq 0$. Nhân hai vế (1) cho 5 rồi cộng (2) ta được phương trình:

$$6x^2 - 9xy - 6y^2 = 0 \Leftrightarrow -2\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 3\left(\frac{y}{x}\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \\ \frac{y}{x} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y = -2x. \end{cases}$$

a) Với $x = 2y$, (2) $\Leftrightarrow 5y^2 = -5$ (Vô nghiệm).

b) Với $y = -2x$, (2) $\Leftrightarrow -5x^2 = -5 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -1$.

- Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm: $(1, -2), (-1, 2)$.

□

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 + 2y^3 = 0 \\ x^3 + x^2y - y^3 = 5. \end{cases}$$

Lời giải.

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 + 2y^3 = 0 & (1) \\ x^3 + x^2y - y^3 = 5 & (2) \end{cases}$$

- Xét $x = 0$. Thay $x = 0$ vào hệ đã cho ta được hệ: $\begin{cases} 2y^3 = 0 \\ -y^3 = 5 \end{cases}$, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

- Xét $x \neq 0$. Chia hai vế (1) cho x^3 ta được phương trình:

$$2\left(\frac{y}{x}\right)^3 - 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} = 1 \\ \frac{y}{x} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -2y. \end{cases}$$

a) Với $x = y$, (2) $\Leftrightarrow y^3 = 5 \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{5}$.

b) Với $x = -2y$, (2) $\Leftrightarrow -5y^3 = 5 \Leftrightarrow y = -1$.

- Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm: $(\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5}), (2, -1)$.

□

Ví dụ 5. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 2 \\ 3x^3 - xy^2 - y^3 = 1. \end{cases}$$

Lời giải.

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 2 & (1) \\ 3x^3 - xy^2 - y^3 = 1 & (2) \end{cases}$$

- Xét $x = 0$. Thay $x = 0$ vào hệ đã cho ta được hệ: $\begin{cases} y^3 = 2 \\ -y^3 = 1 \end{cases}$, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.
- Xét $x \neq 0$. Nhân hai vế (2) cho 2 rồi trừ (1) ta được phương trình:

$$5x^3 - 2xy^2 - 3y^3 = 0 \Leftrightarrow -3\left(\frac{y}{x}\right)^3 - 2\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow \frac{y}{x} = 1 \Leftrightarrow x = y.$$
 - Với $x = y$, (2) $\Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$.
- Vậy hệ phương trình đã cho có 1 nghiệm: $(1, 1)$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 0 \\ 2x^2 + 3xy = 14. \end{cases}$$

Lời giải.

$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 0 & (1) \\ 2x^2 + 3xy = 14 & (2) \end{cases}$$

- Xét $x = 0$, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.
- Xét $x \neq 0$. Chia hai vế (1) cho x^2 ta được phương trình:

$$-4\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \\ \frac{y}{x} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x = -2y. \end{cases}$$
 - a) Với $x = 2y$, (2) $\Leftrightarrow 14y^2 = 14 \Leftrightarrow y = 1$ hoặc $y = -1$.
 - b) Với $x = -2y$, (2) $\Leftrightarrow y^2 = 7 \Leftrightarrow y = \sqrt{7}$ hoặc $y = -\sqrt{7}$.
- Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm: $(2, 1), (-2, -1), (-2\sqrt{7}, \sqrt{7}), (2\sqrt{7}, -\sqrt{7})$.

□

Bài 2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + 3xy = -9 \\ x^2 + 6xy + 9y^2 = 9. \end{cases}$$

Lời giải.

$$\begin{cases} x^2 + 3xy = -9 & (1) \\ x^2 + 6xy + 9y^2 = 9 & (2) \end{cases}$$

- Xét $x = 0$, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.
- Xét $x \neq 0$, lấy (1) cộng (2) ta được phương trình:

$$2x^2 + 9xy + 9y^2 = 0 \Leftrightarrow 9\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 9\left(\frac{y}{x}\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} = -\frac{1}{3} \\ \frac{y}{x} = -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y \\ y = -\frac{2}{3}x. \end{cases}$$

- a) Với $x = -3y$, (2) $\Leftrightarrow 0y^2 = 9$ (Vô nghiệm).

b) Với $y = -\frac{2}{3}x$, (2) $\Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = -3$ hoặc $x = 3$.

- Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm: $(-3, 2), (3, -2)$.

□

Bài 3. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy - 2y^2 = 3 \\ x^2 - xy + y^2 = 1. \end{cases}$$

Lời giải.

$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy - 2y^2 = 3 & (1) \\ x^2 - xy + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

- Xét $x = 0$, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.
- Xét $x \neq 0$, lấy (2) nhân 3 rồi trừ (1) ta được phương trình:

$$x^2 - 6xy + 5y^2 = 0 \Leftrightarrow 5\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 6\left(\frac{y}{x}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{1}{5} \\ \frac{y}{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5y \\ x = y. \end{cases}$$

a) Với $x = 5y$, (2) $\Leftrightarrow 21y^2 = 1 \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{21}}{21}$ hoặc $y = \frac{\sqrt{21}}{21}$.

b) Với $x = y$, (2) $\Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 1$.

- Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm: $\left(-\frac{5\sqrt{21}}{21}, -\frac{\sqrt{21}}{21}\right), \left(\frac{5\sqrt{21}}{21}, \frac{\sqrt{21}}{21}\right), (-1, -1), (1, 1)$.

□

Bài 4. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + x^2y + y^3 = -1 \\ x^3 - xy^2 - 3y^3 = 3. \end{cases}$$

Lời giải.

$$\begin{cases} x^3 + x^2y + y^3 = -1 & (1) \\ x^3 - xy^2 - 3y^3 = 3 & (2) \end{cases}$$

- Xét $x = 0$, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.
- Xét $x \neq 0$, lấy (1) nhân 3 rồi cộng (2) ta được phương trình:

$$4x^3 + 3x^2y - xy^2 = 0 \Leftrightarrow -\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 3\left(\frac{y}{x}\right) + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} = 4 \\ \frac{y}{x} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x \\ y = -x. \end{cases}$$

a) Với $y = 4x$, (2) $\Leftrightarrow -207x^3 = 3 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt[3]{69}}$.

b) Với $y = -x$, (2) $\Leftrightarrow 3x^3 = 3 \Leftrightarrow x = 1$.

- Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm: $\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{69}}, \frac{-4}{\sqrt[3]{69}}\right), (1, -1)$.

□

Bài 5. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 7x^3 + y^3 = -1 \\ (x+y)(x^2 - y^2) = 3. \end{cases}$$

Lời giải.

$$\begin{cases} 7x^3 + y^3 = -1 \\ (x+y)(x^2 - y^2) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x^3 + y^3 = -1 & (1) \\ x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 = 3 & (2) \end{cases}$$

- Xét $x = 0$, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.
- Xét $x \neq 0$, lấy (1) nhân 3 rồi cộng (2) ta được phương trình:

$$22x^3 + x^2y - xy^2 + 2y^3 = 0 \Leftrightarrow 2\left(\frac{y}{x}\right)^3 - \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right) + 22 = 0 \Leftrightarrow \frac{y}{x} = -2 \Leftrightarrow y = -2x.$$

- Với $y = -2x$, $(1) \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$.
- Vậy hệ phương trình đã cho có 1 nghiệm: $(1, -2)$.

□

Bài 6. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} mx^2 - (m+1)xy + y^2 = 0 \\ x^2 + xy + y^2 = 1. \end{cases}$$

Tìm m để hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Lời giải.

$$\begin{cases} mx^2 - (m+1)xy + y^2 = 0 & (1) \\ x^2 + xy + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

- Xét $x = 0$, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.
- Xét $x \neq 0$. Chia hai vế (1) cho x^2 ta được phương trình:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 - (m+1)\left(\frac{y}{x}\right) + m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} = m \\ \frac{y}{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = mx \\ y = x. \end{cases}$$

- a) Với $y = x$, $(2) \Leftrightarrow 3x^2 = 1$ (phương trình này có hai nghiệm).
- b) Với $y = mx$, $(2) \Leftrightarrow (1 + m + m^2)x^2 = 1$. Vì $1 + m + m^2 > 0, \forall m$ nên hệ có 4 nghiệm thì $1 + m + m^2 \neq 3 \Leftrightarrow m \neq 1$ và $m \neq -2$.
- Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm khi $m \neq 1$ và $m \neq -2$.

□

E HỆ PHƯƠNG TRÌNH HAI ẨN KHÁC

Khi gặp hệ phương trình hai ẩn chưa ở dạng cơ bản hay chưa có dạng đã biết phương pháp giải thì ta cần sử dụng linh hoạt các phương pháp: Thế, Cộng đại số, Phân tích nhân tử, Đặt ẩn phụ, Nhân liên hợp.

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 5, \\ 8x^3 + y^3 = 5y + 4x^2y. \end{cases}$$

Lời giải.

$$\text{Xét hệ } \begin{cases} 4x^2 + y^2 = 5 & (1), \\ 8x^3 + y^3 = 5y + 4x^2y & (2). \end{cases}$$

- **Cách Thế biểu thức:** Để ý thấy $(1) \Leftrightarrow 4x^2 = 5 - y^2$, $(2) \Leftrightarrow 8x^3 - 4x^2y = y(5 - y^2)$, nên ta có thể giải bằng phương pháp thế biểu thức $5 - y^2 = 4x^2$ vào (2) và nhận được phương trình:

$$8x^3 - 4x^2y = y.4x^2 \Leftrightarrow 8x^3 - 8x^2y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = y \end{cases}.$$

+/ Với $x = 0 \Rightarrow y = \pm\sqrt{5}$.

+/ Với $x = y \Rightarrow 5x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow y = \pm 1$.

Vậy hệ có tập nghiệm $S = \{(0; \sqrt{5}), (0; -\sqrt{5}), (1; 1), (-1; -1)\}$.

- **Cách Thế hằng số:** Để ý thấy có hệ số 5 ở cả hai phương trình. Ở phương trình (2), hệ số 5 nằm ở số hạng có bậc 1, trong khi tất cả các số hạng khác có bậc 3. Ở phương trình (1), hệ số tự do 5 bằng

một biểu thức đẳng cấp bậc 2. Vì vậy ta có thể nghĩ đến phương pháp thế hằng số $5 = 4x^2 + y^2$ vào (2) và nhận được phương trình:

$$8x^3 + y^3 = (4x^2 + y^2)y + 4x^2y \Leftrightarrow 8x^3 - 8x^2y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = y \end{cases}.$$

Đến đây, ta giải tiếp như trên và thu được tập nghiệm $S = \{(0; \sqrt{5}), (0; -\sqrt{5}), (1; 1), (-1; -1)\}$. $\square$

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 9y^2 = (10x + 4)(4 - 2x), \\ 9y^2 - 20x^2 - 24xy + 32x - 24y + 16 = 0. \end{cases}$$

Lời giải.

$$\text{Xét hệ } \begin{cases} 9y^2 = (10x + 4)(4 - 2x) & (1), \\ 9y^2 - 20x^2 - 24xy + 32x - 24y + 16 = 0 & (2). \end{cases}$$

• **Cách 1:** Để ý thấy $(10x + 4)(4 - 2x) = -20x^2 + 32x + 16$ là biểu thức không chứa y trong (2). Vì vậy ta giải bằng phương pháp thế như sau:

Ta có (1) $\Leftrightarrow 9y^2 = -20x^2 + 32x + 16$ thế vào (2) ta có

$$9y^2 - 24xy - 24y + 9y^2 = 0 \Leftrightarrow 18y^2 - 24xy - 24y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{4x + 4}{3} \end{cases}.$$

$$+/ \text{ Với } y = 0 \text{ thay vào (1) ta có } (10x + 4)(4 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{2}{5} \end{cases}.$$

$$+/ \text{ Với } y = \frac{4x + 4}{3} \text{ thay vào (1), rút gọn được phương trình } 36x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Vậy hệ có tập nghiệm } S = \left\{ \left(-\frac{2}{5}; 0 \right), \left(0; \frac{4}{3} \right), (2; 0) \right\}.$$

• **Cách 2:** Coi (2) là phương trình bậc hai ẩn y , tham số x :

$$9y^2 - 24(x + 1)y - 20x^2 + 32x + 16 = 0.$$

$$\text{Ta có } \Delta_y = (18x)^2. \text{ Suy ra (2) } \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{12(x + 1) + 18x}{9} = \frac{10x + 4}{3} \\ y = \frac{12(x + 1) - 18x}{9} = \frac{-2x + 4}{3} \end{cases}.$$

$$+/ \text{ Với } y = \frac{10x + 4}{3} \text{ thế vào (1) được phương trình}$$

$$(10x + 4)^2 = (10x + 4)(4 - 2x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{3} \\ x = -\frac{2}{5} \Rightarrow y = 0 \end{cases}.$$

$$+/ \text{ Với } y = \frac{-2x + 4}{3} \text{ thế vào (1) được phương trình}$$

$$(-2x + 4)^2 = (10x + 4)(4 - 2x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = 0 \\ x = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{3} \end{cases}.$$

Vậy hệ có tập nghiệm $S = \left\{ \left(-\frac{2}{5}; 0 \right), \left(0; \frac{4}{3} \right), (2; 0) \right\}$. □

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + 11x = y^3 + 11y, \\ x^2 + y^2 = 2x + y - 1. \end{cases}$$

Lời giải.

$$\text{Xét hệ } \begin{cases} x^3 + 11x = y^3 + 11y & (1), \\ x^2 + y^2 = 2x + y - 1 & (2). \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow x^3 - y^3 + 11x - 11y = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2) + 11(x - y) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 11) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + xy + y^2 + 11 = 0 \quad (\text{vô nghiệm}) \end{cases}. \end{aligned}$$

Với $x - y = 0 \Leftrightarrow y = x$ thế vào (2) ta có

$$2x^2 = 3x - 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy hệ có tập nghiệm $S = \left\{ (1; 1); \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right) \right\}$. □

Ví dụ 4. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x + 1)^2(xy + 2x) = 12, \\ xy + x = 2. \end{cases}$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} (x + 1)^2(xy + 2x) = 12 \\ xy + x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 1)^2(xy + 2x) = 12, \\ (xy + 2x) - (x + 1) = 1. \end{cases}$$

Đặt $u = x + 1$, $v = xy + 2x$ ta được hệ
$$\begin{cases} u^2v = 12 & (*), \\ v - u = 1. \end{cases}$$

Thế $v = u + 1$ vào (*) ta được phương trình $u^3 + u^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow u = 2 \Rightarrow v = 3$. Suy ra $x = 1, y = 1$.

Vậy hệ có tập nghiệm $S = \{(1; 1)\}$. □

Ví dụ 5. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{2x + 3y - 1} - \sqrt{x + 6y - 2} + x - 3y + 1 = 0, \\ x^2 + 9y^2 - 6xy + 4x - 9y = 0. \end{cases}$$

Lời giải.

$$\text{Xét hệ } \begin{cases} \sqrt{2x + 3y - 1} - \sqrt{x + 6y - 2} + x - 3y + 1 = 0 & (1), \\ x^2 + 9y^2 - 6xy + 4x - 9y = 0 & (2). \end{cases}$$

Để ý thấy $(2x + 3y - 1) - (x + 6y - 2) = x - 3y + 1$, nên ta sẽ sử dụng phương pháp nhân liên hợp:

- Điều kiện $\begin{cases} 2x + 3y \geq 1 \\ x + 6y \geq 2 \end{cases}$
- Trường hợp $\sqrt{2x + 3y - 1} + \sqrt{x + 6y - 2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y - 1 = 0 \\ x + 6y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$ (loại).
- Trường hợp $\sqrt{2x + 3y - 1} + \sqrt{x + 6y - 2} \neq 0$, ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \frac{x - 3y + 1}{\sqrt{2x + 3y - 1} + \sqrt{x + 6y - 2}} + (x - 3y + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 3y + 1) \left(\frac{1}{\sqrt{2x + 3y - 1} + \sqrt{x + 6y - 2}} + 1 \right) = 0 \Leftrightarrow x = 3y - 1. \end{aligned}$$

Khi đó

$$(2) \Leftrightarrow (3y - 1)^2 + 9y^2 - 6(3y - 1)y + 4(3y - 1) - 9y = 0 \Leftrightarrow 3y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow x = 2 \quad (\text{thỏa mãn}).$$

Vậy hệ có tập nghiệm $S = \{(2; 1)\}$. □

Ví dụ 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 27x^3 + 8y^3 = 35, \\ 3x^2y + 2xy^2 = 5. \end{cases}$

Lời giải.

$$\text{Xét hệ } \begin{cases} 27x^3 + 8y^3 = 35 & (1), \\ 3x^2y + 2xy^2 = 5 & (2). \end{cases}$$

Để ý thấy hệ là đẳng cấp bậc 3, nhưng ở đây ta sẽ giải hệ bằng phương pháp cộng đại số để minh họa cho phương pháp này. Ta quan sát: (1) có $27x^3 = (3x)^3$, $8y^3 = (2y)^3$. Mà $(3x + 2y)^3 = 27x^3 + 8y^3 + 18(3x^2y + 2xy^2)$. Vì vậy ta giải hệ như sau:

Lấy (1) + $18 \times$ (2) ta được

$$\begin{aligned} 27x^3 + 8y^3 + 18(3x^2y + 2xy^2) &= 35 + 18 \times 5 \\ \Leftrightarrow (3x)^3 + 3 \cdot (3x)^2 \cdot 2y + 3 \cdot 3x \cdot (2y)^2 + (2y)^3 &= 125 \\ \Leftrightarrow (3x + 2y)^3 = 5^3 \Leftrightarrow 3x + 2y = 5 \Leftrightarrow y &= \frac{5 - 3x}{2}. \end{aligned}$$

Thế $y = \frac{5 - 3x}{2}$ vào (1) ta có

$$\begin{aligned} 27x^3 + 8 \left(\frac{5 - 3x}{2} \right)^3 &= 35 \Leftrightarrow 27x^3 + (5 - 3x)^3 = 35 \\ \Leftrightarrow 27x^3 - 45x + 18 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{3}{2} \end{cases}. \end{aligned}$$

Vậy hệ có tập nghiệm $S = \left\{ (1; 1), \left(\frac{2}{3}; \frac{3}{2} \right) \right\}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 10x = 0, \\ x^2 + 4y^2 - 4x - 4y - 20 = 0. \end{cases}$$

Lời giải.

$$\text{Xét hệ } \begin{cases} x^2 + 4y^2 - 10x = 0 & (1), \\ x^2 + 4y^2 - 4x - 4y - 20 = 0 & (2). \end{cases}$$

(1) $\Leftrightarrow 10x = x^2 + 4y^2$ thế vào (2) ta được $y = \frac{3x-10}{2}$. Thế trở lại vào (1) và giải ra tập nghiệm $S = \left\{ (2; -2); \left(5; \frac{5}{2} \right) \right\}$. $\square$

Bài 2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2xy + x + 2y = x^2 - 8y^2, \\ x\sqrt{y} - y\sqrt{x-1} = x - 2y. \end{cases}$$

Lời giải.

$$\text{Xét hệ } \begin{cases} 2xy + x + 2y = x^2 - 8y^2 & (1), \\ x\sqrt{y} - y\sqrt{x-1} = x - 2y & (2). \end{cases}$$

$$+/\text{ Điều kiện } \begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$+/\text{ Ta có } (1) \Leftrightarrow x^2 - (2y+1)x - 8y^2 - 2y = 0 \text{ có } \Delta_x = (6y+1)^2. \text{ Suy ra } \begin{cases} x = 4y+1 \\ x = -2y \quad (\text{loại}) \end{cases}.$$

Thế vào (2), giải ra tập nghiệm $S = \{(5; 1)\}$. $\square$

Bài 3. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2xy + x - 2 = 0, \\ 2x^3 - 2x^2y + x^2 + 4y^2 - 4xy - 2y = 0. \end{cases}$$

Lời giải.

$$\text{Xét hệ } \begin{cases} 2xy + x - 2 = 0 & (1), \\ 2x^3 - 2x^2y + x^2 + 4y^2 - 4xy - 2y = 0 & (2). \end{cases}$$

• Cách 1: Phân tích

$$(2) \Leftrightarrow x^2(2x - 2y + 1) - 2y(2x - 2y + 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2y)(2x - 2y + 1) = 0.$$

• Cách 2: Sử dụng phương pháp Δ chính phương:

$$(2) \Leftrightarrow 4y^2 - 2(x^2 + 2x + 1)y + (2x^3 + x^2) = 0 \text{ có } \Delta_y = (-x^2 + 2x + 1)^2.$$

$$\text{Hệ có tập nghiệm } S = \left\{ \left(1; \frac{1}{2} \right), \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{5}}{2} \right), \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; -\frac{\sqrt{5}}{2} \right) \right\}. \quad \square$$

Bài 4. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 - 2xy + 4y + 1 = 0, \\ -y^3 + 4xy^2 - 4x^2y + 7y = 2(4x^2 + 1). \end{cases}$$

Lời giải.

$$\text{Xét hệ } \begin{cases} 4x^2 + y^2 - 2xy + 4y + 1 = 0 & (1), \\ -y^3 + 4xy^2 - 4x^2y + 7y = 2(4x^2 + 1) & (2). \end{cases}$$

Để ý thấy vế trái của (2) có nhân tử chung là y và vế phải của (2) xuất hiện trong (1): $(1) \Leftrightarrow 4x^2 + 1 = -y^2 + 2xy - 4y$ (*). Nên ta sẽ thế (*) vào (2) được phương trình

$$\begin{aligned}
 & -y^3 + 4xy^2 - 4x^2y + 7y = 2(-y^2 + 2xy - 4y) \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -y^2 + (4x + 2)y - 4x^2 - 4x + 15 = 0 \end{cases} \quad (3)
 \end{aligned}$$

$$(3) \text{ có } \Delta'_y = 16, \text{ suy ra } (3) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = 2x + 5 \end{cases}.$$

Thay lại vào (1) giải ra tập nghiệm $S = \left\{(-1; -5), \left(\frac{1}{2}; -2\right)\right\}$. □

Bài 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - y^3 = 4x + 2y, \\ x^2 + 3y^2 = 4. \end{cases}$

Lời giải.

$$\text{Xét hệ } \begin{cases} x^3 - y^3 = 4x + 2y & (1), \\ x^2 + 3y^2 = 4 & (2). \end{cases}$$

Ta có (1) $\Leftrightarrow x^3 - y^3 = 4x + \frac{1}{2} \cdot 4y$. Thế $4 = x^2 + 3y^2$ ta được phương trình

$$x^3 - y^3 = (x^2 + 3y^2)x + \frac{1}{2}(x^2 + 3y^2)y \Leftrightarrow 5y^3 + 6y^2x + x^2y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 5y^2 + 6yx + x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -y \\ x = -5y \end{cases}.$$

Thay vào (2), giải ra tập nghiệm $S = \left\{(\pm 2; 0), (-1; 1), (1; -1), \left(-\frac{5}{\sqrt{7}}; \frac{1}{\sqrt{7}}\right), \left(\frac{5}{\sqrt{7}}; -\frac{1}{\sqrt{7}}\right)\right\}$. □

Bài 6. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 2\sqrt{2x^2 - 6xy + 8y^2} = x + 2y + 4xy, \\ \sqrt{x + 2y} + \sqrt{x - 2y} = 3x - 8y + 4. \end{cases}$$

Lời giải.

$$\text{Xét hệ } \begin{cases} x^2 + 4y^2 + 2\sqrt{2x^2 - 6xy + 8y^2} = x + 2y + 4xy & (1), \\ \sqrt{x + 2y} + \sqrt{x - 2y} = 3x - 8y + 4 & (2). \end{cases}$$

Để ý (1) có:

$$\begin{aligned}
 & x^2 + 4y^2 - 4xy = (x - 2y)^2, \\
 & (2\sqrt{2x^2 - 6xy + 8y^2})^2 - (x + 2y)^2 = 7x^2 - 28xy + 28y^2 = 7(x - 2y)^2, \\
 & (1) \Leftrightarrow (x - 2y)^2 + (2\sqrt{2x^2 - 6xy + 8y^2} - (x + 2y)) = 0.
 \end{aligned}$$

Vậy nên ta sử dụng phương pháp nhân liên hợp cho biểu thức $2\sqrt{2x^2 - 6xy + 8y^2} - (x + 2y)$. Hệ có tập nghiệm $S = \{(2; 1)\}$. □

Bài 7. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x^2 + y^2 + 2xy = 4y - 1, \\ 2x + y = \frac{y}{4x^2 + 1} + 2. \end{cases}$

Lời giải.

$$\text{Xét hệ } \begin{cases} 4x^2 + y^2 + 2xy = 4y - 1 & (1), \\ 2x + y = \frac{y}{4x^2 + 1} + 2 & (2). \end{cases}$$

+ / Trường hợp $y = 0$ không thỏa mãn.

+ / Trường hợp $y \neq 0$, chia hai vế của (1) cho y ta được $(1) \Leftrightarrow \frac{4x^2 + 1}{y} + 2x + y = 4$.

$$\text{Đặt } u = \frac{4x^2 + 1}{y}, v = 2x + y \text{ đưa về giải hệ } \begin{cases} u + v = 4, \\ v = \frac{1}{u} + 2. \end{cases}$$

$$\text{Tập nghiệm của hệ ban đầu } S = \left\{ (-1; 5), \left(\frac{1}{2}; 2 \right) \right\}.$$

□

$$\text{Bài 8. Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^3 + 9x^2y = 108, \\ xy^2 + y^3 = 4. \end{cases}$$

Lời giải.

$$\text{Xét hệ } \begin{cases} x^3 + 9x^2y = 108 & (1), \\ xy^2 + y^3 = 4 & (2). \end{cases}$$

Lấy (1) + 27 × (2) ta được phương trình:

$$x^3 + 9x^2y + 27xy^2 + 27y^3 = 216 \Leftrightarrow (x + 3y)^3 = 6^3 \Leftrightarrow x + 3y = 6 \Leftrightarrow x = 6 - 3y.$$

Thế vào (2) và giải ra tập nghiệm $S = \{(3 - 3\sqrt{3}; 1 + \sqrt{3}), (3 + 3\sqrt{3}; 1 - \sqrt{3}), (3; 1)\}$.

□

$$\text{Bài 9. Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^3 + y^3 - 9 = 0, \\ x^2 + 2y^2 - x - 4y = 0. \end{cases}$$

Lời giải.

$$\text{Xét hệ } \begin{cases} x^3 + y^3 - 9 = 0 & (1), \\ x^2 + 2y^2 - x - 4y = 0 & (2). \end{cases}$$

Lấy (1) - 3 × (2), nhóm các số hạng để có hằng đẳng thức bậc 3, ta được phương trình:

$$(x - 1)^3 + (y - 2)^3 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^3 = -(y - 2)^3 \Leftrightarrow x - 1 = 2 - y \Leftrightarrow x = 3 - y.$$

Thế vào (2) và giải ra tập nghiệm $S = \{(1; 2), (2; 1)\}$.

□

$$\text{Bài 10. Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^2 + 4y^2 + \frac{16xy}{x + 2y} = 16, \\ \sqrt{x + 2y} = x^2 - 2y. \end{cases}$$

Lời giải.

$$\text{Xét hệ } \begin{cases} x^2 + 4y^2 + \frac{16xy}{x + 2y} = 16 & (1), \\ \sqrt{x + 2y} = x^2 - 2y & (2). \end{cases}$$

Đặt $u = x + 2y > 0$, $v = 2xy$, biến đổi (1) trở thành

$$u^3 - 2uv + 8v - 16u = 0 \Leftrightarrow u(u^2 - 16) + 2v(4 - u) = 0 \Leftrightarrow (u - 4)(u^2 + 4u - 2v) = 0.$$

Suy ra (1) $\Leftrightarrow (x + 2y - 4)(x^2 + 4y^2 + 4(x + 2y)) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 4 = 0$.

Thế vào (2), giải ra tập nghiệm $S = \left\{ \left(-3; \frac{7}{2} \right), (2; 1) \right\}$.

□

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 11. Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} x(y-3) - 9y = 1, \\ (x-1)^2 y^2 + 2y = -1. \end{cases}$$

Lời giải.

$$\text{Xét hệ } \begin{cases} x(y-3) - 9y = 1 & (1), \\ (x-1)^2 y^2 + 2y = -1 & (2). \end{cases}$$

Dễ thấy $y = 0$ không thỏa mãn hệ phương trình. Chia hai vế của phương trình (1) cho y , hai vế của phương trình (2) cho y^2 và đặt $t = -\frac{1}{y}$ ta được hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + t + 3xt = 9, \\ x^2 + t^2 - 2(x+t) = -1. \end{cases}$$

Đặt $x + t = S; xt = P$ ($S^2 \geq 4P$). Khi đó ta đưa về hệ mới của 2 ẩn S, P :

$$\begin{cases} S + 3P = 9 \\ S^2 - 2S - 2P = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 3, P = 2 \\ S = -\frac{5}{3}, P = \frac{32}{9} \quad (\text{loại}) \end{cases}.$$

Giải tiếp ta được tập nghiệm của hệ phương trình là: $S = \left\{ \left(1; -\frac{1}{2}\right); (2; -1) \right\}$. □

Bài 12. Tìm tập giá trị thực của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm:
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = m, \\ x + y = 3m. \end{cases}$$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -1; y \geq -1$.

Đặt $\sqrt{x+1} = u; \sqrt{y+1} = v$. Khi đó hệ phương trình được viết lại là:

$$\begin{cases} u + v = m \\ u^2 + v^2 - 2 = 3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = m \\ m^2 - 2uv - 2 - 3m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = m \\ uv = \frac{m^2 - 3m - 2}{2} \end{cases} \quad (*).$$

Để hệ ban đầu có nghiệm thì hệ (*) phải có nghiệm thỏa mãn $u \geq 0; v \geq 0$. Tức là phương trình: $2v^2 - 2mv + m^2 - 3m - 2 = 0$ có 2 nghiệm không âm. Giải ra ta được $\frac{3 + \sqrt{17}}{2} \leq m \leq 3 + \sqrt{13}$. □

Bài 13. Giải phương trình: $x^2 + 3x - 1 = 4\sqrt{x^3 - x^2 + 2x - 2}$.

Lời giải.

$$x^2 + 3x - 1 = 4\sqrt{x^3 - x^2 + 2x - 2} (*)$$

- Nhận xét: $x^3 - x^2 + 2x - 2 = (x-1)(x^2+2)$, điều kiện: $x \geq 1$.
- Phân tích: $x^2 + 3x - 1 = a(x-1) + b(x^2+2) \Rightarrow a = 3$ và $b = 1$.
- Đặt $u = \sqrt{x-1}$ và $v = \sqrt{x^2+2}$.

$$(*) \Leftrightarrow 3u^2 + v^2 = 4uv \Leftrightarrow \begin{cases} v = u \\ v = 3u. \end{cases}$$

a) Với $v = u \Leftrightarrow x^2 - x + 3 = 0$ (vô nghiệm).

b) Với $v = 3u \Leftrightarrow x^2 - 9x + 11 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{37}}{2}$ (thỏa điều kiện).

- Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{9 \pm \sqrt{37}}{2}$.

□

Bài 14. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} mx^3 - mx^2y + 7xy^2 - 3y^3 = 4 \\ 2xy^2 - y^3 = 1. \end{cases}$$

Tìm m để hệ phương trình đã cho có đúng hai nghiệm.

Lời giải.

$$\begin{cases} mx^3 - mx^2y + 7xy^2 - 3y^3 = 4 & (1) \\ 2xy^2 - y^3 = 1 & (2) \end{cases}$$

- Xét $x = 0$, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.
- Xét $x \neq 0$, lấy (2) nhân (-4) rồi cộng (1) ta được phương trình:

$$mx^3 - mx^2y - xy^2 + y^3 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^3 - \left(\frac{y}{x}\right)^2 - m\left(\frac{y}{x}\right) + m = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t^2-m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t^2 = m(*) \end{cases}, \text{ với } t = \left(\frac{y}{x}\right).$$

a) Với $t = 1 \Rightarrow y = x$, (2) $\Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$. Hệ có một nghiệm $(1; 1)$.

b) Với $t^2 = m$.

(a) $m < 0$. Hệ có đúng 1 nghiệm.

(b) $m = 0$. Hệ có đúng 1 nghiệm.

$$(c) m > 0. (*) \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{m} \\ t = -\sqrt{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m - m\sqrt{m})x^3 = 1 \\ (2m + m\sqrt{m})x^3 = 1. \end{cases} \quad (I)$$

Hệ đã cho có đúng 2 nghiệm khi (I) có đúng 1 nghiệm khác 1 hoặc có 2 nghiệm, trong đó có một nghiệm bằng 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m + m\sqrt{m} = 0 \text{ (vô nghiệm)} \\ 2m + m\sqrt{m} = 1 \\ 2m - m\sqrt{m} = 0 \\ 2m - m\sqrt{m} = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \\ m = 4 \\ m = 1 \text{ hoặc } m = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Vậy } m \in \left\{ 1; 4; \frac{3 - \sqrt{5}}{2}; \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

□

Bài 15. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3(2 + 3y) = 8, \\ x(y^3 - 2) = 6. \end{cases}$$

Lời giải.

$$\text{Xét hệ } \begin{cases} x^3(2 + 3y) = 8 & (1), \\ x(y^3 - 2) = 6 & (2). \end{cases}$$

+ / Trường hợp $x = 0$ không thỏa mãn.

$$+ / \text{ Trường hợp } x \neq 0, \text{ hệ đã cho tương đương với } \begin{cases} 2 + 3y = \left(\frac{2}{x}\right)^3, \\ y^3 - 2 = \frac{6}{x}. \end{cases}$$

$$\text{Đặt } u = \frac{2}{x}, \text{ ta được hệ: } \begin{cases} 2 + 3y = u^3 & (3), \\ y^3 - 2 = 3u & (4). \end{cases}$$

Lấy (3) + (4) ta được phương trình $y^3 + 3y = u^3 + 3u \Leftrightarrow (y - u)(y^2 + yu + u^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow y = u$.

Giải ra tập nghiệm $S = \{(-2; -1), (1; 2)\}$.

□

Bài 16. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 10x^2y - 16xy^2 + 24y^3 - 2(x + 2y) = 0, \\ 2xy(x^2 + 4y^2) + 2 = (x + 2y)^2. \end{cases}$

Lời giải.

$$\text{Xét hệ } \begin{cases} 10x^2y - 16xy^2 + 24y^3 - 2(x + 2y) = 0 & (1), \\ 2xy(x^2 + 4y^2) + 2 = (x + 2y)^2 & (2). \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow 2x^3y + 8xy^3 + 2 = x^2 + 4xy + 4y^2 \Leftrightarrow 2xy(x^2 + 4y^2 - 2) - (x^2 + 4y^2 - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (2xy - 1)(x^2 + 4y^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy = 1 \\ x^2 + 4y^2 = 2 \end{cases}. \end{aligned}$$

+ / Với $2xy \stackrel{(*)}{=} 1 \Leftrightarrow 2 = 4xy$ thế vào (1) được phương trình

$$10x^2y - 16xy^2 + 24y^3 - 4xy(x + 2y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 & (\text{loại}) \\ x = 2y \end{cases}.$$

Thế $x = 2y$ vào (*) tìm được nghiệm $\left(1; \frac{1}{2}\right), \left(-1; -\frac{1}{2}\right)$.

+ / Với $x^2 + 4y^2 \stackrel{(**)}{=} 2$ thế vào (1) được phương trình

$$10x^2y - 16xy^2 + 24y^3 - (x^2 + 4y^2)(x + 2y) = 0 \Leftrightarrow (x - 2y)^2(x - 4y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x = 4y \end{cases}.$$

Thế vào (**) tìm được nghiệm $\left(\frac{4}{\sqrt{10}}; \frac{1}{\sqrt{10}}\right), \left(-\frac{4}{\sqrt{10}}; -\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$.

Vậy hệ có tập nghiệm $S = \left\{\left(1; \frac{1}{2}\right), \left(-1; -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{4}{\sqrt{10}}; \frac{1}{\sqrt{10}}\right), \left(-\frac{4}{\sqrt{10}}; -\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right\}$. □

Bài 17. Giải phương trình $7x^2 + 7x = \sqrt{\frac{4x + 9}{28}}$.

Lời giải.

• Bài này có thể sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn để đưa về hệ phương trình. Cách xây dựng ẩn phụ như sau: Quan sát về trái có bậc hai nên ta sẽ đặt $\alpha t + \beta = \sqrt{\frac{4x + 9}{28}}$ (*), sao cho sau khi bình phương, rút gọn thu được phương trình dạng:

$$7t^2 + 7t = \alpha x + \beta \quad (**).$$

Từ (*), (**) ta được hệ

$$\begin{cases} x = 7\alpha^2 t^2 + 14\alpha\beta t + 7\beta^2 - \frac{9}{4} \\ x = \frac{7}{\alpha} t^2 + \frac{7}{\alpha} t - \frac{\beta}{\alpha} \end{cases}.$$

Suy ra

$$7\alpha^2 t^2 + 14\alpha\beta t + 7\beta^2 - \frac{9}{4} = \frac{7}{\alpha} t^2 + \frac{7}{\alpha} t - \frac{\beta}{\alpha}.$$

Đồng nhất hệ số hai vế ta có $\alpha = 1, \beta = \frac{1}{2}$.

• Cách giải: Xét phương trình $7x^2 + 7x = \sqrt{\frac{4x+9}{28}}$ (1).

Đặt $t + \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{4x+9}{28}}$ (2), $t \geq -\frac{1}{2}$. Suy ra $7t^2 + 7t = x + \frac{1}{2}$ (3). Từ (1), (2), (3) ta có hệ đối xứng loại 2 với điều kiện $t \geq -\frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} 7x^2 + 7x = t + \frac{1}{2}, \\ 7t^2 + 7t = x + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Giải hệ này ta được hai nghiệm $\begin{cases} x = \frac{-6+5\sqrt{2}}{14} \\ t = \frac{-6+5\sqrt{2}}{14} \end{cases}$ và $\begin{cases} x = \frac{-8-\sqrt{46}}{14} \\ t = \frac{-8+\sqrt{46}}{14} \end{cases}$. Vậy phương trình ban đầu có

tập nghiệm $S = \left\{ \frac{-8-\sqrt{46}}{14}; \frac{-6+5\sqrt{2}}{14} \right\}$. □

Chương 4: BẤT ĐẲNG THỨC-BẤT PHƯƠNG TRÌNH

§1 BẤT ĐẲNG THỨC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 CÁC KHÁI NIỆM

Khái niệm (Bất đẳng thức). Cho hai số thực a, b . Các mệnh đề “ $a > b$ ”, “ $a < b$ ”, “ $a \geq b$ ”, “ $a \leq b$ ” được gọi là các bất đẳng thức.

Khái niệm (Bất đẳng thức cùng chiều, trái chiều). Cho bốn số thực a, b, c, d .

Các bất đẳng thức “ $a > b$ ”, “ $c > d$ ” được gọi là bất đẳng thức cùng chiều.

Các bất đẳng thức “ $a > b$ ”, “ $c < d$ ” được gọi là bất đẳng thức trái chiều.

Khái niệm (Bất đẳng thức hệ quả). Nếu mệnh đề “ $a > b \Rightarrow c > d$ ” đúng thì ta nói bất đẳng thức “ $c > d$ ” là bất đẳng thức hệ quả của bất đẳng thức “ $a > b$ ” và viết $a > b \Rightarrow c > d$.

Khái niệm (Bất đẳng thức tương đương). Nếu bất đẳng thức “ $a > b$ ” là hệ quả của bất đẳng thức “ $c > d$ ” và ngược lại thì ta nói hai bất đẳng thức tương đương với nhau và viết $a > b \Leftrightarrow c > d$.

2 TÍNH CHẤT

Tính chất		Tên gọi
Điều kiện	Nội dung	
	$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$	Cộng hai vế của bất đẳng thức với một số.
$c > 0$	$a < b \Leftrightarrow ac < bc$	Nhân hai vế của bất đẳng thức với một số.
$c < 0$	$a < b \Leftrightarrow ac > bc$	
	$a < b \text{ và } c < d \Rightarrow a + c < b + d$	Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều.
$a > 0, c > 0$	$a < b \text{ và } c < d \Rightarrow ac < bd$	Nhân hai bất đẳng thức cùng chiều.

$n \in \mathbb{N}^*$	$a < b \Leftrightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1}$	Nâng hai vế của bất đẳng thức lên một lũy thừa.
$n \in \mathbb{N}^*$ và $a > 0$	$a < b \Leftrightarrow a^{2n} < b^{2n}$	
$a > 0$	$a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$ $a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$	Khai căn hai vế của một bất đẳng thức.

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Sử dụng phép biến đổi tương đương

Để chứng minh một bất đẳng thức ta có thể sử dụng các cách sau:

- + Biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với một bất đẳng thức đã biết.
- + Sử dụng một bất đẳng thức đã biết, biến đổi để dẫn đến bất đẳng thức cần chứng minh.

Một số bất đẳng thức thông dụng:

- + $a^2 \geq 0$;
- + $a^2 + b^2 \geq 0$;
- + $a \cdot b \geq 0$, với $a, b \geq 0$;
- + $a^2 + b^2 \geq \pm 2ab$.

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 1 ❖❖❖

Ví dụ 1. Chứng minh $\sqrt{1-x} + \sqrt{x+2} \leq \sqrt{6}$, $\forall x \in [-2; 1]$.

Lời giải.

Với $x \in [-2; 1]$, ta có

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{x+2} \leq \sqrt{6} \Leftrightarrow 3 + 2\sqrt{(1-x)(x+2)} \leq 6 \Leftrightarrow 4(1-x)(x+2) \leq 9 \Leftrightarrow (2x+1)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng. Vậy, bài toán được chứng minh. □

Ví dụ 2. Chứng minh $a^2 + b^2 + 2 \geq 2(a+b)$, với mọi số thực a, b .

Lời giải.

Với mọi số thực a, b ta luôn có

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2 \geq 2(a+b).$$

Bài toán đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$. □

Ví dụ 3. Cho các số thực x, y, z . Chứng minh các bất đẳng thức sau:

- $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$;
- $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$.

Lời giải.

a) Bất đẳng thức tương đương với

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2zx \Leftrightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$. Phép chứng minh hoàn tất.

- b) Ta có $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2 - 2xy - 2x - 2y \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0$.
Đẳng thức có được khi và chỉ khi $x = y = 1$. Bài toán đã được chứng minh. □

Ví dụ 4. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

- a) $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$, với $a, b \geq 0$;
b) $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$, với $a, b \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

- a) Ta có $a^3 + b^3 \geq ab(a+b) \Leftrightarrow (a+b)(a^2 - ab + b^2) \geq ab(a+b) \Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2 \geq 0$.

Bất đẳng thức này luôn đúng với mọi a, b không âm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

- b) Biến đổi bất đẳng thức đã cho tương đương với $(a-b)^2(a^2 - ab + b^2) \geq 0$ (hiển nhiên đúng).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$. □

Ví dụ 5. Cho a, b là các số thực thỏa mãn $ab \geq 1$. Chứng minh $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} &\geq \frac{2}{1+ab} \Leftrightarrow \frac{1}{1+a^2} - \frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+b^2} - \frac{1}{1+ab} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{ab-a^2}{(1+a^2)(1+ab)} + \frac{ab-b^2}{(1+ab)(1+b^2)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a(b-a)(1+b^2) - b(b-a)(1+a^2)}{(1+a^2)(1+b^2)} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(b-a)(a+ab^2-b-a^2b)}{(1+a^2)(1+b^2)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(b-a)^2(ab-1)}{(1+a^2)(1+b^2)} \geq 0. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng với mọi a, b thỏa mãn $ab \geq 1$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ab = 1$ hoặc $a = b$. □

Ví dụ 6. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y}$. Chứng minh:

$$\frac{x+y}{2x-y} + \frac{y+z}{2z-y} \geq 4.$$

Lời giải.

Từ giả thiết $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y} \Rightarrow y = \frac{2xz}{x+z}$. Do đó

$$\frac{x+y}{2x-y} + \frac{y+z}{2z-y} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{\frac{x(x+3z)}{x+z}}{\frac{2x^2}{x+z}} + \frac{\frac{z(z+3x)}{x+z}}{\frac{2z^2}{x+z}} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{x+3z}{x} + \frac{z+3x}{z} \geq 8 \Leftrightarrow (x-z)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}.$$

Vậy, bài toán được chứng minh. Đẳng thức có được khi và chỉ khi $x = y = z$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3 + b^3 + c^3$.

Lời giải.

HD: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$3(a^4 + b^4 + c^4) \geq (a + b + c)(a^3 + b^3 + c^3)$$

Thực hiện biến đổi tương đương quy về bất đẳng thức

$$(a - b)^2(a^2 + ab + b^2) + (b - c)^2(b^2 + bc + c^2) + (a - c)^2(a^2 + ac + c^2) \geq 0.$$

□

Bài 2. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x + y + 1} + \frac{1}{y + z + 1} + \frac{1}{z + x + 1} \leq 1.$$

Lời giải.

Đặt $x = a^3, y = b^3, z = c^3$, với a, b, c dương và $abc = 1$. Bất đẳng thức đã cho trở thành

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + 1} + \frac{1}{b^3 + c^3 + 1} + \frac{1}{c^3 + a^3 + 1} \leq 1.$$

Ta có $(a - b)^2(a + b) \geq 0 \Leftrightarrow a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$.

Tương tự, ta cũng có $b^3 + c^3 \geq bc(b + c), a^3 + c^3 \geq ac(a + c)$. Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^3 + b^3 + 1} + \frac{1}{b^3 + c^3 + 1} + \frac{1}{c^3 + a^3 + 1} &\leq \frac{1}{ab(a + b) + 1} + \frac{1}{bc(b + c) + 1} + \frac{1}{ac(a + c) + 1} \\ &= \frac{1}{ab(a + b) + abc} + \frac{1}{bc(b + c) + abc} + \frac{1}{ac(a + c) + abc} \\ &= \frac{1}{abc} = 1. \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

□

Bài 3. Cho a, b, c, d, e là các số thực tùy ý. Chứng minh

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e).$$

Lời giải.

HD: Biến đổi bất đẳng thức thành $\left(\frac{a}{2} - b\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - c\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - d\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - e\right)^2 \geq 0$.

□

Bài 4. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $(a + b)(b + c)(c + a) = 2$. Chứng minh rằng

$$(a^2 + bc)(b^2 + ac)(c^2 + ab) \leq 1.$$

Lời giải.

Không giảm tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó, ta có

$$4(a^2 + bc)(b^2 + ac)(c^2 + ab) \leq 4(a^2 + ac)(b^2 + ac)(bc + ab) = 4ab(b^2 + ac)(a + c)^2.$$

Mặt khác, ta có $(b^2 + ca - ab)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 4ab(b^2 + ca) \leq (ab + b^2 + ca)^2$. Do đó

$$4(a^2 + bc)(b^2 + ac)(c^2 + ab) \leq (ab + b^2 + ca)^2(a + c)^2 \leq (a + b)^2(b + c)^2(a + c)^2 = 4.$$

Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1, c = 0$ (với giả sử $a \geq b \geq c$). $\square$

Bài 5. Cho $a, b \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$. Chứng minh $\left| \frac{\tan a - \tan b}{1 - \tan a \tan b} \right| < 1$.

Lời giải.

Với $a, b \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$ thì $\tan^2 a, \tan^2 b \in (0; 1)$. Do đó

$$\begin{aligned} \left| \frac{\tan a - \tan b}{1 - \tan a \tan b} \right| < 1 &\Leftrightarrow |\tan a - \tan b| < |1 - \tan a \tan b| \\ &\Leftrightarrow \tan^2 a + \tan^2 b - 2 \tan a \tan b < 1 - 2 \tan a \tan b + \tan^2 a \tan^2 b \\ &\Leftrightarrow (1 - \tan^2 a)(\tan^2 b - 1) < 0 \text{ (luôn đúng với giả thiết đã cho).} \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh. $\square$

Dạng 2. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si

Khi gặp các bất đẳng thức, trong đó có chứa *tổng, tích của các số không âm*, ta có thể áp dụng những bất đẳng thức sau đây để chứng minh:

a) Bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm.

Cho $a \geq 0$ và $b \geq 0$, ta có: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

Các dạng khác của bất đẳng thức trên:

$$+ a + b \geq 2\sqrt{ab}, (a \geq 0, b \geq 0);$$

$$+ ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2, (\forall a, b);$$

$$+ ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}, (\forall a, b);$$

$$+ a^2 + b^2 \geq 2ab, (\forall a, b).$$

b) Bất đẳng thức Cô-si cho ba số không âm.

Cho $a \geq 0, b \geq 0$ và $c \geq 0$, ta có: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Các dạng khác của bất đẳng thức trên:

$$+ a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}, (\forall a, b, c \geq 0);$$

$$+ abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3, (\forall a, b, c \geq 0);$$

$$+ abc \leq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}, (\forall a, b, c \geq 0);$$

$$+ a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc, (\forall a, b, c \geq 0).$$

c) Tổng quát, nếu $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ thì:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n \geq 0$.

🔗🔗🔗 BÀI TẬP DẠNG 2 🔗🔗🔗

Chú ý:

- $a^2 + b^2 \geq 2ab$ với mọi a, b .
- Dựa vào bất đẳng thức cần chứng minh, giả thuyết về số dương, số không âm,... và chiều của bất đẳng thức, dấu bằng xảy ra... để định hướng biến đổi thích hợp.
- Biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh về dạng có thể áp dụng được bất đẳng thức Cô-si với các kỹ thuật tách số hoặc ghép số, ghép cặp hai, ghép cặp ba, tăng hoặc giảm số hạng, tăng hoặc giảm bậc của lũy thừa,...

Chẳng hạn với $a > 0, b > 0$ thì có nhiều hướng đánh giá và khai thác:

- $a + b \geq 2\sqrt{ab}; a + b = a + \frac{b}{2} + \frac{b}{2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{ab^2}{4}};$
- $a + 2b = a + b + b; a + 1 = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + 1 = a + \frac{1}{2} + \frac{1}{2};$
- $1 + a + b \geq 3\sqrt[3]{ab}; 2 + a = 1 + 1 + a \geq 3\sqrt[3]{a};$
- $a^2 + \frac{1}{a} = a^2 + \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}}; ab = a \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{b}; ab^2 = a \cdot b \cdot b; \dots$

- Cô-si ngược dấu, với a, b, c dương thì:

$$\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{2\sqrt{ab}}; \frac{1}{a+1} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}; \frac{1}{a+b+c} \leq \frac{1}{3\sqrt[3]{abc}}, \dots$$

Ví dụ 1. Cho a, b là hai số dương. Chứng minh:

- $(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4;$
- $a^2 + b^2 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b}).$

Lời giải.

- Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai cặp số dương a, b và $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ ta được:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} > 0;$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}} > 0.$$

Nhân theo vế hai bất đẳng thức trên, ta được $(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 2\sqrt{ab} \cdot \frac{2}{\sqrt{ab}} = 4.$

- Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai cặp số dương $a^2, \frac{1}{a}$ và $b^2, \frac{1}{b}$ ta được:

$$a^2 + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a^2 \cdot \frac{1}{a}} = 2\sqrt{a};$$

$$b^2 + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{b^2 \cdot \frac{1}{b}} = 2\sqrt{b}.$$

Cộng theo vế của hai bất đẳng thức trên, ta được $a^2 + b^2 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b}).$

□

Ví dụ 2. Chứng minh rằng nếu a, b cùng dấu thì $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ và a, b trái dấu thì $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$.

Lời giải.

Nếu a, b là hai số cùng dấu thì $\frac{a}{b}$ và $\frac{b}{a}$ là hai số dương nên áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta được:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2.$$

Nếu a, b là hai số trái dấu thì tương tự $\left(-\frac{a}{b}\right) + \left(-\frac{b}{a}\right) \geq 2$ và vì vậy $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$. $\square$

Ví dụ 3. Chứng minh rằng nếu $a^2 + b^2 = 1$ thì $|a + b| \leq \sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có, với mọi a, b thì $a^2 + b^2 \leq 2\sqrt{a^2b^2} = 2|ab| \geq 2ab$ hay $2ab \leq a^2 + b^2$ nên

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq a^2 + b^2 + a^2 + b^2 = 2(a^2 + b^2) = 2.$$

Vậy, nếu $a^2 + b^2 = 1$ thì $|a + b| \leq \sqrt{2}$. $\square$

Ví dụ 4. Chứng minh với ba số $a, b, c \geq 0$ thì $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$. Dấu bằng của đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm, ta được:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab};$$

$$b + c \geq 2\sqrt{bc};$$

$$c + a \geq 2\sqrt{ca}.$$

Cộng từng vế của các bất đẳng thức trên, ta được:

$$2(a + b + c) \geq 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) \Rightarrow a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}.$$

Dấu bất đẳng thức xảy ra khi $a = b = c \geq 0$. $\square$

Ví dụ 5. Cho a, b dương. Chứng minh bất đẳng thức:

$$(a + b)(1 + ab) \geq 4ab.$$

Dấu bằng đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} > 0;$$

$$1 + ab \geq 2\sqrt{ab} > 0$$

Khi đó, $(a + b)(1 + ab) \geq 4(\sqrt{ab})^2 = 4ab$. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b$ và $1 = ab \Leftrightarrow a = b = 1$. $\square$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho a, b, c dương. Chứng minh bất đẳng thức

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

Dấu bằng đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương:

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$b+c \geq 2\sqrt{bc}$$

$$c+a \geq 2\sqrt{ca}$$

Vậy nên

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{ab} \cdot \sqrt{bc} \cdot \sqrt{ca} = 8abc.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c > 0$. □

Bài 2. Cho a, b, c dương. Chứng minh bất đẳng thức

$$(a+1)(b+1)(a+c)(b+c) \geq 16abc.$$

Dấu bằng đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương:

$$a+1 \geq 2\sqrt{a}$$

$$b+1 \geq 2\sqrt{b}$$

$$a+c \geq 2\sqrt{ac}$$

$$b+c \geq 2\sqrt{bc}$$

Vậy nên

$$(a+1)(b+1)(a+c)(b+c) \geq 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{ac} \sqrt{bc} = 16abc.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

Bài 3. Chứng minh rằng với mọi a thì:

$$\frac{a^2+6}{\sqrt{a^2+2}} \geq 4.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải.

Ta có:

$$\frac{a^2+6}{\sqrt{a^2+2}} = \frac{(a^2+2)+4}{\sqrt{a^2+2}} = \sqrt{a^2+2} + \frac{4}{\sqrt{a^2+2}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương:

$$\sqrt{a^2 + 2} + \frac{4}{\sqrt{a^2 + 2}} \geq 2\sqrt{4} = 4.$$

Do đó, $\frac{a^2 + 6}{\sqrt{a^2 + 2}} \geq 4$. Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\sqrt{a^2 + 2} = \frac{4}{\sqrt{a^2 + 2}} \Leftrightarrow a^2 + 2 = 4 \Leftrightarrow a^2 = 2 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{2}.$$

□

Bài 4. Chứng minh với mọi a, b, c khác 0 thì có bất đẳng thức:

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}.$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương:

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{b^2}{c^2}} = 2\sqrt{\frac{a^2}{c^2}} = 2\left|\frac{a}{c}\right| \geq 2\frac{a}{c}$$

Tương tự, ta cũng có:

$$\frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq 2\frac{b}{a} \text{ và } \frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} \geq 2\frac{c}{b}.$$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức, ta được:

$$2\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right) \geq 2\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right) \Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}.$$

□

Bài 5. Cho a, b, c dương. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 6.$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta có

$$\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} = \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) \geq 2 + 2 + 2 = 6.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

□

Bài 6. Cho 4 số a, b, c, d dương. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4 \geq abcd.$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta có

$$\begin{aligned}
 a + b &\geq 2\sqrt{ab}, c + d \geq 2\sqrt{cd} \\
 \Rightarrow a + b + c + d &\geq 2(\sqrt{ab} + \sqrt{cd}) \\
 \Rightarrow \left(\frac{a + b + c + d}{2}\right)^2 &\geq (\sqrt{ab} + \sqrt{cd})^2 = ab + cd + 2\sqrt{abcd} \geq 4\sqrt{abcd} \\
 \Rightarrow \left(\frac{a + b + c + d}{4}\right)^2 &\geq \sqrt{abcd} \\
 \Rightarrow \left(\frac{a + b + c + d}{4}\right)^4 &\geq abcd.
 \end{aligned}$$

□

Bài 7. Cho 4 số a, b, c, d dương. Chứng minh:

$$(a + b + c + d) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) \geq 16.$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 4 số dương, ta có:

$$\begin{aligned}
 (a + b + c + d)^2 &\geq 16abcd > 0; \\
 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right)^2 &\geq \frac{16}{abcd} > 0.
 \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
 (a + b + c + d)^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right)^2 &\geq 16abcd \cdot \frac{16}{abcd} = 16^2 \\
 \Rightarrow (a + b + c + d) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) &\geq 16.
 \end{aligned}$$

□

Bài 8. Cho hai số $a \geq 1$ và $b \geq 1$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq ab.$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 2 số không âm, ta có:

$$a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} = a\sqrt{(b-1) \cdot 1} + b\sqrt{(a-1) \cdot 1} \leq a \left(\frac{b-1+1}{2} \right) + b \left(\frac{a-1+1}{2} \right) = ab.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a-1 = b-1 = 1 \Leftrightarrow a = b = 2$.

□

Bài 9. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $B = b^2 + \frac{1}{b}$, với $b > 0$.

Lời giải.

Với $b > 0$, ta có:

$$B = b^2 + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2b} \geq 3\sqrt[3]{b^2 \cdot \frac{1}{2b} \cdot \frac{1}{2b}} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $b^2 = \frac{1}{2b} \Leftrightarrow b = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của B là $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$. $\square$

Bài 10. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác và p là nửa chu vi của tam giác đó. Chứng minh

a) $(p-a)(p-b) \leq \frac{c^2}{4};$

b) $(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{abc}{8}.$

Lời giải.

a) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số x, y : $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$, ta có:

$$(p-a)(p-b) \leq \left(\frac{(p-a) + (p-b)}{2}\right)^2 = \left(\frac{2p-a-b}{2}\right)^2 = \frac{c^2}{4}.$$

b) Áp dụng kết quả câu a), ta có:

$$0 < (p-a)(p-b) \leq \frac{c^2}{4};$$

$$0 < (p-b)(p-c) \leq \frac{a^2}{4};$$

$$0 < (p-c)(p-a) \leq \frac{b^2}{4}.$$

Nhân vế theo vế các bất đẳng thức trên, ta được:

$$(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2 \leq \frac{a^2b^2c^2}{64} \Rightarrow (p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{abc}{8}.$$

$\square$

Bài 11. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng $\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c$. Dấu bằng đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương ta có

$$\frac{a^4 + b^4}{2} \geq a^2b^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b > 0$.

Do đó,

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$$

và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta có

$$\frac{a^2b^2 + b^2c^2}{2} \geq ab^2c.$$

Do đó,

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c).$$

Vì vậy

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c).$$

Chia hai vế đẳng thức này cho abc ta được điều cần chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c > 0$.

□

Bài 12. Cho a, b, c . Chứng minh bất đẳng thức $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2$.

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương ỹ mẫu, ta có

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} = \frac{a}{\sqrt{(b+c) \cdot a}} \geq \frac{a}{\frac{a+b+c}{2}} = \frac{2a}{b+c+a}.$$

$$\sqrt{\frac{b}{a+c}} = \frac{b}{\sqrt{(a+c) \cdot b}} \geq \frac{b}{\frac{a+b+c}{2}} = \frac{2b}{b+c+a}.$$

$$\sqrt{\frac{c}{a+b}} = \frac{c}{\sqrt{(b+a) \cdot c}} \geq \frac{c}{\frac{a+b+c}{2}} = \frac{2c}{b+c+a}.$$

Cộng lại 3 bất đẳng thức về theo vế, ta có

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2.$$

□

Bài 13. Cho x, y, z dương thỏa mãn: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$. Chứng minh

$$\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq 1.$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương a, b :

$$(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{\frac{1}{ab}} = 4.$$

Nên $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$, do đó:

$$\frac{1}{2x+y+z} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{y+z} \right) \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \right).$$

Tương tự ta có:

$$\frac{1}{x+2y+z} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{x+z} \right) \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z} \right) \right).$$

$$\frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2z} + \frac{1}{x+y} \right) \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2z} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y} \right) \right).$$

Cộng lại các bất đẳng thức trên về theo về, ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \\ & \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z} \right) \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2z} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right) \right) \\ & \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 1. \end{aligned}$$

□

Dạng 3. Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki

Định lí 1. Cho a, b, c, d là các số thực tùy ý, ta có bất đẳng thức sau

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2 \text{ (Bunhiacopxki)}$$

Dấu "=" xảy ra khi $ad = bc \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

Hệ quả 1. Bất đẳng thức Bunhiacopxki mở rộng.

Cho $2n$ số $a_1; a_2; \dots; a_n$ và $b_1; b_2; \dots; b_n$ ta có bất đẳng thức sau

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$.

Hệ quả 2. Bất đẳng thức cộng mẫu.

Cho n số $a_1; a_2; \dots; a_n$ và n số dương $x_1; x_2; \dots; x_n$ ta có bất đẳng thức sau.

$$\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \dots + \frac{a_n}{x_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \dots = \frac{x_n}{a_n}$.

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 3 ❖❖❖

Ví dụ 1. Cho $x^2 + y^2 = 5$ tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $A = x + 2y$.

Lời giải.

Sử dụng Bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\begin{aligned} 2 &= (x + 2y)^2 \leq (x^2 + y^2)(1^2 + 2^2) = 25 \\ &\Rightarrow -5 \leq A \leq 5. \end{aligned}$$

Vậy $\max y = 5$ xảy ra khi $x = 1; y = 2$.

Vậy $\min y = -5$ xảy ra khi $x = -1; y = -2$.

□

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \sqrt{1-x} + 2\sqrt{x+1}$.

Lời giải.

ĐK: $-1 \leq x \leq 1$.

Sử dụng Bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$A^2 = (\sqrt{1-x} + 2\sqrt{x+1})^2 \leq (1^2 + 2^2)((\sqrt{1-x})^2 + (\sqrt{x+1})^2) = 10$$

$$\Rightarrow A \leq \sqrt{10}.$$

$$\text{Vậy } \max y = \sqrt{10} \text{ xảy ra khi } \sqrt{1-x} = \frac{\sqrt{x+1}}{2} \Leftrightarrow 1-x = \frac{1+x}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3}{5}.$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Biết x, y là 2 số thực dương thỏa mãn $x + 2\sqrt{2}y = 5$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^4 + y^4$.

Lời giải.

Sử dụng Bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$\begin{aligned} 5A &= (x^4 + y^4)(1^2 + 2^2) \geq (x^2 + 2y^2)^2 \\ (x^2 + 2y^2)(1 + 4) &\geq (x + 2\sqrt{2}y)^2 = 25 \\ \Rightarrow A &\geq 5 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \min y = 5. \text{ Dấu " = " xảy ra khi } x = \frac{y}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = 1; y = \sqrt{2}.$$

□

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $A = \sqrt{1-2x} + 3\sqrt{1+x}$

Lời giải.

$$\text{ĐK: } -1 \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

Ta có

$$A = \sqrt{1-2x} + 3\sqrt{1+x} = \sqrt{1-2x} + \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{2+2x}$$

$$\Rightarrow A^2 \leq \left(1 + \frac{9}{2}\right)((\sqrt{1-2x})^2 + (\sqrt{2+2x})^2) = \frac{33}{2}$$

$$\Rightarrow A \leq \frac{\sqrt{66}}{2}. \text{ Vậy } \max A = \frac{\sqrt{66}}{2}. \text{ Dấu " = " xảy ra khi } \sqrt{2+2x} = \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{1-2x} \Leftrightarrow x = \frac{5}{22}.$$

□

Bài 3. Giải phương trình $\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x} = x^2 - 10x + 27$.

Lời giải.

Ta có

$$(\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x})^2 \leq (1^2 + 1^2)(x-4 + 6-x) = 4 \Rightarrow \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x} \leq 2$$

$$x^2 - 10x + 27 = (x-5)^2 + 2 \geq 2.$$

$$\text{Vậy phương trình } \Leftrightarrow x = 4.$$

□

Dạng 4. Sử dụng các bất đẳng thức hệ quả

Ta có thể sử dụng Bất đẳng thức Bunhiacopxki cho nhiều số, hoặc trong những bài toán có mẫu, ta có thể sử dụng Bất đẳng thức cộng mẫu.

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 4 ❖❖❖

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \sqrt{1-2x} + 4\sqrt{1+x}$

Lời giải.

ĐK: $-1 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2; \forall a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Thật vậy bđt $\Leftrightarrow (ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2 \geq 0$.

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

Sử dụng bất đẳng thức trên ta có

$$A = \sqrt{1-2x} + 4\sqrt{1+x}$$

$$= \sqrt{1-2x} + 2\sqrt{1+x} + 2\sqrt{1+x} \leq (1^2 + 2^2 + 2^2)((\sqrt{1-2x})^2 + (\sqrt{1+x})^2 + (\sqrt{1+x})^2) = 27 \Rightarrow A \leq 3\sqrt{3}$$

Vậy $\max y = 3\sqrt{3}$ xảy ra khi $\frac{\sqrt{x+1}}{2} = \sqrt{1-2x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$. □

Ví dụ 2. Cho x, y, z là độ dài 3 cạnh của một tam giác thỏa mãn $x + y + z = 3$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{1}{x+y-z} + \frac{4}{y+z-x} + \frac{9}{z+x-y}$.

Lời giải.

Ta luôn có bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}; \forall x, y, z \text{ là các số thực dương.}$$

Ta có $x+y-z; y+z-x; z+x-y$ là các số dương vì x, y, z là độ dài ba cạnh của tam giác nên ta có

$$A = \frac{1}{x+y-z} + \frac{4}{y+z-x} + \frac{9}{z+x-y} \geq \frac{(1+2+3)^2}{x+y-z+y+z-x+z+x-y} = \frac{36}{3} = 12.$$

Vậy $\min y = 12$. Dấu "=" xảy ra khi $\frac{x+y-z}{1} = \frac{y+z-x}{2} = \frac{z+x-y}{3} \Leftrightarrow x = 1; y = \frac{3}{4}; z = \frac{5}{4}$ □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \sqrt{1-x} + \sqrt{2+3x}$

Lời giải.

ĐK: $\frac{-3}{x} \leq x \leq 1$.

Ta có

$$3A = 3\sqrt{1-x} + 3\sqrt{2+3x} = \sqrt{1-x} + \sqrt{1-x} + \sqrt{1-x} + 3\sqrt{2+3x}$$

$$\Rightarrow 9A^2 \leq (1+1+1+9)(1-x+1-x+1-x+2+3x) = 60$$

$$\Rightarrow A \leq \frac{\sqrt{60}}{3}. \text{ Vậy } \max y = \frac{\sqrt{60}}{3}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } x = \frac{7}{12}. \quad \square$$

Bài 2. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{1}{x^2 + 2yz} + \frac{1}{y^2 + 2zx} + \frac{4}{z^2 + 2zx}.$$

Lời giải.

Ta có

$$A = \frac{1}{x^2 + 2yz} + \frac{1}{y^2 + 2zx} + \frac{4}{z^2 + 2zx} \geq \frac{(1+1+2)^2}{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx} = \frac{16}{(x+y+z)^2} = \frac{16}{9}.$$

Vậy $\min y = \frac{16}{9}$

□

Dạng 5. Chứng minh bất đẳng thức dựa vào tọa độ véc-tơ

🔗🔗🔗 BÀI TẬP DẠNG 5 🔗🔗🔗

Ví dụ 1. Chứng minh rằng: $\sqrt{(a+c)^2+b^2} + \sqrt{(a-c)^2+b^2} \geq \sqrt{a^2+b^2}$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Đặt $\vec{u} = (a+c, b)$ và $\vec{v} = (a-c, b)$.

Ta có $|\vec{u}| = \sqrt{(a+c)^2+b^2}$, $|\vec{v}| = \sqrt{(a-c)^2+b^2}$ và $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Áp dụng $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$, ta có bđt cần cm.

□

Ví dụ 2. Chứng minh rằng: $\sqrt{a^2+4b^2+6a+9} + \sqrt{a^2+4b^2-2a-12b+10} \geq 5$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $VT = \sqrt{(a+3)^2+(2b)^2} + \sqrt{(a-1)^2+(2b-3)^2}$.

Đặt $\vec{u} = (a+3, 2b)$ và $\vec{v} = (a-1, 2b-3)$ thì $\vec{u} - \vec{v} = (4, 3)$

Ta có $|\vec{u}| = \sqrt{(a+3)^2+(2b)^2}$, $|\vec{v}| = \sqrt{(a-1)^2+(2b-3)^2}$ và $|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$.

Áp dụng $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} - \vec{v}|$, ta có bđt cần cm.

□

Ví dụ 3. Tìm GTNN của $P = \sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{x^2+x+1}$.

Lời giải.

Ta có $P = \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} + \sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$.

Đặt $\vec{u} = (x-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ và $\vec{v} = (x+\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ thì $\vec{u} - \vec{v} = (1, \sqrt{3})$

Ta có $|\vec{u}| = \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$, $|\vec{v}| = \sqrt{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$ và $|\vec{u} - \vec{v}| = 2$.

Áp dụng $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} - \vec{v}|$, ta được $P \geq 2$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}$ và $-\vec{v}$ cùng hướng $\Leftrightarrow x - \frac{1}{2} = -x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy $\min P = 2$ tại $x = 0$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Chứng minh rằng: $\sqrt{a^2+ab+b^2} + \sqrt{a^2+ac+c^2} \geq \sqrt{c^2+cb+b^2}$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

HD: $VT = \sqrt{(a+\frac{1}{2}b)^2+(\frac{3}{2}b)^2} + \sqrt{(-a-\frac{1}{2}c)^2+(\frac{3}{2}c)^2}$

□

Bài 2. Chứng minh rằng: $\sqrt{(a-b)^2+c^2} + \sqrt{(a+b)^2+c^2} \geq 2\sqrt{c^2+a^2}$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

HD: $\sqrt{(a-b)^2+c^2} + \sqrt{(a+b)^2+(-c)^2} \geq 2\sqrt{c^2+a^2}$

□

Bài 3. Chứng minh rằng: $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$ với $a, b, c \in \mathbb{R}, a > c > 0, b > c$.

Lời giải.

HD: Sử dụng $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| |\vec{v}|$.

trong đó $\vec{u} = (\sqrt{c}, \sqrt{a-c})$, $\vec{v} = (\sqrt{b-c}, \sqrt{c})$.

□

Bài 4. Tìm GTNN của $P = \sqrt{x^2 - 6x + 13} + \sqrt{x^2 + 2x + 2}$.

Lời giải.

HD: $\vec{u} = (x - 3, 2), \vec{v} = (-x - 1, 1)$. □

Bài 5. Tìm GTNN của $P = \sqrt{x^2 + 10x + 26} + \sqrt{x^2 + 4x + 5}$.

Lời giải.

HD: $\vec{u} = (x + 5, 1), \vec{v} = (-x - 2, 1)$ □

Dạng 6. Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối

❖❖❖ **BÀI TẬP DẠNG 6** ❖❖❖

Ví dụ 1. Chứng minh $\frac{|a - b|}{1 + |a - b|} \leq \frac{|a|}{1 + |a|} + \frac{|b|}{1 + |b|}$.

Lời giải.

Quy đồng, nhân chéo ta được bất đẳng thức tương đương

$$|a - b|(1 + |a| + |b| + |ab|) \leq (1 + |a - b|)(|a| + |b| + 2|ab|)$$

$$\Leftrightarrow |a - b| \leq |a| + |b| + |ab(a - b)| + 2|ab| \text{ (đúng).}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = 0$ hoặc $b = 0$. □

Ví dụ 2. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $|ax^2 + bx + c| \leq 1, \forall |x| \leq 1$.

Chứng minh rằng $|a| + 2|b| + 3|c| \leq 7$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$. Khi đó:

$$f(1) = a + b + c, f(-1) = a - b + c, f(0) = c.$$

$$\text{Do đó, } a = \frac{1}{2}(f(1) + f(-1) - 2f(0)), b = \frac{1}{2}(f(1) - f(-1)), c = f(0).$$

Suy ra,

$$|a| + 2|b| + 3|c| = \frac{1}{2}|f(1) + f(-1) - 2f(0)| + |f(1) - f(-1)| + 3|f(0)| \quad (4.1)$$

$$\leq \frac{3}{2}|f(1)| + \frac{3}{2}|f(-1)| + 4|f(0)| \quad (4.2)$$

$$\leq 7. \quad (4.3)$$

□

Ví dụ 3. Tìm GTNN của biểu thức $A = |x + 2017| + |x - y - 6| + |2x - y + 44|$.

Lời giải.

Ta có $A \geq |x + 2017 + x - y - 6 - 2x + y - 44|$ hay $A \geq 1967$.

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x + 2017 \geq 0 \\ x - y - 6 \geq 0 \\ 2x - y + 44 \geq 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x + 2017 \leq 0 \\ x - y - 6 \leq 0 \\ 2x - y + 44 \leq 0 \end{cases} \quad \square$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm GTNN của $A = |x + 5| + |2x - 7| + |3x + 12|$.

Lời giải.

HD: $A \geq |x + 5 + 2x - 7 - 3x - 12|$ hay $A \geq 14$. □

Bài 2. Tìm GTNN của $A = |x - 1| + |y - 2| + |z - 3|$ với $|x| + |y| + |z| = 2017$

Lời giải.

HD: $A = |x - 1| + |y - 2| + |z - 3| \geq |x| - 1 + |y| - 2 + |z| - 3$ hay $A \geq 2011$ □

Bài 3. Cho các số thực thỏa mãn $|a + b + c| \leq 1$, $|a - b + c| \leq 1$, $|4a + 2b + c| \leq 8$, $|4a - 2b + c| \leq 8$.

Chứng minh rằng: $|a| + 3|b| + |c| \leq 7$.

Lời giải.

HD: Chứng minh $|a + c| + |b| \leq 1$ (1), $|4a + c| + 2|b| \leq 8$ (2).

Cộng từng vế (1) và (2) được $|a| + |b| \leq 3$.

Nhân từng vế (1) với 4 rồi cộng từng vế với (2) được $2|b| + |c| \leq 4$. □

Bài 4. Chứng minh $\frac{|a + b|}{1 + |a + b|} \leq \frac{|a| + |b|}{1 + |a| + |b|}$.

Lời giải.

HD: Nhân chéo □

Bài 5. Chứng minh rằng: Nếu $|a| < 1$, $|b - 1| < 10$, $|a - c| < 10$ thì $|ab - c| < 20$.

Lời giải.

HD: $|ab - c| \leq |ab - a| + |a - c| = |a||b - 1| + |a - c|$. □

C CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a - c < b - d.$

B. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a - c > b - d.$

C. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a - d > b - c.$

D. $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow a - c > b - d.$

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > b \\ -c < -d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > b \\ -d > -c \end{cases} \Rightarrow a - d > b - c.$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 2. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\begin{cases} a > b \\ a > c \end{cases} \Rightarrow a > \frac{b+c}{2}.$

B. $\begin{cases} a > b \\ a > c \end{cases} \Rightarrow a - c > b - a.$

C. $a > b \Rightarrow a - c > b - c.$

D. $a > b \Rightarrow c - a > c - b.$

Lời giải.

Dựa vào đáp án, ta có nhận xét sau:

• $\begin{cases} a > b \\ a > c \end{cases} \Rightarrow a + a > b + c \Rightarrow 2a > b + c \Rightarrow a > \frac{b+c}{2} \Rightarrow A \text{ đúng}.$

• $\begin{cases} a > b \\ a > c \end{cases} \Rightarrow a + a > b + c \Rightarrow a - c > b - a \Rightarrow B \text{ đúng}.$

• $a > b \Rightarrow a + (-c) > b + (-c) \Rightarrow a - c > b - c \Rightarrow C \text{ đúng}.$

• $a > b \Rightarrow -a < -b \Leftrightarrow c - a < c - b \Rightarrow D \text{ sai}.$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 3. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow ac < bd.$

B. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow ac > bd.$

C. $\begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{cases} \Rightarrow ac < bd.$

D. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow -ac > -bd.$

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{cases} \Rightarrow ac < bd.$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 4. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a < b \Rightarrow ac < bc.$

B. $a < b \Rightarrow ac > bc.$

C. $c < a < b \Rightarrow ac < bc.$

D. $\begin{cases} a < b \\ c > 0 \end{cases} \Rightarrow ac < bc.$

Lời giải.

Xét bất phương trình $a < b$ (*)

Khi nhân cả hai vế của (*) với c , ta được

$$\begin{cases} c > 0 \\ a < b \Leftrightarrow ac < bc \end{cases} \quad \begin{cases} c < 0 \\ a < b \Leftrightarrow ac > bc. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 5. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{d}.$

B. $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{d}.$

C. $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{d}.$

D. $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{d}{c}.$

Lời giải.

Dựa vào đáp án, ta có nhận xét sau:

- $\begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < \frac{1}{d} < \frac{1}{c} \end{cases} \Rightarrow$ Chưa đủ dữ kiện để so sánh $\frac{a}{c}, \frac{b}{d} \Rightarrow$ A sai.
- $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > b > 0 \\ \frac{1}{d} > \frac{1}{c} > 0 \end{cases} \Rightarrow$ Chưa đủ dữ kiện để so sánh $\frac{a}{c}, \frac{b}{d} \Rightarrow$ B sai.
- $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{d} \Rightarrow$ C sai vì chưa thiếu điều kiện a, b, c, d .
- $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} > 1 \\ 1 > \frac{d}{c} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} > 1 > \frac{d}{c} \Leftrightarrow \frac{a}{b} > \frac{d}{c} \Rightarrow$ D đúng.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 6. Nếu $a + 2c > b + 2c$ thì bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $-3a > -3b.$

B. $a^2 > b^2.$

C. $2a > 2b.$

D. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}.$

Lời giải.

Từ giả thiết, ta có $a + 2c > b + 2c \Leftrightarrow a > b \Leftrightarrow 2a > 2b.$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 7. Nếu $a + b < a$ và $b - a > b$ thì bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $ab > 0.$

B. $b < a.$

C. $a < b < 0.$

D. $a > 0$ và $b < 0.$

Lời giải.

Từ giả thiết, ta có $\begin{cases} a + b < a \\ b - a > b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b < 0 \\ -a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases} \Rightarrow ab > 0.$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 8. Nếu $0 < a < 1$ thì bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\frac{1}{a} > \sqrt{a}.$

B. $a > \frac{1}{a}.$

C. $a > \sqrt{a}.$

D. $a^3 > a^2.$

Lời giải.

Dựa vào đáp án, ta có nhận xét sau:

- $\frac{1}{a} - \sqrt{a} = \frac{1 - a\sqrt{a}}{a} = \frac{(1 - \sqrt{a})(1 + \sqrt{a} + a)}{a} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \sqrt{a}, \forall a \in (0; 1) \Rightarrow A \text{ đúng.}$
- $a - \frac{1}{a} = \frac{a^2 - 1}{a} = \frac{(a - 1)(a + 1)}{a} < 0 \Leftrightarrow a < \frac{1}{a}, \forall a \in (0; 1) \Rightarrow B \text{ sai.}$
- $a - \sqrt{a} = \sqrt{a}(\sqrt{a} - 1) < 0 \Leftrightarrow a < \sqrt{a}, \forall a \in (0; 1) \Rightarrow C \text{ sai.}$
- $a^3 - a^2 = a^2(a - 1) < 0 \Leftrightarrow a^3 < a^2, \forall a \in (0; 1) \Rightarrow D \text{ sai.}$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 9. Cho hai số thực dương a, b . Bất đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\frac{a^2}{a^4 + 1} \geq \frac{1}{2}$. B. $\frac{\sqrt{ab}}{ab + 1} \geq \frac{1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a^2 + 2} \leq \frac{1}{2}$. D. Tất cả đều đúng.

Lời giải.

Dựa vào đáp án, ta có nhận xét sau:

- $\frac{a^2}{a^4 + 1} - \frac{1}{2} = \frac{2a^2 - a^4 - 1}{2(a^4 + 1)} = -\frac{(a^2 - 1)^2}{2(a^4 + 1)} \leq 0, \forall a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{a^2}{a^4 + 1} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow A \text{ sai.}$
- $\frac{\sqrt{ab}}{ab + 1} - \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{ab} - ab - 1}{2(ab + 1)} = -\frac{(\sqrt{ab} - 1)^2}{2(ab + 1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{ab}}{ab + 1} \leq \frac{1}{2}, \forall a, b > 0 \Rightarrow B \text{ sai.}$
- $\frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a^2 + 2} - \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{a^2 + 1} - a^2 - 2}{2(a^2 + 2)} = -\frac{(\sqrt{a^2 + 1} - 1)^2}{2(a^2 + 2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a^2 + 2} \leq \frac{1}{2}, \forall a \Rightarrow C \text{ đúng.}$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 10. Cho $a, b > 0$ và $x = \frac{1 + a}{1 + a + a^2}, y = \frac{1 + b}{1 + b + b^2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $x > y$. B. $x < y$.
C. $x = y$. D. Không so sánh được.

Lời giải.

$$\Leftrightarrow 1 + b + b^2 + a + ab + ab^2 < 1 + a + a^2 + b + ab + ab^2$$

$$\text{Giả sử } x < y \Leftrightarrow \frac{1 + a}{1 + a + a^2} < \frac{1 + b}{1 + b + b^2} \Leftrightarrow (1 + a)(1 + b + b^2) < (1 + b)(1 + a + a^2) \Leftrightarrow b^2 + ab^2 < a^2 + a^2b \Leftrightarrow (a^2 - b^2) > a^2b - ab^2$$

$$\Leftrightarrow (a - b)(a + b + ab) > 0 \text{ luôn đúng}$$

Vậy $x < y$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 11. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = x + \frac{2}{x - 1}$ với $x > 1$.

- A. $m = 1 - 2\sqrt{2}$. B. $m = 1 + 2\sqrt{2}$. C. $m = 1 - \sqrt{2}$. D. $m = 1 + \sqrt{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } f(x) = x + \frac{2}{x - 1} = x - 1 + \frac{2}{x - 1} + 1 \geq 2\sqrt{(x - 1) \cdot \frac{2}{x - 1}} + 1 = 2\sqrt{2} + 1.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x - 1 = \frac{2}{x - 1} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{2}.$$

Vậy $m = 2\sqrt{2} + 1$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 12. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 5}{\sqrt{x^2 + 4}}$.

- A. $m = 2$. B. $m = 1$. C. $m = \frac{5}{2}$. D. Không tồn tại m .

Lời giải.

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{x^2 + 4 + 1}{\sqrt{x^2 + 4}} = \sqrt{x^2 + 4} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x^2 + 4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}} = 2.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } \sqrt{x^2 + 4} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} \Leftrightarrow x^2 = -3 \text{ (vô lý).}$$

Vậy hàm số đã cho không có giá trị nhỏ nhất.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 13. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ với $x > -1$.

A. $m = 0$.

B. $m = 1$.

C. $m = 2$.

D. $m = \sqrt{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1 + 1}{x + 1} = \frac{(x + 1)^2 + 1}{x + 1} = x + 1 + \frac{1}{x + 1}.$$

$$\text{Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có } x + 1 + \frac{1}{x + 1} \geq 2\sqrt{(x + 1) \cdot \frac{1}{x + 1}} = 2.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x + 1 = \frac{1}{x + 1} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0. \text{ Vậy } m = 2.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 14. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = \frac{(x + 2)(x + 8)}{x}$ với $x > 0$.

A. $m = 4$.

B. $m = 18$.

C. $m = 16$.

D. $m = 6$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{(x + 2)(x + 8)}{x} = \frac{x^2 + 10x + 16}{x} = x + \frac{16}{x} + 10.$$

$$\text{Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có } x + \frac{16}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{16}{x}} = 8 \Rightarrow f(x) \geq 18.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = \frac{16}{x} \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Vậy $m = 18$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 15. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = \frac{4}{x} + \frac{x}{1 - x}$ với $1 > x > 0$.

A. $m = 2$.

B. $m = 4$.

C. $m = 6$.

D. $m = 8$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } f(x) - 4 = \frac{4}{x} + \frac{x}{1 - x} - 4 = \frac{4}{x} - \frac{4x}{x} + \frac{x}{1 - x} = \frac{4(1 - x)}{x} + \frac{x}{1 - x}.$$

Vì $x \in (0; 1) \Rightarrow \frac{x}{1 - x} > 0$ nên theo bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$f(x) - 4 = \frac{4(1 - x)}{x} + \frac{x}{1 - x} \geq 2\sqrt{\frac{4(1 - x)}{x} \cdot \frac{x}{1 - x}} = 4 \Leftrightarrow f(x) \geq 8.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > x > 0 \\ \frac{4(1 - x)}{x} = \frac{x}{1 - x} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}.$$

Vậy $m = 8$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 16. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$ với $0 < x < 1$.
A. $m = 2$. **B.** $m = 4$. **C.** $m = 8$. **D.** $m = 16$.

Lời giải.

Cách 1. Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \geq 2\sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1-x}} = \frac{2}{\sqrt{x(1-x)}}$.

Mặt khác $x(1-x) \leq \frac{(x+1-x)^2}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{x(1-x)} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \geq 2 \Rightarrow f(x) \geq 4$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 > x > 0 \\ x = 1-x \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. Vậy $m = 4$.

Cách 2. Ta có $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} = \frac{1-x+x}{x} + \frac{1-x+x}{1-x} = \frac{1-x}{x} + \frac{x}{1-x} + 2$.

Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có $\frac{1-x}{x} + \frac{x}{1-x} \geq 2\sqrt{\frac{1-x}{x} \cdot \frac{x}{1-x}} = 2 \Rightarrow f(x) \geq 4$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 > x > 0 \\ \frac{x}{1-x} = \frac{1-x}{x} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 17. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = \frac{x^2+32}{4(x-2)}$ với $x > 2$.

A. $m = \frac{1}{2}$. **B.** $m = \frac{7}{2}$. **C.** $m = 4$. **D.** $m = 8$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \frac{x^2+32}{4(x-2)} = \frac{x^2-4+36}{4(x-2)} = \frac{x+2}{4} + \frac{9}{x-2} = \frac{x-2}{4} + \frac{9}{x-2} + 1$.

Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có $\frac{x-2}{4} + \frac{9}{x-2} \geq 2\sqrt{\frac{x-2}{4} \cdot \frac{9}{x-2}} = 3 \Rightarrow f(x) \geq 3+1=4$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ \frac{x-2}{4} = \frac{9}{x-2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 8$. Vậy $m = 4$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 18. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = \frac{2x^3+4}{x}$ với $x > 0$.

A. $m = 2$. **B.** $m = 4$. **C.** $m = 6$. **D.** $m = 10$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \frac{2x^3+4}{x} = 2x^2 + \frac{4}{x} = 2x^2 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x}$.

Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có $2x^2 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x} \geq 3\sqrt[3]{2x^2 \cdot \frac{2}{x} \cdot \frac{2}{x}} = 3\sqrt[3]{8} = 6$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2x^2 = \frac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$. Vậy $m = 6$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 19. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = \frac{x^4+3}{x}$ với $x > 0$.

A. $m = 4$. **B.** $m = 6$. **C.** $m = \frac{13}{2}$. **D.** $m = \frac{19}{2}$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \frac{x^4 + 3}{x} = x^3 + \frac{3}{x} = x^3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}$.

Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có $x^3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \geq 4\sqrt[4]{x^3 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}} = 4 \Rightarrow f(x) \geq 4$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^3 = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$. Vậy $m = 4$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 20. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = (6x + 3)(5 - 2x)$ với $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

- A. $M = 0$. B. $M = 24$. C. $M = 27$. D. $M = 30$.

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức hệ quả của Cô-si $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$, ta được

$$f(x) = 3(2x + 1)(5 - 2x) \leq 3 \cdot \frac{(2x + 1 + 5 - 2x)^2}{4} = 27 \Rightarrow f(x) \leq 27.$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2} \\ 2x + 1 = 5 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$. Vậy $M = 27$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 21. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$ với $x \geq 1$.

- A. $M = 0$. B. $M = \frac{1}{2}$. C. $M = 1$. D. $M = 2$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x} = \frac{\sqrt{x-1}}{x-1+1} = \frac{\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x-1})^2 + 1}$.

Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có $(\sqrt{x-1})^2 + 1 \geq 2\sqrt{(\sqrt{x-1})^2 \cdot 1} = 2\sqrt{x-1}$.

$\Rightarrow f(x) \leq \frac{\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2}$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = 2$. Vậy $M = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 22. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$ với $x > 0$.

- A. $M = \frac{1}{4}$. B. $M = \frac{1}{2}$. C. $M = 1$. D. $M = 2$.

Lời giải.

Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có $x^2 + 4 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot 4} = 4x$.

$\Rightarrow f(x) \leq \frac{x}{4x} = \frac{1}{4}$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = 2$. Vậy $M = \frac{1}{4}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 23. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$ với $x > 0$.

- A. $M = 0$. B. $M = \frac{1}{4}$. C. $M = \frac{1}{2}$. D. $M = 1$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{x}{(x+1)^2} = \frac{x}{x^2+2x+1}.$$

Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có $x^2+1 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot 1} = 2x \Rightarrow x^2+2x+1 \geq 4x$.

$$\Rightarrow f(x) \leq \frac{x}{4x} = \frac{1}{4}. \text{ Dấu "}" xảy ra } \Leftrightarrow x = 1. \text{ Vậy } M = \frac{1}{4}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 24. Tìm giá trị nhỏ nhất m và lớn nhất M của hàm số $f(x) = \sqrt{x+3} + \sqrt{6-x}$.

A. $m = \sqrt{2}, M = 3$. B. $m = 3, M = 3\sqrt{2}$. C. $m = \sqrt{2}, M = 3\sqrt{2}$. D. $m = \sqrt{3}, M = 3$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 6$ nên TXĐ $D = [-3; 6]$.

$$\text{Ta có } f^2(x) = 9 + 2\sqrt{(x+3)(6-x)}.$$

• Vì $\sqrt{(3+x)(6-x)} \geq 0, \forall x \in [-3; 6]$ nên suy ra $f^2(x) \geq 9 \Rightarrow f(x) \geq 3$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = -3$ hoặc $x = 6$. Vậy $m = 3$.

• Lại có $2\sqrt{(3+x)(6-x)} \leq 3+x+6-x = 9$ nên suy ra $f^2(x) \leq 18 \Rightarrow f(x) \leq 3\sqrt{2}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x+3 = 6-x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$. Vậy $M = 3\sqrt{2}$.

Vậy $m = 3, M = 3\sqrt{2}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 25. Tìm giá trị nhỏ nhất m và lớn nhất M của hàm số $f(x) = 2\sqrt{x-4} + \sqrt{8-x}$.

A. $m = 0; M = 4\sqrt{5}$.

B. $m = 2; M = 4$.

C. $m = 2; M = 2\sqrt{5}$.

D. $m = 0; M = 2 + 2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x-4 \geq 0 \\ 8-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 8$ nên TXĐ $D = [4; 8]$.

• Ta có $f^2(x) = 3x - 8 + 4\sqrt{(x-4)(8-x)} = 3(x-4) + 4\sqrt{(x-4)(8-x)} + 4$

Vì $\begin{cases} x-4 \geq 0 \\ \sqrt{(x-4)(8-x)} \geq 0 \end{cases}, \forall x \in [4; 8]$ nên suy ra $f^2(x) \geq 4 \Rightarrow f(x) \geq 2$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 4$. Vậy $m = 2$.

• Với $x \in [4; 8]$, áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$x - \frac{4}{5} = x - 4 + \frac{16}{5} \geq 2\sqrt{(x-4) \cdot \frac{16}{5}} = \frac{8\sqrt{x-4}}{\sqrt{5}}. \quad (1)$$

$$+ \frac{44}{5} - x = 8 - x + \frac{4}{5} \geq 2\sqrt{(8-x) \cdot \frac{4}{5}} = \frac{4\sqrt{8-x}}{\sqrt{5}}. \quad (2)$$

Lấy (1) + (2) theo vế, ta được $\frac{8\sqrt{x-4} + 4\sqrt{8-x}}{\sqrt{5}} \leq x - \frac{4}{5} + \frac{44}{5} - x = 8$.

Suy ra $\frac{8\sqrt{x-4} + 4\sqrt{8-x}}{\sqrt{5}} \leq 8 \Leftrightarrow \frac{4f(x)}{\sqrt{5}} \leq 8 \Leftrightarrow f(x) \leq 2\sqrt{5}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{36}{5}$. Vậy $M = 2\sqrt{5}$.

Vậy $m = 2, M = 2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 26. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = \sqrt{7-2x} + \sqrt{3x+4}$.

A. $m = 3$.

B. $m = \sqrt{10}$.

C. $m = 2\sqrt{3}$.

D. $m = \frac{\sqrt{87}}{3}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} 7-2x \geq 0 \\ 3x+4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{4}{3} \leq x \leq \frac{7}{2}$ nên TXĐ $D = \left[-\frac{4}{3}; \frac{7}{2}\right]$.

Ta có

$$y^2 = (\sqrt{7-2x} + \sqrt{3x+4})^2 = x + 11 + 2\sqrt{(7-2x)(3x+4)} = \frac{1}{3}(3x+4) + 2\sqrt{(7-2x)(3x+4)} + \frac{29}{3}.$$

$$\forall \begin{cases} 3x+4 \geq 0 \\ \sqrt{(7-2x)(3x+4)} \geq 0 \end{cases}, \forall x \in \left[-\frac{4}{3}; \frac{7}{2}\right] \text{ nên suy ra } f^2(x) \geq \frac{29}{3} \Rightarrow f(x) \geq \frac{\sqrt{87}}{3}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}.$$

$$\text{Vậy } m = \frac{\sqrt{87}}{3}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 27. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = x + \sqrt{8-x^2}$.

A. $M = 1$.

B. $M = 2$.

C. $M = 2\sqrt{2}$.

D. $M = 4$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } f^2(x) = (x + \sqrt{8-x^2})^2 = x^2 + 2x\sqrt{8-x^2} + 8 - x^2 = 8 + 2x\sqrt{8-x^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$2x\sqrt{8-x^2} \leq x^2 + (\sqrt{8-x^2})^2 = 8 \Rightarrow f^2(x) = 8 + 2x\sqrt{8-x^2} \leq 8 + 8 = 16 \Rightarrow f(x) \leq 4.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = (\sqrt{8-x^2})^2 \\ 2x\sqrt{8-x^2} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2. \text{ Vậy } M = 4.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 28. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 + xy = 3$. Tập giá trị của biểu thức $S = x + y$ là

A. $[0; 3]$.

B. $[0; 2]$.

C. $[-2; 2]$.

D. $\{-2; 2\}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } x^2 + y^2 + xy = 3 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 3 = xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}.$$

$$\text{Suy ra } (x+y)^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x+y \leq 2.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 29. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 + xy = 1$. Tập giá trị của biểu thức $P = xy$ là

A. $\left[0; \frac{1}{3}\right]$.

B. $[-1; 1]$.

C. $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$.

D. $\left[-1; \frac{1}{3}\right]$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 1 \Leftrightarrow 1 - 3xy = (x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow xy \leq \frac{1}{3}, \\ x^2 + y^2 + xy = 1 \Leftrightarrow 1 + xy = (x+y)^2 \geq 0 \Rightarrow xy \geq -1. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 30. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $(x + y)^3 + 4xy \geq 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x + y$ là

- A. $\sqrt[3]{2}$. B. 1. C. 8. D. $-\sqrt[3]{2}$.

Lời giải.

Với mọi x, y ta có $(x + y)^2 \geq 4xy$.

Suy ra $(x + y)^3 + (x + y)^2 \geq (x + y)^3 + 4xy \geq 2$ hay $(x + y)^3 + (x + y)^2 \geq 2 \Leftrightarrow x + y \geq 1$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 31. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = x + y + xy$. Tập giá trị của biểu thức $S = x + y$ là

- A. $[0; +\infty)$. B. $[-\infty; 0]$. C. $[4; +\infty)$. D. $[0; 4]$.

Lời giải.

Ta có $x^2 + y^2 = x + y + xy$.

$$\Leftrightarrow x + y = x^2 + y^2 - xy = (x + y)^2 - 3xy \geq (x + y)^2 - \frac{3}{4}(x + y)^2 = \frac{1}{4}(x + y)^2.$$

Suy ra $x + y \geq \frac{1}{4}(x + y)^2 \Leftrightarrow 0 \leq x + y \leq 4$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 32. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 - 3(x + y) + 4 = 0$. Tập giá trị của biểu thức $S = x + y$ là

- A. $\{2; 4\}$. B. $[0; 4]$. C. $[0; 2]$. D. $[2; 4]$.

Lời giải.

Từ giả thiết, ta có $3(x + y) - 4 = x^2 + y^2 \geq \frac{(x + y)^2}{2}$.

$$\Leftrightarrow (x + y)^2 - 6(x + y) + 8 \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x + y \leq 4.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 33. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $x + y = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $S = \frac{1}{x} + \frac{4}{y}$ là

- A. 4. B. 5. C. 9. D. 2.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \frac{1}{x} + \frac{4}{y} = 1 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{4}{y}\right) = (x + y) \left(\frac{1}{x} + \frac{4}{y}\right) = 5 + \frac{4x}{y} + \frac{y}{x} \geq 5 + 2\sqrt{\frac{4x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 9.$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = \frac{1}{3}; y = \frac{2}{3}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 34. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện $x^2y + xy^2 = x + y + 3xy$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x + y$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải.

Từ giả thiết, ta có $xy(x + y) = x + y + 3xy$. (*)

Vì $x > 0, y > 0$ nên $x + y > 0$.

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow x + y = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 3 \geq \frac{4}{x + y} + 3.$$

$$\Leftrightarrow (x + y)^2 - 3(x + y) - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \leq -1 \\ x + y \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x + y \geq 4 \text{ (do } x, y > 0).$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 35. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $x^4 + y^4 + \frac{1}{xy} = xy + 2$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P = xy$ lần lượt là

- A. $\frac{1}{2}$ và 1. B. 0 và 1. C. $\frac{1}{4}$ và 1. D. 1 và 2.

Lời giải.

Ta có $x^4 + y^4 \geq 2x^2y^2$, kết hợp với giả thiết ta được $xy + 2 \geq 2x^2y^2 + \frac{1}{xy}$.

Đặt $xy = t > 0$, ta được

$$\begin{aligned} t + 2 &\geq 2t^2 + \frac{1}{t} \Leftrightarrow 2t^3 - t^2 - (2t - 1) \leq 0 \\ \Leftrightarrow (t + 1)(t - 1)(2t - 1) &\leq 0 \Leftrightarrow (t - 1)(2t - 1) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 36. Cho hai số thực a, b thuộc khoảng $(0; 1)$ và thỏa mãn $(a^3 + b^3)(a + b) - ab(a - 1)(b - 1) = 0$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = ab$ bằng

- A. $\frac{1}{9}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{3}$. D. 1.

Lời giải.

Giả thiết $\Leftrightarrow \frac{(a^3 + b^3)(a + b)}{ab} = (1 - a)(1 - b)(*)$

$$\frac{(a^3 + b^3)(a + b)}{ab} = \left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \right) (a + b) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{ab} = 4ab. \quad (1)$$

$$(1 - a)(1 - b) = 1 - (a + b) + ab \leq 1 - 2\sqrt{ab} + ab. \quad (2)$$

Từ (1), (2) và kết hợp với (*), ta được $4ab \leq 1 - 2\sqrt{ab} + ab \Leftrightarrow 3ab + 2\sqrt{ab} - 1 \leq 0 \Rightarrow 0 < ab \leq \frac{1}{9}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 37. Cho hai số thực x, y thuộc đoạn $[0; 1]$ và thỏa mãn $x + y = 4xy$. Tập giá trị của biểu thức $P = xy$ là

- A. $[0; 1]$. B. $\left[0; \frac{1}{4}\right]$. C. $\left[0; \frac{1}{3}\right]$. D. $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right]$.

Lời giải.

Ta có $4xy = x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow xy \geq \frac{1}{4}$.

Do $x, y \in [0; 1]$, suy ra $(1 - x)(1 - y) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - (x + y) + xy \geq 0. \quad (*)$

Kết hợp (*) và giả thiết, ta được $1 - 4xy + xy \geq 0 \Rightarrow xy \leq \frac{1}{3}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 38. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $x + 2y - xy = 0$. Giá trị nhỏ nhất của $S = x + 2y$ là

- A. 2. B. 4. C. 8. D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải.

Từ giả thiết, ta có $x + 2y = xy = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 2y \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{(x + 2y)^2}{4} \Leftrightarrow (x + 2y)[(x + 2y) - 8] \geq 0 \Leftrightarrow x + 2y \geq 8$ (do $x, y > 0$).

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 39. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $x + y + xy \geq 7$. Giá trị nhỏ nhất của $S = x + 2y$ là

- A. 8. B. 5. C. 7. D. -11.

Lời giải.

Từ giả thiết $x + y + xy \geq 7 \Leftrightarrow 2(x + 1)(y + 1) \geq 16$.

Ta có $16 \leq 2(x + 1)(y + 1) = (x + 1)(2y + 2) \leq \left(\frac{1 + x + 2y + 2}{2}\right)^2$

$$\Leftrightarrow (x + 2y + 3)^2 \geq 64 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y \geq 5 \\ x + 2y \leq -11 \end{cases} \Leftrightarrow x + 2y \geq 5 \text{ (do } x, y > 0).$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 40. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $2x + 3y \leq 7$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x + y + xy$ là

- A. 3. B. 5. C. 6. D. 2.

Lời giải.

Ta có $6(x + 1)(y + 1) = (2x + 2)(3y + 3) \leq \frac{(2x + 2 + 3y + 3)^2}{4} \leq \frac{(7 + 5)^2}{4} \leq 36$.

Suy ra $x + y + xy \leq 5$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 41. Cho hai số thực x, y không âm và thỏa mãn $x^2 + 2y = 12$. Giá trị lớn nhất của $P = xy$ là

- A. $\frac{13}{4}$. B. 4. C. 8. D. 13.

Lời giải.

Từ giả thiết, ta có $16 = (x^2 + 4) + 2y \geq 4x + 2y \geq 2\sqrt{4x \cdot 2y}$.

Suy ra $xy \leq 8$. Dấu “=” xảy ra khi $x = 2; y = 4$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 42. Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $x > y$ và $xy = 1000$. Biết biểu thức $F = \frac{x^2 + y^2}{x - y}$ đạt giá

trị nhỏ nhất khi $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$. Tính $P = \frac{a^2 + b^2}{1000}$.

- A. $P = 2$. B. $P = 3$. C. $P = 4$. D. $P = 5$.

Lời giải.

Ta có $F = \frac{x^2 + y^2}{x - y} = \frac{x^2 - 2xy + y^2 + 2xy}{x - y} = \frac{(x - y)^2 + 2 \cdot 1000}{x - y} = x - y + \frac{2 \cdot 1000}{x - y}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có $F = x - y + \frac{2 \cdot 1000}{x - y} \geq 2\sqrt{(x - y) \cdot \frac{2 \cdot 1000}{x - y}} = 40\sqrt{5}$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 1000 \\ x - y = \frac{2 \cdot 1000}{x - y} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 1000 \\ x - y = 20\sqrt{5} \end{cases}$.

Vậy $f_{\min} = 4\sqrt{5}$ khi $\begin{cases} ab = 1000 \\ a - b = 20\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab = 4000 \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{1000} = 4$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 43. Cho x, y là các số thực dương và thỏa mãn $x + y \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất $f_{\min}$ của biểu thức $F = x + y + \frac{1}{2x} + \frac{2}{y}$.

A. $f_{\min} = 4\frac{1}{2}$.

B. $f_{\min} = 3\sqrt{2}$.

C. $f_{\min} = 4\frac{1}{3}$.

D. $f_{\min} = 4\frac{2}{3}$.

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số thực dương, ta có

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{2x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2x}} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{4}} = 1 \text{ và } \frac{y}{2} + \frac{2}{y} \geq 2\sqrt{\frac{y}{2} \cdot \frac{2}{y}} = 2.$$

$$\text{Khi đó } F = x + y + \frac{1}{2x} + \frac{2}{y} = \frac{x+y}{2} + \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right) + \left(\frac{y}{2} + \frac{2}{y}\right) \geq \frac{3}{2} + 1 + 2 = 4\frac{1}{2}.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ \frac{x}{2} = \frac{1}{2x}; \frac{y}{2} = \frac{2}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } f_{\min} = 4\frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 44. Cho $x > 8y > 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = x + \frac{1}{y(x-8y)}$ là

A. 3. B. 6. C. 8. D. 9.

Lời giải.

$$\text{Ta có } F = x + \frac{1}{y(x-8y)} = (x-8y) + 8y + \frac{1}{y(x-8y)}.$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có } F \geq 3\sqrt[3]{(x-8y) \cdot 8y \cdot \frac{1}{y(x-8y)}} = 3\sqrt[3]{8} = 6.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow x-8y = 8y = \frac{1}{y(x-8y)} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 45. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x + y + 1 = 2(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3})$. Tập giá trị của biểu thức $S = x + y$ là

A. $[-1; 7]$.

B. $[3; 7]$.

C. $[3; 7] \cup \{-1\}$.

D. $[-7; 7]$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq -3 \end{cases}, \text{ suy ra } x + y + 1 \geq 0.$$

Ta có

$$\begin{aligned} x + y + 1 &= 2(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3}) \\ &= 2\sqrt{x-2} + 2\sqrt{y+3} \leq \frac{4+x-2}{2} + \frac{4+y+3}{2} = \frac{x+y+9}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } x + y + 1 \leq \frac{x+y+9}{2} \Leftrightarrow x + y \leq 7.$$

$$\text{Lại có } x + y + 1 = 2(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3}) \Leftrightarrow (x+y+1)^2 = 4(x+y+1+2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3}) \geq 4(x+y+1) \text{ (do } 2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3} \geq 0)$$

$$\text{Suy ra } (x+y+1)^2 \geq 4(x+y+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1 \leq 0 \\ x+y+1 \geq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+1=0 \\ x+y+1 \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ x+y \geq 3. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 46. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a > 0, b > 0$ và $f(x) = ax^2 + bx + c \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $f_{\min}$ của biểu thức $F = \frac{4a+c}{b}$.

- A. $f_{\min} = 1$. B. $f_{\min} = 2$. C. $f_{\min} = 3$. D. $f_{\min} = 5$.

Lời giải.

Do hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Rightarrow 4ac \geq b^2$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có $F = \frac{4a+c}{b} \geq \frac{2\sqrt{4ac}}{b} \geq \frac{2\sqrt{b^2}}{b} = \frac{2b}{b} = 2$.

Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} c = 4a \\ b^2 = 4ac \end{cases} \Leftrightarrow b = c = 4a$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 47. Cho ba số thực a, b, c không âm và thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $S = a^2 + b^2 + c^2$ lần lượt là

- A. 1 và 3. B. 2 và 4. C. 2 và 3. D. 3 và 4.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $a^2 + b^2 + c^2 \leq 4$.

Ta có $4 = a^2 + b^2 + c^2 + abc = a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{a^2 b^2 c^2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có $\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^3}{27} \geq a^2 b^2 c^2$.

Từ đó suy ra $4 \leq a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^3}{27}}$ hay $\sqrt{\frac{S^3}{27}} \geq 4 - S \Leftrightarrow 3 \leq S \leq 4$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 48. Cho ba số thực dương x, y, z . Biểu thức $P = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy}$ có giá trị nhỏ nhất bằng

- A. $\frac{11}{2}$. B. $\frac{5}{2}$. C. $\frac{9}{2}$. D. 9.

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$x^2 + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{y}{zx} \cdot \frac{z}{xy}} = 3; y^2 + \frac{x}{yz} + \frac{z}{xy} \geq 3; z^2 + \frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} \geq 3.$$

Cộng từng vế của ba bất đẳng thức trên, ta được

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\left(\frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy}\right) \geq 9.$$

Suy ra $P \geq \frac{9}{2}$. Khi $x = y = z = 1$ thì $P = \frac{9}{2}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 49. Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 3$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^3 + y^3 + z^3 + 3(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z})$ bằng

- A. 12. B. 3. C. 5. D. $\frac{11}{2}$.

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$x^3 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x} \geq 4x \text{ hay } x^3 + 3\sqrt[3]{x} \geq 4x.$$

Tương tự: $y^3 + 3\sqrt[3]{y} \geq 4y$ và $z^3 + 3\sqrt[3]{z} \geq 4z$.

$$\text{Suy ra } P = x^3 + y^3 + z^3 + 3(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}) \geq 4(x + y + z) = 12.$$

Khi $x = y = z = 1$ thì $P = 12$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 50. Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 2$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x}$ bằng

- A. $\sqrt{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $2\sqrt{3}$. D. 1.

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có

$$\sqrt{(x+y) \cdot \frac{4}{3}} \leq \frac{x+y+\frac{4}{3}}{2}; \quad \sqrt{(y+z) \cdot \frac{4}{3}} \leq \frac{y+z+\frac{4}{3}}{2}$$

$$\text{và } \sqrt{(z+x) \cdot \frac{4}{3}} \leq \frac{z+x+\frac{4}{3}}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{(x+y) \cdot \frac{4}{3}} + \sqrt{(y+z) \cdot \frac{4}{3}} + \sqrt{(z+x) \cdot \frac{4}{3}} \leq x+y+z+2 = 4.$$

Do đó $P = \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} \geq 2\sqrt{3}$ Khi $x = y = z = \frac{2}{3}$ thì $P = 2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 51. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\begin{cases} a < b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d.$ B. $\begin{cases} a < b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d.$
- C. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow ac > bd.$ D. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d.$

Lời giải.

Khi cộng hai bất đẳng thức cùng chiều ta được một bất đẳng thức cùng chiều nên ta có

$$\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 52. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\begin{cases} a < b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d.$ B. $\begin{cases} a < b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d.$
- C. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow ac > bd.$ D. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d.$

Lời giải.

Khi cộng hai bất đẳng thức cùng chiều ta được một bất đẳng thức cùng chiều nên ta có

$$\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 53. Nhà xe khoán cho hai tài xế ta-xi An và Bình mỗi người lần lượt nhận 32 lít và 72 lít xăng. Hỏi tổng số ngày ít nhất là bao nhiêu để hai tài xế chạy tiêu thụ hết số xăng của mình được khoán, biết rằng chỉ tiêu cho hai người một ngày tổng cộng chỉ chạy đủ hết 10 lít xăng?

- A. 15 ngày. B. 25 ngày. C. 10 ngày. D. 20 ngày.

Lời giải.

Gọi a là số lít xăng mà tài xế An chạy trong 1 ngày, sau m ngày thì hết ($0 < a < 10, m \in \mathbb{N}$).

Gọi b là số lít xăng mà tài xế Bình chạy trong 1 ngày, sau n ngày thì hết ($0 < b < 10, n \in \mathbb{N}$).

$$\text{Khi đó } \begin{cases} a + b \leq 10 \\ ma = 32 \\ nb = 72. \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } m + n = \frac{32}{a} + \frac{72}{b} = \frac{(4\sqrt{2})^2}{a} + \frac{(6\sqrt{2})^2}{b} \geq \frac{(4\sqrt{2} + 6\sqrt{2})^2}{a + b} \geq \frac{(4\sqrt{2} + 6\sqrt{2})^2}{10} = 20.$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = 4$ và $b = 6$.

Vậy số ngày ít nhất để 2 tài xế tiêu thụ hết xăng là 20.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 54. Cho các số thực dương x, y, z . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2xy + 2yz + zx}$ là

- A. $\sqrt{3} - 1$. B. $\frac{3}{5}$. C. $\frac{-1 + \sqrt{33}}{8}$. D. 1.

Lời giải.

Theo bất đẳng thức Cô-si ta có

$$\begin{aligned} \frac{17 - \sqrt{33}}{16}x^2 + \frac{1}{2}y^2 &\geq \frac{\sqrt{33} - 1}{4}xy; \\ \frac{1}{2}y^2 + \frac{17 - \sqrt{33}}{16}z^2 &\geq \frac{\sqrt{33} - 1}{4}yz; \\ \frac{\sqrt{33} - 1}{16}x^2 + \frac{\sqrt{33} - 1}{16}z^2 &\geq \frac{\sqrt{33} - 1}{8}xz. \end{aligned}$$

Do đó

$$P \geq \frac{\frac{\sqrt{33} - 1}{4}xy + \frac{\sqrt{33} - 1}{4}yz + \frac{\sqrt{33} - 1}{8}xz}{2xy + 2yz + zx} = \frac{\sqrt{33} - 1}{8}.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 55. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c}$?

- A. 63. B. 36. C. 35. D. 34.

Lời giải.

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số thực dương ta có } \begin{cases} \frac{1}{a} + 36a \geq 12 & (1) \\ \frac{4}{b} + 36b \geq 24 & (2) \\ \frac{9}{c} + 36c \geq 36 & (3) \end{cases}$$

Cộng các vế tương ứng của (1), (2), (3) ta có $P + 36(a + b + c) \geq 72 \Rightarrow P \geq 36$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{1}{a} = 36a; \frac{4}{b} = 36b; \frac{9}{c} = 36c$ và $a + b + c = 1$ hay $a = \frac{1}{6}; b = \frac{1}{3}; c = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (B) $\square$

Câu 56. Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích 48 m^2 , hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất là

A. $16\sqrt{3}$.

B. $20\sqrt{3}$.

C. 16.

D. 20.

Lời giải.

Kí hiệu chiều rộng, chiều dài của hình chữ nhật lần lượt là $a > 0, b > 0$.

Khi đó, hình chữ nhật có diện tích $S = ab = 48$ và chu vi $P = 2(a + b) \geq 2 \cdot 2\sqrt{ab}$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = 4\sqrt{3}$.

Vậy hình vuông với cạnh bằng $4\sqrt{3}$ là hình có chu vi nhỏ nhất, $\min P = 16\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (A) $\square$

Câu 57.

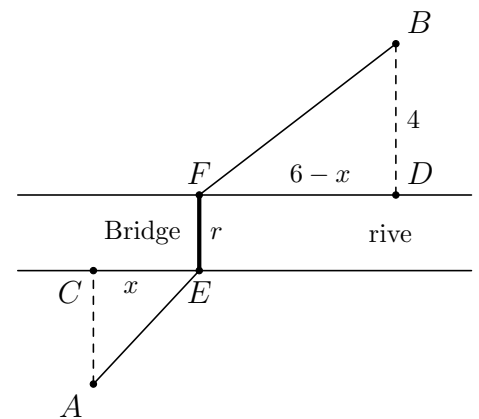
Một con đường được xây dựng giữa hai thành phố A, B . Hai thành phố này bị ngăn cách bởi một con sông có chiều rộng r (m). Người ta cần xây một cây cầu bắc qua sông biết rằng A cách con sông một khoảng bằng 2 m, B cách con sông một khoảng bằng 4 (m). Để con đường nối hai thành phố A, B là ngắn nhất nhất thì giá trị x (m) bằng

A. $x = 2 \text{ m}$.

B. $x = 4 \text{ m}$.

C. $x = 3 \text{ m}$.

D. $x = 1 \text{ m}$.



Lời giải.

Gọi d là độ dài con đường nối giữa hai thành phố A, B ta có $d = AE + EF + FB$.

Mà $FB = \sqrt{FD^2 + BD^2} = \sqrt{(6-x)^2 + 16}$.

Tương tự $AE = \sqrt{AC^2 + CE^2} = \sqrt{x^2 + 4}$.

Khi đó $d = \sqrt{(6-x)^2 + 16} + \sqrt{x^2 + 4} + r$ với $0 \leq x \leq 6$.

Ta chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \quad (*)$$

Thật vậy

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow (a+c)^2 + (b+d)^2 \leq (a^2 + b^2) + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} + (c^2 + d^2) \\ &\Leftrightarrow ac + bd \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \\ &\Leftrightarrow (ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \\ &\Leftrightarrow a^2c^2 + b^2d^2 + 2acbd \leq a^2c^2 + b^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2 \\ &\Leftrightarrow b^2c^2 + a^2d^2 - 2acbd \geq 0 \Leftrightarrow (bc - ad)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Dễ thấy bất đẳng thức luôn đúng với mọi a, b, c, d . Áp dụng (*) ta có

$$\sqrt{(6-x)^2 + 16} + \sqrt{x^2 + 4} \geq \sqrt{(6-x+x)^2 + (4+2)^2} = 6\sqrt{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\frac{6-x}{x} = \frac{4}{2} \Leftrightarrow 6-x = 2x \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy min $d = 6\sqrt{2}$ (m) khi $x = 2$ (m).

Chọn đáp án **A** □

Câu 58. Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích 48 m^2 , hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất là

A. $16\sqrt{3}$.

B. $20\sqrt{3}$.

C. 16.

D. 20.

Lời giải.

Kí hiệu a, b là hai cạnh kề của hình chữ nhật. Ta có $a > 0, b > 0$ và $ab = 48$.

Chu vi của hình chữ nhật là

$$2(a+b) \geq 2 \cdot 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow 2(a+b) \geq 4\sqrt{48} \Leftrightarrow 2(a+b) \geq 16\sqrt{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = 4\sqrt{3}$.

Vậy hình chữ nhật đó có chu vi nhỏ nhất bằng $16\sqrt{3}$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 59. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\begin{cases} a < b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d.$

B. $\begin{cases} a < b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d.$

C. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow ac > bd.$

D. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d.$

Lời giải.

Khi cộng hai bất đẳng thức cùng chiều ta được một bất đẳng thức cùng chiều nên ta có

$$\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d.$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 60.

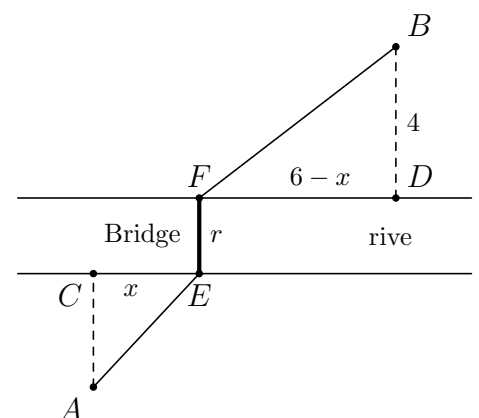
Một con đường được xây dựng giữa hai thành phố A, B . Hai thành phố này bị ngăn cách bởi một con sông có chiều rộng r (m). Người ta cần xây một cây cầu bắc qua sông biết rằng A cách con sông một khoảng bằng 2 m, B cách con sông một khoảng bằng 4 (m). Để con đường nối hai thành phố A, B là ngắn nhất nhất thì giá trị x (m) bằng

A. $x = 2$ m.

B. $x = 4$ m.

C. $x = 3$ m.

D. $x = 1$ m.



Lời giải.

Gọi d là độ dài con đường nối giữa hai thành phố A, B ta có $d = AE + EF + FB$.

$$\text{Mà } FB = \sqrt{FD^2 + BD^2} = \sqrt{(6-x)^2 + 16}.$$

$$\text{Tương tự } AE = \sqrt{AC^2 + CE^2} = \sqrt{x^2 + 4}.$$

Khi đó $d = \sqrt{(6-x)^2 + 16} + \sqrt{x^2 + 4} + r$ với $0 \leq x \leq 6$.

Ta chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \quad (*)$$

Thật vậy

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow (a+c)^2 + (b+d)^2 \leq (a^2 + b^2) + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} + (c^2 + d^2) \\ &\Leftrightarrow ac + bd \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \\ &\Leftrightarrow (ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \\ &\Leftrightarrow a^2c^2 + b^2d^2 + 2acbd \leq a^2c^2 + b^2c^2 + a^2d^2 + b^2d^2 \\ &\Leftrightarrow b^2c^2 + a^2d^2 - 2acbd \geq 0 \Leftrightarrow (bc - ad)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Dễ thấy bất đẳng thức luôn đúng với mọi a, b, c, d . Áp dụng $(*)$ ta có

$$\sqrt{(6-x)^2 + 16} + \sqrt{x^2 + 4} \geq \sqrt{(6-x+x)^2 + (4+2)^2} = 6\sqrt{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\frac{6-x}{x} = \frac{4}{2} \Leftrightarrow 6-x = 2x \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy min $d = 6\sqrt{2}$ (m) khi $x = 2$ (m).

Chọn đáp án **A**

□

Câu 61. Trong các hình chữ nhật có chu vi bằng 300 m, hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng

- A. 22500 m². B. 900 m². C. 5625 m². D. 1200 m².

Lời giải.

Gọi a, b (với $a, b > 0$) là độ dài hai cạnh kề của hình chữ nhật.

Ta có $2(a+b) = 300$ hay $a+b = 150$.

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow ab \leq \left(\frac{150}{2}\right)^2 \Leftrightarrow ab \leq 5625.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b$ và $a+b = 150$ hay $a = b = 75$.

Vậy hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng 5625 m².

Chọn đáp án **C**

□

Câu 62. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+5}$ bằng

- A. $\frac{1}{5}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } P = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+5} \Leftrightarrow \frac{1}{P} = \frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + \frac{4}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x^2+1} \cdot \frac{4}{\sqrt{x^2+1}}} = 4.$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{P} \geq 4. \text{ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \sqrt{x^2+1} = \frac{4}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow x^2+1 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}.$$

$$\text{Vậy } P \leq \frac{1}{4} \Rightarrow P_{\max} = \frac{1}{4} \text{ khi } x = \pm\sqrt{3}.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 63. Cho a, b, c là các số thực dương khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{8a + 3b + 4(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt[3]{abc})}{1 + (a + b + c)^2}$$
 gần với giá trị nào nhất trong các đáp án sau:

A. 4.65.

B. 4.66.

C. 4.67.

D. 4.64.

Lời giải.

Phương pháp

Sử dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương và ba số dương.

Khảo sát sự biến thiên của hàm số, tìm giá trị lớn nhất của hàm số.

Cách giải:

Áp dụng bất đẳng thức cho hai số dương ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{8a + 3b + 4(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt[3]{abc})}{1 + (a + b + c)^2} \\ &\leq \frac{8a + 3b + 4\left(\frac{a + 4b}{4} + \frac{b + 4c}{4} + \frac{a + 4b + 16c}{12}\right)}{1 + (a + b + c)^2} \\ &= \frac{28}{3} \frac{a + b + c}{1 + (a + b + c)^2} \end{aligned}$$

Đặt $a + b + c = t$. ($t > 0$)

$$\text{Ta có: } P = \frac{28}{3} f(t) = \frac{28}{3} \frac{t}{t^2 + 1} \quad (t > 0)$$

$$\text{Có: } f'(t) = \frac{1 + t^2 - 2t^2}{(1 + t^2)^2} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 & (tm) \\ t = -1 & (ktm) \end{cases}$$

Ta có BBT:

t	0	1	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$			

Dựa vào BBT ta có: $\max f(t) = \frac{1}{2}$ khi $t = 1$

$$\max P = \frac{28}{3} \frac{1}{2} = \frac{14}{3}$$

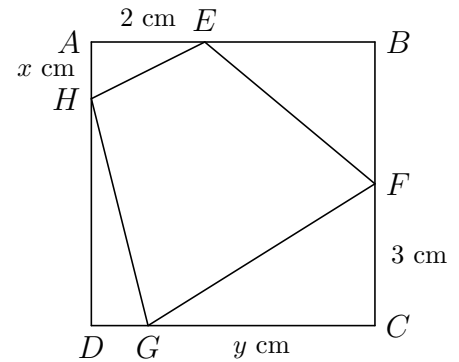
$$\text{Dấu " = " xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{4} = b \\ \frac{b}{4} = c \\ a + b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4b \\ b = 4c \\ 21c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{16}{21} \\ b = \frac{4}{21} \\ c = \frac{1}{21} \end{cases}$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 64.

Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 6cm. Người ta muốn cắt một hình thang như hình vẽ. Trong đó $AE = 2$ cm, $AH = x$ cm, $CF = 3$ cm, $CG = y$ cm. Tìm tổng $x + y$ để diện tích hình thang $EFGH$ đạt giá trị nhỏ nhất.



- A. $x + y = 7$. B. $x + y = 5$.
C. $x + y = \frac{7\sqrt{2}}{2}$. D. $x + y = 4\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $S_{EFGH} = S_{ABCD} - S_{AEH} - S_{BEF} - S_{CFG} - S_{DGH}$.

Mà $S_{ABCD} = 6 \cdot 6 = 36$;

$$S_{BEF} = \frac{1}{2} BE \cdot BF = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$$

nên $S_{EFGH} = 30 - (S_{\triangle AEH} + S_{\triangle CFG} + S_{\triangle DGH})$.

Do đó S_{EFGH} nhỏ nhất $\Leftrightarrow S = (S_{\triangle AEH} + S_{\triangle CFG} + S_{\triangle DGH})$ lớn nhất.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } S &= \frac{1}{2} AE \cdot AH + \frac{1}{2} CF \cdot CG + \frac{1}{2} DG \cdot DH = x + \frac{3y}{2} + \frac{(6-x)(6-y)}{2}. \\ \Rightarrow 2S &= 2x + 3y + (6-x)(6-y) = xy - 4x - 3y + 36 \quad (1). \end{aligned}$$

Ta có $EFGH$ là hình thang $\Rightarrow AEH = CGF$

$$\Rightarrow \triangle AEH = \triangle CGF \Rightarrow \frac{AE}{CG} = \frac{AH}{CF} \Rightarrow \frac{2}{y} = \frac{x}{3} \Rightarrow xy = 6 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $2S = 42 - \left(4x + \frac{18}{x}\right)$.

Để $2S$ lớn nhất khi và chỉ khi $4x + \frac{18}{x}$ nhỏ nhất.

$$\text{Mà } 4x + \frac{18}{x} \geq 2\sqrt{4x \cdot \frac{18}{x}} = 12\sqrt{2}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow 4x = \frac{18}{x} \Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = 2\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 65. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 - 2a - 4b = 4$. Tính $P = a + 2b + 3c$ khi biểu thức $|2a + b - 2c + 7|$ đạt giá trị lớn nhất.

- A. 7. B. 3. C. -3. D. -7.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } (a-1)^2 + (b-2)^2 + c^2 = 9$$

$$\text{Xét: } |2a + b - 2c + 7| = |2(a-1) + (b-2) - 2c + 11| \leq |2(a-1) + (b-2) - 2c| + 11$$

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki ta được

$$|2(a-1) + (b-2) - 2c| \leq \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{(a-1)^2 + (b-2)^2 + c^2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{9} = 9$$

$$\Rightarrow |2a + b - 2c + 7| \leq 9 + 11 = 20$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} \frac{a-1}{2} = \frac{b-2}{1} = \frac{c}{-2} \geq 0 \\ (a-1)^2 + (b-2)^2 + c^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \\ c = -2. \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = a + 2b + 3c = 3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) = 3.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 66. Cho $x + y = 5$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |x + 1| + |y - 2|$.

- A. $P_{\min} = -1$. B. $P_{\min} = 5$. C. $P_{\min} = 4$. D. $P_{\min} = 3$.

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức $|a + b| \leq |a| + |b|$ ta có $P \geq |x + 1 + y - 2| = 4$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 67. Cho $2x + y = 3$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |2x + 3| + |y + 2| + 2$.

- A. $P_{\min} = 3$. B. $P_{\min} = 7$. C. $P_{\min} = 8$. D. $P_{\min} = 10$.

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức $|a + b| \leq |a| + |b|$ ta có $P \geq |2x + 3 + y + 2| + 2 = 10$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 68. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 4 - |5x - 2| - |3y + 12|$.

- A. $P_{\max} = 6$. B. $P_{\max} = 4$. C. $P_{\max} = 18$. D. $P_{\max} = 14$.

Lời giải.

Ta có $|5x - 2| + |3y + 12| \geq 0 \Rightarrow P \leq 4 - 0 = 4$. Do đó $P_{\max} = 4$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 69. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |4x - 3| + \left| 5y + \frac{15}{2} \right| + \frac{35}{2}$.

- A. $P_{\min} = 22$. B. $P_{\min} = \frac{35}{2}$. C. $P_{\min} = 25$. D. $P_{\min} = 28$.

Lời giải.

Ta có $|4x - 3| + \left| 5y + \frac{15}{2} \right| \geq 0 \Rightarrow P \geq \frac{35}{2}$. Do đó $P_{\min} = \frac{35}{2}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 70. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2 + \frac{12}{3|x + 5| + 4}$.

- A. $P_{\max} = 5$. B. $P_{\max} = 4$. C. $P_{\max} = \frac{26}{7}$. D. $P_{\max} = 6$.

Lời giải.

Ta có $3|x + 5| \geq 0 \Rightarrow 3|x + 5| + 4 \geq 4 \Rightarrow \frac{12}{3|x + 5| + 4} \leq 3 \Rightarrow P \leq 5$. Do đó $P_{\max} = 5$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 71. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = -6 - \frac{24}{2|x - 2y| + 3|2x + 1| + 6}$.

- A. $P_{\min} = -2$. B. $P_{\min} = -10$. C. $P_{\min} = -12$. D. $P_{\min} = -30$.

Lời giải.

Ta có $2|x - 2y| + 3|2x + 1| \geq 0 \Rightarrow 2|x - 2y| + 3|2x + 1| + 6 \geq 6 \Rightarrow \frac{24}{2|x - 2y| + 3|2x + 1| + 6} \leq 4$.

Suy ra $P \geq -6 - 4 = -10$. Do đó $P_{\min} = -10$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 72. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{2}{3} - \frac{21}{(x + 3y)^2 + 5|x + 5| + 14}$.

- A. $P_{\min} = \frac{2}{3}$. B. $P_{\min} = -\frac{3}{2}$. C. $P_{\min} = -\frac{5}{6}$. D. $P_{\min} = \frac{5}{6}$.

Lời giải.

Ta có $(x+3y)^2 + 5|x+5| + 14 \geq 14 \Rightarrow \frac{21}{(x+3y)^2 + 5|x+5| + 14} \leq \frac{21}{14} = \frac{3}{2}$.

Suy ra $P \geq \frac{2}{3} - \frac{3}{2} = -\frac{5}{6}$. Vậy $P_{\min} = -\frac{5}{6}$. Dấu bằng xảy ra tại $x = -5$ và $y = \frac{5}{3}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 73. Tìm giá trị của x, y sao cho biểu thức biểu thức $P = \frac{2}{3} - \frac{21}{(x+3y)^2 + 5|x+5| + 14}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $\begin{cases} x = -5 \\ y = -\frac{5}{3} \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 5 \\ y = \frac{5}{3} \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = -5 \\ y = \frac{5}{3} \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 5 \\ y = -\frac{5}{3} \end{cases}$

Lời giải.

P đạt giá trị nhỏ nhất khi $(x+3y)^2 = 0$ và $|x+5| = 0$ suy ra $\begin{cases} x = -5 \\ y = \frac{5}{3} \end{cases}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 74. Xét các số thực x, y thỏa mãn $x+y+2 = 2\sqrt{x-1} + \sqrt{y+3}$. Tìm giá trị lớn nhất $S_{\max}$ của biểu thức $S = x+y$.

A. $S_{\max} = -2$.

B. $S_{\max} = 3$.

C. $S_{\max} = 4$.

D. $S_{\max} = 5$.

Lời giải.

Ta có $(x+y+2)^2 = [2\sqrt{x-1} + \sqrt{y+3}]^2 \leq (2^2 + 1^2)(x-1 + y+3) \Rightarrow t^2 \leq 5t \Rightarrow 0 \leq t \leq 5$ với $t = x+y+2$. Suy ra $x+y+2 \leq 5 \Rightarrow x+y \leq 3$, do đó $S_{\max} = 3$.

Dấu bằng xảy ra tại $\frac{\sqrt{x-1}}{2} = \frac{\sqrt{y+3}}{1} \Rightarrow \begin{cases} x = 5; y = -2 \\ x = 1; y = -3 \end{cases}$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 75. Xét các số thực x, y thỏa mãn $x-2y+2 = 2(\sqrt{x-1} + \sqrt{3-2y})$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x-2y$. Tính $M+m$.

A. $M+m = 6$.

B. $M+m = 2$.

C. $M+m = 0$.

D. $M+m = 4$.

Lời giải.

+ GTNN: Điều kiện: $x \geq 1, y \leq \frac{3}{2}$. Giả thiết suy ra

$$x-2y+2 = 2\sqrt{x-2y+2+2\sqrt{(x-1)(3-2y)}} \geq 2\sqrt{x-2y+2} \Rightarrow \begin{cases} x-2y+2 = 0 \\ x-2y+2 \geq 4 \end{cases}$$

Do đó, $m = \min S = -2$ tại $x = 1, y = \frac{3}{2}$.

+ GTLN: Điều kiện giả thiết tương đương với $(x-2y+2)^2 = 4(x-2y+2+2\sqrt{(x-1)(3-2y)})$.

Sử dụng bất đẳng thức quen thuộc $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$ ta có

$$(x-2y+2)^2 \leq 4(x-2y+2+x-2y+2) \Rightarrow x-2y \leq 6.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 5, y = -\frac{1}{2}$. Cho nên $M = \max S = 6$.

Tóm lại, $M+m = 6-2 = 4$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 76. Cho x, y là các số thực sao cho $2x^2 + y^2 + xy \geq 1$. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = x^2 + y^2$ có dạng $\frac{a-b\sqrt{b}}{c}$, trong đó a, b và c là các số nguyên dương. Tính tổng $S = a+b+c$.

A. $S = 15$.

B. $S = 11$.

C. $S = 13$.

D. $S = 8$.

Lời giải.

Đặt $2x^2 + y^2 + xy = a$, $a \geq 1$. Ta có $\frac{M}{a} = \frac{x^2 + y^2}{2x^2 + y^2 + xy}$.

+ Nếu $y = 0$ thì $\frac{M}{a} = \frac{1}{2}$.

+ Nếu $y \neq 0$ suy ra $\frac{M}{a} = \frac{t^2 + 1}{2t^2 + t + 1}$, với $t = \frac{x}{y}$. Ta cần xác định giá trị $\frac{M}{a} < \frac{1}{2}$, sao cho phương trình $(2M - a)t^2 + Mt + M - a = 0$ có nghiệm.

Từ đó suy ra được $M \geq \frac{6 - 2\sqrt{2}}{7}a \geq \frac{6 - 2\sqrt{2}}{7} = M_0$.

Vậy, $\min M = \frac{6 - 2\sqrt{2}}{7}$ đạt được khi và chỉ khi $\begin{cases} x = M_1 y \\ y = \pm \frac{\sqrt{2}(1 - 2M_0)}{\sqrt{2 - 7M_0 + 7M_0^2}} \end{cases}$, với $M_1 = \frac{-M_0}{4M_0 - 2}$. Suy

ra $S = a + b + c = 6 + 2 + 7 = 15$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 77. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x(3 - xy - xz) + y + 6z \leq 5xz(y + z)$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = 6x + 2y + 12z$.

A. $P_{\min} = 6$.

B. $P_{\min} = 3\sqrt{30}$.

C. $P_{\min} = 6\sqrt{6}$.

D. $P_{\min} = 18$.

Lời giải.

Giả thiết được viết lại thành $2x + (y + z) + (x + 5z) \leq x(y + z)(x + 5z)$. Đặt $a = x$, $b = y + z$, $c = x + 5z$.

Khi đó, ta có $2a + b + c \leq abc$ (1) và biểu thức $P = 4a + 2b + 2c$.

Từ (1) suy ra $a \geq \frac{b+c}{bc-2}$, $bc > 2$ thay vào P ta được

$$P = \frac{4(b+c)}{bc-2} + 2(b+c) \geq \frac{4(b+c)}{\frac{(b+c)^2}{4}-2} + 2(b+c) = \frac{(b+c+\sqrt{6})(b+c-2\sqrt{6})^2}{(b+c)^2-8} + 6\sqrt{6} \geq 6\sqrt{6}$$

Từ đó tìm được $P_{\min} = 6\sqrt{6}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 78. Cho bốn số thực a, b, x, y bất kì đồng thời thỏa mãn các điều kiện: $x \geq a \geq 0$, $y \geq b \geq 0$ và $\frac{x-y}{2} = \frac{a-b}{3}$. Khi đó, bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $(x+2a)(y+2b) \geq (a+b)^2$.

B. $(x+2a)(y+2b) \geq 2(a+b)$.

C. $(x+2a)(y+2b) \geq a+b$.

D. $(x+2a)(y+2b) \geq 3(a+b)$.

Lời giải.

Giả thiết $\frac{x-y}{2} = \frac{a-b}{3}$ tương đương với $3y - 2b = 3x - 2a$. Ta có

$$\begin{aligned} (x+2a)(y+2b) &= xy + 2ay + 2bx + 4ab \\ &= 7ab + a(3y - 2b) + b(3x - 2a) + (x-a)(y-b) \\ &= 7ab + a(3x - 2a) + b(3y - 2b) + (x-a)(y-b) \\ &= (a+b)^2 + 5ab + 3a(x-a) + 3b(y-b) + (x-a)(y-b) \\ &\geq (a+b)^2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 79. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 - xy = 1$. Tìm số thực k lớn nhất sao cho $x^4 + y^4 - x^2y^2 \geq k$.

- A. $k = 1$. B. $k = \frac{3}{4}$. C. $k = -\frac{1}{3}$. D. $k = \frac{1}{9}$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $-\frac{1}{3} \leq xy \leq 1$. Mặt khác, từ giả thiết ta có $x^4 + y^4 = -x^2y^2 + 2xy + 1$, $x^4 + y^4 - x^2y^2 = -2t^2 + 2t + 1$, $t = xy$.

Từ đó tìm được $\min_{[-\frac{1}{3}; 1]} (-2t^2 + 2t + 1) = \frac{1}{9}$. Do vậy, $k = \frac{1}{9}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 80. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 10$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (x^2 + y^2 + z^2) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right)$.

- A. $\min P = \frac{1}{2}$. B. $\min P = \frac{27}{2}$. C. $\min P = 13$. D. $\min P = \frac{100}{9}$.

Lời giải.

Đặt $a = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ và $b = \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x}$, từ giả thiết suy ra $a + b = 7$.

Khi đó, $P = a^2 - 2b + b^2 - 2a + 3 = \frac{1}{2}(a - b)^2 + \frac{1}{2}(a + b - 2)^2 + 1 \geq \frac{27}{2}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 81. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x}{3-x} + \frac{1-x}{4}$ là một số có dạng $\sqrt{a} - \frac{b}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $P = a + b + c$.

- A. $P = 10$. B. $P = 6$. C. $P = 7$. D. $P = 8$.

Lời giải.

Ta có $y = \frac{x-3+3}{3-x} + \frac{3-x-2}{4} = -1 + \frac{3}{3-x} + \frac{3-x}{4} - \frac{1}{2} \geq -1 + 2\sqrt{\frac{3}{4}} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} + \sqrt{3}$.

Dấu “=” xảy ra khi $\frac{3}{3-x} = \frac{3-x}{4} \Leftrightarrow x = 3 \pm 2\sqrt{3}$. Vậy GTNN của y là $\sqrt{3} - \frac{3}{2}$.

Do đó $a = 3, b = 3, c = 2$ suy ra $P = a + b + c = 8$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 82. Cho x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$. Biểu thức $A = -11x^2 + 4y^2 + 8xy$ đạt giá trị lớn nhất là M khi $x = \frac{a}{\sqrt{c}}, y = \frac{b}{\sqrt{c}}$ trong đó a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{a}{c}, \frac{b}{c}$ tối giản. Tính $P = M + a + b + c$.

- A. $P = 26$. B. $P = 27$. C. $P = 25$. D. $P = 28$.

Lời giải.

Ta có $A = 5(x^2 + y^2) - (16x^2 - 8xy + y^2) = 5 - (4x - y)^2 \leq 5$.

Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} 4x = y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{17}}, y = \frac{4}{\sqrt{17}}$.

Vậy $M = 5, a = 1, b = 4, c = 17$. Do đó $P = 27$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 83. Cho $x > y > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $A = x + \frac{4}{(x-y)(y+1)^2}$.

- A. $m = 3$. B. $m = 2$. C. $m = 1$. D. $m = 4$.

Lời giải.

Vì $x > y > 0$ nên $x - y > 0$ và $y + 1 > 0$. Ta có

$$2(x - y) + (y + 1) + (y + 1) + \frac{8}{(x - y)(y + 1)^2} \geq 4 \cdot \sqrt[4]{2(x - y)(y + 1)^2 \frac{8}{(x - y)(y + 1)^2}}.$$

$$\text{Thu gọn ta được } 2x + 2 + \frac{8}{(x - y)(y + 1)^2} \geq 8 \Leftrightarrow x + \frac{4}{(x - y)(y + 1)^2} \geq 3 \Leftrightarrow A \geq 3.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } 2(x - y) = y + 1 = \frac{8}{(x - y)(y + 1)^2} \Leftrightarrow x = 2; y = 1.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 84. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được đo bởi công thức $G(x) = 0,025x^2(30 - x)$ trong đó x là lượng thuốc cần tiêm ($x > 0$, đơn vị: mg). Để huyết áp giảm nhiều nhất thì cần tiêm lượng thuốc bằng bao nhiêu? Biết liều lượng thuốc không được vượt quá 30 mg.

- A. 15 mg. B. 30 mg. C. 10 mg. D. 20 mg.

Lời giải.

$$\text{Ta có } G(x) = 0,1 \cdot 0,5x \cdot 0,5x \cdot (30 - x) \leq 0,1 \cdot \left(\frac{0,5x + 0,5x + 30 - x}{3} \right)^3 = 100.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } 0,5x = 30 - x \Leftrightarrow x = 20.$$

Vậy độ giảm huyết áp của bệnh nhân lớn nhất khi được tiêm 20 mg thuốc.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 85. Cho $x^2 + y^2 = 2$ ($x, y > 0$). Biểu thức $A = xy^2$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = x_0$ và $y = y_0$. Biết $x_0 + y_0^2 = \frac{a + \sqrt{b}}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{a}{c}$ là phân số tối giản. Tính $P = a^2 + b^2 + c^2$.

- A. $P = 50$. B. $P = 61$. C. $P = 38$. D. $P = 77$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } x^2 + y^2 = 2 \Leftrightarrow 4 = 2x^2 + y^2 + y^2 \geq 3\sqrt[3]{2x^2y^4} \Leftrightarrow 2x^2y^4 \leq \left(\frac{4}{3}\right)^3 \Leftrightarrow xy^2 \leq \frac{4\sqrt{6}}{9}.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \begin{cases} 2x^2 = y^2 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{3}, y = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Suy ra } x_0 + y_0^2 = \frac{4 + \sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Do đó } a = 4, b = 6, c = 3. \text{ Suy ra } P = 61.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 86. Cho ba số a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất M của $P = a + b + 2c$.

- A. $M = 3\sqrt{2}$. B. $M = 4$. C. $M = 2\sqrt{2}$. D. $M = 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 18 &= 6a^2 + 6b^2 + 6c^2 \\ &= (a^2 + b^2 + 4c^2 + 2ab + 4ac + 4bc) + (a^2 - 2ab + b^2) + (4a^2 - 4ac + c^2) + (4b^2 - 4bc + c^2) \\ &= (a + b + 2c)^2 + (a - b)^2 + (2a - c)^2 + (2b - c)^2. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } (a + b + 2c)^2 \leq 18 \Rightarrow a + b + 2c \leq 3\sqrt{2}.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}, c = \sqrt{2}.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 87. Tìm giá trị lớn nhất M của biểu thức $P = (x^2 - 2x)(2y^2 - y)$.

A. $M = \frac{1}{16}$. B. $M = \frac{1}{4}$. C. $M = \frac{1}{8}$. D. $M = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta biến đổi $P = (x^2 - 2x)(2y^2 - y) = (2x - x^2)(y - 2y^2) = \frac{1}{2}x(2 - x)2y(1 - 2y)$.

Áp dụng bất đẳng thức $(a + b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow ab \leq \frac{(a + b)^2}{4}$ với mọi $a, b \in \mathbb{R}$ ta có

$$P \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{(x + (2 - x))^2}{4} \cdot \frac{(2y + (1 - 2y))^2}{4} = \frac{1}{8}.$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = 1, y = \frac{1}{4}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 88. Trong tất cả các hình trụ có cùng thể tích V , gọi (T) là hình trụ có diện tích toàn phần nhỏ nhất $S_{\min}$. Tìm giá trị $S_{\min}$ đó.

A. $S_{\min} = 4\sqrt[3]{V^2\pi}$. B. $S_{\min} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$. C. $S_{\min} = 3\sqrt[3]{\pi V^2}$. D. $S_{\min} = \sqrt[3]{2V^2}$.

Lời giải.

Ta có $S_{tp} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi R^2 + \pi Rh + \pi Rh$. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số $2\pi R^2, \pi Rh, \pi Rh$ ta được

$$S_{tp} \geq 3\sqrt[3]{2\pi^3 R^4 h^2} = 3\sqrt[3]{2\pi(\pi R^2 h)^2} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 89. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\forall x, y \neq 0: \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x + y}$. B. $\forall x \in \mathbb{R}: 4x^9 + 1 < (x^6 + 2)^2$.
C. $\forall a, b \neq 0: \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$. D. $\forall a, b, c > 0: \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{9}{a + b + c}$.

Lời giải.

+) Với $x = 2, y = 3$ ta thấy $\forall x, y \neq 0: \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x + y}$ là mệnh đề sai.

+) Ta có $4x^9 + 1 < 4(x^9 + 1) = 4(x^3 + 1)(x^6 - x^3 + 1), \forall x$. Sử dụng bất đẳng thức $4ab \leq (a + b)^2$ ta được $4(x^3 + 1)(x^6 - x^3 + 1) \geq (x^6 + 2)^2$.

+) Với a, b trái dấu ta thấy mệnh đề $\forall a, b \neq 0: \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ không đúng.

+) Với $a = 1, b = 2, c = 3$ mệnh đề $\forall a, b, c > 0: \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{9}{a + b + c}$ không đúng.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 90. Cho a, b, c là các số không âm và có tối đa một số bằng 0. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = \sqrt{\frac{a}{b + c}} + \sqrt{\frac{b}{c + a}} + \sqrt{\frac{c}{a + b}}$.

A. $P_{\min} = \frac{\sqrt{6}}{2}$. B. $P_{\min} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. C. $P_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $P_{\min} = 2$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \sqrt{\frac{a}{b+c}} = \frac{2a}{2\sqrt{a(b+c)}}; \sqrt{\frac{b}{c+a}} = \frac{2b}{2\sqrt{b(a+c)}}; \sqrt{\frac{c}{b+a}} = \frac{2c}{2\sqrt{c(a+b)}}.$$

$$\text{Ta có } 2\sqrt{a(b+c)} \leq a+b+c \Rightarrow \frac{2a}{2\sqrt{a(b+c)}} \geq \frac{2a}{a+b+c}.$$

$$\text{Tương tự } \frac{2b}{2\sqrt{b(a+c)}} \geq \frac{2b}{a+b+c} \text{ và } \frac{2c}{2\sqrt{c(a+b)}} \geq \frac{2c}{a+b+c}.$$

Do đó $P_{\min} \geq 2$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 91. Số nào sau đây là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{1}{a} + \frac{1}{1-a}$, trong đó $0 < a < 1$?

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 5.

Lời giải.

$$\text{Sử dụng BDT Cauchy cho hai số } \frac{1}{a} \text{ và } \frac{1}{1-a} \text{ ta được } \frac{1}{1-a} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a(1-a)}}.$$

$$\text{Áp dụng BDT Cauchy cho hai số } a \text{ và } 1-a \text{ ta được } 2\sqrt{\frac{1}{a(1-a)}} = \frac{4}{2\sqrt{a(1-a)}} \geq \frac{4}{a+1-a} = 4.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 92. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x^2-1} \leq \frac{3}{2}$.

A. $S = (1; +\infty)$.

B. $S = \emptyset$.

C. $S = (-\infty; 0)$.

D. $S = (0; 1)$.

Lời giải.

$$\text{Sử dụng Cauchy ta có VT} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x^2-1} \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \sqrt{x^2-1}} = 2.$$

Kết hợp với $\text{VT} \leq \frac{3}{2}$ suy ra bất phương trình vô nghiệm.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 93. Cho x, y là các số thực không âm thỏa mãn $x + y \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |2x - 3| + |x - y - 5|$.

A. 0.

B. 1.

C. $\frac{7}{2}$.

D. 3.

Lời giải.

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức } |a - b| \leq |a| + |b| \text{ ta có } P \geq |x + y + 2| \geq \frac{7}{2}.$$

Dấu “=” tại $x = \frac{3}{2}, y = 0$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 94. Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $xyz = 1$. Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu

$$\text{thức } P = \frac{1}{x^2 + 2y^2 + 3} + \frac{1}{y^2 + 2z^2 + 3} + \frac{1}{z^2 + 2x^2 + 3}.$$

A. $P_{\max} = \frac{1}{2}$.

B. $P_{\max} = \frac{2}{3}$.

C. $P_{\max} = \frac{1}{4}$.

D. $P_{\max} = \frac{1}{5}$.

Lời giải.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$x^2 + 2y^2 + 3 = x^2 + y^2 + y^2 + 1 + 2 \geq 2xy + 2y + 2 \Rightarrow \frac{1}{x^2 + 2y^2 + 3} \leq \frac{1}{2(xy + y + 1)}.$$

$$\text{Tương tự ta có } \frac{1}{y^2 + 2z^2 + 3} \leq \frac{1}{2(yz + z + 1)} \text{ và } \frac{1}{z^2 + 2x^2 + 3} \leq \frac{1}{2(xz + x + 1)}.$$

Do đó

$$P \leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{xy + y + 1} + \frac{1}{yz + z + 1} + \frac{1}{xz + x + 1} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{z}{1 + yz + z} + \frac{1}{yz + z + 1} + \frac{yz}{xyz^2 + xyz + yz} \right] = \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 95. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}$.

- A. $P_{\min} = \sqrt{2}$. B. $P_{\min} = \sqrt{3}$. C. $P_{\min} = 1$. D. $P_{\min} = 3$.

Lời giải.

Sử dụng BDT Bunyakovsky, ta có

$$\left(\sqrt{\frac{a^2}{b}} \cdot \sqrt{b} + \sqrt{\frac{b^2}{c}} \cdot \sqrt{c} + \sqrt{\frac{c^2}{a}} \cdot \sqrt{a} \right)^2 \leq \left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \right) (a + b + c)$$

$$\text{suy ra } P \geq \frac{(a + b + c)^2}{a + b + c} = a + b + c.$$

$$\text{Ta lại có } (a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca) \text{ nên } a + b + c \geq \sqrt{3(ab + bc + ca)} = \sqrt{3}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 96. Trong tất cả các hình hộp chữ nhật có cùng thể tích V , gọi (H) là hình hộp chữ nhật có diện tích toàn phần nhỏ nhất $S_{\min}$. Tìm giá trị $S_{\min}$ đó theo V .

- A. $S_{\min} = 6V^2$. B. $S_{\min} = 3\sqrt[3]{V^2}$. C. $S_{\min} = 6\sqrt[3]{V^2}$. D. $S_{\min} = 3V^2$.

Lời giải.

Gọi chiều dài, chiều rộng, chiều cao của hình hộp chữ nhật đó lần lượt là a, b, c (với $a, b, c > 0$). Ta có $V = abc$. Diện tích toàn phần $S_{tp} = 2(ab + bc + ca) \geq 6\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 6\sqrt[3]{V^2} = S_{\min}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 97. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $2x + 3y + 4z = 12$. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x^2 + 9y^2 + 4z^2$. Hỏi m thuộc tập nào sau đây?

- A. $(15; 16]$. B. $[4; 5]$. C. $[7; 8]$. D. $[12; 15]$.

Lời giải.

Sử dụng bất đẳng thức Bunyakovsky.

$$12^2 = (2 \cdot x + 1 \cdot 3y + 2 \cdot 2z)^2 \leq (2^2 + 1^2 + 2^2) (x^2 + 9y^2 + 4z^2) = 9(x^2 + 9y^2 + 4z^2)$$

$$\text{Suy ra } x^2 + 9y^2 + 4z^2 \geq 16. \text{ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \frac{x}{2} = \frac{3y}{1} = \frac{2z}{2}. \text{ Từ đó ta có } m = 16.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 98. Cho x, y là hai số thực luôn thay đổi và thỏa mãn $y \geq x \geq 1$. Xét các bất đẳng thức sau

$$(I) \ x^4 + y^6 \geq x^5 + y^5.$$

$$(II) \ x^4 + y^6 \geq 2 \left(\frac{x+y}{2} \right)^5.$$

$$\text{(III)} \quad x^4 + y^6 \geq \frac{x^2(x^4 + x)}{2}.$$

Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** Chỉ (I) và (II) đúng.
B. Chỉ (I) và (III) đúng.
C. Chỉ (II) và (III) đúng.
D. Cả (I), (II) và (III) đúng.

Lời giải.

Ta xét (I), ta có

$$\begin{aligned} x^4 + y^6 - x^5 - y^5 &= y^5(y-1) - x^4(x-1) \\ &= y^5(y-1) - x^4(y-1) + x^4(y-1) - x^4(x-1) \\ &= (y-1)(y^5 - x^4) + x^4(y-x) \geq 0 \end{aligned}$$

vì $y \geq 1, y - x \geq 0, y^5 - x^4 \geq y^4 - x^4 \geq 0$. Vậy (I) đúng.

Ta xem xét (II), ở (I) ta đã có $x^4 + y^6 \geq x^5 + y^5$. Để chứng minh (II), ta sẽ chứng minh $\frac{x^5 + y^5}{2} \geq \left(\frac{x + y}{2}\right)^5$. Trước tiên, ta xét các trường hợp: Với $x \geq 0, y \geq 0$, ta có các bất đẳng thức sau:

- $x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$ (1),

$$\bullet \quad \frac{x^2 + y^2}{2} \geq \left(\frac{x + y}{2}\right)^2 \quad (2),$$

$$\bullet \quad \frac{x^3 + y^3}{2} \geq \left(\frac{x + y}{2} \right)^3 \quad (3),$$

$$\bullet \quad \frac{x^5 + y^5}{2} \geq \frac{x^2 + y^2}{2} \cdot \frac{x^3 + y^3}{2} \quad (4),$$

Thật vậy,

- (1) tương đương với $x^2(x - y) + y^2(y - x) \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2(x + y) \geq 0$.
- (2) tương đương với $2(x^2 + y^2) \geq x^2 + 2xy + y^2 \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$.
- (3) tương đương với $4(x^3 + y^3) \geq (x + y)^3 \Leftrightarrow x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$, đúng vì (1) đúng.
- (4) tương đương với

$$x^5 + y^5 \geq x^2y^3 + x^3y^2 \Leftrightarrow x^3(x^2 - y^2) - y^3(x^2 - y^2) \Leftrightarrow (x - y)^2(x + y)(x^2 + xy + y^2) \geq 0.$$

Nhân (2) và (3) theo vế, kết hợp với (4) ta được $\frac{x^5+y^5}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^5$. Vậy (II) đúng.

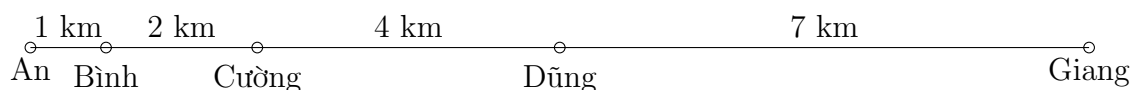
Ta xét (III), ta có (III) tương đương với

$$2x^4 + 2y^6 - x^2(x^4 + x) \geq x^4 + x^4 + y^6 + y^6 - x^6 - x^3 > y^6 - x^6 + x^4 - x^3 > 0$$

Vậy (III) đúng.

Chọn đáp án **D**

Câu 99. Trong một thành phố, 5 bạn học sinh đang đứng ở 5 vị trí khác nhau trên một con đường hướng Nam - Bắc, như trong hình vẽ dưới đây.



Các bạn học sinh thỏa thuận gặp nhau tại một điểm nào đó trên đường sao cho tổng quãng đường di chuyển của mọi người là nhỏ nhất. Hỏi họ nên gặp nhau tại vị trí nào dưới đây?

- A. Vị trí của An.
 B. Vị trí của Bình.
 C. Vị trí của Cường.
 D. Vị trí nào đó trên đoạn đường giữa Dũng và Giang.

Lời giải.

Gợi ý: Lấy vị trí bạn An làm điểm gốc trên trục số Ox . Gọi a là tọa độ vị trí 5 bạn gặp nhau. Ta cần xác định a để tổng $S = |a| + |a - 1| + |a - 3| + |a - 7| + |a - 14|$ có giá trị nhỏ nhất. Trong trường hợp này, ta có: $S \geq 14 + 6 + |a - 3| \geq 20$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 100. Tìm tất cả các giá trị của x để biểu thức $P = |x + 5| + 2 - x$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $x \in [-5; 2]$. B. $x \in (-5; 2)$. C. $x \in [-5; +\infty)$. D. $x \in (-5; +\infty)$.

Lời giải.

- Với $x \geq -5$ ta có $P = x + 5 + 2 - x = 7$.
- Với $x < -5$ ta có $P = -x - 5 + 2 - x = -2x - 3 > 7$.
- Vậy $P_{\min}$ khi $x \geq -5$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 101. Biểu thức $P = -2|2x - 5| + 2x + 6$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = \frac{a}{b}$ ($a > 0, b > 0$). Với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, hãy tính tổng $S = a + b$.

- A. $S = 7$. B. $S = 8$. C. $S = 9$. D. $S = 10$.

Lời giải.

- Với $x \geq \frac{5}{2}$ thì $P = -2x + 16 \leq 11$.
- Với $x < \frac{5}{2}$ thì $P = 6x - 4 < 11$.
- Vậy $P_{\max} = 11$ khi $x = \frac{5}{2}$, suy ra $S = 7$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 102. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{2|x| + 3}{3|x| - 1}$.

- A. $P_{\max} = \frac{2}{3}$. B. $P_{\max} = -3$. C. $P_{\max} = \frac{5}{2}$. D. Không tồn tại.

Lời giải.

- Ta có $|x|(3P - 2) = P + 3$.
- Với $P = \frac{2}{3}$ thì $0 = \frac{11}{3}$ (vô lí).
- Với $P \neq \frac{2}{3}$ thì $|x| = \frac{P + 3}{3P - 2}$. Mặt khác $|x| \geq 0$ suy ra $\frac{P + 3}{3P - 2} \geq 0$ tương đương với $P \in (-\infty; -3] \cap (\frac{2}{3}; +\infty)$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 103. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{-5|x + 7| - 12}{3|x + 7| + 4}$.

- A. $P_{\min} = -3$. B. $P_{\min} = \frac{5}{3}$. C. $P_{\min} = -\frac{5}{3}$. D. Không tồn tại.

Lời giải.

- Ta có $|x + 7|(3P + 5) = -4P - 12$.
- Với $P = -\frac{5}{3}$ thì $0 = -\frac{16}{3}$ (vô lí).
- Với $P \neq -\frac{5}{3}$ thì ta có $|x + 7| = \frac{-4P - 12}{3P + 5} \geq 0$ tương đương với $-3 \leq P \leq -\frac{5}{3}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 104. Tìm giá trị lớn nhất của x để biểu thức $P = |x + 2| + |x - 3|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $x_{\max} = -2$. B. $x_{\max} = 0$. C. $x_{\max} = 2$. D. $x_{\max} = 3$.

Lời giải.

- Ta có $P = |x + 2| + |x - 3| = |x + 2| + |3 - x| \geq |x + 2 + 3 - x| = 5$.
- Vậy $P_{\min} = 5$ khi và chỉ khi $(x + 2)(3 - x) \geq 0$ tương đương với $-2 \leq x \leq 3$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 105. Biểu thức $P = 3|x - 2| + |3x + 1|$ đạt giá trị nhỏ nhất tại mọi x trên đoạn $[b; a]$. Tính giá trị biểu thức $S = 3b + 2a$.

- A. $S = 3$. B. $S = 4$. C. $S = 5$. D. $S = 6$.

Lời giải.

- Ta có $P = 3|x - 2| + |3x + 1| = |6 - 3x| + |3x + 1| \geq |6 - 3x + 3x + 1| = 7$.
- Vậy $P_{\min} = 7$ khi và chỉ khi $(6 - 3x)(3x + 1) \geq 0$ tương đương với $-\frac{1}{3} \leq x \leq 2$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 106. Cho $x - y = \sqrt{3}$, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |x - 6| + |y + 1|$ có dạng $P_{\min} = a\sqrt{3} + b$, trong đó a, b là số nguyên. Tính giá trị biểu thức $S = a + b$.

- A. $S = 6$. B. $S = 3$. C. $S = -3$. D. $S = 0$.

Lời giải.

- Ta có $P = |x - 6| + |-y - 1| \geq |x - 6 - y - 1| = 7 - \sqrt{3}$.
- Suy ra $a = -1, b = 7$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 107. Cho $x - y = \sqrt{2}$, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |2x + 1| + |2y + 4|$ có dạng $P_{\min} = a + b\sqrt{2}$, trong đó a, b là số nguyên. Tính giá trị biểu thức $S = a + b$.

- A. $S = -1$. B. $S = 2$. C. $S = 1$. D. $S = -3$.

Lời giải.

- Ta có $P = |2x + 1| + |-2y - 4| \geq |2x + 1 - 2y - 4| = 3 - 2\sqrt{2}$.
- Vậy $a = 3, b = -2$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 108. Biểu thức $P = |x + 3| + |2x - 5| + |x - 7|$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \frac{a}{b}$. Với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, hãy tính $S = a^2 + b^2$.

- A. $S = 10$. B. $S = 50$. C. $S = 13$. D. $S = 29$.

Lời giải.

- Với $x < -3$ thì $P = -4x + 9 > 21$.
- Với $-3 \leq x < \frac{5}{2}$ thì $P = -2x + 15 > 10$.
- Với $\frac{5}{2} \leq x < 7$ thì $P = 2x + 5 \geq 10$.

- Với $x \geq 7$ thì $P = 4x - 9 \geq 19$.

- Vậy $P_{\min} = 10$ tại $x = \frac{5}{2}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 109. Biểu thức $S = |x + 3| + 2|6x - 1| + |x - 1| + 3$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \frac{a}{b}$. Với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, hãy tính $P = a.b$.

A. $P = 4$.

B. $P = 5$.

C. $P = 6$.

D. $P = 7$.

Lời giải.

- Với $x < -3$ thì $S = -14x + 3 > 54$.

- Với $-3 \leq x < \frac{1}{6}$ thì $S = -12x + 9 > 7$.

- Với $\frac{1}{6} \leq x < 1$ thì $S = 12x + 5 \geq 7$.

- Với $x \geq 1$ thì $S = 14x + 3 \geq 17$.

- Vậy $S_{\min}$ tại $x = \frac{1}{6}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 110. Trong các mệnh đề sau, có bao nhiêu mệnh đề đúng?

I. Với mọi số thực âm a, b, c , nếu $a < b$ thì $ac < bc$.

II. Với mọi số thực âm a, b , nếu $a < b$ thì $a^2 > b^2$.

III. Với mọi số thực âm a, b ta luôn có $a + b \leq 2\sqrt{ab}$.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

Xét mệnh đề I ta có với $c < 0$ thì $a < b \Leftrightarrow ac > bc$, nên I sai.

Hai mệnh đề còn lại đúng theo tính chất của bất đẳng thức.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 111. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là đúng?

A. $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ y < 1 \end{cases} \Rightarrow xy < 1$.

B. $\begin{cases} x < 1 \\ y < 1 \end{cases} \Rightarrow xy < 1$.

C. $\begin{cases} x > 1 \\ y < 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y} < 1$.

D. $\begin{cases} x < 1 \\ y < 1 \end{cases} \Rightarrow x - y < 1$.

Lời giải.

• Nếu $0 < x < 1$ và $y < 1$ thì $xy < 1$.

• Nếu $x < 1$ và $y < 1$ thì $xy < 1$ chưa hẳn đúng, chẳng hạn $x = -1, y = -1$ thì $xy = 2 > 1$.

• Nếu $x > 1$ và $y < 1$ thì $\frac{x}{y} < 1$ chưa chắc đúng, chẳng hạn nếu $x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}$ thì $\frac{x}{y} = 3 > 1$.

• Nếu $x < 1$ và $y < 1$ thì $x + y < 2$ nhưng $x - y < 1$ chưa chắc đúng, chẳng hạn $x = 0, y = -2$ thì $x - y = 0 - (-2) = 2 > 1$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 112. Cho biểu thức $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$, với $x > 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $f(x)$ là

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Lời giải.

Với $x > 1$ thì $x - 1 > 0$. Ta có

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}} = \frac{x-1+1}{\sqrt{x-1}} = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số dương $\sqrt{x-1}$, $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ ta có

$$\sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}}} \Leftrightarrow \sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} \geq 2.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x > 0$ và $\sqrt{x-1} = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ hay $x = 2$.

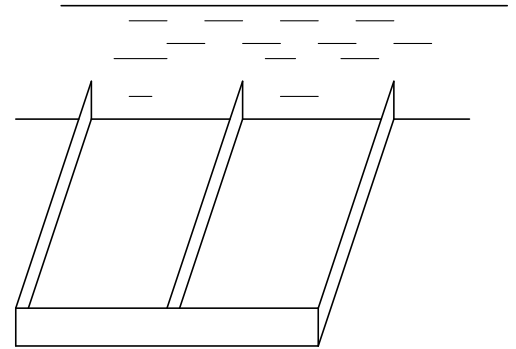
Vậy $\min_{(1;+\infty)} f(x) = 2$ tại $x = 2$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 113.

Để rào một khu đất có hai phần hình chữ nhật cho gia đình trồng hoa kiểng, một bác nông dân sử dụng 15000000 đồng để làm một cái hàng rào hình chữ E trước khuôn viên nhà dọc theo một con sông (như hình vẽ). Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60000 đồng một mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song với nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50000 đồng một mét. Diện tích đất lớn nhất bác nông dân rào được là



- A. 6250 m². B. 1250 m². C. 50 m². D. 3125 m².

Lời giải.

Gọi x m là chiều dài của hàng rào song song với bờ sông và y m là chiều dài của hàng rào vuông góc với bờ sông.

Khi đó chi phí bác nông dân đã sử dụng là

$$60000x + 3 \cdot y \cdot 50000 = 15000000 \Leftrightarrow y = 100 - \frac{2}{5}x.$$

Suy ra diện tích bác nông dân đã rào được

$$S = x \cdot y = x \cdot \left(100 - \frac{2}{5}x\right) = \frac{2}{5}x \cdot \left(100 - \frac{2}{5}x\right) \cdot \frac{5}{2} \leq \frac{5}{2} \left(\frac{\frac{2}{5}x + 100 - \frac{2}{5}x}{2}\right)^2 = 6250 \text{ m}^2.$$

Vậy diện tích lớn nhất bác nông dân rào được là 6250 m² khi $\frac{2}{5}x = 100 - \frac{2}{5}x \Leftrightarrow x = 125$ m và $y = 50$ m.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 114. Người ta muốn rào quanh một mảnh đất hình chữ nhật với diện tích 4050 m² để chăn nuôi. Ở đó người ta tận dụng một bức tường có sẵn để làm cạnh của hàng rào (không phải rào). Hỏi để rào được mảnh đất đó cần ít nhất bao nhiêu mét rào thẳng?

- A. 180 m. B. 330 m. C. 270 m. D. 135 m.

Lời giải.

Gọi x m (với $x > 0$) là chiều dài của bức tường cần dùng làm hàng rào. Khi đó kích thước còn lại của hàng rào là $\frac{4050}{x}$. Khi đó chiều dài của hàng rào cần rào là

$$x + 2 \cdot \frac{4050}{x} = x + \frac{8100}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{8100}{x}} = 180. \quad (\text{BDT Cauchy})$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{8100}{x} \Leftrightarrow x = 90$. Vậy để rào được mảnh đất đó cần ít nhất 180 mét rào thẳng.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 115. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x-1}$ với $x > 1$. Giá trị nào của x thì hàm số đạt giá trị nhỏ nhất?

A. $x = 4$.

B. $x = 2$.

C. $x = 3$.

D. $x = \frac{5}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x-1} = \frac{x-1}{2} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{2} \geq 2\sqrt{\frac{x-1}{2} \cdot \frac{2}{x-1}} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x-1}{2} = \frac{2}{x-1} \Leftrightarrow x = 3$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 116. Cho a và b là các số thực dương thỏa $a + b = 1$. Giá trị lớn nhất của $B = ab^2$ bằng

A. $\frac{4}{27}$ khi $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}$.

B. $\frac{4}{27}$ khi $a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}$.

C. $\frac{4}{27}$ khi $a = \frac{2}{3}, b = \frac{2}{3}$.

D. $\frac{4}{7}$ khi $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Từ $a + b = 1$, suy ra $b = 1 - a$. Thay vào B , ta được $B = a(1 - a)^2$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số không âm $2a, 1 - a, 1 - a$, ta được:

$$\begin{aligned} 2a + (1 - a) + (1 - a) &\geq 3 \cdot \sqrt[3]{2a(1 - a)^2} \\ \Leftrightarrow 2 &\geq 3 \cdot \sqrt[3]{2a(1 - a)^2} \Leftrightarrow a(1 - a)^2 \leq \frac{4}{27}. \end{aligned}$$

Suy ra $B \leq \frac{4}{27}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $2a = 1 - a \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$, suy ra $b = \frac{2}{3}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 117. Trong các bất đẳng thức sau, bất đẳng thức nào **sai**?

A. Với $a, b > 0$ ta có $a + b < \sqrt{2(a^2 + b^2)}$.

B. $a > b > 0 \Rightarrow \frac{1}{b} > \frac{1}{a}$.

C. $a^2 + b^2 + ab < 0, \forall a, b \in \mathbb{R}$.

D. $a^2 + b^2 + c^2 \leq ab + bc + ca, \forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

$$\text{Có } a^2 + b^2 + ab = a^2 + ab + \frac{1}{4}b^2 + \frac{3}{4}b^2 = \left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 > 0.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 118. Cho hai số thực a, b bất kỳ. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $a^2 + b^2 \geq 0$.

B. $a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

C. $(a + b)^2 \geq 4ab$.

D. $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

Lời giải.

Khẳng định $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ sai, chẳng hạn a, b trái dấu thì $\sqrt{ab}$ không có nghĩa.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 119. Cho hai số thực bất kỳ a, b thỏa mãn $a > b$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. B. $|a| > |b|$. C. $a - b > 0$. D. $a^2 > b^2$.

Lời giải.

Ta có $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 120. Cho $a > b > 0$. Tìm bất đẳng thức sai.

- A. $\frac{a}{a+1} < \frac{b}{b+1}$. B. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. C. $\frac{a^2-1}{a} > \frac{b^2-1}{b}$. D. $a^2 > b^2$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} a(b+1) = ab + a \\ b(a+1) = ab + b \Rightarrow a(b+1) > b(a+1). \\ a > b \end{cases}$$

Vậy $\frac{a}{a+1} > \frac{b}{b+1}$ hay phương án **A** sai.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 121. Hàm số $y = |1-x| + |2x+4|$ có giá trị nhỏ nhất bằng

- A. -2. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} y &= |1-x| + |2x+4| \\ &= |1-x| + |x+2| + |x+2| \\ &\geq |1-x+x+2| + |x+2| \\ &= 3 + |x+2| \geq 3. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} (1-x)(x+2) \geq 0 \\ x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2$. Vậy min $y = 3$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 122. Giá trị lớn nhất của biểu thức $p = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+5}$ là

- A. $\frac{1}{5}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Xét } \frac{1}{p} = \frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{(x^2+1)+4}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + \frac{4}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\frac{1}{p} \geq 2\sqrt{\sqrt{x^2+1} \cdot \frac{4}{\sqrt{x^2+1}}} = 2 \cdot 2 = 4.$$

Suy ra $p \leq \frac{1}{4}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = \frac{4}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow x^2+1=4 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3} \end{cases}$.

Vậy $\min y = \frac{1}{4}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 123. Nếu $a > b, c > d$ thì bất đẳng thức nào dưới đây luôn đúng?

- A. $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$. B. $a - c > b - d$. C. $a + c > b + d$. D. $ac > bd$.

Lời giải.

Ta có $a > b, c > d$ suy ra $a + c > b + d$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 124. Cho $x > 0, y > 0$ và $xy = 6$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = x^2 + y^2$ là

- A. 12. B. 6. C. 14. D. 10.

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có $Q = x^2 + y^2 \geq 2xy = 12$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y > 0 \\ xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \sqrt{6}$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 125. Cho số thực x thỏa $-5 \leq x \leq 7$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (x+5)(7-x)$.

- A. 36. B. 74. C. 12. D. 6.

Lời giải.

Ta có $-5 \leq x \leq 7 \Rightarrow \begin{cases} x+5 \geq 0 \\ 7-x \geq 0 \end{cases}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$P = (x+5)(7-x) \leq \left(\frac{x+5+7-x}{2} \right)^2 = 36.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x+5=7-x \Leftrightarrow x=1$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 126. Với mọi số thực $a, b \neq 0$, ta có bất đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

- A. $a^2 + ab + b^2 > 0$. B. $a - b < 0$. C. $a + b > 0$. D. $a^2 - ab + b^2 < 0$.

Lời giải.

Ta có $a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} > 0$ với mọi số thực $a, b \neq 0$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 127. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x \left(\frac{2017 + \sqrt{2019 - x^2}}{2018} \right)$ trên tập xác định của nó. Tìm số phần tử của tập hợp $\mathbb{N}^* \cap [m; M]$.

- A. 2018. B. 44. C. 88. D. 89.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = [-\sqrt{2019}; \sqrt{2019}]$.

Dễ thấy $f(x)$ là hàm số lẻ trên $\mathcal{D}$. Thêm nữa, $f(x) \geq 0, \forall x \in [0; \sqrt{2019}]$.

$$\text{Do đó, } \begin{cases} M = \max_{[-\sqrt{2019}; \sqrt{2019}]} f(x) = \max_{[0; \sqrt{2019}]} f(x) \\ m = \min_{[-\sqrt{2019}; \sqrt{2019}]} f(x) = -\max_{[0; \sqrt{2019}]} f(x). \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= x \left(\frac{2017 + \sqrt{2019 - x^2}}{2018} \right) = \frac{x}{2018} (\sqrt{2017}\sqrt{2017} + \sqrt{2019 - x^2}) \\ &\leq \frac{x}{2018} \sqrt{(\sqrt{2017})^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(\sqrt{2017})^2 + (\sqrt{2019 - x^2})^2} \\ &= \frac{\sqrt{2018}}{2018} x (\sqrt{2017 + (2019 - x^2)}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) \leq \frac{\sqrt{2018}}{2018} \left(\frac{x^2 + 2017 + (2019 - x^2)}{2} \right) = \sqrt{2018}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{2017}}{\sqrt{2017}} = \frac{\sqrt{2019 - x^2}}{1} \\ x^2 = 2017 + (2019 - x^2) \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2018} \in [0; \sqrt{2019}].$$

$$\text{Từ đó suy ra } \begin{cases} M = \max_{[-\sqrt{2019}; \sqrt{2019}]} f(x) = \max_{[0; \sqrt{2019}]} f(x) = \sqrt{2018} \\ m = \min_{[-\sqrt{2019}; \sqrt{2019}]} f(x) = -\max_{[0; \sqrt{2019}]} f(x) = -\sqrt{2018} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } n(\mathbb{N}^* \cap [m; M]) = n(\mathbb{N}^* \cap [-\sqrt{2018}; \sqrt{2018}]) = 44.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 128. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x + y = 2(\sqrt{x-3} + \sqrt{y+3})$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4(x^2 + y^2) + 15xy$.

A. $P_{\min} = -83.$

B. $P_{\min} = -80.$

C. $P_{\min} = -91.$

D. $P_{\min} = -63.$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 3, y \geq -3$, từ đó ta có

$$(x+3)(y+3) \geq 0 \Leftrightarrow xy \geq -3(x+y) - 9.$$

Xét trường hợp $x = -y = 3$ suy ra $P = -63$.

Trường hợp $x + y > 0$, từ giả thiết suy ra

$$(x+y)^2 = 4(x+y) + 8\sqrt{(x-3)(y+3)} \geq 4(x+y)$$

$$\Leftrightarrow x+y \geq 4 \text{ (do } x+y > 0).$$

Đánh giá P ta được

$$P = 4(x^2 + y^2) + 15xy = 4(x+y)^2 + 7xy \geq 4(x+y)^2 - 21(x+y) - 63.$$

Do hàm số $f(t) = 4t^2 - 21t - 63$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{21}{8}; +\infty\right)$ suy ra

$$P = f(x+y) \geq f(4) = -83.$$

Vậy $P_{\min} = -83$ khi $x = 7, y = -3$.

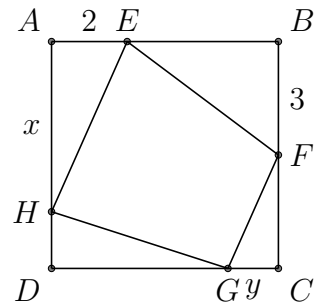
Chọn đáp án **A**

□

Câu 129.

Mảnh vườn là hình vuông $ABCD$ cạnh 6. Người ta muốn trồng hoa trên diện tích hình thang $EFGH$ có hai đáy HE và FG như hình vẽ. Cạnh $AE = 2$, cạnh $BF = 3$, cạnh $AH = x$, cạnh $CG = y$. Tìm tổng $x + y$ để diện tích trồng hoa nhỏ nhất.

- A. 7. B. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$. C. 5. D. $4\sqrt{2}$.



Lời giải.

$$\text{Diện tích đất không trồng hoa là } P = \frac{1}{2}(2x + (6 - x)(6 - y) + 3y + 3 \cdot 4) = \frac{xy - 4x - 3y + 48}{2}. \quad (1)$$

$$\text{Do } EH \parallel FG \text{ nên } \tan \widehat{AHE} = \tan \widehat{CFG} \Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{y}{3} \Leftrightarrow xy = 6. \quad (2)$$

$$\text{Thay (2) vào (1) ta có } P = \frac{54 - 4x - 3y}{2}.$$

$$\text{Để diện tích trồng hoa là nhỏ nhất thì } P \text{ phải lớn nhất, đồng nghĩa } 4x + 3y \text{ nhỏ nhất. Mà } 4x + 3y \geq 2\sqrt{4x \cdot 3y} = 2\sqrt{72}, \text{ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } 4x = 3y. \quad (3)$$

$$\text{Thay (3) vào (2) ta được } x = \frac{3y}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } x + y = \frac{7\sqrt{2}}{2}.$$

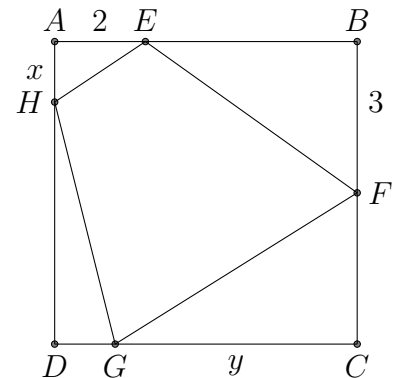
Chọn đáp án **B**

□

Câu 130.

Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh bằng 6. Người ta muốn cắt một hình thang như hình vẽ. Tìm tổng $x + y$ để diện tích hình thang $EFGH$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $x + y = 4\sqrt{2}$. B. $x + y = 5$.
C. $x + y = 7$. D. $x + y = \frac{7\sqrt{2}}{2}$.



Lời giải.

$$\text{Ta có } \widehat{AHE} + \widehat{DHG} = 180^\circ - \widehat{EHG} = \widehat{HGF} \text{ (vì } HE \parallel GF) = 180^\circ - \widehat{HGD} - \widehat{FGC} \\ \Rightarrow \widehat{AHE} = 180^\circ - (\widehat{DHG} + \widehat{HGD} + \widehat{FGC}) = 90^\circ - \widehat{FGC} = \widehat{GFC}.$$

Mà 2 tam giác AHE và GFC lại vuông tại A, C nên

$$\triangle AHE \sim \triangle CFG \Rightarrow \frac{AE}{GC} = \frac{AH}{CF} \Rightarrow xy = 2 \cdot 3 = 6.$$

$$\text{Ta có } S_{EHGF} = S_{ABCD} - S_{AHE} - S_{EBF} - S_{FCG} - S_{GDH} \\ = 36 - x - 6 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}(6 - y)(6 - x) = 9 + 2x + \frac{1}{2}y.$$

$$\text{Ta có } 2x + \frac{1}{2}y \geq 2\sqrt{2x \cdot \frac{1}{2}y} = 6\sqrt{2} \text{ (Có thể đưa về hàm một biến rồi tìm GTNN).}$$

Suy ra S_{EHGF} đạt giá trị nhỏ nhất khi $\begin{cases} 2x = \frac{3}{2}y \\ xy = 6 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3}{\sqrt{2}}, y = 2\sqrt{2} \Rightarrow x + y = \frac{7\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 131. Cho x, y, z là các số thực bất kỳ. Chọn bất đẳng thức đúng trong các bất đẳng thức sau

A. $x^2 + y^2 + z^2 < xy + yz + xz$.

B. $2x^2 + 2y^2 < 4xy$.

C. $\frac{1}{3}(x^2 - 2xy + y^2) < 0$.

D. $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$.

Lời giải.

Ta có: $x^2 + y^2 \geq 2|xy| \geq 2xy$

Tương tự $y^2 + z^2 \geq 2yz, z^2 + x^2 \geq 2zx$.

Cộng cả 3 BDT trên theo vế ta được $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2zx \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 132. Cho các bất đẳng thức $a > b$ và $c > d$. Bất đẳng thức nào sau đây đúng

A. $a - c > b - d$.

B. $a + c > b + d$.

C. $ac > bd$.

D. $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$.

Lời giải.

Theo tính chất bất đẳng thức, $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Leftrightarrow a + c > b + d$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 133. Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích bằng 16cm^2 , có một hình có chu vi nhỏ nhất bằng.

A. 32cm.

B. 8cm.

C. 4cm.

D. 16cm.

Lời giải.

Áp dụng hệ quả định lý Cô-si, ta có:

Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích, hình vuông có chu vi nhỏ nhất.

Cạnh hình vuông $a = \sqrt{16} = 4\text{cm}$.

$\Rightarrow$ Chu vi cần tìm là $4.a = 4.4 = 16\text{cm}$.

Chọn đáp án **(D)** □

ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. C	4. D	5. D	6. C	7. A	8. A	9. C	10. B
11. B	12. D	13. C	14. B	15. D	16. B	17. C	18. D	19. A	20. C
21. B	22. A	23. B	24. B	25. C	26. D	27. D	28. C	29. D	30. B
31. D	32. D	33. C	34. D	35. A	36. A	37. D	38. C	39. B	40. B
41. C	42. C	43. A	44. B	45. C	46. B	47. D	48. C	49. A	50. C
51. D	52. D	53. D	54. C	55. B	56. A	57. A	58. A	59. D	60. A
61. C	62. B	63. B	64. C	65. B	66. C	67. D	68. B	69. B	70. A
71. B	72. C	73. C	74. B	75. D	76. A	77. C	78. A	79. D	80. B
81. D	82. B	83. A	84. D	85. B	86. A	87. C	88. B	89. B	90. D
91. A	92. B	93. C	94. A	95. B	96. C	97. A	98. D	99. C	100. C
101. A	102. D	103. A	104. D	105. A	106. A	107. C	108. D	109. C	110. C
111. A	112. A	113. A	114. A	115. C	116. B	117. C	118. B	119. C	120. A
121. D	122. C	123. C	124. A	125. A	126. A	127. B	128. A	129. B	130. D
131. D	132. B	133. D							

§2 BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa. Bất phương trình bậc nhất một ẩn là bất phương trình (bpt) sau khi thu gọn có dạng $ax + b > 0, ax + b < 0, ax + b \geq 0, ax + b \leq 0$ trong đó a, b là các số thực với $a \neq 0$ và x là ẩn số.

1 GIẢI VÀ BIỆN LUẬN BẤT PHƯƠNG TRÌNH $AX + B > 0$

- Với $a > 0$, bpt $\Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$. Tập nghiệm của bpt là $S = \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$;
- Với $a < 0$, bpt $\Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$. Tập nghiệm của bpt là $S = \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$;
- $a = 0$, bpt thành $0x + b > 0$. Ta xét hai trường hợp:
 $b \leq 0$, tập nghiệm của bpt là $S = \emptyset$;
 $b > 0$, tập nghiệm của bpt là $S = \mathbb{R}$.

2 GIẢI VÀ BIỆN LUẬN BẤT PHƯƠNG TRÌNH $AX + B \leq 0$

- Với $a > 0$, bpt $\Leftrightarrow x \leq -\frac{b}{a}$. Tập nghiệm của bpt là $S = \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right]$;
- Với $a < 0$, bpt $\Leftrightarrow x \geq -\frac{b}{a}$. Tập nghiệm của bpt là $S = \left[-\frac{b}{a}; +\infty\right)$;
- $a = 0$, bpt thành $0x + b \leq 0$. Ta xét hai trường hợp:
 $b \leq 0$, tập nghiệm của bpt là $S = \mathbb{R}$;
 $b > 0$, tập nghiệm của bpt là $S = \emptyset$.

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Giải bất phương trình bậc nhất một ẩn

Xét bất phương trình bậc nhất một ẩn dạng: $ax + b > 0$ (*)

- Nếu $a > 0$ thì bất phương trình (*) có các nghiệm $x > -\frac{b}{a}$ hay bất phương trình có tập nghiệm là $S = \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$.
- Nếu $a < 0$ thì bất phương trình (*) có các nghiệm $x < -\frac{b}{a}$ hay bất phương trình có tập nghiệm là $S = \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$.

Các bất phương trình dạng $ax + b < 0, ax + b \geq 0, ax + b \leq 0$ có cách giải tương tự.

Các bất phương trình khác ta biến đổi bất phương trình về dạng $ax + b > 0$ (hoặc về dạng $ax + b < 0, ax + b \geq 0, ax + b \leq 0$).

BÀI TẬP DẠNG 1

Ví dụ 1. Giải các bất phương trình sau:

- a) $3x - 1 \geq 0$.
 b) $2x + 3 < 4x - 5$.
 c) $(x - 3)(2x + 5) \leq 2x^2 + 4x - 7$.

Lời giải.

a) $3x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

b) $2x + 3 < 4x - 5 \Leftrightarrow 2x - 4x < -5 - 3 \Leftrightarrow -2x < -8 \Leftrightarrow x > 4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (4; +\infty)$.

c) $(x - 3)(2x + 5) \leq 2x^2 + 4x - 7 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 15 \leq 2x^2 + 4x - 7 \Leftrightarrow -5x \leq 8 \Leftrightarrow x \geq -\frac{8}{5}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left[-\frac{8}{5}; +\infty\right)$. □

Ví dụ 2. Giải các bất phương trình sau:

a) $\frac{3 - 2x}{x^2 + 1} \geq 0$.

b) $\frac{x^2 + 3x - 2}{x^2 + 2x + 3} < \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x + 3}$.

Lời giải.

a) $\frac{3 - 2x}{x^2 + 1} \geq 0$.

Ta có $x^2 + 1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó bất phương trình đã cho tương đương:

$$3 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$.

b) $\frac{x^2 + 3x - 2}{x^2 + 2x + 3} < \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x + 3}$.

Ta có: $x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó bất phương trình đã cho tương đương:

$$x^2 + 3x - 2 < x^2 - x - 2 \Leftrightarrow 4x < 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S = (-\infty; 0)$. □

Ví dụ 3. Giải các bất phương trình sau:

a) $\sqrt{x - 1}(3x - 8) \leq 0$.

b) $\frac{4x + 3}{\sqrt{2 - x}} \geq 0$.

c) $\frac{6 - 5x}{\sqrt{2x + 1}} > \sqrt{2x + 1}$.

d) $\frac{x - 1}{2 - x} < 1$.

Lời giải.

a) $\sqrt{x - 1}(3x - 8) \leq 0$.

Điều kiện: $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

- Ta thấy $x = 1$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

- Với $x > 1$, bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình:

$$3x - 8 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{8}{3}.$$

Kết hợp điều kiện $x > 1$ ta được: $1 < x \leq \frac{8}{3}$.

- Vậy bất phương trình đã cho có các nghiệm $1 \leq x \leq \frac{8}{3}$.

b) $\frac{4x+3}{\sqrt{2-x}} \geq 0$. Điều kiện: $2-x > 0 \Leftrightarrow x < 2$.

Với $x < 2$, bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình:

$$4x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{4}.$$

Kết hợp điều kiện $x < 2$ ta được: $-\frac{3}{4} \leq x < 2$.

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left[-\frac{3}{4}; 2\right)$.

c) $\frac{6-5x}{\sqrt{2x+1}} > \sqrt{2x+1}$.

Điều kiện: $2x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$.

Với $x > -\frac{1}{2}$, bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình:

$$6-5x > 2x+1 \Leftrightarrow -7x > -5 \Leftrightarrow x < \frac{5}{7}.$$

Kết hợp điều kiện $x > -\frac{1}{2}$ ta được: $-\frac{1}{2} < x < \frac{5}{7}$.

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{7}\right)$.

d) $\frac{x-1}{2-x} < 1$.

Điều kiện: $2-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

- Với $x < 2$, bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình:

$$x-1 < 2-x \Leftrightarrow 2x < 3 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}.$$

Kết hợp điều kiện $x < 2$ ta được $x < \frac{3}{2}$.

- Với $x > 2$, bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình:

$$x-1 > 2-x \Leftrightarrow 2x > 3 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}.$$

Kết hợp điều kiện $x > 2$ ta được $x > 2$.

- Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải các bất phương trình sau:

a) $-4x+1 > 0$.

c) $10x+9 < 0$.

b) $5x-6 \leq 0$.

d) $-2x+8 \leq 0$.

Lời giải.

a) $-4x + 1 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{4}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$.

b) $5x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{6}{5}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left(-\infty; \frac{6}{5}\right]$.

c) $10x + 9 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{9}{10}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left(-\infty; -\frac{9}{10}\right)$.

d) $-2x + 8 \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = [4; +\infty)$.

□

Bài 2. Giải các bất phương trình sau:

a) $3(x - 1) + 2 > 2x + 3$.

c) $x^2 - 3x + 4 \leq x^2 - 2$.

b) $4x + 3 < 2x - 1$.

d) $3x^2 - 10x + 8 \geq 3x(x + 1)$.

Lời giải.

a) Tập nghiệm của bất phương trình là $S = (4; +\infty)$.

b) Tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -2)$.

c) Tập nghiệm của bất phương trình là $S = [2; +\infty)$.

d) Tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; \frac{8}{13}\right]$.

□

Bài 3. Giải các bất phương trình sau:

a) $3 - \frac{2x+1}{5} > x + \frac{3}{4}$.

c) $2 + \frac{3(x+1)}{8} < 3 - \frac{x-1}{4}$.

b) $-2x + \frac{3}{5} > \frac{3(2x-7)}{3}$.

d) $\frac{x+1}{2} - \frac{x+2}{3} < 2 + \frac{x}{6}$.

Lời giải.

a) $3 - \frac{2x+1}{5} > x + \frac{3}{4} \Leftrightarrow 60 - 4(2x+1) > 20x + 15 \Leftrightarrow -28x > -41 \Leftrightarrow x < \frac{41}{28}$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; \frac{41}{28}\right)$.

b) $-2x + \frac{3}{5} > \frac{3(2x-7)}{3} \Leftrightarrow -2x + \frac{3}{5} > 2x - 7 \Leftrightarrow -4x > -\frac{38}{5} \Leftrightarrow x < \frac{19}{10}$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; \frac{19}{10}\right)$.

c) $2 + \frac{3(x+1)}{8} < 3 - \frac{x-1}{4} \Leftrightarrow \frac{3x+3}{8} + \frac{x-1}{4} < 1 \Leftrightarrow 5x < 7 \Leftrightarrow x < \frac{7}{5}$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; \frac{7}{5}\right)$.

d) $\frac{x+1}{2} - \frac{x+2}{3} < 2 + \frac{x}{6} \Leftrightarrow 3(x+1) - 2(x+2) < 12 + x \Leftrightarrow 3x+3-2x-4 < 12+x \Leftrightarrow 0 \cdot x < 13$
(luôn đúng $\forall x \in \mathbb{R}$).

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = \mathbb{R}$.

□

Bài 4. Giải các bất phương trình sau:

a) $\frac{x+2}{x^2+2} \geq 0.$

b) $\frac{3(x-1)-2}{x^2+4x+5} < 0.$

c) $\frac{2x-3}{x^2+x+1} \leq \frac{4x+3}{x^2+x+1}.$

d) $\frac{x^2+x+2}{4x^2+4x+2} > \frac{(x+1)(x-2)}{4x^2+4x+2}.$

Lời giải.

a) Ta có $x^2+2 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó bất phương trình đã cho tương đương:

$$x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2.$$

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-2; +\infty)$.

b) Ta có $x^2+4x+5 = (x+2)^2+1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó bất phương trình đã cho tương đương:

$$3(x-1)-2 < 0 \Leftrightarrow 3x-5 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{5}{3}.$$

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; \frac{5}{3}\right)$.

c) Ta có $x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó bất phương trình đã cho tương đương:

$$2x-3 \leq 4x+3 \Leftrightarrow 2x \geq -6 \Leftrightarrow x \geq -3.$$

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-3; +\infty)$.

d) Ta có $4x^2+4x+2 = (2x+1)^2+1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó bất phương trình đã cho tương đương:

$$x^2+x+2 > (x+1)(x-2) \Leftrightarrow 2x > -4 \Leftrightarrow x > -2.$$

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-2; +\infty)$.

□

Bài 5. Giải các bất phương trình sau:

a) $(3x-6)\sqrt{3-x} \leq 0.$

b) $\frac{\sqrt{6x+3}}{2-x} > 0.$

c) $\frac{1-4x}{\sqrt{x+5}} < \sqrt{x+5}.$

d) $(2x-1)^2(x+3) \geq 0.$

e) $\frac{3x-2}{5x+1} \leq 0.$

f) $\frac{8x+1}{2x-3} > 2.$

Lời giải.

a) Điều kiện: $3-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3.$

Rõ ràng $x=3$ là một nghiệm của bất phương trình đã cho.

Với $x < 3$ bất phương trình đã cho trở thành:

$$3x-6 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2.$$

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; 2] \cup \{3\}.$

b) Điều kiện: $6x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}.$

Với $x = -\frac{1}{2}$ không là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Với $x > -\frac{1}{2}$ bất phương trình đã cho trở thành:

$$2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 2.$$

Kết hợp điều kiện $x > -\frac{1}{2}$ ta được $-\frac{1}{2} < x < 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\frac{1}{2}; 2\right)$.

c) Điều kiện: $x + 5 > 0 \Leftrightarrow x > -5$.

Với $x > -5$ bất phương trình đã cho trở thành:

$$1 - 4x < x + 5 \Leftrightarrow 5x > -4 \Leftrightarrow x > -\frac{4}{5}.$$

Kết hợp điều kiện $x > -5$ ta được $x > -\frac{4}{5}$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\frac{4}{5}; +\infty\right)$.

d) Trường hợp $2x - 1 = 0$ hay $x = \frac{1}{2}$ rõ ràng là một nghiệm của bất phương trình đã cho.

Trường hợp $2x - 1 \neq 0$ hay $x \neq \frac{1}{2}$ bất phương trình đã cho trở thành:

$$x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3.$$

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-3; +\infty)$.

e) Điều kiện: $x \neq -\frac{1}{5}$.

Trường hợp $x < -\frac{1}{5}$ bất phương trình đã cho trở thành:

$$3x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}.$$

Kết hợp điều kiện: $x < -\frac{1}{5}$ ta được bất phương trình vô nghiệm.

Trường hợp $x > -\frac{1}{5}$ bất phương trình đã cho trở thành:

$$3x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3}.$$

Kết hợp điều kiện: $x > -\frac{1}{5}$ ta được $-\frac{1}{5} < x \leq \frac{2}{3}$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\frac{1}{5}; \frac{2}{3}\right]$.

f) Điều kiện: $x \neq \frac{3}{2}$.

Trường hợp $x < \frac{3}{2}$ bất phương trình đã cho trở thành:

$$8x + 1 < 4x - 6 \Leftrightarrow x < -\frac{7}{4}.$$

Kết hợp điều kiện: $x < \frac{3}{2}$ ta được $x < -\frac{7}{4}$.

Trường hợp $x > \frac{3}{2}$ bất phương trình đã cho trở thành:

$$8x + 1 > 4x - 6 \Leftrightarrow x > -\frac{7}{4}.$$

Kết hợp điều kiện: $x > \frac{3}{2}$ ta được $x > \frac{3}{2}$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; -\frac{7}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

□

Dạng 2. Giải và biện luận bất phương trình bậc nhất một ẩn

Xét bất phương trình một ẩn dạng: $ax + b > 0$ (*).

① Trường hợp $a \neq 0$:

- Nếu $a > 0$ thì bất phương trình (*) có các nghiệm $x > -\frac{b}{a}$ hay bất phương trình có tập nghiệm là $S = \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$.
- Nếu $a < 0$ thì bất phương trình (*) có các nghiệm $x < -\frac{b}{a}$ hay bất phương trình có tập nghiệm là $S = \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$.

② Trường hợp $a = 0$:

- Nếu $b > 0$ thì bất phương trình (*) luôn nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ hay bất phương trình có tập nghiệm $S = \mathbb{R}$.
- Nếu $b \leq 0$ thì bất phương trình (*) vô nghiệm hay bất phương trình có tập nghiệm $S = \emptyset$.

Các bất phương trình dạng $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$ có cách giải và biện luận tương tự. Các bất phương trình khác ta biến đổi bất phương trình về dạng $ax + b > 0$ (hoặc về dạng $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$).

BÀI TẬP DẠNG 2

Ví dụ 1. Giải và biện luận bất phương trình $mx + 6 > 2x + 3$.

Lời giải.

$$mx + 6 > 2x + 3 \Leftrightarrow (m - 2)x > -3.$$

- Trường hợp $m - 2 = 0$ hay $m = 2$ thì bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- Trường hợp $m - 2 > 0$ hay $m > 2$ thì bất phương trình đã cho có các nghiệm $x > \frac{-3}{m-2}$.
- Trường hợp $m - 2 < 0$ hay $m < 2$ thì bất phương trình đã cho có các nghiệm $x < \frac{-3}{m-2}$.

□

Ví dụ 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $(m^2 - 4m + 3)x + 2m - 4 < 0$ vô nghiệm.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho vô nghiệm khi:

$$\begin{cases} m^2 - 4m + 3 = 0 \\ 2m - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 3 \\ m \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$$

Vậy $m = 3$ là giá trị thỏa yêu cầu bài toán.

□

Ví dụ 3. Giải và biện luận bất phương trình $\sqrt{x-1}(x-m+2) > 0$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

- Trường hợp $x = 1$ không là nghiệm của bất phương trình đã cho.
- Trường hợp $x > 1$ ta được bất phương trình:

$$x - m + 2 > 0 \Leftrightarrow x > m - 2.$$
 - Nếu $m - 2 \geq 1$ hay $m \geq 3$ thì bất phương trình có tập nghiệm $S = (m - 2; +\infty)$.
 - Nếu $m - 2 < 1$ hay $m < 3$ thì bất phương trình có tập nghiệm $S = (1; +\infty)$.
- Vậy: với $m \geq 3$ thì bất phương trình có tập nghiệm $S = (m - 2; +\infty)$;
 với $m < 3$ thì bất phương trình có tập nghiệm $S = (1; +\infty)$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải và biện luận bất phương trình $(1 - m)x - 2m > -2x - 6$.

Lời giải.

$$(1 - m)x - 2m > -2x - 6 \Leftrightarrow (3 - m)x > 2m - 6.$$

- Trường hợp $3 - m = 0$ hay $m = 3$ thì bất phương trình đã cho vô nghiệm.
- Trường hợp $3 - m > 0$ hay $m < 3$ thì bất phương trình đã cho có các nghiệm $x > \frac{2m - 6}{3 - m}$ hay $x > -2$.
- Trường hợp $3 - m < 0$ hay $m > 3$ thì bất phương trình đã cho có các nghiệm $x < \frac{2m - 6}{3 - m}$ hay $x < -2$.

□

Bài 2. Cho bất phương trình $(m^2 + 3m)x + 4 \geq -2(x + m)$. Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

$$(m^2 + 3m)x + 4 \geq -2(x + m) \Leftrightarrow (m^2 + 3m + 2)x + 2m + 4 \geq 0.$$

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi:

$$\begin{cases} m^2 + 3m + 2 = 0 \\ 2m + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -2 \\ m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -2 \end{cases}.$$

Vậy $m = -1, m = -2$ là giá trị thỏa yêu cầu bài toán.

□

Bài 3. Giải và biện luận bất phương trình $(2x - 3m + 2)\sqrt{2 - x} < 0$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } 2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2.$$

- Trường hợp $x = 2$ không là nghiệm của bất phương trình đã cho.
- Trường hợp $x < 2$ ta được bất phương trình:

$$2x - 3m + 2 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3m - 2}{2}.$$
 - Nếu $\frac{3m - 2}{2} < 2$ hay $m < 2$ thì bất phương trình có tập nghiệm $S = \left(\frac{3m - 2}{2}; 2\right)$.
 - Nếu $\frac{3m - 2}{2} \geq 2$ hay $m \geq 2$ thì bất phương trình vô nghiệm.
- Vậy: với $m \geq 2$ thì bất phương trình có tập nghiệm $S = \emptyset$;
 với $m < 2$ thì bất phương trình có tập nghiệm $S = \left(\frac{3m - 2}{2}; 2\right)$.

□

Dạng 3. Tìm giá trị của tham số để bất phương trình có tập nghiệm thỏa điều kiện cho trước

- Biến đổi bất phương trình về một trong bốn dạng sau

$$ax + b > 0, ax + b < 0, ax + b \geq 0, ax + b \leq 0.$$

- Nêu điều kiện mà bất phương trình phải thỏa, từ đó tìm được giá trị của tham số.

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 3 ❖❖❖

Ví dụ 1. Cho bất phương trình $(4m^2 - 6m)x + 7m \geq (3m^2 - 5)x + 4 + 5m$. Định m để bất phương trình thỏa với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

$$\text{Bpt} \Leftrightarrow (m^2 - 6m + 5)x + 2m - 4 \geq 0.$$

Bpt thỏa với mọi $x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 5 = 0 \\ 2m - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \text{ hoặc } m = 5 \\ m \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 5.$$

Vậy bpt thỏa với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m = 5$. □

Ví dụ 2. Định m để bất phương trình $mx + 3m^3 \geq -3(x + 4m^2 - m - 12)$ có tập nghiệm là $[-24; +\infty)$.

Lời giải.

$$\text{Bpt} \Leftrightarrow (m + 3)x + 3m^3 + 12m^2 - 3m - 36 \geq 0 \Leftrightarrow (m + 3)[x + 3(m^2 + m - 4)] \geq 0.$$

- $m = -3$, bpt có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ (loại).
- $m < -3$, bpt $\Leftrightarrow x + 3(m^2 + m - 4) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -3(m^2 + m - 4)$ (loại).
- $m > -3$, bpt $\Leftrightarrow x + 3(m^2 + m - 4) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3(m^2 + m - 4)$. Bpt có tập nghiệm là $[-3(m^2 + m - 4); +\infty)$.

Do đó, bpt có tập nghiệm $[-24; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ -3(m^2 + m - 4) = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ m^2 + m - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ m = -4 \text{ hay } m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3. \quad \square$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm tất cả các giá trị m để bất phương trình vô nghiệm

$$(6m^2 + m - 2)x - 7m \geq (6m^2 + 5)x - 5m - 6.$$

Lời giải.

$$\text{Bpt} \Leftrightarrow (m-7)x - 2m + 6 \geq 0.$$

$$\text{Bpt vô nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-7 = 0 \\ -2m+6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 7.$$

□

Bài 2. Tìm tất cả các giá trị m để bất phương trình sau thỏa với mọi $x \in \mathbb{R}$.

a) $m^2(x-1) \geq 25x + 5m - 6;$

b) $\sqrt{(m^2-9)x + m + 7} > 3;$

Lời giải.

a) $\text{Bpt} \Leftrightarrow (m^2-25)x - m^2 - 5m + 6 \geq 0.$

$$\text{Bpt thỏa với mọi } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 25 = 0 \\ -m^2 - 5m + 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -5.$$

b) $\text{Bpt} \Leftrightarrow (m^2-9)x + m + 7 > 9 \Leftrightarrow (m^2-9)x + m - 2 > 0.$

$$\text{Bpt thỏa với mọi } x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 9 = 0 \\ m - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$$

□

Bài 3. Định m để hàm số $y = \sqrt{(m+3)x + m - 5}$ xác định với mọi $x \in [0; 5]$.

Lời giải.

Hàm số y xác định với mọi $x \in [0; 5] \Leftrightarrow (m+3)x + m - 5 \geq 0$ (*), với mọi $x \in [0; 5]$.

Bpt (*) thỏa với mọi $x \in [0; 5] \Rightarrow \text{bpt (*) thỏa tại } x = 0 \Rightarrow m - 5 \geq 0 \Rightarrow m \geq 5.$

Khi đó, (*) $\Leftrightarrow x \geq \frac{-m+5}{m+3}.$

$$\text{Vậy YCBT} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 5 \\ \frac{-m+5}{m+3} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 5.$$

□

Bài 4. Tìm m để bất phương trình $\sqrt{5-x}[(m^2+3)x - 4m] \geq 0$ có tập nghiệm là $[1; 5]$.

Lời giải.

$$\text{Bpt} \Leftrightarrow x = 5 \text{ hoặc } \begin{cases} x < 5 \\ (m^2+3)x - 4m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5 \text{ hoặc } \begin{cases} x < 5 \\ x \geq \frac{4m}{m^2+3} \end{cases}.$$

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow \frac{4m}{m^2+3} = 1 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \text{ hoặc } m = 3.$$

□

Bài 5. Định m để hai bất phương trình sau tương đương

a) $x - 9 < 0$ và $5mx - 3m - 42 < 0;$

b) $3mx + 2 - 2m > 0$ và $(3m-1)x + 3 - 2m > 0.$

Lời giải.

a) Bpt $x - 9 < 0$ có tập nghiệm là $S = (-\infty; 9).$

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m > 0 \\ \frac{3m+42}{5m} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

$$\text{b) YCBT} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m(3m-1) > 0 \\ \frac{2m-2}{3m} = \frac{2m-3}{3m-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \text{ hoặc } m > \frac{1}{3} \\ m = -2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2.$$

**Dạng 4. Hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn**

Khi cho một hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn thì tập hợp nghiệm của hệ là giao của các tập hợp nghiệm của các bất phương trình trong hệ.

- **Các bước thực hành giải toán:**

1. Tìm điều kiện của hệ (nếu có).
2. Biến đổi để đưa hệ bất phương trình về dạng đặc trưng $\begin{cases} a_1x + b_1 \leq 0 & (1) \\ a_2x + b_2 \leq 0 & (2) \end{cases}$.
3. Giải từng bất phương trình trong hệ. Gọi S_1, S_2 lần lượt là tập nghiệm của phương trình (1), (2) trong hệ.
4. Tập nghiệm của hệ bất phương trình $S = S_1 \cap S_2$.

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 4 ❖❖❖

Ví dụ 1. Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ 5 - 2x \geq 0 \end{cases}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ 5 - 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \leq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{2}.$$

$$\text{Tập nghiệm của hệ bất phương trình } S = \left(-\infty; \frac{5}{2}\right].$$



Ví dụ 2. Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases} 2x - \frac{3}{5} < \frac{7 - 2x}{3} \\ 2x - 1 < 5(3x - 1) \end{cases}$.

Lời giải.

$$\begin{cases} 2x - \frac{3}{5} < \frac{7 - 2x}{3} \\ x - 1 < 5(3x - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30x - 9 < 35 - 10x \\ 2x - 1 < 15x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{4}{13} < x < \frac{11}{10}.$$

$$\text{Tập nghiệm của hệ bất phương trình } S = \left(\frac{4}{13}; \frac{11}{10}\right).$$

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

Bài 1. Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases} (x - 1)(x + 2) \leq 2x^2 - x - (x + 3)(x - 1) \\ x - 1 < 0 \end{cases}$.

Lời giải.

$$\begin{cases} (x - 1)(x + 2) \leq 2x^2 - x - (x + 3)(x - 1) \\ x - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 5 \leq 0 \\ x - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{5}{4} \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x < 1.$$

$$\text{Tập nghiệm của hệ bất phương trình } S = (-\infty; 1).$$



Bài 2. Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases} 3x - 1 \leq x + 5 \\ 2x - 1 < x^2 - (x - 1)(x + 1) \end{cases}$.

Lời giải.

$$\begin{cases} 3x - 1 \leq x + 5 \\ 2x - 1 < x^2 - (x - 1)(x + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6 \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x < 1.$$

Tập nghiệm của hệ bất phương trình $S = (-\infty; 1)$. □

Bài 3. Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases} 6x + \frac{5}{7} < 4x + 7 \\ \frac{8x + 3}{2} < 2x + 5 \end{cases}$.

Lời giải.

$$\begin{cases} 6x + \frac{5}{7} < 4x + 7 \\ \frac{8x + 3}{2} < 2x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x < \frac{44}{7} \\ 4x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{22}{7} \\ x < \frac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x < \frac{7}{4}.$$

Tập nghiệm của hệ bất phương trình $S = (-\infty; \frac{7}{4})$. □

Bài 4. Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases} \frac{x - 3}{\sqrt{x - 4}} > 0 \\ x < 2(x + 1) \end{cases}$.

Lời giải.

$$\begin{cases} \frac{x - 3}{\sqrt{x - 4}} > 0 \\ x < 2(x + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x > 3 \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 4.$$

Tập nghiệm của hệ bất phương trình $S = (4; +\infty)$. □

Dạng 5. Giải và biện luận hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn

Giải và biện luận hệ bất phương trình: $\begin{cases} a_1x + b_1 \leq 0 \\ a_2x + b_2 \leq 0 \end{cases} \quad (I).$

- Xét các trường hợp tồn tại dấu của a_1 và a_2 .
- Với mỗi trường hợp riêng biệt nhận được ở trên, thông thường ta có các trường hợp sau:

⊕ **TH1:** Nếu $a_1, a_2 > 0$. Khi đó $(I) \Leftrightarrow x \leq \min \left\{ -\frac{b_1}{a_1}, -\frac{b_2}{a_2} \right\}$.

⊕ **TH2:** Nếu $a_1, a_2 < 0$. Khi đó $(I) \Leftrightarrow x \geq \max \left\{ -\frac{b_1}{a_1}, -\frac{b_2}{a_2} \right\}$.

⊕ **TH3:** Nếu $a_1 > 0; a_2 < 0$. Khi đó $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{b_1}{a_1} \\ x \geq -\frac{b_2}{a_2} \end{cases}$.

Hệ có nghiệm điều kiện là: $-\frac{b_2}{a_2} \leq -\frac{b_1}{a_1}$.

Khi đó nghiệm của hệ là: $-\frac{b_2}{a_2} \leq x \leq -\frac{b_1}{a_1}$.

⊕ **TH4:** Nếu $a_1 = 0$ hoặc $a_2 = 0$. Khi đó thay trực tiếp giá trị tham số vào hệ (I) .

BÀI TẬP DẠNG 5

Ví dụ 1. Tìm tất cả các giá trị của m để hệ bất phương trình: $\begin{cases} x + m \leq 0 \\ -x + 3 < 0 \end{cases}$ có nghiệm.

Lời giải.

$$\begin{cases} x + m \leq 0 \\ -x + 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -m \\ x > 3 \end{cases}.$$

Để hệ bất phương trình có nghiệm thì $-m > 3 \Leftrightarrow m < -3$. □

Ví dụ 2. Tìm m để hệ bất phương trình: $\begin{cases} x + 4m^2 \leq 2mx + 1 \\ 3x + 2 > 2x - 1 \end{cases}$ có nghiệm.

Lời giải.

$$\begin{cases} x + 4m^2 \leq 2mx + 1 & (1) \\ 3x + 2 > 2x - 1 & (2) \end{cases}.$$

$$(2) \Leftrightarrow x > -3.$$

$$(1) \Leftrightarrow (1 - 2m)x \leq 1 - 4m^2. \text{ Xét các trường hợp:}$$

- TH1: Nếu $1 - 2m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$. Khi đó (1) có tập nghiệm $S_1 = \mathbb{R}$.

Khi đó hệ có tập nghiệm $S = (-3; +\infty)$.

- TH2: Nếu $1 - 2m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$.

$$\text{Suy ra (1) có nghiệm: } x \geq \frac{1 - 4m^2}{1 - 2m} \Leftrightarrow x \geq 1 + 2m.$$

Khi đó hệ có tập nghiệm $S = [1 + 2m; +\infty)$ (do $1 + 2m > 2 > -3$).

- TH3: Nếu $1 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$ thì (1) có nghiệm $x \leq 1 + 2m$.

Hệ bất phương trình có nghiệm khi: $1 + 2m > -3 \Leftrightarrow m > -2$.

Với $-2 < m < \frac{1}{2}$ thì hệ bất phương trình có tập nghiệm $S = (-3; 1 + 2m)$.

Vậy với $m > -2$ hệ bất phương trình có nghiệm. □

Ví dụ 3. Tìm m để hệ bất phương trình: $\begin{cases} mx + 9 < 3x + m^2 \\ 4x + 1 < -x + 6 \end{cases}$ vô nghiệm.

Lời giải.

$$\begin{cases} mx + 9 < 3x + m^2 & (1) \\ 4x + 1 < -x + 6 & (2) \end{cases}.$$

$$(2) \Leftrightarrow x < 1.$$

$$(1) \Leftrightarrow (m - 3)x < m^2 - 9. \text{ Xét các trường hợp:}$$

- TH1: Nếu $m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 3$. Khi đó (1) có tập nghiệm $S_1 = \emptyset$.

Với $m = 3$ hệ bất phương trình vô nghiệm.

- TH2: Nếu $m - 3 < 0 \Leftrightarrow m < 3$.

$$\text{Suy ra (1) có nghiệm: } x > m + 3.$$

Khi đó hệ vô nghiệm khi $m + 3 \geq 1 \Leftrightarrow m \geq -2$.

Với $-2 \leq m < 3$ hệ bất phương trình vô nghiệm.

- TH3: Nếu $m - 3 > 0 \Leftrightarrow m > 3$ thì (1) có nghiệm $x < m + 3$.

Với $m > 3$ hệ bất phương trình luôn có nghiệm.

Vậy hệ bất phương trình vô nghiệm khi $-2 \leq m \leq 3$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm tất cả các giá trị của m để hệ bất phương trình: $\begin{cases} x - 2 \leq 0 \\ m + x > 1 \end{cases}$ có nghiệm.

Lời giải.

$$\begin{cases} x - 2 \leq 0 \\ m + x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x > 1 - m \end{cases}.$$

Để hệ bất phương trình có nghiệm thì $1 - m < 2 \Leftrightarrow m > -1$. □

Bài 2. Tìm tất cả các giá trị của m để hệ bất phương trình: $\begin{cases} 2x + 7 < 8x - 1 \\ -2x + m + 5 > 0 \end{cases}$ vô nghiệm.

Lời giải.

$$\begin{cases} 2x + 7 < 8x - 1 \\ -2x + m + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{4}{3} \\ x < \frac{m + 5}{2} \end{cases}.$$

Để hệ bất phương trình vô nghiệm thì $\frac{m + 5}{2} \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow m \leq -\frac{7}{3}$. □

Bài 3. Với giá trị nào của m thì hệ $\begin{cases} 3x + 2 - 2m \leq 0 \\ mx + m - 1 \leq 0 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Lời giải.

$$\begin{cases} 3x + 2 - 2m \leq 0 & (1) \\ mx + m - 1 \leq 0 & (2) \end{cases}.$$

$$(1) \Leftrightarrow x \leq \frac{2m - 2}{3}.$$

(2) $\Leftrightarrow mx \leq 1 - m$ (3). Xét các trường hợp:

- TH1: Nếu $m = 0$, khi đó bất phương trình (3) $\Leftrightarrow 0x \leq 1$ luôn đúng.

Vậy nghiệm của hệ bất phương trình là $x \leq -\frac{2}{3}$ và nghiệm là không duy nhất.

- TH2: Nếu $m > 0$, khi đó bất phương trình (3) $\Leftrightarrow x \leq \frac{1 - m}{m}$.

Khi đó nghiệm của hệ là $x \leq \min \left\{ \frac{2m - 2}{3}, \frac{1 - m}{m} \right\}$ và nghiệm là không duy nhất.

- TH3: Nếu $m < 0$, khi đó bất phương trình (3) $\Leftrightarrow x \geq \frac{1 - m}{m}$.

Khi đó để hệ có nghiệm duy nhất thì $\frac{2m - 2}{3} = \frac{1 - m}{m} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{3}{2} \end{cases}.$

Vậy với $m = -\frac{3}{2}$ hệ có nghiệm duy nhất. □

Bài 4. Với giá trị nào của m thì hệ $\begin{cases} mx + 6 > 2x + 3m \\ m(x - m) < x - 1 \end{cases}$ có nghiệm.

Lời giải.

Viết lại hệ bất phương trình dưới dạng
$$\begin{cases} (m-2)x > 3m-6 & (1) \\ (m-1)x < m^2-1 & (2) \end{cases} \quad (I).$$

Xét các trường hợp:

- TH1: Nếu $m < 1$, khi đó hệ $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x > m+1 \end{cases} \Rightarrow m+1 < x < 3$.
Khi đó tập nghiệm của hệ là $S = (m+1; 3)$.
- TH2: Nếu $m = 1$, khi đó hệ $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ 0x < 0 \end{cases} \Rightarrow$ hệ vô nghiệm.
- TH3: Nếu $1 < m < 2$, khi đó hệ $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x < m+1 \end{cases} \Rightarrow x < \min\{3, m+1\} = m+1$.
Khi đó tập nghiệm của hệ $S = (-\infty; m+1)$.
- TH4: Nếu $m = 2$, khi đó hệ $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 0x > 0 \\ x < 3 \end{cases} \Rightarrow$ hệ vô nghiệm.
- TH5: Nếu $m > 2$, khi đó hệ $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < m+1 \end{cases} \Rightarrow 3 < x < m+1$.
Khi đó tập nghiệm của hệ $S = (3; m+1)$.

Vậy hệ bất phương trình có nghiệm khi $m \neq 1$ và $m \neq 2$. □

➤ Dạng 6. Tìm giá trị của tham số để hệ bất phương trình có tập nghiệm thỏa điều kiện cho trước

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 6 ❖❖❖

Ví dụ 1. Cho hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x - m + 1 > 0 \\ m + 2 - x \geq 0. \end{cases}$$
 Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình

- Nghiệm đúng với mọi $x \in [-2; -1)$.
- Có duy nhất một nghiệm thuộc $[1; 3)$.
- Có nghiệm thuộc $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$.

Lời giải.

Ta có
$$\begin{cases} x - m + 1 > 0 \\ m + 2 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > m - 1 \\ x \leq m + 2 \end{cases} \quad \text{Suy ra hệ có tập nghiệm } S = (m-1; m+2].$$

- Hệ có nghiệm đúng với mọi $x \in [-2; -1)$ khi và chỉ khi
$$[-2; -1) \subset S \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 < -2 \\ m+2 \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m < -1.$$
- Hệ có duy nhất một nghiệm thuộc $[1; 3) \Leftrightarrow m+2 = 1 \Leftrightarrow m = -1$.
- Hệ không có nghiệm thuộc $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq m-1 \\ m+2 < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{3}{2} \\ m < -3. \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm thuộc $\left[-1; \frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow -3 \leq m < \frac{3}{2}$.

□

Ví dụ 2. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x+m > 1 \\ mx+m^2-2m \geq 0. \end{cases}$ Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình

a) Nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; +\infty)$.

b) Có nghiệm thuộc $[0; 3)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} x+m > 1 \\ mx+m^2-2m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1-m & (1) \\ mx \geq m(2-m). & (2) \end{cases}$ Gọi S_1, S_2, S lần lượt là tập nghiệm của

(1), (2) và của hệ. Khi đó $S_1 = (1-m; +\infty)$ và

- Với $m = 0$ ta có $S_2 = \mathbb{R} \Rightarrow S = S_1 \cap S_2 = (1-m; +\infty)$.
- Với $m > 0$ ta có $S_2 = [2-m; +\infty) \Rightarrow S = S_1 \cap S_2 = [2-m; +\infty)$.
- Với $m < 0$ ta có $S_2 = (-\infty; 2-m] \Rightarrow S = S_1 \cap S_2 = (1-m; 2-m]$.

a) Hệ có nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; +\infty) \Leftrightarrow [-1; +\infty) \subset S$.

- Với $m = 0$ ta có $S = (1; +\infty) \not\subset [-1; +\infty) \Rightarrow m = 0$ không thỏa mãn.
- Với $m > 0$ ta có $[-1; +\infty) \subset S \Leftrightarrow 2-m \leq -1 \Leftrightarrow m \geq 3$. Kết hợp điều kiện $m > 0$ ta có $m \geq 3$ thỏa mãn.
- Với $m < 0$ ta có $S = (1-m; 2-m] \not\subset [-1; +\infty) \Rightarrow m < 0$ không thỏa mãn.

Vậy tập các giá trị m thỏa mãn là $[3; +\infty)$.

b) Hệ có nghiệm thuộc $[0; 3) \Leftrightarrow [3; 0) \cap S \neq \emptyset$.

- Với $m = 0$ ta có $[0; 3) \cap S = (1; 3) \neq \emptyset \Rightarrow m = 0$ thỏa mãn.
- Với $m > 0$ ta có $[0; 3) \cap S \neq \emptyset \Leftrightarrow 2-m < 3 \Leftrightarrow m > -1$. Kết hợp điều kiện $m > 0$ ta có $m > 0$ thỏa mãn.

- Với $m < 0$ ta có $[0; 3) \cap S \neq \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m < 3 \\ 2-m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 2$. Kết hợp điều kiện $m < 0$ ta có $-2 < m < 0$ thỏa mãn.

Vậy tập các giá trị m thỏa mãn là $(-2; +\infty)$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x+2m-1 > 0 \\ 6m-2-x \geq 0. \end{cases}$ Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ có nghiệm đúng với mọi $x \in [-2; 3]$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} x + 2m - 1 > 0 \\ 6m - 2 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 - 2m \\ x \leq 6m - 2 \end{cases}$. Hệ có nghiệm đúng với mọi $x \in [-2; 3] \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2m < -2 \\ 3 \leq 6m - 2 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$. □

Bài 2. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x + m > 2 \\ (m - 1)x - m^2 + 4m - 3 > 0 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ

- Có nghiệm thuộc $(-\infty; 2)$.
- Có nghiệm thuộc $[-1; 3]$.
- Nghiem đúng với mọi $x \in [-1; 3]$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} x + m > 2 \\ (m - 1)x - m^2 + 4m - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 - m \\ (m - 1)x > (m - 1)(m - 3) \end{cases}$. Giải và biện luận hệ ta có

- Với $m \leq 1$ ta có hệ vô nghiệm.
- Với $m > 1$, hệ có tập nghiệm $S = (\max\{m - 3; 2 - m\}; +\infty)$.

- Hệ có nghiệm thuộc $(-\infty; 2)$

$$\Leftrightarrow \max\{m - 3; 2 - m\} < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m - 3 < 2 \\ 2 - m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 5.$$

Kết hợp điều kiện $m > 1$ ta có $1 < m < 5$ thỏa mãn.

- Hệ có nghiệm thuộc $[-1; 3]$

$$\Leftrightarrow \max\{m - 3; 2 - m\} < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m - 3 < 3 \\ 2 - m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 6.$$

Kết hợp điều kiện $m > 1$ ta có $1 < m < 5$ thỏa mãn.

- Hệ có nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 3]$

$$\Leftrightarrow \max\{m - 3; 2 - m\} < -1 \Leftrightarrow \begin{cases} m - 3 < -1 \\ 2 - m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m > 3 \end{cases} \text{ vô nghiệm } m.$$

□

Bài 3. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} mx - 1 < 0 \\ (3m - 2)x - m < 0 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ nghiệm đúng với mọi x dương.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} mx - 1 < 0 \\ (3m - 2)x - m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx < 1 \\ (3m - 2)x < m \end{cases}$. Ta có

- Với $m = 0$, hệ có tập nghiệm $S = (0; +\infty) \Rightarrow m = 0$ thỏa mãn.
- Với $m = \frac{2}{3}$, hệ có tập nghiệm $S = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right) \not\subset (0; +\infty) \Rightarrow m = \frac{2}{3}$ không thỏa mãn.
- Với $m < 0$, hệ có tập nghiệm $S = \left(\frac{m}{3m - 2}; +\infty\right)$. Hệ có nghiệm đúng với mọi x dương $\Leftrightarrow \frac{m}{3m - 2} \leq$

$0 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{2}{3}$ không thỏa mãn điều kiện $m < 0$.

• Với $0 < m < \frac{2}{3}$, hệ vô nghiệm.

• Với $m > \frac{2}{3}$, hệ có tập nghiệm $\left(-\infty; \min\left\{\frac{1}{m}; \frac{m}{3m-2}\right\}\right) \not\subset (0; +\infty) \Rightarrow m > \frac{2}{3}$ không thỏa mãn.

Vậy có duy nhất giá trị $m = 0$ thỏa mãn đề bài. $\square$

Bài 4. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} m(x-1) + 2 \geq 0 \\ x - m \leq 2. \end{cases}$ Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in [0; 1]$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} m(x-1) + 2 \geq 0 \\ x - m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx \geq m-2 \\ x \leq m+2. \end{cases}$

• Với $m = 0$, hệ có tập nghiệm $S = (-\infty; 2) \supset [0; 1] \Rightarrow m = 0$ thỏa mãn.

• Với $m < 0$, hệ có tập nghiệm $S = \left(-\infty; \min\left\{\frac{m-2}{m}; m+2\right\}\right)$. Hệ nhận mọi $x \in [0; 1]$ là nghiệm

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m-2}{m} \geq 1 \\ m+2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq -1$. Kết hợp điều kiện $m < 0$ ta có $-1 \leq m < 0$ thỏa mãn.

• Với $m > 0$, hệ nhận mọi $x \in [0; 1]$ là nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m-2}{m} \leq 0 \\ m+2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 2$. Kết hợp điều kiện $m > 0$

ta có $0 < m \leq 2$ thỏa mãn.

Vậy tập các giá trị m thỏa mãn là $[-1; 2]$. $\square$

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 5. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x + 2m - 1 \geq 0 \\ \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}} \leq \frac{m+1}{\sqrt{4-x^2}}. \end{cases}$ Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình nhận tập xác định là tập nghiệm.

Lời giải.

TXĐ $D = (-2; 2)$. Ta có $\begin{cases} x + 2m - 1 \geq 0 \\ \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}} \leq \frac{m+1}{\sqrt{4-x^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 - 2m \\ x \leq \frac{m+1}{2}. \end{cases}$

Hệ có nghiệm đúng với mọi $x \in (-2; 2) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2m \leq -2 \\ m+1 \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 3$. $\square$

Bài 6. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x + m - 1 \leq 0 \\ \frac{2x}{\sqrt{1-2x} + \sqrt{1+2x}} \geq \frac{m+1}{\sqrt{1-2x} + \sqrt{1+2x}}. \end{cases}$ Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ có nghiệm.

Lời giải.

TXĐ $D = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$. Ta có $\begin{cases} x + m - 1 \leq 0 \\ \frac{2x}{\sqrt{1-2x} + \sqrt{1+2x}} \geq \frac{m+1}{\sqrt{1-2x} + \sqrt{1+2x}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1 - m \\ x \geq \frac{m+1}{2}. \end{cases} \quad (*)$

Hệ ban đầu có nghiệm khi và chỉ khi hệ (*) có tập nghiệm S thỏa mãn
$$\begin{cases} S \neq \emptyset \\ S \cap \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \neq \emptyset. \end{cases}$$

$$\bullet S \neq \emptyset \Leftrightarrow \frac{m+1}{2} \leq 1-m \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{3}.$$

$$\bullet S \cap \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] = \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m+1}{2} > \frac{1}{2} \\ 1-m < -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m > 0 \Rightarrow S \cap \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \neq \emptyset \Leftrightarrow m \leq 0.$$

Kết hợp điều kiện $m \leq \frac{1}{3}$ ta có $m \leq 0$ thỏa mãn. □

C CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tìm điều kiện xác định của bất phương trình $\sqrt{2-x} + x < 2 + \sqrt{1-2x}$.

- A. $x \in \mathbb{R}$. B. $x \in (-\infty; 2]$. C. $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$. D. $x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Lời giải.

$$\text{Bất phương trình xác định khi } \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ 1-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 2. Tìm điều kiện xác định của bất phương trình $x + \frac{x-1}{\sqrt{x+5}} > 2 - \sqrt{4-x}$.

- A. $x \in [-5; 4]$. B. $x \in (-5; 4]$. C. $x \in [4; +\infty)$. D. $x \in (-\infty; -5)$.

Lời giải.

$$\text{Bất phương trình xác định khi } \begin{cases} x+5 > 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -5 \\ x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow -5 < x \leq 4.$$

Chọn đáp án **B** □

Câu 3. Tìm điều kiện xác định của bất phương trình $\sqrt{\frac{x+1}{(x-2)^2}} < x+1$.

- A. $x \in [-1; +\infty)$. B. $x \in (-1; +\infty)$.
C. $x \in [-1; +\infty) \setminus \{2\}$. D. $x \in (-1; +\infty) \setminus \{2\}$.

Lời giải.

$$\text{Bất phương trình xác định khi } \begin{cases} \frac{x+1}{(x-2)^2} \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq 2 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \sqrt{x-m} - \sqrt{6-2x}$ có tập xác định là một đoạn trên trục số.

- A. $m = 3$. B. $m < 3$. C. $m > 3$. D. $m < \frac{1}{3}$.

Lời giải.

$$\text{Hàm số xác định khi } \begin{cases} x-m \geq 0 \\ 6-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m \\ x \leq 3 \end{cases}.$$

Nếu $m = 3$ thì tập xác định của hàm số là $D = \{3\}$.

Nếu $m > 3$ thì tập xác định của hàm số là $D = \emptyset$.

Nếu $m < 3$ thì tập xác định của hàm số là $D = [m; 3]$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \sqrt{m-2x} - \sqrt{x+1}$ có tập xác định là một đoạn trên trục số.

- A. $m < -2$. B. $m > 2$. C. $m > -\frac{1}{2}$. D. $m > -2$.

Lời giải.

$$\text{Hàm số xác định khi } \begin{cases} m-2x \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{m}{2} \\ x \geq -1 \end{cases}.$$

Nếu $\frac{m}{2} = -1 \Leftrightarrow m = -2$ thì tập xác định của hàm số là $D = \{-1\}$.

Nếu $\frac{m}{2} < -1 \Leftrightarrow m < -2$ thì tập xác định của hàm số là $D = \emptyset$.

Nếu $\frac{m}{2} > -1 \Leftrightarrow m > -2$ thì tập xác định của hàm số là $D = \left[-1; \frac{m}{2}\right]$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 6. Bất phương trình $2x + \frac{3}{2x-4} < 3 + \frac{3}{2x-4}$ tương đương với

- A. $2x < 3$. B. $x < \frac{3}{2}$ và $x \neq 2$. C. $x < \frac{3}{2}$. D. Tất cả đều đúng.

Lời giải.

Điều kiện: $x \neq 2$. Bất phương trình tương đương với $2x < 3 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$ (thỏa mãn điều kiện).

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 7. Bất phương trình $2x + \frac{3}{2x-4} < 5 + \frac{3}{2x-4}$ tương đương với

- A. $2x < 5$. B. $x < \frac{5}{2}$ và $x \neq 2$. C. $x < \frac{5}{2}$. D. Tất cả đều đúng.

Lời giải.

Điều kiện: $x \neq 2$. Bất phương trình tương đương với $2x < 5 \Leftrightarrow x < \frac{5}{2}$, kết hợp với điều kiện ta có $x < \frac{5}{2}$ và $x \neq 2$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 8. Bất phương trình $2x - 1 \geq 0$ tương đương với bất phương trình nào sau đây?

- A. $2x - 1 + \frac{1}{x-3} \geq \frac{1}{x-3}$. B. $2x - 1 - \frac{1}{x+3} \geq -\frac{1}{x+3}$.
C. $(2x - 1)\sqrt{x - 2018} \geq \sqrt{x - 2018}$. D. $\frac{2x - 1}{\sqrt{x - 2018}} \geq \frac{1}{\sqrt{x - 2018}}$.

Lời giải.

Nếu ta cộng $\frac{1}{x-3}$ vào hai vế bất phương trình $2x - 1 \geq 0$ thì điều kiện của bất phương trình sẽ thay đổi suy ra đáp án A sai.

Tương tự nếu ta nhân hoặc chia hai vế bất phương trình đã cho với $\sqrt{x - 2018}$ thì điều kiện của bất phương trình ban đầu cũng sẽ thay đổi suy ra đáp án C và D sai

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 9. Cặp bất phương trình nào sau đây là tương đương?

- A. $x - 2 \leq 0$ và $x^2(x - 2) \leq 0$. B. $x - 2 < 0$ và $x^2(x - 2) > 0$.
C. $x - 2 < 0$ và $x^2(x - 2) < 0$. D. $x - 2 \geq 0$ và $x^2(x - 2) \geq 0$.

Lời giải.

Ta xét từng bất phương trình trong đáp án A.

$$x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2.$$

$$x^2(x - 2) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2.$$

Cả hai bất phương trình có cùng tập nghiệm nên chúng tương đương.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 10. Bất phương trình nào sau đây tương đương với bất phương trình $x + 5 > 0$?

- A. $(x - 1)^2(x + 5) > 0$. B. $x^2(x + 5) > 0$.

C. $\sqrt{x+5}(x+5) > 0$.

D. $\sqrt{x+5}(x-5) > 0$.

Lời giải.Bất phương trình $x+5 > 0 \Leftrightarrow x > -5$ Bất phương trình $(x-1)^2(x+5) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x > -5 \end{cases}$. Đáp án A sai.Bất phương trình $x^2(x+5) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x > -5 \end{cases}$. Đáp án B sai.Bất phương trình $\sqrt{x+5}(x+5) > 0 \Leftrightarrow x > -5$. Đáp án C đúngChọn đáp án **C**

□

Câu 11. Bất phương trình $(x+1)\sqrt{x} \leq 0$ tương đương với

A. $\sqrt{x(x+1)^2} \leq 0$. B. $(x+1)\sqrt{x} < 0$. C. $(x+1)^2\sqrt{x} \leq 0$. D. $(x+1)^2\sqrt{x} < 0$.

Lời giải.Bất phương trình $(x+1)\sqrt{x} \leq 0$ có điều kiện $x \geq 0$. Do đó $(x+1)\sqrt{x} \leq 0 \Leftrightarrow x = 0$. Ta có

• $\sqrt{x(x+1)^2} \leq 0 \Leftrightarrow x(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$. Đáp án A sai.

• $(x+1)\sqrt{x} < 0$ vô nghiệm vì từ điều kiện $x \geq 0 \Rightarrow (x+1)\sqrt{x} \geq 0$. Đáp án B sai.

• $(x+1)^2\sqrt{x} \leq 0 \Leftrightarrow x = 0$. Đáp án C đúng.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 12. Bất phương trình $\sqrt{x-1} \geq x$ tương đương với

A. $(1-2x)\sqrt{x-1} \geq x(1-2x)$.

B. $(2x+1)\sqrt{x-1} \geq x(2x+1)$.

C. $(1-x^2)\sqrt{x-1} \geq x(1-x^2)$.

D. $x\sqrt{x-1} \leq x^2$.

Lời giải.

Bất phương trình $\sqrt{x-1} \geq x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x-1 \geq x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-x+1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$.

Ta có

• $(1-2x)\sqrt{x-1} \geq x(1-2x) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{x-1} \leq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$. Đáp án A sai.

• $(2x+1)\sqrt{x-1} \geq x(2x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{x-1} \geq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-x+1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$. Đáp án B đúng.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 13. Với giá trị nào của a thì hai bất phương trình $(a+1)x - a + 2 > 0$ và $(a-1)x - a + 3 > 0$ tương đương?

A. $a = 1$.

B. $a = 5$.

C. $a = -1$.

D. $a = 2$.

Lời giải.

Phương pháp trắc nghiệm: Thay lần lượt từng đáp án vào hai phương trình.

Thay $a = 1$, ta được $\begin{cases} (a+1)x - a + 2 > 0 \Rightarrow 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2} \\ (a-1)x - a + 3 > 0 \Rightarrow 0x + 2 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \end{cases}$. Không thỏa.

$$\text{Thay } a = 5, \text{ ta được } \begin{cases} (a+1)x - a + 2 > 0 \Rightarrow 6x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2} \\ (a-1)x - a + 3 > 0 \Rightarrow 4x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 14. Với giá trị nào của m thì hai bất phương trình $(m+2)x \leq m+1$ và $3m(x-1) \leq -x-1$ tương đương?

A. $m = -3$.

B. $m = -2$.

C. $m = -1$.

D. $m = 3$.

Lời giải.

Viết lại $(m+2)x \leq m+1$ (1) và $(3m+1)x \leq 3m-1$ (2).

$$\text{Thay } m = -3, \text{ ta được } \begin{cases} (m+2)x \leq m+1 \Rightarrow -x \leq -2 \Leftrightarrow x \geq 2 \\ (3m+1)x \leq 3m-1 \Rightarrow -8x \leq -10 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{4} \end{cases} \text{ . Không thỏa mãn.}$$

Thay $m = -2$ thì hệ số của x ở (1) bằng 0, hệ số của x ở (2) khác 0. Không thỏa mãn.

Thay $m = -1$ thì hệ số của x ở (1) dương, hệ số của x ở (2) âm. Suy ra nghiệm của hai bất phương trình ngược chiều. Không thỏa.

Đến đây dùng phương pháp loại trừ thì chỉ còn đáp án D. Thay $m = 3$, ta được

$$\begin{cases} (m+2)x \leq m+1 \Rightarrow 5x \leq 4 \Leftrightarrow x \leq \frac{4}{5} \\ (3m+1)x \leq 3m-1 \Rightarrow 10x \leq 8 \Leftrightarrow x \leq \frac{4}{5}. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 15. Với giá trị nào của m thì hai bất phương trình $(m+3)x \geq 3m-6$ và $(2m-1)x \leq m+2$ tương đương?

A. $m = 1$.

B. $m = 0$.

C. $m = 4$.

D. $m = 0$ hoặc $m = 4$.

Lời giải.

Thay $m = 1$, thì hệ số của x ở (1) dương, hệ số của x ở (2) dương. Suy ra nghiệm của hai bất phương trình ngược chiều. Không thỏa.

$$\text{Thay } m = 0, \text{ ta được } \begin{cases} (m+3)x \geq 3m-6 \Rightarrow 3x \geq -6 \Leftrightarrow x \geq -2 \\ (2m-1)x \leq m+2 \Rightarrow -x \leq 2 \Leftrightarrow x \geq -2 \end{cases} \text{ . Ta thấy thỏa mãn nhưng chưa đủ}$$

kết luận là đáp án B vì trong đáp án D cũng có $m = 0$. Ta thử tiếp $m = 4$.

Thay $m = 4$, thì hệ số của x ở (1) dương, hệ số của x ở (2) dương. Suy ra nghiệm của hai bất phương trình ngược chiều. Không thỏa mãn.

Vậy với $m = 0$ thỏa mãn.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 16. Bất phương trình $ax + b > 0$ vô nghiệm khi

A. $\begin{cases} a \neq 0 \\ b = 0 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} a = 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$.

Lời giải.

- Nếu $a > 0$ thì $ax + b > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$ nên $S = (-\frac{b}{a}; +\infty) \neq \emptyset$.
- Nếu $a < 0$ thì $ax + b > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$ nên $S = (-\infty; -\frac{b}{a}) \neq \emptyset$.
- Nếu $a = 0$ thì $ax + b > 0$ có dạng $0x + b > 0$.

+ Với $b > 0$ thì $S = \mathbb{R}$.

+ Với $b \leq 0$ thì $S = \emptyset$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 17. Bất phương trình $ax + b > 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi

- A. $\begin{cases} a = 0 \\ b > 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} a = 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$.

Lời giải.

- Nếu $a > 0$ thì $ax + b > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$ nên $S = (-\frac{b}{a}; +\infty) \neq \emptyset$.
- Nếu $a < 0$ thì $ax + b > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$ nên $S = (-\infty; -\frac{b}{a}) \neq \emptyset$.
- Nếu $a = 0$ thì $ax + b > 0$ có dạng $0x + b > 0$.

+ Với $b \leq 0$ thì $S = \emptyset$.

+ Với $b > 0$ thì $S = \mathbb{R}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 18. Bất phương trình $ax + b \leq 0$ vô nghiệm khi

- A. $\begin{cases} a = 0 \\ b > 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} a = 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$.

Lời giải.

- Nếu $a > 0$ thì $ax + b \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{b}{a}$ nên $S = (-\infty; -\frac{b}{a}] \neq \emptyset$.
- Nếu $a < 0$ thì $ax + b \leq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{b}{a}$ nên $S = [-\frac{b}{a}; +\infty) \neq \emptyset$.
- Nếu $a = 0$ thì $ax + b \leq 0$ có dạng $0x + b \leq 0$.

+ Với $b \leq 0$ thì $S = \mathbb{R}$.

+ Với $b > 0$ thì $S = \emptyset$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 19. Tập nghiệm S của bất phương trình $5x - 1 \geq \frac{2x}{5} + 3$ là

- A. $S = \mathbb{R}$. B. $S = (-\infty; 2)$. C. $S = (-\frac{5}{2}; +\infty)$. D. $S = [\frac{20}{23}; +\infty)$.

Lời giải.

Bất phương trình $5x - 1 \geq \frac{2x}{5} + 3 \Leftrightarrow 25x - 5 \geq 2x + 15 \Leftrightarrow 23x \geq 20 \Leftrightarrow x \geq \frac{20}{23}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 20. Bất phương trình $\frac{3x+5}{2} - 1 \leq \frac{x+2}{3} + x$ có bao nhiêu nghiệm nguyên lớn hơn -10 ?

- A. 4. B. 5. C. 9. D. 10.

Lời giải.

Bất phương trình $\frac{3x+5}{2} - 1 \leq \frac{x+2}{3} + x \Leftrightarrow 9x + 15 - 6 \leq 2x + 4 + 6x \Leftrightarrow x \leq -5$.

Vì $x \in \mathbb{Z}$, $-10 < x \leq -5$ nên có 5 nghiệm nguyên.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 21. Tập nghiệm S của bất phương trình $(1 - \sqrt{2})x < 3 - 2\sqrt{2}$ là

- A. $S = (-\infty; 1 - \sqrt{2})$. B. $S = (1 - \sqrt{2}; +\infty)$. C. $S = \mathbb{R}$. D. $S = \emptyset$.

Lời giải.

$$\text{Bất phương trình } (1 - \sqrt{2})x < 3 - 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x > \frac{3 - 2\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{(1 - \sqrt{2})^2}{1 - \sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 22. Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình $x(2 - x) \geq x(7 - x) - 6(x - 1)$ trên đoạn $[-10; 10]$ bằng

- A. 5. B. 6. C. 21. D. 40.

Lời giải.

$$\text{Ta có } x(2 - x) \geq x(7 - x) - 6(x - 1) \Leftrightarrow 2x - x^2 \geq 7x - x^2 - 6x + 6 \Leftrightarrow x \geq 6.$$

$$\text{Mà } x \in \mathbb{Z}, x \in [-10; 10] \Rightarrow x \in \{6; 7; 8; 9; 10\}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 23. Bất phương trình $(2x - 1)(x + 3) - 3x + 1 \leq (x - 1)(x + 3) + x^2 - 5$ có tập nghiệm là

- A. $S = (-\infty; -\frac{2}{3})$. B. $S = [-\frac{2}{3}; +\infty)$. C. $S = \mathbb{R}$. D. $S = \emptyset$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } (2x - 1)(x + 3) - 3x + 1 \leq (x - 1)(x + 3) + x^2 - 5 \text{ tương đương với}$$

$$2x^2 + 5x - 3 - 3x + 1 \leq x^2 + 2x - 3 + x^2 - 5 \Leftrightarrow 0 \cdot x \leq -6 \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 24. Tập nghiệm S của bất phương trình $5(x + 1) - x(7 - x) > -2x$ là

- A. $S = \mathbb{R}$. B. $S = (-\frac{5}{2}; +\infty)$. C. $S = (-\infty; \frac{5}{2})$. D. $S = \emptyset$.

Lời giải.

$$\text{Bất phương trình } 5(x + 1) - x(7 - x) > -2x \text{ tương đương với}$$

$$5x + 5 - 7x + x^2 > -2x \Leftrightarrow x^2 + 5 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \Rightarrow S = \mathbb{R}.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 25. Tập nghiệm S của bất phương trình $(x + \sqrt{3})^2 \geq (x - \sqrt{3})^2 + 2$ là

- A. $S = \left[\frac{\sqrt{3}}{6}; +\infty\right)$. B. $S = (\frac{\sqrt{3}}{6}; +\infty)$. C. $S = \left(-\infty; \frac{\sqrt{3}}{6}\right]$. D. $S = \left(-\infty; \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$.

Lời giải.

$$\text{Bất phương trình } (x + \sqrt{3})^2 \geq (x - \sqrt{3})^2 + 2 \text{ tương đương với}$$

$$x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 \geq x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 + 2 \Leftrightarrow 4\sqrt{3}x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow S = \left[\frac{\sqrt{3}}{6}; +\infty\right).$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 26. Tập nghiệm S của bất phương trình $(x - 1)^2 + (x - 3)^2 + 15 < x^2 + (x - 4)^2$ là

- A. $S = (-\infty; 0)$. B. $S = (0; +\infty)$. C. $S = \mathbb{R}$. D. $S = \emptyset$.

Lời giải.

$$\text{Bất phương trình tương đương}$$

$$x^2 - 2x + 1 + x^2 - 6x + 9 + 15 < x^2 + x^2 - 8x + 16 \Leftrightarrow 0 \cdot x < -9 \text{ (vô nghiệm)} \Rightarrow S = \emptyset.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 27. Tập nghiệm S của bất phương trình $x + \sqrt{x} < (2\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)$ là

- A. $S = (-\infty; 3)$. B. $S = (3; +\infty)$. C. $S = [3; +\infty)$. D. $S = (-\infty; 3]$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq 0$.

Bất phương trình tương đương

$$x + \sqrt{x} < 2x - 2\sqrt{x} + 3\sqrt{x} - 3 \Leftrightarrow -x < -3 \Leftrightarrow x > 3 \Rightarrow S = (3; +\infty).$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 28. Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình $\frac{x-2}{\sqrt{x-4}} \leq \frac{4}{\sqrt{x-4}}$ bằng

- A. 15. B. 11. C. 26. D. 0.

Lời giải.

Điều kiện: $x > 4$. Bất phương trình tương đương

$$x - 2 \leq 4 \Leftrightarrow x \leq 6 \Rightarrow 4 < x \leq 6, x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 5; x = 6 \Rightarrow S = 5 + 6 = 11.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 29. Tập nghiệm S của bất phương trình $(x-3)\sqrt{x-2} \geq 0$ là

- A. $S = [3; +\infty)$. B. $S = (3; +\infty)$. C. $S = \{2\} \cup [3; +\infty)$. D. $S = \{2\} \cup (3; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \geq 2$. Bất phương trình tương đương với
$$\begin{cases} \sqrt{x-2} = 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x \geq 3. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 30. Bất phương trình $(m-1)x > 3$ vô nghiệm khi

- A. $m \neq 1$. B. $m < 1$. C. $m = 1$. D. $m > 1$.

Lời giải.

Rõ ràng nếu $m \neq 1$ bất phương trình luôn có nghiệm. Xét $m = 1$ bất phương trình trở thành $0x > 3$ (vô nghiệm)

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 31. Bất phương trình $(m^2 - 3m)x + m < 2 - 2x$ vô nghiệm khi

- A. $m \neq 1$. B. $m \neq 2$. C. $m = 1, m = 2$. D. $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương với $(m^2 - 3m + 2)x < 2 - m$.

Rõ ràng nếu $m^2 - 3m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 2 \end{cases}$ bất phương trình luôn có nghiệm.

Với $m = 1$ bất phương trình trở thành $0x < 1$: vô nghiệm.

Với $m = 2$ bất phương trình trở thành $0x < 0$: vô nghiệm.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 32. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để bất phương trình $(m^2 - m)x < m$ vô nghiệm?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Lời giải.

Rõ ràng nếu $m^2 - m \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$ bất phương trình luôn có nghiệm.

Với $m = 1$ bất phương trình trở thành $0x < 1$: nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Với $m = 0$ bất phương trình trở thành $0x < 0$: vô nghiệm.

Chọn đáp án (B) □

Câu 33. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $(m^2 - m)x + m < 6x - 2$ vô nghiệm. Tổng các phần tử trong S bằng

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương với $(m^2 - m - 6)x < -2 - m$.

Rõ ràng nếu $m^2 - m - 6 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq 3 \end{cases}$ bất phương trình luôn có nghiệm.

Với $m = -2$ bất phương trình trở thành $0x < 0$: vô nghiệm.

Với $m = 3$ bất phương trình trở thành $0x < -5$: vô nghiệm.

Suy ra $S = \{-2; 3\} \Rightarrow -2 + 3 = 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 34. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để bất phương trình $mx - 2 \leq x - m$ vô nghiệm?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. Vô số.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương với $(m - 1)x \leq 2 - m$.

Rõ ràng nếu $m \neq 1$ bất phương trình luôn có nghiệm.

Xét $m = 1$ bất phương trình trở thành $0x \leq 1$: nghiệm đúng với mọi x .

Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (A) □

Câu 35. Bất phương trình $(m^2 + 9)x + 3 \geq m(1 - 6x)$ nghiệm đúng với mọi x khi

A. $m \neq 3$.

B. $m = 3$.

C. $m \neq -3$.

D. $m = -3$.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương với $(m + 3)^2 x \geq m - 3$.

Với $m = -3$ bất phương trình trở thành $0x \geq -6$: nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 36. Bất phương trình $4m^2(2x - 1) \geq (4m^2 + 5m + 9)x - 12m$ nghiệm đúng với mọi x khi

A. $m = -1$.

B. $m = \frac{9}{4}$.

C. $m = 1$.

D. $m = -\frac{9}{4}$.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương với $(4m^2 - 5m - 9)x \geq 4m^2 - 12m$.

Dễ dàng thấy nếu $4m^2 - 5m - 9 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq \frac{9}{4} \end{cases}$ thì bất phương trình không thể có nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Với $m = -1$ bất phương trình trở thành $0x \geq 16$: vô nghiệm.

Với $m = \frac{9}{4}$ bất phương trình trở thành $0x \geq -\frac{27}{4}$: nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy giá trị cần tìm là $m = \frac{9}{4}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 37. Bất phương trình $m^2(x - 1) \geq 9x + 3m$ nghiệm đúng với mọi x khi

A. $m = 1$.

B. $m = -3$.

C. $m = \emptyset$.

D. $m = -1$.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương với $(m^2 - 9)x \geq m^2 + 3m$.

Dễ dàng thấy nếu $m^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 3$ thì bất phương trình không thể có nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

Với $m = 3$ bất phương trình trở thành $0x > 18$: vô nghiệm.

Với $m = -3$ bất phương trình trở thành $0x \geq 0$: nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy giá trị cần tìm là $m = -3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 38. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $(x + m)m + x > 3x + 4$ có tập nghiệm là $(-m - 2; +\infty)$.

A. $m = 2$.

B. $m \neq 2$.

C. $m > 2$.

D. $m < 2$.

Lời giải.

Để ý rằng, bất phương trình $ax + b > 0$ (hoặc $< 0, \geq 0, \leq 0$).

Vô nghiệm ($S = \emptyset$) hoặc có tập nghiệm là $S = \mathbb{R}$ thì chỉ xét riêng $a = 0$.

Có tập nghiệm là một tập con của $\mathbb{R}$ thì chỉ xét $a > 0$ hoặc $a < 0$.

Bất phương trình viết lại $(m - 2)x > 4 - m^2$.

Xét $m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > 2$, bất phương trình $\Leftrightarrow x > \frac{4 - m^2}{m - 2} = -m - 2 \Rightarrow S = (-m - 2; +\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 39. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $m(x - m) \geq x - 1$ có tập nghiệm là $(-\infty; m + 1]$.

A. $m = 1$.

B. $m > 1$.

C. $m < 1$.

D. $m \geq 1$.

Lời giải.

Bất phương trình viết lại $(m - 1)x \geq m^2 - 1$.

Xét $m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$, bất phương trình $\Leftrightarrow x \geq \frac{m^2 - 1}{m - 1} = m + 1 \Rightarrow S = [m + 1; +\infty)$.

Xét $m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$, bất phương trình $\Leftrightarrow x \leq \frac{m^2 - 1}{m - 1} = m + 1 \Rightarrow S = (-\infty; m + 1]$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 40. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m(x - 1) < 2x - 3$ có nghiệm.

A. $m \neq 2$.

B. $m > 2$.

C. $m = 2$.

D. $m < 2$.

Lời giải.

Bất phương trình viết lại $(m - 2)x < m - 3$.

Rõ ràng $m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$ thì bất phương trình có nghiệm.

Xét $m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$, bất phương trình trở thành $0x < -1$ (vô lý).

Vậy bất phương trình có nghiệm khi $m \neq 2$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 41. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m(x-1) < 3-x$ có nghiệm.

- A. $m \neq 1$. B. $m = 1$. C. $m \in \mathbb{R}$. D. $m \neq 3$.

Lời giải.

Bất phương trình viết lại $(m+1)x < m+3$.

Rõ ràng $m+1 \neq 0$ thì bất phương trình có nghiệm.

Xét $m+1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$, bất phương trình trở thành $0x < 2$ (luôn đúng với mọi x).

Vậy bất phương trình có nghiệm với mọi m .

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 42. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m^2x - 1 < mx + m$ có nghiệm.

- A. $m = 1$. B. $m = 0$. C. $m = 0; m = 1$. D. $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Bất phương trình viết lại $(m^2 - m)x < m + 1$.

Rõ ràng $m^2 - m \neq 0$ thì bất phương trình có nghiệm.

$$\text{Xét } m^2 - m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \Rightarrow 0x < 1 \Rightarrow S = \mathbb{R} \\ m = 1 \Rightarrow 0x < 2 \Rightarrow S = \mathbb{R}. \end{cases}$$

Hợp hai trường hợp, ta được bất phương trình có nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 43. Gọi S là tập nghiệm của bất phương trình $mx + 6 < 2x + 3m$ với $m < 2$. Hỏi tập hợp nào sau đây là phần bù của tập S ?

- A. $(3; +\infty)$. B. $[3; +\infty)$. C. $(-\infty; 3)$. D. $(-\infty; 3]$.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương với $(m-2)x < 3m-6$. Với $m < 2$, bất phương trình tương đương với

$$x > \frac{3m-6}{m-2} = 3 \Rightarrow S = (3; +\infty).$$

Suy ra phần bù của S là $(-\infty; 3]$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 44. Tìm giá trị thực của tham số m để bất phương trình $m(2x-1) \geq 2x+1$ có tập nghiệm là $[1; +\infty)$.

- A. $m = 3$. B. $m = 1$. C. $m = -1$. D. $m = -2$.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương với $(2m-2)x \geq m+1$.

• Với $m = 1$, bất phương trình trở thành $0x \geq 2$: vô nghiệm. Do đó $m = 1$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

• Với $m > 1$, bất phương trình tương đương với $x \geq \frac{m+1}{2m-2} \Rightarrow S = \left[\frac{m+1}{2m-2}; +\infty \right)$.

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \frac{m+1}{2m-2} = 1 \Leftrightarrow m = 3$: thỏa mãn $m > 1$.

• Với $m < 1$, bất phương trình tương đương với $x \leq \frac{m+1}{2m-2} \Rightarrow S = \left(-\infty; \frac{m+1}{2m-2} \right]$: không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $m = 3$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 45. Tìm giá trị thực của tham số m để bất phương trình $2x - m < 3(x - 1)$ có tập nghiệm là $(4; +\infty)$.

A. $m \neq 1$.

B. $m = 1$.

C. $m = -1$.

D. $m > 1$.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương với $2x - m < 3x - 3 \Leftrightarrow x > 3 - m$.

Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S = (3 - m; +\infty)$.

Để bất phương trình trên có tập nghiệm là $(4; +\infty)$ thì $3 - m = 4 \Leftrightarrow m = -1$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 46. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $mx + 4 > 0$ nghiệm đúng với mọi $|x| < 8$.

A. $m \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

B. $m \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$.

C. $m \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

D. $m \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right]$.

Lời giải.

Cách 1. Ta có $|x| < 8 \Leftrightarrow -8 < x < 8 \Leftrightarrow x \in (-8; 8)$.

• TH1: $m > 0$, bất phương trình $\Leftrightarrow mx > -4 \Leftrightarrow x > -\frac{4}{m} \Rightarrow S = \left(-\frac{4}{m}; +\infty\right)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (-8; 8) \subset S \Leftrightarrow -\frac{4}{m} \leq -8 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2}$.

Suy ra $0 < m \leq \frac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

• TH2: $m = 0$, bất phương trình trở thành $0.x + 4 > 0$: đúng với mọi x .

Do đó $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

• TH3: $m < 0$, bất phương trình $\Leftrightarrow mx > -4 \Leftrightarrow x < -\frac{4}{m} \Rightarrow S = \left(-\infty; -\frac{4}{m}\right)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (-8; 8) \subset S \Leftrightarrow -\frac{4}{m} \geq 8 \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{2}$.

Suy ra $-\frac{1}{2} \leq m < 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Kết hợp các trường hợp ta được $-\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

Cách 2. Yêu cầu bài toán tương đương với $f(x) = mx + 4 > 0, \forall x \in (-8; 8) \Leftrightarrow$ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(-8; 8)$ nằm phía trên trục hoành hai đầu mút của đoạn thẳng đó đều nằm phía trên trục hoành

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(-8) \geq 0 \\ f(8) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8m + 4 \geq 0 \\ 8m + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{2} \\ m \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 47. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $m^2(x - 2) - mx + x + 5 < 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-2018; 2]$.

A. $m < \frac{7}{2}$.

B. $m = \frac{7}{2}$.

C. $m > \frac{7}{2}$.

D. $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Cách 1. Bất phương trình $\Leftrightarrow (m^2 - m + 1)x < 2m^2 - 5 \Rightarrow x < \frac{2m^2 - 5}{m^2 - m + 1}$.

$$\Rightarrow S = \left(-\infty; \frac{2m^2 - 5}{m^2 - m + 1}\right) \left(\text{vì } m^2 - m + 1 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall m \in \mathbb{R} \right).$$

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow [-2018; 2] \subset \left(-\infty; \frac{2m^2 - 5}{m^2 - m + 1}\right) \Leftrightarrow 2 < \frac{2m^2 - 5}{m^2 - m + 1} \Leftrightarrow m > \frac{7}{2}.$$

Cách 2. Ta có $(m^2 - m + 1)x < 2m^2 - 5 \Leftrightarrow (m^2 - m + 1)x - 2m^2 + 5 < 0$.

Hàm số bậc nhất $y = (m^2 - m + 1)x - 2m^2 + 5$ có hệ số $m^2 - m + 1 > 0$ nên đồng biến.

$$\text{Do đó yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow y(2) < 0 \Leftrightarrow (m^2 - m + 1) \cdot 2 - 2m^2 + 5 < 0 \Leftrightarrow m > \frac{7}{2}.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 48. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $m^2(x - 2) + m + x \geq 0$ có nghiệm $x \in [-1; 2]$.

A. $m \geq -2$.

B. $m = -2$.

C. $m \geq -1$.

D. $m \leq -2$.

Lời giải.

$$\text{Bất phương trình} \Leftrightarrow (m^2 + 1)x \geq 2m^2 - m \Rightarrow x \geq \frac{2m^2 - m}{m^2 + 1} \Rightarrow S = \left[\frac{2m^2 - m}{m^2 + 1}; +\infty\right).$$

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow [-1; 2] \cap \left[\frac{2m^2 - m}{m^2 + 1}; +\infty\right) \neq \emptyset \Leftrightarrow \frac{2m^2 - m}{m^2 + 1} \leq 2 \Leftrightarrow m \geq -2.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 49. Tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2 - x > 0 \\ 2x + 1 < x - 2 \end{cases}$ là

A. $S = (-\infty; -3)$.

B. $S = (-\infty; 2)$.

C. $S = (-3; 2)$.

D. $S = (-3; +\infty)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} 2 - x > 0 \\ 2x + 1 < x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 > x \\ x < -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x < -3 \end{cases} \Leftrightarrow x < -3.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 50. Tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} \frac{2x - 1}{3} < -x + 1 \\ \frac{4 - 3x}{2} < 3 - x \end{cases}$ là

A. $S = \left(-2; \frac{4}{5}\right)$.

B. $S = \left(\frac{4}{5}; +\infty\right)$.

C. $S = (-\infty; -2)$.

D. $S = (-2; +\infty)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \frac{2x - 1}{3} > -x + 1 \\ \frac{4 - 3x}{2} < 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 > -3x + 3 \\ 4 - 3x < 6 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x > 4 \\ -x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{4}{5} \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{4}{5}.$$

Chọn đáp án **B** □

Câu 51. Tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x - 1 < -x + 2017 \\ 3 + x > \frac{2018 - 2x}{2} \end{cases}$ là

A. $S = \emptyset$.

B. $S = \left(\frac{2012}{8}; \frac{2018}{3}\right)$.

C. $S = \left(-\infty; \frac{2012}{8}\right)$.

D. $S = \left(\frac{2018}{3}; +\infty\right)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} 2x - 1 < -x + 2017 \\ 3 + 3x > \frac{2018 - 2x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x < 2018 \\ 6 + 6x > 2018 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{2018}{3} \\ x > \frac{2012}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2018}{3} < x < \frac{2012}{8}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 52. Tập $S = \left[-1; \frac{3}{2}\right)$ là tập nghiệm của hệ bất phương trình sau đây?

A. $\begin{cases} 2(x-1) < 1 \\ x \geq -1 \end{cases}$. B. $\begin{cases} 2(x-1) > 1 \\ x \geq -1 \end{cases}$. C. $\begin{cases} 2(x-1) < 1 \\ x \leq -1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} 2(x-1) < 1 \\ x \leq -1 \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} 2(x-1) < 1 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x < 3 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x < \frac{3}{2} \Rightarrow S = \left[-1; \frac{3}{2}\right)$.

Ta có $\begin{cases} 2(x-1) > 1 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x > 3 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{3}{2} \Rightarrow S = \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. B sai.

Ta có $\begin{cases} 2(x-1) < 1 \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x < 3 \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -1 \Rightarrow S = (-\infty; -1]$. C sai.

Ta có $\begin{cases} 2(x-1) > 1 \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x > 3 \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset \Rightarrow S = \emptyset$. D sai.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 53. Tập nghiệm S của bất phương trình $\begin{cases} 2(x-1) < x+3 \\ 2x \leq 3(x+1) \end{cases}$ là

A. $S = (-3; 5)$. B. $S = (-3; 5]$. C. $S = [-3; 5)$. D. $S = [-3; 5]$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} 2(x-1) < x+3 \\ 2x \leq 3(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2 < x+3 \\ 2x \leq 3x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x < 5 \Rightarrow S = [-3; 5)$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 54. Biết rằng bất phương trình $\begin{cases} x-1 < 2x-3 \\ \frac{5-3x}{2} \leq x-3 \\ 3x \leq x+5 \end{cases}$ có tập nghiệm là một đoạn $[a; b]$. Tính $a+b$.

A. $\frac{11}{2}$. B. 8. C. $\frac{9}{2}$. D. $\frac{47}{10}$.

Lời giải.

Bất phương trình $\begin{cases} x-1 < 2x-3 \\ 5-3x \leq 2x-6 \\ 3x \leq x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x \\ 11 \leq 5x \\ 2x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \geq \frac{11}{5} \\ x \leq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{11}{5} \leq x \leq \frac{5}{2}$.

Vậy $a+b = \frac{11}{5} + \frac{5}{2} = \frac{47}{10}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 55. Số nghiệm nguyên của hệ bất phương trình $\begin{cases} 6x + \frac{5}{7} > 4x + 7 \\ \frac{8x+3}{2} < 2x+25 \end{cases}$ là

A. Vô số. B. 4. C. 8. D. 0.

Lời giải.

$$\text{Bất phương trình} \Leftrightarrow \begin{cases} 42x + 5 > 28x + 49 \\ 8x + 3 < 4x + 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x > 44 \\ 4x < 47 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{44}{14} \\ x < \frac{47}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{44}{14} < x < \frac{47}{4}.$$

Mà $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\}$.Chọn đáp án **C** □

Câu 56. Tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $\begin{cases} 5x - 2 < 4x + 5 \\ x^2 < (x + 2)^2 \end{cases}$ bằng

A. 21 . B. 27. C. 28. D. 29.

Lời giải.

$$\text{Bất pt} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 2 < 4x + 5 \\ x^2 < x^2 + 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 7 \\ -4x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 7 \\ -x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 7 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 7.$$

Mà $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Vậy tổng cần tìm bằng 21.Chọn đáp án **A** □

Câu 57. Cho bất phương trình $\begin{cases} (1 - x)^2 \leq 8 - 4x + x^2 \\ (x + 2)^3 < x^3 + 6x^2 + 13x + 9 \end{cases}$. Tổng nghiệm nguyên lớn nhất và nghiệm nguyên nhỏ nhất của bất phương trình bằng

A. 2 . B. 3. C. 6. D. 7.

Lời giải.

$$\text{Bất pt} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x + x^2 \leq 8 - 4x + x^2 \\ x^3 + 6x^2 + 12x + 8 < x^3 + 6x^2 + 13x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x \leq 8 - 4x \\ 12x + 8 < 13x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{7}{2} \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x \leq \frac{7}{2}.$$

Mà $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{0; 1; 2; 3\}$. Vậy tổng cần tính là $0 + 3 = 3$.Chọn đáp án **B** □

Câu 58. Hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ x - m < 2 \end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $m < -\frac{3}{2}$. B. $m \leq -\frac{3}{2}$. C. $m > -\frac{3}{2}$. D. $m \geq -\frac{3}{2}$.

Lời giải.Bất phương trình $2x - 1 > 0$ có tập nghiệm $S_1 = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.Bất phương trình $x - m < 2$ có tập nghiệm $S_2 = (-\infty; m + 2)$.Hệ có nghiệm khi và chỉ khi $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow m + 2 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow m > -\frac{3}{2}$.Chọn đáp án **C** □

Câu 59. Hệ bất phương trình $\begin{cases} 3(x - 6) < -3 \\ \frac{5x + m}{2} > 7 \end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $m > -11$. B. $m \geq -11$. C. $m < -11$. D. $m \leq -11$.

Lời giải.

Bất phương trình $3(x - 6) < -3$ có tập nghiệm $S_1 = (-\infty; 5)$.

Bất phương trình $\frac{5x + m}{2} > 7$ có tập nghiệm $S_2 = \left(\frac{14 - m}{5}; +\infty\right)$.

Hệ có nghiệm khi và chỉ khi $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow \frac{14 - m}{5} < 5 \Leftrightarrow m > -11$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 60. Hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 1 \leq 0 \\ x - m > 0 \end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $m > 1$.

B. $m = 1$.

C. $m < 1$.

D. $m \neq 1$.

Lời giải.

Bất phương trình $x^2 - 1 \leq 0$ có tập nghiệm $S_1 = [-1; 1]$.

Bất phương trình $x - m > 0$ có tập nghiệm $S_2 = (m; +\infty)$.

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow m < 1$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 61. Hệ bất phương trình $\begin{cases} m(mx - 1) < 2 \\ m(mx - 2) \geq 2m + 1 \end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $m < \frac{1}{3}$.

B. $0 \neq m < \frac{1}{3}$.

C. $m \neq 0$.

D. $m < 0$.

Lời giải.

Hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} m^2x < m + 2 \\ m^2x \geq 4m + 1 \end{cases}$.

Với $m = 0$, ta có hệ bất phương trình trở thành $\begin{cases} 0x < 2 \\ 0x \geq 1 \end{cases}$: hệ bất phương trình vô nghiệm.

Với $m \neq 0$, ta có hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} x < \frac{m + 2}{m^2} \\ x \geq \frac{4m + 1}{m^2} \end{cases}$.

Suy ra hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\frac{m + 2}{m^2} > \frac{4m + 1}{m^2} \Leftrightarrow m < \frac{1}{3}$.

Vậy $0 \neq m < \frac{1}{3}$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 62. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x - 1 \geq 3 \\ x - m \leq 0 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

A. $m > 2$.

B. $m = 2$.

C. $m \leq 2$.

D. $m = 1$.

Lời giải.

Bất phương trình $2x - 1 \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 2 \Rightarrow S_1 = [2; +\infty)$.

Bất phương trình $x - m \leq 0 \Leftrightarrow x \leq m \Rightarrow S_2 = (-\infty; m]$.

Hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2$ là tập hợp có đúng một phần tử $\Leftrightarrow 2 = m$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 63. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} m^2x \geq 6 - x \\ 3x - 1 \leq x + 5 \end{cases}$ có nghiệm

duy nhất.

A. $m = 1$.

B. $m = -1$.

C. $m = \pm 1$.

D. $m \geq 1$.

Lời giải.

$$\text{Bất phương trình } m^2x \geq 6 - x \Leftrightarrow (m^2 + 1)x \geq 6 \Leftrightarrow x \geq \frac{6}{m^2 + 1} \Rightarrow S_1 = \left[\frac{6}{m^2 + 1}; +\infty \right).$$

$$\text{Bất phương trình } 3x - 1 \leq x + 5 \Leftrightarrow x \leq 3 \Rightarrow S_2 = (-\infty; 3].$$

$$\text{Hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất } \Leftrightarrow S_1 \cap S_2 \text{ là tập hợp có đúng một phần tử } \Leftrightarrow \frac{6}{m^2 + 1} = 3 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 64. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình
$$\begin{cases} (x - 3)^2 \geq x^2 + 7x + 1 \\ 2m \leq 8 + 5x \end{cases}$$
 có nghiệm duy nhất.

A. $m = \frac{72}{13}$.

B. $m > \frac{72}{13}$.

C. $m < \frac{72}{13}$.

D. $m \geq \frac{72}{13}$.

Lời giải.

$$\text{Bất phương trình } (x - 3)^2 \geq x^2 + 7x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 \geq x^2 + 7x + 1 \Leftrightarrow x \leq \frac{8}{13} \Rightarrow S_1 = \left(-\infty; \frac{8}{13} \right].$$

$$\text{Bất phương trình } 2m \leq 8 + 5x \Leftrightarrow x \geq \frac{2m - 8}{5} \Rightarrow S_2 = \left[\frac{2m - 8}{5}; +\infty \right).$$

$$\text{Để hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất } \Leftrightarrow S_1 \cap S_2 \text{ là tập hợp có đúng một phần tử } \Leftrightarrow \frac{8}{13} = \frac{2m - 8}{5} \Leftrightarrow m = \frac{72}{13}.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 65. Tìm giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình
$$\begin{cases} mx \leq m - 3 \\ (m + 3)x \geq m - 9 \end{cases}$$
 có nghiệm duy nhất.

A. $m = 1$.

B. $m = -2$.

C. $m = 2$.

D. $m = -1$.

Lời giải.

$$\text{Giả sử hệ có nghiệm duy nhất thì } \frac{m - 3}{m} = \frac{m - 9}{m + 3} \Leftrightarrow m = 1.$$

$$\text{Thử lại với } m = 1, \text{ hệ bất phương trình trở thành } \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2.$$

Vậy $m = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 66. Tìm giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 2m(x + 1) \geq x + 3 \\ 4mx + 3 \geq 4x \end{cases}$$
 có nghiệm duy nhất.

A. $m = \frac{5}{2}$.

B. $m = \frac{3}{4}$.

C. $m = \frac{3}{4}; m = \frac{5}{2}$.

D. $m = -1$.

Lời giải.

$$\text{Hệ bất phương trình tương đương với } \begin{cases} (2m - 1)x \geq 3 - 2m \\ (4m - 4)x \geq -3 \end{cases}. \text{ Giả sử hệ bất phương trình có nghiệm}$$

$$\text{duy nhất thì } \frac{3 - 2m}{2m - 1} = \frac{-3}{4m - 4} \Leftrightarrow 8m^2 - 26m + 15 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{4} \text{ hoặc } m = \frac{5}{2}.$$

Thử lại

- Với $m = \frac{3}{4}$, hệ trở thành $\begin{cases} (\frac{3}{2} - 1)x \geq 3 - \frac{3}{2} \\ -x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$: thỏa mãn.
- Với $m = \frac{5}{2}$, hệ trở thành $\begin{cases} 4x \geq -2 \\ 6x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$: không thỏa mãn.

Vậy $m = \frac{3}{4}$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án (B) □

Câu 67. Hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x + 4 > x + 9 \\ 1 - 2x \leq m - 3x + 1 \end{cases}$ vô nghiệm khi và chỉ khi

- A. $m > \frac{5}{2}$. B. $m \geq \frac{5}{2}$. C. $m < \frac{5}{2}$. D. $m \leq \frac{5}{2}$.

Lời giải.

Bất phương trình $3x + 4 > x + 9 \Leftrightarrow 2x > 5 \Leftrightarrow x > \frac{5}{2} \Rightarrow S_1 = (\frac{5}{2}; +\infty)$.

Bất phương trình $1 - 2x \leq m - 3x + 1 \Leftrightarrow x \leq m \Rightarrow S_2 = (-\infty; m]$.

Hệ bất phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 = \emptyset \Leftrightarrow m \leq \frac{5}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 68. Hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x + 7 \geq 8x + 1 \\ m + 5 < 2x \end{cases}$ vô nghiệm khi và chỉ khi

- A. $m > -3$. B. $m \geq -3$. C. $m < -3$. D. $m \leq -3$.

Lời giải.

Bất phương trình $2x + 7 \geq 8x + 1 \Leftrightarrow -6x \geq -6 \Leftrightarrow x \leq 1 \Rightarrow S_1 = (-\infty; 1]$.

Bất phương trình $m + 5 < 2x \Leftrightarrow x > \frac{m+5}{2} \Rightarrow S_2 = (\frac{m+5}{2}; +\infty)$.

Hệ bất phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 = \emptyset \Leftrightarrow 1 \leq \frac{m+5}{2} \Leftrightarrow m \geq -3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 69. Hệ bất phương trình $\begin{cases} (x-3)^2 \geq x^2 + 7x + 1 \\ 2m \leq 8 + 5x \end{cases}$ vô nghiệm khi và chỉ khi

- A. $m > \frac{72}{13}$. B. $m \geq \frac{72}{13}$. C. $m < 1$. D. $m < 1$.

Lời giải.

Bất phương trình $(x-3)^2 \geq x^2 + 7x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 \geq x^2 + 7x + 1 \Leftrightarrow -6x + 9 \geq 7x + 1$
 $\Leftrightarrow 8 \geq 13x \Leftrightarrow x \leq \frac{8}{13} \Rightarrow S_1 = (-\infty; \frac{8}{13}]$.

Bất phương trình $2m \leq 8 + 5x \Leftrightarrow x \geq \frac{2m-8}{5} \Rightarrow S_2 = [\frac{2m-8}{5}; +\infty)$.

Để hệ bất phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 = \emptyset \Leftrightarrow \frac{8}{13} < \frac{2m-8}{5} \Leftrightarrow m > \frac{72}{13}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 70. Hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x + 5 \geq x - 1 \\ (x+2)^2 \leq (x-1)^2 + 9 \\ mx + 1 > (m-2)x + m \end{cases}$ vô nghiệm khi và chỉ khi

A. $m = 3$.

B. $m \geq 3$.

C. $m < 3$.

D. $m \leq 3$.

Lời giải.

$$\text{Bất phương trình } 3x + 5 \geq x - 1 \Leftrightarrow 2x \geq -6 \Leftrightarrow x \geq -3 \Rightarrow S_1 = [-3; +\infty).$$

$$\text{Bất phương trình } (x + 2)^2 \leq (x - 1)^2 + 9 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 \leq x^2 - 2x + 1 + 9 \Leftrightarrow 4x + 4 \leq -2x + 1 + 9 \Leftrightarrow 6x \leq 6 \Leftrightarrow x \leq 1 \Rightarrow S_2 = (-\infty; 1].$$

$$\text{Suy ra } S_1 \cap S_2 = [-3; 1].$$

$$\text{Bất phương trình } mx + 1 > (m - 2)x + m \Leftrightarrow mx + 1 > mx - 2x + m \Leftrightarrow 1 > -2x + m \Leftrightarrow 2x > m - 1 \Leftrightarrow x > \frac{m - 1}{2} \Rightarrow S_3 = \left(\frac{m - 1}{2}; +\infty\right).$$

$$\text{Để hệ bất phương trình vô nghiệm} \Leftrightarrow (S_1 \cap S_2) \cap S_3 = \emptyset \Leftrightarrow \frac{m - 1}{2} \geq 1 \Leftrightarrow m \geq 3.$$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 71. Hệ bất phương trình $\begin{cases} 2(x - 3) < 5(x - 4) \\ mx + 1 \leq x - 1 \end{cases}$ vô nghiệm khi và chỉ khi

A. $m > 1$.

B. $m \geq 1$.

C. $m < 1$.

D. $m \leq 1$.

Lời giải.

$$\text{Bất phương trình } 2(x - 3) < 5(x - 4) \Leftrightarrow x > \frac{14}{3} \Rightarrow S_1 = \left(\frac{14}{3}; +\infty\right).$$

$$\text{Bất phương trình } mx + 1 \leq x - 1 \Leftrightarrow (m - 1)x \leq -2. \quad (*)$$

Với $m = 1$, khi đó (*) trở thành $0x \leq -2$: vô nghiệm $\Rightarrow$ hệ vô nghiệm.

$\Rightarrow$ trong trường hợp này ta chọn $m = 1$.

$$\text{Với } m > 1, \text{ ta có } (*) \Leftrightarrow x \leq \frac{-2}{m - 1} \Rightarrow S_2 = \left(-\infty; \frac{-2}{m - 1}\right].$$

$$\Rightarrow \text{Hệ bất phương trình vô nghiệm} \Leftrightarrow S_1 \cap S_2 = \emptyset \Leftrightarrow \frac{-2}{m - 1} \leq \frac{14}{3}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{-6}{3(m - 1)} \leq \frac{14(m - 1)}{3(m - 1)} \Leftrightarrow -6 \leq 14(m - 1) \Leftrightarrow m \geq \frac{4}{7} \text{ (do với } m > 1 \rightarrow m - 1 > 0).$$

$\Rightarrow$ Trong trường hợp này ta chọn $m > 1$.

Với $m < 1$, ta có (*) $\Leftrightarrow x \geq \frac{-2}{m - 1} \Rightarrow S_2 = \left[\frac{-2}{m - 1}; +\infty\right)$. Khi đó $S_1 \cap S_2$ luôn luôn khác rỗng nên $m < 1$ không thỏa mãn.

Vậy $m \geq 1$ thì hệ bất phương trình vô nghiệm.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 72. Tìm m để hệ bất phương trình $\begin{cases} \sqrt{x + 2}(x^2 - 1) \geq 0 \\ x \leq \frac{1 - 2m}{m} \end{cases}$ có nghiệm?

A. $\begin{cases} m \geq \frac{1}{3} \\ m < 0 \end{cases}$.

B. $0 < m \leq \frac{1}{3}$.

C. $m \geq \frac{1}{3}$.

D. $m > 0$.

Lời giải.

$$\text{Ta thấy } \sqrt{x + 2}(x^2 - 1) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq -1 \vee x \geq 1.$$

$$\text{Do vậy, hệ có nghiệm khi } \frac{1 - 2m}{m} \geq -2 \Leftrightarrow \frac{1}{m} \geq 0 \Leftrightarrow m > 0.$$

Chọn đáp án (D)

□

Câu 73. Một bạn học sinh đã giải bất phương trình $\sqrt{x^2 - 9} - \sqrt{x + 3} \leq x + 3$ (*) theo ba bước sau:

Bước 1: Điều kiện $\begin{cases} x^2 - 9 \geq 0 \\ x + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 3)(x + 3) \geq 0 \\ x + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ x + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3.$

Bước 2: Với điều kiện trên thì (*) trở thành $\sqrt{(x - 3)(x + 3)} - \sqrt{x + 3} \leq x + 3.$

Chia hai vế cho $\sqrt{x + 3} > 0$ ta được $\sqrt{x - 3} - 1 \geq \sqrt{x + 3}.$

Bước 3: Vì $x \geq 3$ nên $\sqrt{x - 3} - 1 < \sqrt{x + 3} - 1 < \sqrt{x + 3}, \forall x \leq 3.$

Vậy tập nghiệm của (*) là $[3; +\infty).$

Theo em, bạn học sinh đó đã giải đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào?

- A. Sai từ bước 1. B. Sai từ bước 2. C. Sai từ bước 3. D. Lời giải đúng.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} x^2 - 9 \geq 0 \\ x + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \vee x \geq 3 \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x \geq 3. \end{cases}$

Chọn đáp án **A** □

Câu 74. Tìm các giá trị của m để biểu thức $f(x) = x^2 + (m + 1)x + 2m + 7 > 0 \forall x \in \mathbb{R}.$

- A. $m \in (-3; 9).$ B. $m \in (-\infty; -3) \cup (9; +\infty).$
C. $m \in [-3; 9].$ D. $m \in (-9; 3).$

Lời giải.

Ta có $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (m + 1)^2 - 4(2m + 7) < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 9.$

Chọn đáp án **A** □

Câu 75. Tìm các giá trị của m để bất phương trình $mx > 3$ vô nghiệm.

- A. $m < 0.$ B. $m > 0.$ C. $m = 0.$ D. $m \neq 0.$

Lời giải.

Bất phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $m = 0.$

Chọn đáp án **C** □

Câu 76. Tập nghiệm S của bất phương trình $(x - 1)\sqrt{x + 1} \geq 0$ là

- A. $S = [-1; +\infty).$ B. $S = \{-1\} \cup (1; +\infty).$
C. $S = \{-1\} \cup [1; +\infty).$ D. $S = (1; +\infty).$

Lời giải.

Điều kiện xác định $x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1.$

Trường hợp $x = -1$ thoả mãn bất phương trình.

Trường hợp $x > -1:$

Bất phương trình đề bài tương đương với $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$

So với $x > -1$ ta được $x \geq 1.$ Vậy tập nghiệm của bất phương trình đề bài là $S = \{-1\} \cup [1; +\infty).$

Chọn đáp án **C** □

Câu 77. Bất phương trình $\sqrt{2x - 1} \leq 3x - 2$ có tổng năm nghiệm nguyên nhỏ nhất là:

- A. 15. B. 20. C. 10. D. 5.

Lời giải.

$$\sqrt{2x-1} \leq 3x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2 \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \\ 2x-1 \leq (3x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x \geq \frac{1}{2} \\ 9x^2-14x+5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq \frac{5}{9} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Năm nghiệm nguyên nhỏ nhất của bất phương trình là: 1; 2; 3; 4; 5.

Vậy tổng của các nghiệm trên bằng $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 78. Tập nghiệm S của bất phương trình $(x-1)\sqrt{x+1} \geq 0$ là

- A. $S = [-1; +\infty)$. B. $S = \{-1\} \cup (1; +\infty)$.
C. $S = \{-1\} \cup [1; +\infty)$. D. $S = (1; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$ (*).

Với điều kiện (*) ta xét các trường hợp sau

- Nếu $x = -1$ thì bất phương trình trở thành $0 \geq 0$ nên $x = -1$ là nghiệm của bất phương trình.
- Nếu $x > -1$ thì $x+1 > 0$ nên $(x-1)\sqrt{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \{-1\} \cup [1; +\infty)$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 79. Giá trị $x = -1$ là nghiệm của bất phương trình $m+x < 2$ khi và chỉ khi

- A. $m < 3$. B. $m > 3$. C. $m = 3$. D. $m < 1$.

Lời giải.

Thay $x = -1$ vào bất phương trình ta được $m < 3$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 80. Tìm tất cả giá trị của m để bất phương trình $mx+m < 2x$ vô nghiệm.

- A. $m = 2$. B. $m = 0$. C. $m = -2$. D. $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương với $(m-2)x+m < 0$. Nếu $m = 2$ thì bất phương trình thành $2 < 0$ nên vô nghiệm. Các trường hợp $m > 2$ và $m < 2$ bất phương trình đều có nghiệm.

Chọn đáp án **A** □

Câu 81. Trong các hệ sau đây, hệ nào là hệ bất phương trình một ẩn?

- A. $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$. C. $\begin{cases} f(x) \leq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} f(x) - g(x) \leq 0 \\ f(x) + g(x) > 0 \end{cases}$.

Lời giải.

Ta loại 2 phương án có dấu hoặc. Trong 2 phương án còn lại, ta loại phương án có phương trình $g(x) = 0$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 82. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} f(x) > 0 & (1) \\ g(x) \leq 0 & (2) \end{cases}$, trong đó (1) có tập nghiệm là T_1 và (2) có tập nghiệm là T_2 . Trong các tập hợp sau, tập nào là tập nghiệm của hệ phương trình?

- A. $T_1 \cap T_2$. B. $T_1 \cup T_2$. C. $T_1 \setminus T_2$. D. $T_2 \setminus T_1$.

Lời giải.

Nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là nghiệm chung của cả hai bất phương trình (1) và (2).

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 83. Tìm tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} x > 1 \\ x > m^2 + 1 \end{cases}$, với m là tham số.

- A. $S = (-\infty; 1)$. B. $S = (-\infty; m^2 + 1)$. C. $S = (1; +\infty)$. D. $S = (m^2 + 1; +\infty)$.

Lời giải.

Vì $m^2 + 1 \geq 1$ nên $(1; +\infty) \cap (m^2 + 1; +\infty) = (m^2 + 1; +\infty)$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 84. Giá trị $x = 1$ là nghiệm của bất phương trình $2mx - 3m \geq 1$ khi và chỉ khi

- A. $m \leq -1$. B. $m \leq 1$. C. $-1 \leq m \leq 1$. D. $m \geq -1$.

Lời giải.

Thay $x = 1$ vào bất phương trình ta được $2m - 3m \geq 1 \Leftrightarrow m \leq -1$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 85. Bất phương trình $mx > 3$ vô nghiệm khi

- A. $m = 0$. B. $m > 0$. C. $m < 0$. D. $m \neq 0$.

Câu 86. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m^2x + 3 < mx + 4$ có nghiệm.

- A. $m = 1$. B. $m = 0$. C. $m = 1$ hoặc $m = 0$. D. $\forall m \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương $m(m - 1)x < 1$.

- Nếu $m = 0$ hoặc $m = 1$ thì tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$.
- Nếu $m \neq 0$ và $m \neq 1$ thì bất phương trình có tập nghiệm khác rỗng.

Vậy bất phương trình có nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 87. Tập hợp tất cả giá trị của m để bất phương trình $(m^2 - m)x < m$ vô nghiệm là

- A. $\{0\}$. B. $\{0; 1\}$. C. $\{1\}$. D. $(0; 1)$.

Lời giải.

- Nếu $m = 0$ thì bất phương trình vô nghiệm.
- Nếu $m = 1$ thì bất phương trình có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.
- Nếu $m \neq 0$ và $m \neq 1$ thì bất phương trình có tập nghiệm khác rỗng.

Vậy bất phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $m = 0$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 88. Tập hợp tất cả giá trị của m để bất phương trình $(m^2 + 2m)x < m^2$ thỏa mãn với mọi $x \in \mathbb{R}$ là

- A. $\{-2\}$. B. $\{0\}$. C. $\{-2; 0\}$. D. $\{2; 0\}$.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương $m(m + 2)x < m^2$.

- Nếu $m = 0$ thì bất phương trình vô nghiệm.
- Nếu $m = -2$ thì bất phương trình có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

- Nếu $m \neq 0$ và $m \neq 2$ thì bất phương trình có tập nghiệm khác rỗng.

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m = -2$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 89. Tập hợp tất cả giá trị của m để bất phương trình $(m^2 - m)x < m - 2$ vô nghiệm là

- A. $(0; 1)$. B. $\{0\}$. C. $\{0; 1\}$. D. $\{1\}$.

Lời giải.

- Nếu $m = 0$ thì bất phương trình vô nghiệm.
- Nếu $m = 1$ thì bất phương trình vô nghiệm.
- Nếu $m \neq 0$ và $n \neq 1$ thì bất phương trình có tập nghiệm khác rỗng.

Vậy tập hợp tất cả m để bất phương trình vô nghiệm là $\{0; 1\}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 90. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x - m} - \sqrt{6 - 2x}$ là một đoạn trên trục số thực khi và chỉ khi

- A. $m = 3$. B. $m > 3$. C. $m < 3$. D. $m < \frac{1}{3}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} x \geq m \\ x \leq 3 \end{cases}$. Tập xác định của hàm số là một đoạn khi và chỉ khi $m < 3$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 91. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x + 1} + \sqrt{m - 2x}$ là một điểm trên trục số thực khi và chỉ khi

- A. $m < -2$. B. $m > -2$. C. $m = -2$. D. $m = 2$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq \frac{m}{2} \end{cases}$. Tập xác định là một điểm trên trục số thực khi và chỉ khi $\frac{m}{2} = -1 \Leftrightarrow m = -2$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 92. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | 2x + 5 > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | 4x - 1 < 0\}$. Tìm $A \cap B$.

- A. $A \cap B = \left(-\frac{5}{2}; +\infty\right)$. B. $A \cap B = \left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$.
C. $A \cap B = \emptyset$. D. $A \cap B = \left(-\frac{5}{2}; \frac{1}{4}\right)$.

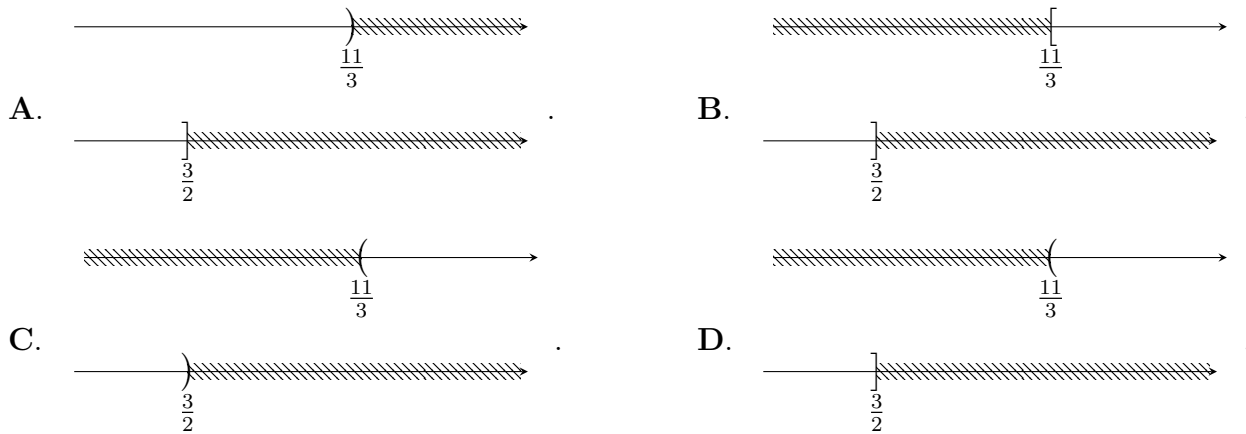
Lời giải.

Ta có $A = \left(-\frac{5}{2}; +\infty\right)$ và $B = \left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$. Vậy $A \cap B = \left(-\frac{5}{2}; \frac{1}{4}\right)$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 93. Biểu diễn trên trục số tập nghiệm của hai bất phương trình trong hệ bất phương trình

$$\begin{cases} \frac{3x - 5}{2} + 1 > \frac{3x + 1}{3} \\ 4x - \frac{5}{2} \leq 3x - 1 \end{cases}.$$

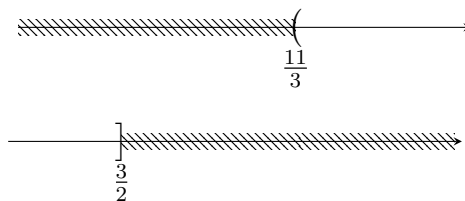


Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} \frac{3x-5}{2} + 1 > \frac{3x+1}{3} \\ 4x - \frac{5}{2} \leq 3x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{11}{3} \\ x \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy biểu diễn trên trục số tập nghiệm của hai bất phương trình trong hệ là



Chọn đáp án **D**

□

Câu 94. Tìm tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} 4x - 3 > 0 \\ 2x + 1 \leq 5 \end{cases}$.

- A. $S = \left(\frac{3}{4}; 2\right]$. B. $S = (-\infty; 2)$. C. $S = \left(\frac{3}{4}; 2\right)$. D. $S = (2; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} 4x - 3 > 0 \\ 2x + 1 \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{4} \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{4} < x \leq 2.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(\frac{3}{4}; 2\right]$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 95. Tìm tất cả các giá trị nguyên của x thỏa $\begin{cases} 4x + 5 \geq 0 \\ 2x - 1 \leq 0 \end{cases}$.

- A. $x = -1$. B. $x = 1$. C. $x = 0, x = -1$. D. $x = 0, x = 1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} 4x + 5 \geq 0 \\ 2x - 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{5}{4} \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{5}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

Vậy tất cả các giá trị nguyên của x thỏa mãn hệ là $x = -1; x = 0$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 96. Tìm tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x + \frac{25}{7} < -4x + 7 \\ \frac{8x+3}{2} < 2x+5 \end{cases}$.

A. $S = \left(-\infty; \frac{4}{7}\right)$. B. $S = \left(-\infty; \frac{4}{7}\right]$. C. $S = \left(-\infty; \frac{7}{4}\right)$. D. $S = \left(-\infty; \frac{7}{4}\right]$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} 2x + \frac{25}{7} < -4x + 7 \\ \frac{8x+3}{2} < 2x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{4}{7} \\ x < \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x < \frac{4}{7}.$$

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là $S = \left(-\infty; \frac{4}{7}\right)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 97. Tìm tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} 15x - 2 > 2x + \frac{1}{3} \\ 2(x - 2) < \frac{x - 14}{2} \end{cases}$.

A. $S = \left(\frac{7}{39}; +\infty\right)$. B. $S = (-\infty; -2)$. C. $S = \emptyset$. D. $S = (-\infty; -2]$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} 15x - 2 > 2x + \frac{1}{3} \\ 2(x - 2) < \frac{x - 14}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{7}{39} \\ x < 2 \end{cases} \text{ (vô nghiệm).}$$

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là $S = \emptyset$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 98. $x = 3$ là nghiệm của bất phương trình nào dưới đây?

A. $5 - x < 1$. B. $2x - 1 > 3$. C. $3x + 1 < 4$. D. $4x - 11 > x$.

Lời giải.

Thay $x = 3$ lần lượt vào các bất phương trình ta có $x = 3$ là nghiệm của $2x - 1 > 3$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 99. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $2x + 1 > 3(2 - x)$.

A. $S = (-\infty; -5)$. B. $S = (5; +\infty)$. C. $S = (1; +\infty)$. D. $S = (-\infty; 5)$.

Lời giải.

Ta có

$$2x + 1 > 3(2 - x) \Leftrightarrow 5x > 5 \Leftrightarrow x > 1.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (1; +\infty)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 100. Nghiệm nguyên lớn nhất của bất phương trình $2x + 1 < 3(8 - x)$ là

- A. 2. B. 5. C. 4. D. 6.

Lời giải.

Ta có

$$2x + 1 < 3(8 - x) \Leftrightarrow x < \frac{23}{5}.$$

Vậy nghiệm nguyên lớn nhất là $x = 4$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 101. Số nghiệm nguyên dương của bất phương trình $11 - 2x \geq 0$ là

- A. 6. B. 5. C. Vô số. D. 11.

Lời giải.

Ta có $11 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{11}{2}$.

Suy ra số nghiệm nguyên dương của bất phương trình đã cho là 5.

Chọn đáp án **B** □

Câu 102. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\frac{1-x}{x^2+1} < 0$.

- A. $S = (-\infty; 1)$. B. $S = (1; +\infty)$. C. $S = (-\infty; 1]$. D. $S = [1; +\infty)$.

Lời giải.

Do $x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên bất phương trình đã cho tương đương với $1 - x < 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (1; +\infty)$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 103. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $3 - 2x < x$.

- A. $S = (-\infty; 3)$. B. $S = (3; +\infty)$. C. $S = (-\infty; 1)$. D. $S = (1; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $3 - 2x < x \Leftrightarrow x > 1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (1; +\infty)$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 104. Cho bất phương trình $3x - m^2 \geq mx - 4m + 3$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào là **sai**?

- A. Với $m > 3$ tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; 1 - m]$.
 B. Với $m = 2$ tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -1]$.
 C. Với $m < 3$ tập nghiệm của bất phương trình là $S = [1 - m; +\infty)$.
 D. Với $m = 3$ tập nghiệm của bất phương trình là $S = \mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có

$$(3 - m)x \geq m^2 - 4m + 3 \Leftrightarrow (3 - m)x \geq (m - 1)(m - 3).$$

- Nếu $m = 3$, bất phương trình có dạng $0x \geq 0$, nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- Nếu $m < 3$, bất phương trình tương đương $x \geq 1 - m$.
- Nếu $m > 3$, bất phương trình tương đương $x \leq 1 - m$.
- Nếu $m = 2$ thì bất phương trình có dạng $x \geq -1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 105. Tìm tất cả giá trị của m để bất phương trình $x + 3m > 3 + mx$ có tập nghiệm là $S = (-\infty; 3)$.

A. $m < 1$.

B. $m > 1$.

C. $0 < m < 1$.

D. $m < 0 \vee m > 1$.

Lời giải.

Ta có

$$x + 3m > 3 + mx \Leftrightarrow (1 - m)x > 3(1 - m).$$

Bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = (-\infty; 3)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} 1 - m < 0 \\ \frac{3(1 - m)}{1 - m} \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 106. Cho bất phương trình $(2m^2 - 5m - 3)x + 4m^2 < -5x + 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình trên vô nghiệm.

A. $m = 2$.

B. $m = -\frac{1}{2}$.

C. $m = -\frac{1}{2}$ hoặc $m = 2$.

D. $m = \frac{1}{2}$ hoặc $m = 2$.

Lời giải.

Ta có

$$(2m^2 - 5m - 3)x + 4m^2 < -5x + 1 \Leftrightarrow (2m^2 - 5m + 2)x < 1 - 4m^2.$$

Bất phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2m^2 - 5m + 2 = 0 \\ 1 - 4m^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = \frac{1}{2} \\ 1 - 4m^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 107. Tìm tất cả giá trị của m để bất phương trình $(m - 2)x + 2m - 1 < 2 - 3x$ có nghiệm với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A. $m = 0$.

B. $m = 1$.

C. $m = -1$.

D. $m = 2$.

Lời giải.

Ta có

$$(m - 2)x + 2m - 1 < 2 - 3x \Leftrightarrow (m + 1)x < 3 - 2m.$$

Bất phương trình đã cho có nghiệm với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m + 1 = 0 \\ 3 - 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 108. Tìm tất cả giá trị của m để bất phương trình $\sqrt{(m^2 - 1)x + 3m + 5} \leq 2m + 3$ có nghiệm với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A. $m = 0$.

B. $m = 1$.

C. $m = -1$.

D. $m = 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{(m^2 - 1)x + 3m + 5} \leq 2m + 3 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 3 \geq 0 \\ (m^2 - 1)x + 3m + 5 \geq 0 \\ (m^2 - 1)x + 3m + 5 \leq (2m + 3)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 3 \geq 0 \\ (m^2 - 1)x \geq -3m - 5 \\ (m^2 - 1)x \leq 4m^2 + 9m + 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2m + 3 \geq 0 \\ m^2 - 1 = 0 \\ -3m - 5 \leq 0 \\ 4m^2 + 9m + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 109. Tìm tất cả giá trị của m để bất phương trình $\frac{x-m}{m-3} + x - 3 > 0$ vô nghiệm.
A. $m = 0$. **B.** $m = 1$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = 3$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{x-m}{m-3} + x - 3 > 0 &\Leftrightarrow \frac{(m-2)x - 4m + 9}{m-3} > 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)x - 4m + 9 > 0 \\ m-3 > 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} (m-2)x - 4m + 9 < 0 \\ m-3 < 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Suy ra bất phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m-3 > 0 \\ m-2 = 0 \\ 4m-9 \geq 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} m-3 < 0 \\ m-2 = 0 \\ 4m-9 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 110. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} x+m \leq 0 \\ -x+3 < 0 \end{cases}$ có nghiệm.
A. $m \in (-\infty; -3)$. **B.** $m = -3$. **C.** $m \in (-3; +\infty)$. **D.** $m \in (-\infty; 3)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} x+m \leq 0 \\ -x+3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -m \\ x > 3. \end{cases}$$

Suy ra hệ bất phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $-m > 3 \Leftrightarrow m < -3$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 111. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x - 2 > -4x + 5 \\ 3x + m + 2 < 0 \end{cases}$ có nghiệm.

A. $m \in (-\infty; 3)$.

B. $m \in (-5; +\infty)$.

C. $m \in (0; 5)$.

D. $m \in (-\infty; -5)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} 3x - 2 > -4x + 5 \\ 3x + m + 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < \frac{-m-2}{3} \end{cases}.$$

Suy ra hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\frac{-m-2}{3} > 1 \Leftrightarrow m < -5$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 112. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} (x-3)^2 \geq x^2 + 7x + 1 \\ 2m - 5x \leq 8 \end{cases}$ vô nghiệm.

A. $m \geq \left[\frac{72}{13}; +\infty\right)$.

B. $m \in \left(\frac{72}{13}; +\infty\right)$.

C. $m \in \left(-\infty; \frac{72}{13}\right)$.

D. $m \in \left[0; \frac{72}{13}\right]$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} (x-3)^2 \geq x^2 + 7x + 1 \\ 2m - 5x \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{8}{13} \\ x \geq \frac{2m-8}{5} \end{cases}.$$

Suy ra hệ bất phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\frac{2m-8}{5} > \frac{8}{13} \Leftrightarrow m > \frac{72}{13}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 113. Hệ bất phương trình $\begin{cases} |x| - 1 \leq 0 \\ x - m > 0 \end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $m \in (1; +\infty)$.

B. $m = 1$.

C. $m \in (-\infty; 1)$.

D. $m \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} |x| - 1 \leq 0 \\ x - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x > m \end{cases}.$$

Suy ra hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m < 1$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 114. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 2(x-6) < -2 \\ \frac{5x+m}{3} > 8 \end{cases}$ có nghiệm.

- A. $m \in (-1; +\infty)$. B. $m \in [-1; +\infty)$. C. $m \in (-\infty; -1)$. D. $m \in (-\infty; -1]$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} 2(x-6) < -2 \\ \frac{5x+m}{3} > 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x > \frac{24-m}{5} \end{cases}.$$

Suy ra hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\frac{24-m}{5} < 5 \Leftrightarrow m > -1$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 115. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} x-3 < 0 \\ m-x < 1 \end{cases}$ vô nghiệm.

- A. $m \in (-\infty; 4)$. B. $m \in (4; +\infty)$. C. $m \in [4; +\infty)$. D. $m \in (-\infty; 4]$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} x-3 < 0 \\ m-x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x > m-1 \end{cases}.$$

Suy ra hệ bất phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi $m-1 \geq 3 \Leftrightarrow m \geq 4$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 116. Với giá trị nào của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x-1 \leq 3 \\ x-m \geq 0 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất?

- A. Không có giá trị m . B. $m = 2$.
C. $m \in [2; +\infty)$. D. $m \in (-\infty; 2)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} 2x-1 \leq 3 \\ x-m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq m \end{cases}.$$

Suy ra hệ bất phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m = 2$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 117. Cho bất phương trình $m^3(x+2) \leq m^2(x-1)$ (*). Xét các mệnh đề sau.

- (I) Bất phương trình đã cho tương đương với $x(m-1) \leq -(2m+1)$ (1).
(II) Với $m = 0$, bất phương trình đã cho thỏa mãn với mọi $x \in \mathbb{R}$.
(III) Giá trị của m để bất phương trình đã cho thỏa mãn với mọi $x \geq 0$ là $m \leq -\frac{1}{2}$ hoặc $m = 0$.

Trong các mệnh đề trên, mệnh đề **đúng** là

- A. (II). B. (I) và (III). C. (I) và (II). D. Cả ba đều đúng.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$m^2[(m-1)x + 2m + 1] \leq 0$$

- Nếu $m = 0$ thì bất phương trình (*) có tập nghiệm là $\mathbb{R}$, suy ra (II) đúng.
- Nếu $m = 1$ thì bất phương trình (*) vô nghiệm.

- Nếu $m > 1$ thì tập nghiệm của bất phương trình (*) là $S = \left(-\infty; \frac{-2m-1}{m-1}\right]$.
- Nếu $m < 1$ và $m \neq 0$ thì tập nghiệm của bất phương trình (*) trình là $S = \left[\frac{-2m-1}{m-1}; -\infty\right)$.

Khi $m = 0$ thì bất phương trình (1) thành $x \geq 1$. Nghĩa là khi $m = 0$ thì bất phương trình (*) không tương đương với (1). Do đó (I) sai.

Khi $m = 0$ thì tập $[0; +\infty)$ là tập con của S . Khi $m \neq 0$, tập $[0; +\infty)$ là tập con của S khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{-2m-1}{m-1} \leq 0 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -\frac{1}{2}.$$

Vậy $[0; +\infty)$ là tập con của S khi và chỉ khi $m \leq -\frac{1}{2}$ hoặc $m = 0$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 118. Tìm tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} x < 4 \\ x \leq 3 - m^2 \end{cases}$, với m là tham số.

- A. $S = (-\infty; 3 - m^2]$. B. $S = \emptyset$. C. $S = (-\infty; 4)$. D. $S = [3 - m^2; 4)$.

Lời giải.

Ta có $3 - m^2 < 4, \forall m \in \mathbb{R}$. Do đó, tập nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là $S = (-\infty; 3 - m^2]$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 119. Tìm tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} x \leq 5 + m^2 \\ x \geq 1 - m^2 \end{cases}$, với m là tham số.

- A. $S = (-\infty; 5 + m^2]$. B. $S = \emptyset$.
C. $S = [1 - m^2; 5 + m^2]$. D. $S = [1 - m^2; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $1 - m^2 < 5 + m^2 \Leftrightarrow m^2 > -2$, nghiệm đúng với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Do đó, tập nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là $S = [1 - m^2; 5 + m^2]$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 120. Cho tham số $m \in \mathbb{R}$. Hệ bất phương trình $\begin{cases} x \leq -2 \\ x < 3m + 1 \end{cases}$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

- A. 0. B. 1. C. Vô số. D. 3.

Lời giải.

- Nếu $3m + 1 > -2 \Leftrightarrow m > -1$ thì tập nghiệm của hệ đã cho là $(-\infty; -2]$.
- Nếu $3m + 1 \leq -2 \Leftrightarrow m \leq -1$ thì tập nghiệm của hệ đã cho là $(-\infty; 3m + 1)$.

Vậy đã cho luôn có vô số nghiệm nguyên.

Chọn đáp án **C** □

Câu 121. Cho tham số $m \in \mathbb{R}$. Tìm tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} x \geq 3 \\ x < 3 - m^2 \end{cases}$.

- A. $S = \emptyset$. B. $S = (-\infty; 3 - m^2)$. C. $S = [3; +\infty)$. D. $S = (3 - m^2; 3]$.

Lời giải.

Do $3 - m^2 \leq 3, \forall m \in \mathbb{R}$ nên tập nghiệm của hệ đã cho là $S = \emptyset$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 122. Cho tham số $m \in \mathbb{R}$. Hệ bất phương trình $\begin{cases} x > 1 + m^2 \\ x < 2 - 2m^2 \end{cases}$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Lời giải.

Hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi

$$1 + m^2 < 2 - 2m^2 \Leftrightarrow 3m^2 < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} < m < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Khi đó, tập nghiệm của hệ đã cho là $(1 + m^2; 2 - 2m^2)$.

Do $1 + m^2 \geq 1, \forall m \in \mathbb{R}$ và $2 - 2m^2 \leq 2, \forall m \in \mathbb{R}$ nên hệ đã cho không có nghiệm nguyên.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 123. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x + 1 \geq -3 \\ (m^2 + 1)x - 1 < m^2 \end{cases}$, với m là tham số thực. Hệ đã cho **không** tương đương với hệ nào sau đây?

- A. $\begin{cases} x > -2 \\ x < 1 \end{cases}$. B. $\begin{cases} 2x \geq -4 \\ (m^2 + 1)x < 1 + m^2 \end{cases}$.
- C. $\begin{cases} x \geq -2 \\ x < 1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} 2x \geq -4 \\ x < 1 \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} 2x + 1 \geq -3 \\ (m^2 + 1)x - 1 < m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq -4 \\ (m^2 + 1)x < 1 + m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x < 1. \end{cases}$$

Suy ra hệ đã cho không tương đương với hệ $\begin{cases} x > -2 \\ x < 1 \end{cases}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 124. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} (-m^2 - 2)x + m^2 \leq -2 \\ x - 1 \leq 1 \end{cases}$, với m là tham số thực. Hệ đã cho tương đương với

- A. $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 2 \end{cases}$. B. $x \leq 2$. C. $\begin{cases} x \leq 1 \\ x \leq 2 \end{cases}$. D. $x \leq 1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} (-m^2 - 2)x + m^2 \leq -2 \\ x - 1 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(m^2 + 2)x \leq -(m^2 + 2) \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 125. Tìm tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x - 5 > 1 \\ 3x - 3m^2 + 1 > 10 \end{cases}$, với m là tham số.

- A. $S = (3; 3 + m^2)$. B. $S = (3 + m^2; +\infty)$. C. $S = (3; +\infty)$. D. $S = (-\infty; 3 + m^2)$.

Lời giải.

Hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 2x - 5 > 1 \\ 3x - 3m^2 + 1 > 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x > 6 \\ 3x > 3m^2 + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x > m^2 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > m^2 + 3.$$

Vậy tập nghiệm bất phương trình là $S = (m^2 + 3; +\infty)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 126. Tìm tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} -2x + 2m^2 - 5 \geq 2m^2 - 3 \\ 3x + 6m^2 + 2 > -4 \end{cases}$, với m là tham số.

- A. $S = (-2 - 2m^2; +\infty)$. B. $S = [-1; -2 - 2m^2)$.
C. $S = (-\infty; -2 - 2m^2)$. D. $S = (-2 - 2m^2; -1]$.

Lời giải.

Hệ bất phương trình

$$\begin{cases} -2x + 2m^2 - 5 \geq 2m^2 - 3 \\ 3x + 6m^2 + 2 > -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x \geq 2 \\ 3x > -6m^2 - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x > -2m^2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow -2m^2 - 2 < x \leq -1.$$

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình là $S = (-2 - 2m^2; -1]$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 127. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x + 1 < 3 \\ x + m > 1 \end{cases}$ có nghiệm.

- A. Với mọi $m \in (1; \infty)$. B. Với mọi $m \in (0; +\infty)$.
C. Với mọi $m \in (0; 1)$. D. Với mọi $m \in (-\infty; 0)$.

Lời giải.

Hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 2x + 1 < 3 \\ x + m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x < 2 \\ x > 1 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > 1 - m \end{cases}$$

Suy ra hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi tập $S = (1 - m; 1)$ khác rỗng hay $1 - m < 1 \Leftrightarrow m > 0$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 128. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 7x + 1 \geq -3 \\ -3x + m < 3m - 6 \end{cases}$ có nghiệm.

- A. Với mọi $m \in \left(-\frac{15}{7}; +\infty\right)$. B. Với mọi $m \in \left(-\infty; -\frac{15}{7}\right)$.
C. Không tồn tại m . D. Với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 7x + 1 \geq -3 \\ -3x + m < 3m - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x \geq -4 \\ -3x < 2m - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{4}{7} \\ x > \frac{6 - 2m}{3} \end{cases}$$

Suy ra với mọi $m \in \mathbb{R}$ thì hệ bất phương trình có nghiệm.

Chọn đáp án **D** □

Câu 129. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} -5x + 1 \geq -3 \\ 3x + 3 \leq x + 3m - 6 \end{cases}$ có nghiệm nguyên.

A. Với mọi $m \in \mathbb{R}$.

B. Không tồn tại m .

C. Với mọi $m \in \left(-\infty; \frac{22}{15}\right]$.

D. Với mọi $m \in \left[\frac{22}{5}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Hệ bất phương trình

$$\begin{cases} -5x + 1 \geq -3 \\ 3x + 3 \leq x + 3m - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x \geq -4 \\ 2x \leq 3m - 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{4}{5} \\ x \leq \frac{3m - 9}{2} \end{cases}$$

Suy ra với mọi $m \in \mathbb{R}$ thì hệ bất phương trình có nghiệm.

Chọn đáp án **A** □

Câu 130. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} x + 1 > 3 \\ 2x + m < 2 - m \end{cases}$ vô nghiệm.

A. $m \in (-1; +\infty)$.

B. $m \in (-\infty; 2]$.

C. $m \in [-1; +\infty)$.

D. $m \in [-2; +\infty)$.

Lời giải.

Hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x + 1 > 3 \\ 2x + m < 2 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 1 - m \end{cases}$$

Hệ bất phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi tập $S = (2; 1 - m)$ bằng rỗng hay

$$1 - m \leq 2 \Leftrightarrow m \geq -1.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 131. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} x + 2m \geq 1 \\ 3x + m < 2x + m - 1 \end{cases}$ vô nghiệm.

A. $m \in (-\infty; 1]$.

B. $m \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

C. $m \in (1; \infty)$.

D. $m \in [1; +\infty)$.

Lời giải.

Hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x + 2m \geq 1 \\ 3x + m < 2x + m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 - 2m \\ x < -1 \end{cases}$$

Hệ bất phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi tập $S = [1 - 2m; -1)$ bằng rỗng hay

$$1 - 2m \geq -1 \Leftrightarrow m \leq 1.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 132. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x - m \geq x + 3 \\ x + m \leq -m - 3 \end{cases}$ vô nghiệm.

- A. $m \in [-2; +\infty)$. B. $m \in (-2; +\infty)$. C. $m \in (1; +\infty)$. D. $m \in (-2; 1)$.

Lời giải.

Hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 2x - m \geq x + 3 \\ x + m \leq -m - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m + 3 \\ x \leq -2m - 3 \end{cases}$$

Hệ bất phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi tập $S = [m + 3; -2m - 3]$ bằng rỗng hay

$$m + 3 > -2m - 3 \Leftrightarrow m > -2.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 133. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 7x - m > 3x + 3 \\ 2x + m < 3m - 1 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

- A. Không tồn tại m . B. $m = \frac{5}{3}$. C. $m = \frac{-2}{3}$. D. $m \in \left[\frac{5}{3}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 7x - m > 3x + 3 \\ 2x + m < 3m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x > m + 3 \\ 2x < 2m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{m + 3}{4} \\ x < \frac{2m - 1}{2} \end{cases}$$

Suy ra không tồn tại m để hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 134. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x + m \leq 3 \\ x + 1 > -1 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

- A. $m = -4$. B. $m = 7$. C. Không tồn tại m . D. $m \in (-\infty; 7]$.

Lời giải.

Hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 2x + m \leq 3 \\ x + 1 > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3-m}{2} \\ x > -2 \end{cases}$$

Suy ra không tồn tại m để hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 135. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} -2x + 3m \geq m \\ x + m \geq 1 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

A. $m = \frac{1}{2}$.

B. $m = 1$.

C. Không tồn tại m .

D. $m \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$.

Lời giải.

Hệ bất phương trình

$$\begin{cases} -2x + 3m \geq m \\ x + m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq m \\ x \geq 1 - m \end{cases}$$

Hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m = 1 - m \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 136. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} x - m \geq 0 \\ x + 3 \leq 1 \end{cases}$ có duy nhất một nghiệm nguyên.

A. $m = -2$.

B. $m = -1$.

C. $m = 1$.

D. $m \in (-\infty; -2)$.

Lời giải.

Hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x - m \geq 0 \\ x + 3 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m \\ x \leq -2 \end{cases}$$

Hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m = -2$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 137. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x - m > 0 \\ x - 1 < 1 \end{cases}$ có duy nhất một nghiệm nguyên.

A. $m = 2$.

B. $m \in (-\infty; 2]$.

C. $m \in (0; 2)$.

D. $m \in [0; 2)$.

Lời giải.

Hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 2x - m > 0 \\ x - 1 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{m}{2} \\ x < 2 \end{cases}$$

Hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $S = \left(\frac{m}{2}; 2\right)$ khác rỗng hay $m < 4$.

Vì $x < 2$ nên nghiệm nguyên duy nhất có thể có của hệ bất phương trình là $x = 1$.

Khi đó $\frac{m}{2} < 1 \Leftrightarrow m < 2$. Mặt khác hệ có nghiệm duy nhất nên $x = 0$ không là nghiệm của hệ khi và chỉ khi $\frac{m}{2} \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 0$.

Vậy $0 \leq m < 2$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 138. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} -x + 2m > 0 \\ 3x - 1 > 5 \end{cases}$ không có nghiệm nguyên.

A. $m \in \left(1; \frac{1}{2}\right]$.

B. $m \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$.

C. $m = \frac{1}{2}$.

D. Không tồn tại m .

Lời giải.

Hệ bất phương trình

$$\begin{cases} -x + 2m > 0 \\ 3x - 1 > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2m \\ x > 2 \end{cases}$$

Vì $x > 2$ nên nghiệm nguyên nhỏ nhất có thể có của hệ là $x = 3$ do đó hệ bất phương trình không có nghiệm nguyên khi và chỉ khi $2m < 3 \Leftrightarrow m < \frac{3}{2}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 139. Bất phương trình $2x < x + m - 1$ có nghiệm trong khoảng $(-3; 4)$ khi

A. $m < 5$.

B. $m > -2$.

C. $m = 5$.

D. $m > 5$.

Lời giải.

Bất phương trình $2x < x + m - 1 \Leftrightarrow x < m - 1$.

Bất phương trình có nghiệm trong khoảng $(-3; 4)$ khi và chỉ khi $m - 1 > -3 \Leftrightarrow m > -2$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 140. Bất phương trình $x < m - 1$ không có nghiệm trong khoảng $(-3; 4)$ khi

A. $m \leq -2$.

B. $m > -2$.

C. $m < -2$.

D. $m \geq -2$.

Lời giải.

Bất phương trình $x < m - 1$ không có nghiệm trong khoảng $(-3; 4)$ khi và chỉ khi $m - 1 \leq -3 \Leftrightarrow m \leq -2$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 141. Bất phương trình $x - m + 1 > 0$ có nghiệm trong khoảng $(-2; 2)$ khi

A. $(-\infty; 3)$.

B. $(-\infty; 4)$.

C. $(-1; +\infty)$.

D. $(-1; 3)$.

Lời giải.

Ta có $x > m - 1$. Để bất phương trình có nghiệm trong khoảng $(-2; 2)$ thì $m - 1 < 2 \Leftrightarrow m < 3$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 142. Bất phương trình $x - m - 1 \geq 0$ có tập nghiệm giao nhau khác rỗng với tập $[-1; 4)$ khi

A. $m > 3$.

B. $m \leq 3$.

C. $m < 3$.

D. $m \geq 3$.

Lời giải.

Bất phương trình $x - m - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq m + 1$.

Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S = [m + 1; +\infty)$.

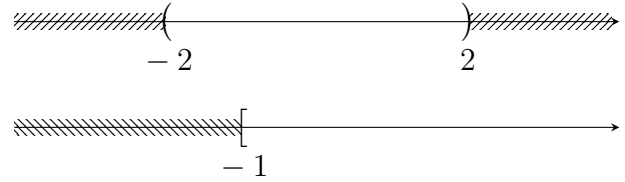
Tập nghiệm S giao với tập $[-1; 4)$ khác rỗng khi và chỉ khi $m + 1 < 4 \Leftrightarrow m < 3$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 143.

Hình bên là biểu diễn tập hợp nghiệm của các bất phương trình trong hệ phương trình nào dưới đây?



- A. $\begin{cases} |x| < 2 \\ \sqrt{3x-3} \leq 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} \sqrt{x} < 2 \\ \sqrt{3x-3} \geq 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x^2 < 2 \\ \sqrt{3x-3} \geq 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x < 2 \\ \sqrt{3x-3} \leq 0 \end{cases}$

Lời giải.

- Hệ $\begin{cases} |x| < 2 \\ \sqrt{3x-3} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 2 \\ x = 1 \end{cases}$
- Hệ $\begin{cases} \sqrt{x} < 2 \\ \sqrt{3x-3} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 4 \\ x \geq 1 \end{cases}$
- Hệ $\begin{cases} x^2 < 2 \\ \sqrt{3x-3} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 2 \\ x \geq 1 \end{cases}$

Suy ra hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 < 2 \\ \sqrt{3x-3} \geq 0 \end{cases}$ có tập nghiệm hình biểu diễn như hình đã cho.

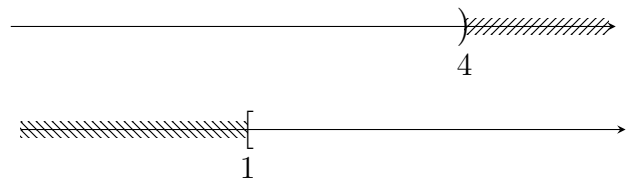
- Hệ $\begin{cases} x < 2 \\ \sqrt{3x-3} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \geq 1 \end{cases}$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 144.

Hình bên là biểu diễn tập hợp nghiệm của các bất phương trình trong hệ phương trình nào dưới đây?



- A. $\begin{cases} \sqrt{5-x} > 1 \\ \sqrt{4x-4} \leq 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} \sqrt{5-x} > 1 \\ \sqrt{4x-4} \geq 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} \sqrt{5-x} < 1 \\ \sqrt{4x-4} \geq 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} \sqrt{5-x} < 1 \\ \sqrt{4x-4} \leq 0 \end{cases}$

Lời giải.

- Hệ $\begin{cases} \sqrt{5-x} > 1 \\ \sqrt{4x-4} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x = 1 \end{cases}$
- Hệ $\begin{cases} \sqrt{5-x} > 1 \\ \sqrt{4x-4} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x \geq 1 \end{cases}$

Suy ra hệ $\begin{cases} \sqrt{5-x} > 1 \\ \sqrt{4x-4} \geq 0 \end{cases}$ có tập nghiệm biểu diễn như hình đã cho.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 145. Tìm tất cả các giá trị của x thỏa mãn $\begin{cases} (x-1)^2 \leq 9 \\ \frac{3x-2}{5} + 1 \geq \frac{6}{5} \end{cases}$.

A. $1 < x < 4$.

B. $1 < x \leq 4$.

C. $1 \leq x \leq 4$.

D. $1 \leq x < 4$.

Lời giải.

Hệ bất phương trình

$$\begin{cases} (x-1)^2 \leq 9 \\ \frac{3x-2}{5} + 1 \geq \frac{6}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x-1 \leq 3 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 4 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 4.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 146. Bất phương trình $\sqrt{3-x} < 2x-1$ tương đương với hệ nào sau đây?

A. $\begin{cases} 3-x > 0 \\ 2x-1 > 0 \\ 3-x < (2x-1)^2 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ 2x-1 > 0 \\ 3-x < (2x-1)^2 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} 2x-1 > 0 \\ 3-x < (2x-1)^2 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ 3-x < (2x-1)^2 \end{cases}$.

Lời giải.

$$\text{Bất phương trình } \sqrt{3-x} < 2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ 2x-1 > 0 \\ 3-x < (2x-1)^2 \end{cases}$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 147. Bất phương trình $|2x-1| < 4-x$ tương đương với hệ nào sau đây?

A. $\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 4-x > 0 \\ 2x-1 < 4-x \end{cases}$.

B. $\begin{cases} 4-x \geq 0 \\ 2x-1 < 4-x \end{cases}$.

C. $\begin{cases} 2x-1 > 0 \\ 2x-1 < 4-x \end{cases}$.

D. $\begin{cases} 2x-1 < 4-x \\ 2x-1 > x-4 \end{cases}$.

Lời giải.

$$\text{Bất phương trình } |2x-1| < 4-x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 < 4-x \\ 2x-1 > x-4 \end{cases}$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 148. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $|2x-1| - \frac{3}{2} < \frac{2x-1}{2}$.

A. $S = (-\infty; 2)$.

B. $S = \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

C. $S = \left(\frac{2}{3}; 2\right)$.

D. $S = (0; 2)$.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$|2x-1| < x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 < x+1 \\ 2x-1 > -x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > 0 \end{cases}$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 149. Có bao nhiêu số tự nhiên thỏa mãn $\sqrt{5-2x} \leq x-1$.

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải.

Ta có

$$\sqrt{5-2x} \leq x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 5-2x \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ 5-2x \leq (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{5}{2} \\ x \geq 1 \\ \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq \frac{5}{2}.$$

Vậy có duy nhất một số tự nhiên $x = 2$ thỏa mãn yêu cầu.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 150. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $2x + \sqrt{x-2} < 4 + \sqrt{x-2}$

A. $S = (-\infty; 2)$.B. $S = [2; +\infty)$.C. $S = \emptyset$.D. $S = \{2\}$.

Lời giải.

Ta có

$$2x + \sqrt{x-2} < 4 + \sqrt{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 2x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x < 2 \end{cases}$$

Suy ra không tồn tại x thỏa mãn do đó $S = \emptyset$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 151. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $2x + \sqrt{x-2} \leq 4 + \sqrt{x-2}$.

A. $S = (-\infty; 2)$.B. $S = [2; +\infty)$.C. $S = \emptyset$.D. $S = \{2\}$.

Lời giải.

Ta có

$$2x + \sqrt{x-2} \leq 4 + \sqrt{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 2x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

Suy ra bất phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 152. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\frac{x}{x-1} < 1$

A. $S = \emptyset$.B. $S = (1; +\infty)$.C. $S = (-\infty; 1)$.D. $S = (1; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có

$$\frac{x}{x-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} < 0 \Leftrightarrow x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1.$$

Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; 1)$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 153. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \sqrt{3 - 2x}$.

- A. $\mathcal{D} = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. C. $\mathcal{D} = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$. D. $\mathcal{D} = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $3 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$.

Suy ra tập xác định $\mathcal{D} = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 154. Cho bất phương trình $\sqrt{1-x}(mx-2) < 0$ (*). Xét các mệnh đề sau

- (I) Bất phương trình (*) tương đương với $mx - 2 < 0$ (1).
 (II) $m \geq 0$ là điều kiện cần để mọi $x < 1$ là nghiệm của bất phương trình (*).
 (III) Với $m < 0$, tập nghiệm của bất phương trình là $\frac{2}{m} < x < 1$.

Trong các mệnh đề trên, mệnh đề nào **đúng**?

- A. (I). B. (III). C. (II) và (III). D. Cả ba đều đúng.

Lời giải.

Điều kiện xác định của bất phương trình là $x \leq 1$. Ta thấy $x = 1$ không là nghiệm của bất phương trình. Do đó ta có $x < 1$.

- Nếu $m = 0$ thì bất phương trình (*) có tập nghiệm là $(-\infty; 1)$.
- Nếu $m > 0$ thì bất phương trình (*) tương đương $\begin{cases} x < 1 \\ x < \frac{2}{m} \end{cases}$.
- Nếu $m < 0$ thì bất phương trình (*) tương đương $\begin{cases} x < 1 \\ x > \frac{2}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{m} < x < 1$.

Ta cần so sánh 1 và $\frac{2}{m}$. Ta thấy $\frac{2}{m} > 1 \Leftrightarrow m > 2$. Khi $m > 2$ thì $\frac{2}{m} < 1$. Tóm lại ta có kết quả biện luận theo m như sau:

- Nếu $m > 2$ thì tập nghiệm của bất phương (*) trình là $\left(-\infty; \frac{2}{m}\right)$.
- Nếu $m = 2$ thì tập nghiệm của bất phương trình (*) là $(-\infty; 1)$.
- Nếu $0 < m < 2$ thì tập nghiệm của bất phương trình (*) là $(-\infty; 1)$.
- Nếu $m = 0$ thì tập nghiệm của bất phương trình (*) là $(-\infty; 1)$.
- Nếu $m < 0$ thì tập nghiệm của bất phương trình (*) là $\left(\frac{2}{m}; 1\right)$.

Bất phương trình (*) và (1) không tương đương vì riêng trường hợp $0 < m < 2$ có tập nghiệm không trùng nhau. Chẳng hạn $m = \frac{1}{2}$ thì tập nghiệm của (*) là $(-\infty; 1)$ trong khi tập nghiệm của (1) là $(-\infty; 2)$.

Từ kết quả biện luận ta thấy tập nghiệm của bất phương trình (*) là $(-\infty; 1)$ khi và chỉ khi $m \geq 0$. Ta suy ra (II) đúng.

Từ kết quả biện luận ta có (III) cũng đúng.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 155. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$.

- A. $\mathcal{D} = (-\infty; 2)$. B. $\mathcal{D} = (-\infty; 2]$. C. $\mathcal{D} = (2; +\infty)$. D. $\mathcal{D} = [2; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 2 \Rightarrow \text{TXĐ: } \mathcal{D} = (-\infty; 2)$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 156. Cho S_1 và S_2 lần lượt là tập nghiệm của các bất phương trình $(x^2 + 1)(x - 1) > 0$ và $2x - 3 \geq 0$. Tìm $S_2 \setminus S_1$.

- A. $S_2 \setminus S_1 = \left[1; \frac{3}{2}\right]$. B. $S_2 \setminus S_1 = \emptyset$. C. $S_2 \setminus S_1 = \left(1; \frac{3}{2}\right)$. D. $S_2 \setminus S_1 = \left[1; \frac{3}{2}\right)$.

Lời giải.

Ta có

- $(x^2 + 1)(x - 1) > 0 \Leftrightarrow x > 1 \Rightarrow S_2 = (1; +\infty)$.
- $2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2} \Rightarrow S_2 = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

$\Rightarrow S_2 \setminus S_1 = \emptyset$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 157. Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x + 1 > 3x + 4 \\ 5x + 3 \geq 8x + 21 \end{cases}$ là

- A. $S = (-\infty; -3)$. B. $S = (-\infty; -6)$. C. $S = (-3; -6]$. D. $S = (-\infty; -6]$.

Lời giải.

Bất phương trình đầu có tập nghiệm là $S_1 = (-\infty; -3)$, bất phương trình thứ hai có tập nghiệm là $S_2 = (-\infty; -6]$. Vậy, tập nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là $S = S_1 \cap S_2 = (-\infty; -6]$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 158. Giải hệ bất phương trình $\begin{cases} 5x - 2 > 4x + 5 \\ 5x - 4 < x + 2 \end{cases}$

- A. $S = (7; +\infty)$. B. $S = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$. C. $S = \emptyset$. D. $S = \left(\frac{3}{2}; 7\right)$.

Lời giải.

Bất phương trình đầu có tập nghiệm là $S_1 = (7; +\infty)$, bất phương trình thứ hai có tập nghiệm là $S_2 = (-\infty; 2)$. Vậy, tập nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là $S = S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 159. Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x + 1 > 3x - 2 \\ 3x - 2 < x - 2 \end{cases}$ là

- A. $S = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$. B. $S = (-\infty; 0)$. C. $S = \left(0; \frac{3}{2}\right)$. D. $S = \left[0; \frac{3}{2}\right]$.

Lời giải.

Bất phương trình đầu có tập nghiệm là $S_1 = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$, bất phương trình thứ hai có tập nghiệm là $S_2 = (-\infty; 0)$. Vậy, tập nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là $S = S_1 \cap S_2 = (-\infty; 0)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 160. Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x + 3 < 18 - 3x \\ x - 2 \geq 2x + 1 \end{cases}$ là

- A. $S = (-\infty; -3)$. B. $S = (-\infty; -3]$. C. $S = (-\infty; 3)$. D. $S = (-\infty; 3]$.

Lời giải.

Hệ bất phương trình tương đương với

$$\begin{cases} 5x < 15 \\ -3 \geq x \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -3.$$

Vậy, $S = (-\infty; -3]$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 161. Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} \frac{x-2}{5} > x+1 \\ 2x-1 < 1-4x \end{cases}$ là

A. $S = (-\infty; \frac{1}{3})$. B. $S = (-\frac{7}{4}; \frac{1}{3})$. C. $S = (-\infty; -\frac{7}{4})$. D. $S = (\frac{1}{3}; +\infty)$.

Lời giải.

Hệ bất phương trình tương đương với

$$\begin{cases} x-2 > 5x+5 \\ 6x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{7}{4} \\ x < \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x < -\frac{7}{4}.$$

Vậy, $S = (-\infty; -\frac{7}{4})$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 162. Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} \frac{x}{3} - 1 \geq \frac{x-3}{2} \\ x^2 < (x+2)^2 \end{cases}$ là

A. $S = (-1; 3]$. B. $S = (-1; 3)$. C. $S = (-1; +\infty)$. D. $S = (-\infty; 3)$.

Lời giải.

Hệ bất phương trình tương đương với

$$\begin{cases} 2x-6 \geq 3(x-3) \\ x^2 < x^2+4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \geq x \\ -1 < x \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x \leq 3.$$

Vậy, $S = (-1; 3]$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 163. Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} \frac{3x-1}{4} - \frac{3(x-2)}{8} - 1 > \frac{5-3x}{2} \\ x^2 \geq (x-6)^2 \end{cases}$ là

A. $S = (2; 3)$. B. $S = (2; +\infty)$. C. $S = (-2; 3)$. D. $S = [3; +\infty)$.

Lời giải.

Hệ bất phương trình tương đương với

$$\begin{cases} 2(3x-1) - 3(x-2) - 8 > 4(5-3x) \\ x^2 \geq x^2 - 12x + 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15x > 24 \\ 12x \geq 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{8}{5} \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3.$$

Vậy, $S = [3; +\infty)$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 164. Cho hai bất phương trình $x - 7 \leq 0$ và $mx \geq m + 1$ có tập nghiệm lần lượt là S_1, S_2 . Gọi $S = S_1 \cap S_2$. Xét các mệnh đề sau:

- (I) Nếu $m < 0$ thì tập $S \neq \emptyset$.
 (II) Nếu $0 \leq m < \frac{1}{6}$ thì tập $S = \emptyset$.
 (III) Nếu $m \neq \frac{1}{6}$ thì tập S có một phần tử.

Trong các khẳng định trên, khẳng định nào là đúng?

- A. (I). B. (II) và (III). C. (III). D. (I) và (II).

Lời giải.

Ta có $S_1 = (-\infty; 7]$.

- Nếu $m < 0$ thì $x \leq 1 + \frac{1}{m} < 1 \Rightarrow S_2 = \left(-\infty; 1 + \frac{1}{m}\right]$. Vì vậy $S = S_2 \neq \emptyset$. Ta có (I) đúng.
- Nếu $m = 0$ thì $S_2 = \emptyset \Rightarrow S = \emptyset$
- Nếu $m > 0$ thì $S_2 = \left[\frac{m+1}{m}; +\infty\right)$. Ta có: $\frac{m+1}{m} > 7 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{1}{6}$.

Do đó mệnh đề (II) đúng.

Đối với mệnh đề (III) dễ thấy là mệnh đề sai vì có thể kiểm tra khi $m = 0$ thì $S_2 = \emptyset \Rightarrow S = \emptyset$ nên không có phần tử nào.

Vậy có hai mệnh đề đúng là (I) và (II).

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 165. Tìm tất cả giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{x-2m}$ xác định với mọi $x \in (1; 3]$.

- A. $m < \frac{1}{2}$. B. $m \leq \frac{1}{2}$ hoặc $m > \frac{3}{2}$.
 C. $m < 0$. D. $m \leq \frac{3}{2}$.

Lời giải.

Hàm số không xác định tại $x = 2m$.

Vì vậy để hàm số xác định với mọi $x \in (1; 3]$ thì $\begin{cases} 2m \leq 1 \\ 2m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{2} \\ m > \frac{3}{2} \end{cases}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 166. Tìm tất cả giá trị của m để bất phương trình $\sqrt{x-1}(x-m+2) > 0$ có tập nghiệm là $S = (1; +\infty)$.

- A. $m \leq 3$. B. $m \geq 3$. C. $0 < m < 3$. D. $m < 0 \vee m > 3$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x \geq 1$.

Xét $x > 1$ ta có $\sqrt{x-1}(x-m+2) > 0 \Leftrightarrow x > m-2$ hay $x \in (m-2; +\infty)$.

Để tập nghiệm của bất phương trình là $S = (1; +\infty)$ thì $m-2 \leq 1 \Leftrightarrow m \leq 3$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 167. Tính tổng tất cả giá trị của m để bất phương trình $\sqrt{4-x}[(m^2+1)x-5m] \geq 0$ có tập nghiệm là $[2; 4]$.

- A. 2. B. 3. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{7}{2}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x \leq 4$.

Dễ thấy $x = 4$ là nghiệm của bất phương trình.

Xét $x < 4$ ta có $\sqrt{4-x}[(m^2+1)x-5m] \geq 0 \Leftrightarrow (m^2+1)x-5m \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{5m}{m^2+1}$.

Để tập nghiệm của bất phương trình là $S = [2; 4] \Leftrightarrow \frac{5m}{m^2+1} = 2 \Leftrightarrow 2m^2 - 5m + 2 = 0 \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ m = 2 \end{cases}$.

Tổng các giá trị của m là $\frac{5}{2}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 168. Cho hai bất phương trình $2(x+1) \geq x+3$ và $4mx+3 \geq 4x$ lần lượt có tập nghiệm là S_1, S_2 . Tìm tất cả giá trị của tham số m để tập $S = S_1 \cap S_2$ có duy nhất một phần tử.

A. $m = \frac{1}{4}$. B. $m = 0$. C. $m = -\frac{1}{4}$. D. $m = 4$ hoặc $m = 0$.

Lời giải.

Ta có $S_1 = [1; +\infty)$.

Bất phương trình $4mx+3 \geq 4x \Leftrightarrow (4-4m)x \leq 3$.

- Nếu $m > 1$ ta có $S_2 = \left(-\infty; \frac{3}{4-4m}\right]$. Khi đó $S = \emptyset$.
- Nếu $m = 1$ thì $S_2 = \mathbb{R} \Rightarrow S$ có vô số phần tử.
- Nếu $m < 1$, thì $S_2 = \left(-\infty; \frac{3}{4-4m}\right]$.

Để S có đúng một nghiệm thì $1 = \frac{3}{4-4m}$ hay $m = \frac{1}{4}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 169. Cho hai bất phương trình $5x+m < -x+2$ và $x+3m-2 < 2x-m$ lần lượt có tập nghiệm là S_1, S_2 . Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

A. $m > \frac{4}{5}$. B. $m < \frac{7}{4}$. C. $m \geq \frac{14}{25}$. D. $m > \frac{17}{5}$.

Lời giải.

Ta có $S_1 = \left(-\infty; \frac{2-m}{6}\right)$; $S_2 = (4m-2; -\infty)$.

Để $S = \emptyset$ thì $\frac{2-m}{6} \leq 4m-2 \Leftrightarrow m \geq \frac{14}{25}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 170. Tìm tất cả giá trị của m để bất phương trình $(m-1)x+2 > 2x+3$ có nghiệm trong khoảng $\left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

A. $m > 3$. B. $m < 3$. C. $3 < m \leq \frac{17}{5}$. D. $m < 3 \vee m > \frac{17}{5}$.

Lời giải.

$(m-1)x+2 > 2x+3 \Leftrightarrow (m-3)x > 1$.

- Nếu $m = 3$ bất phương trình vô nghiệm, nên không thỏa mãn.
- Nếu $m < 3$ thì tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; \frac{1}{m-3}\right)$. Để có nghiệm thuộc $\left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$ thì $\frac{1}{m-3} > \frac{5}{2}$. Bất phương trình này không có nghiệm $m < 3$.

- Nếu $m > 3$ tập nghiệm của bất phương trình là $\left(\frac{1}{m-3}; +\infty\right)$. Tập này luôn có giao khác rỗng với khoảng $\left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

Giá trị cần tìm của m là $m > 3$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 171. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình
$$\begin{cases} -x - 2 \geq 0 \\ 2x + 3 \geq -3 \\ x + m - 3 > 0 \end{cases}$$
 có nghiệm.

A. $m \in (\infty; 5]$. B. $m \in (5; 6)$. C. $m \in (5; +\infty)$. D. $m \in [5; 6]$.

Lời giải.

$$\text{Hệ phương trình đã cho tương đương với } \begin{cases} -x - 2 \geq 0 \\ 2x + 3 \geq -3 \\ x + m - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq -3 \\ x > 3 - m \end{cases}.$$

Nghiệm của hệ bất phương trình là giao của hai tập $[-3; -2]$ và $(3 - m; +\infty)$.

Hệ BPT có nghiệm khi $[-3; -2] \cap (3 - m; +\infty) \neq \emptyset \Leftrightarrow 3 - m < -2 \Leftrightarrow m > 5$, hay $m \in (5; +\infty)$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 172. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình
$$\begin{cases} \left|x - \frac{3}{2}\right| \leq \frac{1}{2} \\ (m^2 + 1)x \geq 6 \end{cases}$$
 vô nghiệm.

A. $m \in [0; \sqrt{2})$. B. $m \in [\sqrt{2}; +\infty)$. C. $m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$. D. $m \in (-\sqrt{5}; \sqrt{5})$.

Lời giải.

$$\text{Hệ bất phương trình tương đương với } \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x - \frac{3}{2} \leq \frac{1}{2} \\ x \geq \frac{6}{m^2 + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ x \geq \frac{6}{m^2 + 1} \end{cases}.$$

Để hệ đã cho vô nghiệm thì $\frac{6}{m^2 + 1} > 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 173. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 2x + 3 \geq 1 \\ 3x - 10 \leq 2 \\ (m - 1)x - 2 \geq 0 \end{cases}$$
 có nghiệm.

- A. $m \in (-\infty; 1) \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$. B. $m \in \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.
- C. $m \in \left(1; \frac{3}{2}\right]$. D. $m \in (-\infty; 1)$.

Lời giải.

$$\text{Hệ đã cho tương đương với } \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 4 \\ (m - 1)x \geq 2 \end{cases}.$$

Để hệ đã cho có nghiệm, thì bất phương trình $(m - 1)x \geq 2$ (*) có nghiệm thuộc đoạn $[-1; 4]$.

- Với $m = 1$ thì (*) vô nghiệm (không thỏa mãn).

- Với $m < 1$, $(*) \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{m-1}$. Nên hệ BPT có nghiệm khi $\frac{2}{m-1} \geq -1 \Leftrightarrow m < -1$.
- Với $m > 1$ thì $(*) \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{m-1}$. Nên hệ BPT có nghiệm khi $\frac{2}{m-1} \leq 4 \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{2}$.

Vậy $m \in (-\infty; 1) \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 174. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x - 16 < 0 \\ mx \geq 3 - x \end{cases}$ có nghiệm.

- A. $m \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{5}{8}; +\infty\right)$.
 B. $m \in (-\infty; -1) \cup \left[-\frac{5}{8}; +\infty\right)$.
 C. $m \in \left(-\frac{5}{8}; +\infty\right)$.
 D. $m \in \left(-1; -\frac{5}{8}\right)$.

Lời giải.

Hệ đã cho tương đương với $\begin{cases} x < 8 \\ (m+1)x \geq 3 \end{cases} (*)$.

Để hệ đã cho có nghiệm, thì $(*)$ phải có nghiệm thỏa mãn $x < 8$

- Với $m = -1$ thì $(*)$ vô nghiệm (không thỏa mãn).
- Với $m > -1$, $(*) \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{m+1}$. Nên $(*)$ có nghiệm thỏa mãn $x < 8$ khi $\frac{3}{m+1} < 8 \Leftrightarrow m > -\frac{5}{8}$.
- Với $m < -1$ thì $(*) \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{m+1}$. Nên $(*)$ luôn có nghiệm thỏa mãn $x < 8$.

Vậy $m \in (-\infty; -1) \cup \left[-\frac{5}{8}; +\infty\right)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 175. Với giá trị nào của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} mx \leq m-3 \\ (m+3)x \geq m-9 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất?

- A. $m = 1$.
 B. $m = 2$.
 C. $m = -1$.
 D. $m = -2$.

Lời giải.

Nhận xét rằng: Với $m = 0$ thì bất phương trình thứ nhất vô nghiệm. Với $m = -3$ thì hệ có tập nghiệm là $[2; +\infty)$ (không thỏa mãn yêu cầu bài toán).

Ta xét bài toán với các trường hợp sau

- Với $m \in (-3; 0)$ hệ BPT đã cho tương đương với $\begin{cases} x \geq \frac{m-3}{m} \\ x \geq \frac{m-9}{m+3} \end{cases}$.

Khi đó hệ BPT luôn có nhiều hơn 1 nghiệm.

- Với $m < -3$ hệ BPT đã cho tương đương với $\begin{cases} x \geq \frac{m-3}{m} \\ x \leq \frac{m-9}{m+3} \end{cases}$.

Khi đó hệ BPT có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\frac{m-3}{m} = \frac{m-9}{m+3} \Leftrightarrow m = 1$.

- Với $m > 0$ hệ BPT đã cho tương đương với
$$\begin{cases} x \leq \frac{m-3}{m} \\ x \geq \frac{m-9}{m+3} \end{cases}.$$

Khi đó hệ BPT có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\frac{m-3}{m} = \frac{m-9}{m+3} \Leftrightarrow m = 1$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 176. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x + 7 \geq 0 \\ mx - 6 \leq 0 \end{cases}$ có nghiệm.

A. Mọi giá trị m . B. $m \in (0; +\infty)$. C. $m \in (-\infty; 0)$. D. $m = 0$.

Lời giải.

Hệ BPT đã cho tương đương với
$$\begin{cases} x \geq -\frac{7}{2} \\ mx \leq 6 \end{cases}.$$

Yêu cầu của bài toán tương đương với việc tìm m để BPT $mx \leq 6$ có nghiệm thuộc $\left(-\frac{7}{2}; +\infty\right)$.

- Với $m = 0$ hệ luôn có tập nghiệm là $\left(-\frac{7}{2}; +\infty\right)$. (thỏa mãn)
- Với $m > 0$ ta có $mx \leq 6 \Leftrightarrow x \leq \frac{6}{m}$. Ta cần có $\frac{6}{m} \geq -\frac{7}{2} \Rightarrow m > 0$.
- Với $m < 0$ ta có $mx \leq 6 \Leftrightarrow x \geq \frac{6}{m}$. Khi đó BPT luôn có nghiệm thỏa mãn yêu cầu.

Vậy với mọi giá trị của m hệ bất phương trình đã cho đều có nghiệm.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 177. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} mx + 9 < 3x + m^2 \\ 4x + 1 < -x + 6 \end{cases}$ vô nghiệm.

- A. $m \in (-\infty; -2]$. B. $m \in [-2; 3]$. C. $m \in (-\infty; 3)$. D. $m \in [-2; 3]$.

Lời giải.

Hệ BPT đã cho tương đương với
$$\begin{cases} (m-3)x < m^2 - 9 \\ x < 1 \end{cases}.$$

Ta tìm m để BPT $(m-3)x < m^2 - 9$ (*) không có nghiệm $x \in (-\infty; 1)$.

- Với $m = 3$ dễ thấy (*) vô nghiệm ($m = 3$ thỏa mãn). (1)
- Với $m > 3$ thì (*) $\Leftrightarrow x < m + 3$, khi đó (*) luôn có nghiệm $x \in (-\infty; 1)$.
- Với $m < 3$ thì (*) $\Leftrightarrow x > m + 3$, khi đó (*) không có nghiệm $x \in (-\infty; 1)$ khi và chỉ khi $m + 3 \geq 1$, suy ra $-2 \leq m < 3$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $m \in [-2; 3]$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 178. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} x + m \leq 1 \\ 2x + 1 \leq 3 \\ -x + 1 < 4 \end{cases}$ có nghiệm.

- A. $m \in (-\infty; 4]$. B. $m \in (-\infty; 4)$. C. $m \in [0; 4)$. D. $m \in [0; +\infty)$.

Lời giải.

$$\text{HBPT} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x \leq 1 \\ x \leq 1 - m \end{cases}. \text{ Để hệ có nghiệm khi } 1 - m > -3. \text{ Vậy } m < 4.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 179. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 2x + m \geq x - 1 \\ x + 2m \leq 3 + 3m \\ -3x + 1 < 7 \end{cases}$$
 có nghiệm.

A. $m \in (-5; +\infty)$.

B. $m \in (-5; -2)$.

C. $m \in \mathbb{R}$.

D. $m \in [-2; +\infty)$.

Lời giải.

$$\text{HBPT} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - m \leq x \leq 3 + m \\ x > -2 \end{cases}. \text{ Hệ có nghiệm khi } \begin{cases} -1 - m \leq 3 + m \\ -2 < 3 + m \end{cases} \Leftrightarrow m \geq -2.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 180. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình
$$\begin{cases} (x+1)^2 \leq x^2 + 3x - m \\ 3x + m - 3 \leq 2x + m - 1 \\ x - 1 > -3 \end{cases}$$
 vô nghiệm.

A. $m \in (1; +\infty)$.

B. $m \in [1; +\infty)$.

C. $m \in (-3; +\infty)$.

D. $m \in (-\infty; 1]$.

Lời giải.

$$\text{HBPT} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 + m \\ -2 < x \leq 2 \end{cases}. \text{ Hệ vô nghiệm khi } 1 + m > 2. \text{ Vậy } m > 1.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 181. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình
$$\begin{cases} -x + 2m < 2 \\ 5x - 5 \leq 2x + 3m + 1 \\ x - 1 \geq 3 \end{cases}$$
 vô nghiệm.

A. $m \in (-\infty; 2] \cup (4; +\infty)$.

B. $m \in (-\infty; 2) \cup [4; +\infty)$.

C. $m \in [4; +\infty)$.

D. $m \in (2; 3)$.

Lời giải.

$$\text{HBPT} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 2 < x \leq m + 2 \\ x \geq 4 \end{cases}. \text{ Hệ vô nghiệm khi } \begin{cases} 2m - 2 \geq m + 2 \\ 2m - 2 < m + 2 \\ m + 2 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 4 \\ m < 2 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 182. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình
$$\begin{cases} mx \geq 2x + m^2 - 4 \\ 3x - 5 \leq 1 \end{cases}$$
 vô nghiệm.

A. $m \in (2; +\infty)$.

B. Không tồn tại m .

C. $m \in (-\infty; 0)$.

D. $m \in (-\infty; 4)$.

Lời giải.

$$\text{HBPT} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)[x-(m+2)] \geq 0 \\ x \leq 2 \end{cases}.$$

Với $m = 2$, hệ luôn có nghiệm.

Với $m > 2$, ta có hệ $\begin{cases} x \geq m+2 \\ x \leq 2 \end{cases}$. Hệ vô nghiệm khi $m+2 < 2$. Suy ra không tồn tại m .

Với $m < 2$, ta có hệ $\begin{cases} x < m+2 \\ x \leq 2 \end{cases}$ luôn có nghiệm. Vậy không tồn tại m

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 183. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} x \leq 2x+m \\ 2x-3 \leq 1 \end{cases}$ có nghiệm với mọi $x \in (1; 2)$.

- A. Không tồn tại m . B. $m \in \mathbb{R}$. C. $m \in [-1; +\infty)$. D. $m \in (-1; +\infty)$.

Lời giải.

$$\text{HBPT} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -m \\ x \leq 2 \end{cases}. \text{ Do đó } -m \leq 1 \Leftrightarrow m \geq -1.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 184. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x+1 > 2x+m \\ 2x+2m \leq x+3 \end{cases}$ có tập nghiệm là tập hợp con của tập hợp $(0; 1)$.

- A. $m \in (1; +\infty)$. B. $m \in \left(1; \frac{4}{3}\right)$. C. $m \in \left(-\infty; \frac{4}{3}\right)$. D. Không tồn tại m .

Lời giải.

$$\text{HBPT} \Leftrightarrow \begin{cases} x > m-1 \\ x \leq 3-2m \end{cases}. \text{ Để hệ có tập nghiệm là tập con của } (0; 1) \text{ thì } \begin{cases} 3-2m \leq 1 \\ m-1 > 0. \end{cases}$$

Vậy $m \in (1; +\infty)$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 185. Với mọi số thực dương a, b, c thì tập nghiệm S của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} abx + bcx + cax \geq a^2 + b^2 + c^2 \\ (a^2 + b^2 + c^2)(x-1) \leq 2ab + 2bc + 2ca \end{cases}$$

luôn chứa trong tập hợp nào sau đây?

- A. $[1; 3)$. B. $(2; 3]$. C. $(1; 3)$. D. $(0; 4)$.

Lời giải.

$$\text{HBPT} \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} \leq x \leq \frac{(a+b+c)^2}{a^2 + b^2 + c^2}. \text{ Ta có } \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} \geq 1 \text{ và } \frac{(a+b+c)^2}{a^2 + b^2 + c^2} \leq 3. \text{ Vậy } S \subset (0; 4).$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 186. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x-2m} - \sqrt{4-2x}$ là đoạn $[1; 2]$ khi và chỉ khi

- A. $m = 1$. B. $m = -\frac{1}{2}$. C. $m = \frac{1}{2}$. D. $m > \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $\begin{cases} x - 2m \geq 0 \\ 4 - 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2m \\ x \leq 2 \end{cases}.$

Để tập xác định của hàm số là đoạn $[1; 2]$ thì $2m = 1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$

Chọn đáp án **C** □

Câu 187. Cho bất phương trình $m(x - m) \geq x - 1$. Với giá trị nào của m thì tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty; m + 1]$?

- A. $m = 1$. B. $m > 1$. C. $m < 1$. D. $m \leq 1$.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương $(m - 1)x \geq m^2 - 1$.

- $m = 1$ thì bất phương trình đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- $m > 1$ thì bất phương trình tương đương $x \geq m + 1$.
- $m < 1$ thì bất phương trình tương đương $x \leq m + 1$.

Vậy với $m < 1$ thì thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **C** □

Câu 188. Tập nghiệm của bất phương trình $x - m + 3 \leq 0$ giao với tập hợp $[-m - 9; +\infty)$ tại một điểm duy nhất khi

- A. $m = 3$. B. $m = -3$. C. Không tồn tại m . D. $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $x \leq m - 3$. Để tập nghiệm của bất phương trình giao với $[-m - 9; +\infty)$ tại một điểm duy nhất thì $m - 3 = -m - 9 \Leftrightarrow m = -3$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 189. Cho bất phương trình $mx + 6 < 2x + 3m$. Với $m < 2$, tập nào sau đây là phần bù của tập nghiệm của bất phương trình trên?

- A. $(-\infty; 3)$. B. $(-\infty; 3]$. C. $(3; +\infty)$. D. $[3; +\infty)$.

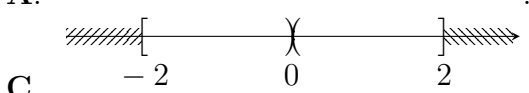
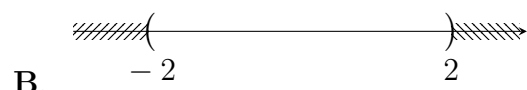
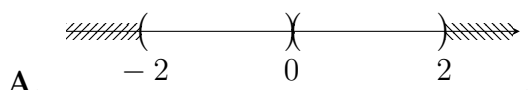
Lời giải.

Với $m < 2$, ta có $mx + 6 < 2x + 3m \Leftrightarrow (m - 2)x < 3(m - 2) \Leftrightarrow x > 3$.

Do đó phần bù của tập nghiệm là $(-\infty; 3]$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 190. Biểu diễn trên trục số tập xác định của hàm số $y = \frac{2x}{\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}}$.



Lời giải.

Hàm số đã cho xác định khi

$$\begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ 2 + x \geq 0 \\ \sqrt{2-x} \neq \sqrt{2+x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Suy ra tập xác định là $[-2; 2] \setminus \{0\} = [-2; 0) \cup (0; 2]$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 191. Tìm tập hợp nghiệm S của bất phương trình $\sqrt{4x^2 + 2x + 10} > 3x + 1$.

A. $S = \left(\frac{-9}{5}; 1\right)$. B. $S = \left(\frac{-1}{3}; 1\right)$. C. $S = \left[\frac{-1}{3}; 1\right)$. D. $S = (-\infty; 1)$.

Lời giải.

Ta có 2 trường hợp

TH1. $3x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{3}$,

Khi đó bất phương trình luôn thỏa vì $4x^2 + 2x + 10 = (2x)^2 + 2 \cdot (2x) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{39}{4} \geq \frac{39}{4} > 0$.

TH2. $3x + 1 \geq 0$, khi đó 2 vế cùng dương nên ta có

$$\begin{cases} 3x + 1 \geq 0 \\ 4x^2 + 2x + 10 > (3x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ 5x^2 + 4x - 9 < 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$(2) \Leftrightarrow (x - 1)(5x + 9) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x - 1 > 0 \\ 5x + 9 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 1 < 0 \\ 5x + 9 > 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x > 1 \\ x < -\frac{9}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1 \\ x > -\frac{9}{5} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{9}{5} < x < 1.$$

Kết hợp các trường hợp ta được tập hợp nghiệm cần tìm là $(-\infty; 1)$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 192. Tập hợp nghiệm của bất phương trình $\frac{1}{\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x}} < \frac{\sqrt{6}}{6}$ là khoảng $(a; b)$. Tính $a - b$.

A. 4. B. $2\sqrt{3}$. C. 0. D. $2 - \sqrt{3}$.

Lời giải.

Trước hết ta có điều kiện là $-2 \leq x \leq 2$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} &> \sqrt{6} \Leftrightarrow 4 + 2\sqrt{4-x^2} > 6 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} > 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 < 3 \\ &\Leftrightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta được tập hợp nghiệm cần tìm là $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$. Từ đó suy ra $a - b = 2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 193. Tìm tổng tất cả các nghiệm nguyên của hệ bất phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+2} + \frac{2}{\sqrt{x+2}} > \frac{5}{2} \\ |x+3| - |x| < 2 \end{cases} \quad (1)$ (2) .

A. -1. B. -3. C. 0. D. -2.

Lời giải.

Điều kiện cho bất phương trình (1) là $x > -2$.

Với điều kiện đó, áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta được

$$\sqrt{x+2} + \frac{2}{\sqrt{x+2}} \geq 2\sqrt{2} > \frac{5}{2}.$$

Do đó bất phương trình (1) có tập nghiệm là $(-2; +\infty)$.

Xét bất phương trình (2):

TH1. $x < -3$

$$(2) \Leftrightarrow -x - 3 - (-x) < 2 \Leftrightarrow -3 < 2 \text{ (vô lý) }.$$

TH2. $-3 < x < 0$

$$(2) \Leftrightarrow x + 3 - (-x) < 2 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}.$$

Kết hợp điều kiện ta được $-3 < x < -\frac{1}{2}$.

TH3. $x > 0$

$$(2) \Leftrightarrow x + 3 - x < 2 \Leftrightarrow 3 < 2 \text{ (vô lý)}.$$

Do đó hệ bất phương trình tương đương

$$\begin{cases} x > -2 \\ -3 < x < -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x < -\frac{1}{2}.$$

Suy ra các nghiệm nguyên của hệ là -1 và 0 . Vậy tổng các nghiệm nguyên là -1 .

Chọn đáp án **A**

□

Câu 194. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{2x-1} + \sqrt{2-4x}$.

A. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$. B. $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$. C. $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$. D. $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi

$$\begin{cases} \sqrt{2-4x} \geq 1-2x \\ 2-4x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-4x \geq 1-4x+4x^2 \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq \frac{1}{4} \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 195. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $x^3 + x^2 + 2x + 2 \leq 0$.

A. $S = (-\infty; 2]$. B. $S = (-\infty; -1]$. C. $S = [-1; +\infty)$. D. $S = [-2; +\infty)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } x^3 + x^2 + 2x + 2 = x^2(x+1) + 2(x+1) = (x^2+2)(x+1).$$

$$\text{Vậy } x^3 + x^2 + 2x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow (x^2+2)(x+1) \leq 0 \Leftrightarrow x+1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -1.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 196. Hai đẳng thức $|2x-3| = 2x-3$ và $|3x-8| = 8-3x$ cùng xảy ra khi và chỉ khi

A. $\frac{3}{8} \leq x \leq \frac{2}{3}$. B. $\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{8}{3}$. C. $x \leq \frac{8}{3}$. D. $x \geq \frac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$|2x - 3| = 2x - 3 \Leftrightarrow 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2};$$

$$|3x - 8| = 8 - 3x \Leftrightarrow 3x - 8 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{8}{3}.$$

Vậy hai đẳng thức $|2x - 3| = 2x - 3$ và $|3x - 8| = 8 - 3x$ cùng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{8}{3}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 197. Bất phương trình nào sau đây tương đương với bất phương trình $2x > 1$.

A. $2x + \sqrt{x+2} > 1 + \sqrt{x+2}$.

B. $4x^2 > 1$.

C. $2x + \sqrt{x-2} > 1 + \sqrt{x-2}$.

D. $2x - \frac{1}{x-3} > 1 - \frac{1}{x-3}$.

Lời giải.

Bất phương trình $2x + \sqrt{x+2} > 1 + \sqrt{x+2}$ có tập nghiệm $S = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Bất phương trình $4x^2 > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x > 1 \\ 2x < -1 \end{cases}$.

Bất phương trình $2x + \sqrt{x-2} > 1 + \sqrt{x-2}$ có tập nghiệm $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Bất phương trình $2x - \frac{1}{x-3} > 1 - \frac{1}{x-3}$ có tập nghiệm $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{3\}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 198. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\frac{|2-x|}{\sqrt{5-x}} > \frac{x-2}{\sqrt{5-x}}$.

A. $S = (-\infty; 2)$.

B. $S = (-\infty; 2]$.

C. $S = (2; 5)$.

D. $S = (2; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện $5 - x > 0 \Leftrightarrow x < 5$.

Khi đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$|2-x| > x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 < 0 \\ |2-x| > x-2 \end{cases} \Leftrightarrow x < 2.$$

Nhận xét: Ta có thể giải bài toán bằng phương pháp loại trừ nhanh các đáp án.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 199. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left|\frac{2}{x-13}\right| > \frac{8}{9}$ là

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 13$.

$$\left|\frac{2}{x-13}\right| > \frac{8}{9} \Leftrightarrow \frac{1}{|x-13|} > \frac{4}{9} \Leftrightarrow |x-13| < \frac{9}{4} \Leftrightarrow -\frac{9}{4} < x-13 < \frac{9}{4} \Leftrightarrow \frac{43}{4} < x < \frac{61}{4}.$$

Vậy bất phương trình đã cho có 4 nghiệm nguyên $x = 11, x = 12, x = 14, x = 15$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 200. Cho bất phương trình $\frac{ax+b}{a-b} > \frac{ax-b}{a+b}$ với $a, b > 0, a \neq \pm b$. Tìm điều kiện của a, b để bất phương trình có nghiệm $x > -1$.

- A. $a - b > 0$. B. $a + b > 0$. C. $a + b < 0$. D. $a - b < 0$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & \frac{ax+b}{a-b} > \frac{ax-b}{a+b} \\ \Leftrightarrow & \frac{ax}{a-b} + \frac{b}{a-b} > \frac{ax}{a+b} - \frac{b}{a+b} \\ \Leftrightarrow & ax \left(\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b} \right) > -b \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b} \right) \\ \Leftrightarrow & \frac{abx}{a^2-b^2} > -\frac{ab}{a^2-b^2} \\ \Leftrightarrow & \frac{x}{a^2-b^2} > -\frac{1}{a^2-b^2} \text{ vì } ab > 0. \end{aligned}$$

Để bất phương trình có nghiệm $x > -1$ thì $\frac{1}{a^2-b^2} > 0 \Leftrightarrow a^2 - b^2 > 0 \Leftrightarrow a - b > 0$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 201. Cho bất phương trình $\frac{mx-m^2}{\sqrt{x-3}} \geq \frac{2x-4}{\sqrt{x-3}}$. Gọi S là một tập nghiệm của bất phương trình trên. Tìm tất cả giá trị của tham số m để $S \cap A \neq \emptyset$ với $A = [5; +\infty)$.

- A. $m = 2$. B. $m > 2$. C. $m \leq 2$. D. $m \geq 2$.

Lời giải.

$$\frac{mx-m^2}{\sqrt{x-3}} \geq \frac{2x-4}{\sqrt{x-3}} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ (m-2)x - m^2 + 4 \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

Ta có nghiệm của (1) thỏa điều kiện $x > 3$ mới là nghiệm của bất phương trình.

TH1. $m > 2$

(1) $\Leftrightarrow x \geq m+2$ thỏa điều kiện vì $m+2 > 3$.

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S = [m+2; +\infty)$. Khi đó $S \cap [5; +\infty) \neq \emptyset$.

TH2. $m < 2$

(1) $\Leftrightarrow x \leq m+2$.

Khi đó:

+ Nếu $m \leq 1 \Leftrightarrow m+2 \leq 3$ thì bất phương trình có tập nghiệm là $S = \emptyset$.

+ Nếu $1 < m < 2 \Leftrightarrow 3 < m+2 < 4$ thì bất phương trình có tập nghiệm là $S = (3; m+2]$. Khi đó $S \cap [5; +\infty) = \emptyset$.

TH3. $m = 2$

(1) $\Leftrightarrow 0x + 0 \geq 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S = (3; +\infty)$. Khi đó $S \cap [5; +\infty) \neq \emptyset$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 202. Cho bất phương trình $mx - 16 \geq 2(x - m^3)$ có tập nghiệm là $S = [-56; +\infty)$. Tính giá trị của $P = 2m + 1$.

- A. $P = -9$. B. $P = 1$. C. $P = 2$. D. $P = 9$.

Lời giải.

$$mx - 16 \geq 2(x - m^3) \Leftrightarrow (m - 2)x + 2m^3 - 16 \geq 0 \Leftrightarrow (m - 2)[x + 2(m^2 + 2m + 4)] \geq 0.$$

- $m = 2$: Bất phương trình có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ (loại).
- $m < 2$: $x + 2(m^2 + 2m + 4) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -2(m^2 + 2m + 4)$ (loại).
- $m > 2$: $x + 2(m^2 + 2m + 4) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2(m^2 + 2m + 4)$.

$$\text{Do đó, với yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ -2(m^2 + 2m + 4) = -56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m = -6 \text{ hoặc } m = 4 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4.$$

Khi đó $P = 2 \cdot 4 + 1 = 9$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 203. Cho bất phương trình $(4m^2 + 2m + 1)x - 5m \geq 3x - m - 1$. Tính tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình trên thỏa với mọi $x > \frac{3}{2}$.

- A. $m \leq -1$. B. $m = -1$. C. $m \geq \frac{2}{3}$. D. $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq \frac{2}{3} \end{cases}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } (4m^2 + 2m + 1)x - 5m \geq 3x - m - 1 \Leftrightarrow (4m^2 + 2m - 2)x \geq 4m - 1.$$

Để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì:

$$\begin{cases} \begin{cases} m = -1 \text{ hoặc } m = \frac{1}{2} \\ -4m + 1 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m < -1 \text{ hoặc } m > \frac{1}{2} \\ \frac{4m - 1}{4m^2 + 2m - 2} \leq \frac{3}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ \begin{cases} m < -1 \text{ hoặc } m > \frac{1}{2} \\ 12m^2 - 2m - 4 \geq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 204. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hai bất phương trình $mx + 2 - m > 0$ và $(m + 2)x + 1 - m > 0$ tương đương.

- A. $m = -4$. B. $m = 4$.
C. $m < -2$ hoặc $m > 0$. D. $m > 0$.

Lời giải.

$$\text{Hai bất phương trình tương đương} \Leftrightarrow \begin{cases} m(m + 2) > 0 \\ \frac{m - 2}{m} = \frac{m - 1}{m + 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \text{ hoặc } m > 0 \\ m = 4 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 205. Tìm tất cả các giá trị m để hàm số $y = \sqrt{2x - m - 2} - \sqrt{2m + 1 - mx}$ xác định với mọi $x \geq 1$.

- A. $m = 0$. B. $m = -1$.
C. $m \geq 1$. D. $m = 0$ hoặc $m \leq -1$.

Lời giải.

$$y \text{ xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - m - 2 \geq 0 \\ 2m + 1 - mx \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{m+2}{2} \\ mx \leq 2m+1 \end{cases}.$$

$$\text{Để hàm số xác định với mọi } x \geq 1 \text{ thì} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ \begin{cases} m < 0 \\ \frac{m+2}{2} \leq 1 \\ \frac{2m+1}{m} \leq 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m \leq -1. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 206. Cho bất phương trình $m(x-1) \geq m+6$ có tập nghiệm là S . Gọi tập $T = S \cap A$ với $A = [-2; 0)$. Tìm tất cả giá trị của m để T là một đoạn trên trục số có độ dài bằng 1 đơn vị.

- A. $m < 0$. B. $m > 2$. C. $m = -2$. D. $m = 0$ hoặc $m = 2$.

Lời giải.

Ta có: $m(x-1) \geq m+6 \Leftrightarrow mx \geq 2m+6$.

Với $m \geq 0$ không thỏa ycbt.

Với $m < 0$

$$mx \geq 2m+6 \Leftrightarrow x \leq \frac{2m+6}{m}.$$

$$\text{ycbt} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \frac{2m+6}{m} - (-2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 3m+6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 207. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để thì hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 3x+5 > 4 & (1) \\ 5x+4 < 0 & (2) \\ 2x-5 \leq mx+m & (3) \end{cases}$$

có nghiệm.

- A. $m \in [2; +\infty)$. B. $m \in (-\infty; -33)$. C. $m \in \left[-\frac{11}{2}; 2\right]$. D. $m \in \left(-\frac{11}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Từ phương trình (1) và (2) ta được $-\frac{1}{3} < x < -\frac{4}{5}$.

Lại có: (3) $\Leftrightarrow (2-m)x \leq m+5$ (*).

- TH1. Khi $m = 2$ thì bất phương trình (*) có nghiệm $\forall x \neq -\frac{1}{3}$. Suy ra $m = 2$ thỏa mãn.
- TH2. Nếu $2-m < 0 \Leftrightarrow m > 2$ khi đó bất phương trình (*) tương đương $x \geq \frac{m+5}{2-m}$.

Để hệ bất phương trình đã cho có nghiệm thì

$$\frac{m+5}{2-m} < -\frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{m+33}{5(2-m)} < 0 \Leftrightarrow m > -33.$$

Kết hợp điều kiện, có $m > 2$.

- TH3. Nếu $2-m > 0 \Leftrightarrow m < 2$ khi đó bất phương trình (*) tương đương $x \leq \frac{m+5}{2-m}$.

Để hệ bất phương trình đã cho có nghiệm thì

$$\frac{m+3}{2-m} > -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{2m+11}{3(2-m)} < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{11}{2}.$$

Kết hợp điều kiện, có $-\frac{11}{2} < m < 2$.

Lấy hợp của các trường hợp trên ta có các giá trị cần tìm là $m > -\frac{11}{2}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 208. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x + 6 \geq -2 & (1) \\ 2x - 3 \leq -7 & (2) \\ mx \geq 3m + 1 & (3) \end{cases}$$
 vô nghiệm.

nghiệm.

A. $m \in \left(0; -\frac{1}{11}\right)$. B. $m \in \left(-\frac{1}{5}; +\infty\right)$. C. $m \in \left(-\frac{1}{11}; +\infty\right)$. D. $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{11}\right]$.

Lời giải.

Từ bất phương trình (1) và (2) ta được $-8 \leq m \leq -2$.

Xét bất phương trình (3):

TH1. Nếu $m = 0$ thì bất phương trình (3) vô nghiệm. Suy ra hệ vô nghiệm.

TH2. Nếu $m > 0$ thì (3) $\Leftrightarrow x \geq 3 + \frac{1}{m}$.

Để hệ đã cho vô nghiệm thì $3 + \frac{1}{m} > -2 \Leftrightarrow \frac{5m+1}{m} > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{5}$. Suy ra $m > 0$.

TH3. Nếu $m < 0$ bất phương trình thứ ba ta được $x \leq 3 + \frac{1}{m}$.

Để hệ đã cho vô nghiệm thì $3 + \frac{1}{m} < -8 \Leftrightarrow \frac{11m+1}{m} < 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{11}$. Suy ra $-\frac{1}{11} < m < 0$.

Lấy hợp cả 3 TH ta được $m > -\frac{1}{11}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 209. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 3x + 5 \geq x - 1 & (1) \\ (x + 2)^2 \leq (x - 1)^2 + 9 & (2) \\ m^2x + 1 > m + (2m - 1)x & (3) \end{cases}$$
 vô nghiệm.

vô nghiệm.

A. $m \in [1; 2]$. B. $m \in [1; 2)$. C. $m \in (-\infty; 1]$. D. $m \in (2; +\infty)$.

Lời giải.

Từ bất phương trình (1) và (2) ta được $-3 \leq x \leq 1$.

Lại có (3) $\Leftrightarrow (m^2 - 2m + 1)x > m - 1 \Leftrightarrow (m - 1)[(m - 1)x - 1] > 0 (*)$.

TH1. Nếu $m = 1$ thì (*) vô nghiệm nên hệ đã cho vô nghiệm.

TH2. Nếu $m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$.

Bất phương trình (*) tương đương với $(m - 1)x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{m - 1}$.

Để hệ BPT đã cho vô nghiệm thì $\frac{1}{m - 1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2 - m}{m - 1} \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 2$. Suy ra $1 < m \leq 2$.

TH3. Nếu $m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$.

Bất phương trình (*) tương đương với $(m - 1)x < 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{m - 1}$.

Để hệ BPT đã cho vô nghiệm thì $\frac{1}{m - 1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2 - m}{m - 1} \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 2$ (loại).

Vậy các giá trị cần tìm của m là $1 \leq m \leq 2$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 210. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để hệ bất phương trình

$$\begin{cases} \left| x - \frac{3}{2} \right| \leq \frac{5}{2} & (1) \\ x^2 - 3x \geq a^2 + 15a - 12 & (2) \end{cases}$$

có nghiệm.

A. $a \in (1; +\infty)$.

B. $a \in [-16; 1]$.

C. $a \in (-\infty; -16)$.

D. $a \in (-16; 1)$.

Lời giải.

Ta có (1) $\Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leq x - \frac{3}{2} \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 4$.

Để hệ bất phương trình đã cho có nghiệm thì bất phương trình (2) có nghiệm trong đoạn $[-1; 4]$.

Xét hàm số $f(x) = x^2 - 3x$ trên đoạn $[-1; 4]$. Bằng cách lập bảng biến thiên ta thấy $\max_{[-1; 4]} f(x) = 4$.

Để $x^2 - 3x \geq a^2 + 15a - 12$ có nghiệm trong đoạn $[-1; 4]$ thì

$$\max_{[-1; 4]} f(x) \geq a^2 + 15a - 12 \Leftrightarrow 4 \leq a^2 + 15a - 12 \Leftrightarrow -16 \leq a \leq 1.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 211. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x^2 + 2x + a \leq 0 & (1) \\ x^2 - 4x - 6a \leq 0 & (2) \end{cases}$$
 có nghiệm duy nhất.

A. $a \in (-\infty; 0]$.

B. $a \in (0; +\infty)$.

C. $a = \frac{48}{49}$.

D. $a = 0$.

Lời giải.

Ta có $\Delta_{(1)} = 1 - a$ và $\Delta_{(2)} = 4 + 6a$.

Để hệ bất phương trình đã cho có nghiệm thì $\begin{cases} \Delta_1 \geq 0 \\ \Delta_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq a \leq 1$.

Khi đó hệ phương trình đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} -1 - \sqrt{1-a} \leq x \leq -1 + \sqrt{1-a} \\ 2 - \sqrt{4+6a} \leq x \leq 2 + \sqrt{4+6a} \end{cases}$.

Để hệ bất phương trình đã cho có nghiệm duy nhất thì $\begin{cases} -1 - \sqrt{1-a} = 2 + \sqrt{4+6a} (*) \\ -1 + \sqrt{1-a} = 2 - \sqrt{4+6a} (**) \end{cases}$.

Để thấy (*) vô nghiệm. Ta viết lại (**)

$$\sqrt{1-a} + \sqrt{4+6a} = 3 \Leftrightarrow 1-a+4+6a+2\sqrt{(4+6a)(1-a)} = 9$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(4+6a)(1-a)} = 4-5a \Leftrightarrow \begin{cases} 4-5a \geq 0 \\ (4-5a)^2 = 4(4+2a-6a^2) \end{cases} \Leftrightarrow a = 0.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 212. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x + 5 \leq 0 & (1) \\ 2mx - 3 \leq m & (2) \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị âm của tham số m

để hệ có nghiệm lớn nhất là a và nghiệm nhỏ nhất là b sao cho $a - b = 2$.

A. $m \in \left(-\infty; -\frac{9}{25}\right)$.

B. $m = -\frac{9}{25}$.

C. $m = -\frac{9}{5}$.

D. Không có giá trị m .

Lời giải.

Ta có (1) $\Leftrightarrow x \leq -\frac{5}{3}$.

Để tập nghiệm thỏa yêu cầu đề bài thì (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ x \geq \frac{1}{2} + \frac{3}{2m} \end{cases}$.

Khi đó tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{2m}; -\frac{5}{3} \right]$.

Theo giả thiết ta có $-\frac{5}{3} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2m} = 2 \Leftrightarrow m = -\frac{9}{25}$ (thỏa mãn điều kiện $m < 0$).

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 213. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} (x+3)(4-x) > 0 \\ x < m-1 \end{cases}$ có nghiệm.

A. $m < 5$.

B. $m > -2$.

C. $m = 5$.

D. $m > 5$.

Lời giải.

Ta có $(x+3)(4-x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-3; 4)$.

Do đó hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-3 < m-1 \Leftrightarrow m > -2$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 214. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 < 0 \\ mx + 4 < 0 \end{cases}$ vô nghiệm.

A. $m > 0$.

B. $m < -\frac{4}{3}$.

C. $m \geq -\frac{4}{3}$.

D. $m \neq 0$.

Lời giải.

Bất phương trình $x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow x \in (2; 3)$.

Xét bất phương trình $mx + 4 < 0$ ta có các trường hợp sau:

a) Nếu $m = 0$ bất phương trình vô nghiệm.

b) Nếu $m > 0$ bất phương trình tương đương với $x < -\frac{4}{m}$. Khi đó hệ vô nghiệm khi và chỉ khi $-\frac{m}{4} \leq 2$. Kết hợp điều kiện ta có $m > 0$ thỏa mãn.

c) Nếu $m < 0$ bất phương trình tương đương với $x > -\frac{4}{m}$. Hệ vô nghiệm khi $-\frac{4}{m} \geq 3 \Rightarrow m \geq \frac{-4}{3}$.

Kết luận $m \geq -\frac{4}{3}$ hệ đã cho vô nghiệm.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 215. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 1 \leq 0 \\ x - m > 0 \end{cases}$ có nghiệm.

A. $m > 15$.

B. $m = 1$.

C. $m < 1$.

D. $m \neq 1$.

Lời giải.

Bất phương trình $x^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 1]$.

Bất phương trình $x - m > 0 \Leftrightarrow x > m$.

Hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m < 1$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 216. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 + 2x - 15 < 0 \\ (m+1)x \geq 3 \end{cases}$ có nghiệm.

A. $m < -1$.

B. $m > -1$.

C. $m < -\frac{8}{5}$ hoặc $m > 0$.

D. $m < -\frac{9}{5}$ hoặc $m > 1$.

Lời giải.

Ta có $x^2 + 2x - 15 < 0 \Leftrightarrow -5 < x < 3$.

+ Nếu $m+1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$ thì bất phương trình $(m+1)x \geq 3$ vô nghiệm.

+ Nếu $m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$ thì bất phương trình $(m+1)x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{m+1}$.

Khi đó hệ có nghiệm khi $\frac{3}{m+1} < 3 \Leftrightarrow m > 0$.

+ Nếu $m+1 < 0 \Leftrightarrow m < -1$ thì bất phương trình $(m+1)x \geq 3 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{m+1}$.

Khi đó hệ có nghiệm khi $\frac{3}{m+1} > -5 \Leftrightarrow m < -\frac{8}{5}$.

Vậy $m < -\frac{8}{5}$ hoặc $m > 0$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 217. Giá trị $x = -2$ là nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

A. $|x| < 2$.

B. $(x-1)(x+2) > 0$.

C. $\frac{x}{1-x} + \frac{1-x}{x} < 0$.

D. $\sqrt{x+3} < x$.

Lời giải.

Thay $x = -2$ vào đáp án C, ta được $\frac{-2}{1+2} + \frac{1+2}{-2} = -\frac{13}{6} < 0$. Do đó, $x = -2$ là nghiệm của bất phương trình $\frac{x}{1-x} + \frac{1-x}{x} < 0$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 218. Giá trị $x = -3$ thuộc tập nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

A. $(x+3)(x+2) > 0$.

B. $(x+3)^2(x+2) \leq 0$.

C. $x + \sqrt{1-x^2} \geq 0$.

D. $\frac{1}{1+x} + \frac{2}{3+2x} > 0$.

Lời giải.

Thay $x = -3$ vào phương án B, ta có $(-3+3)^2 \cdot (-3+2) \leq 0$ (bất đẳng thức luôn đúng). Do đó, $x = -3$ là nghiệm của bất phương trình $(x+3)^2(x+2) \leq 0$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 219. Giải bất phương trình $\sqrt{x} < 3$.

A. $x < 9$.

B. $x \leq 9$.

C. $0 < x < 9$.

D. $0 \leq x < 9$.

Lời giải.

$$\sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 9 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x < 9.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 220. Điều kiện xác định của phương trình $\frac{3}{\sqrt{4-x}} = x+5$ là

A. $x \leq 4$.

B. $x > 4$.

C. $x < 4$.

D. $x > -5$.

Lời giải.Điều kiện xác định: $4 - x > 0 \Leftrightarrow x < 4$.Chọn đáp án **C** □**Câu 221.** Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 + \sqrt{x-2} \leq 4 + \sqrt{x-2}$ là

A. $\emptyset$.

B. $(-\infty; 2)$.

C. $\{2\}$.

D. $[2; +\infty)$.

Lời giải.Với $x \geq 2$, bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2.$$

So với điều kiện ta có $x = 2$.Chọn đáp án **C** □**Câu 222.** Bất phương trình $x^2 - 8x + 7 + \sqrt{x-5} \leq \sqrt{x-5}$ có tập nghiệm là

A. $[1; 7]$.

B. $(5; 7]$.

C. $(1; 7)$.

D. $[5; 7]$.

Lời giải.Với điều kiện $x \geq 5$, bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^2 - 8x + 7 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 7.$$

So với điều kiện, ta có $5 \leq x \leq 7$.Chọn đáp án **D** □**Câu 223.** Bất phương trình $(x+1)\sqrt{x} \leq 0$ tương đương bất phương trình nào sau đây?

A. $\sqrt{x(x+1)^2} \leq 0$.

B. $(x+1)\sqrt{x} < 0$.

C. $(x+1)^2\sqrt{x} \leq 0$.

D. $(x+1)^2\sqrt{x} < 0$.

Lời giải.Với $x \geq 0$ suy ra $x+1 > 0$, bằng cách nhân hai vế của bất phương trình đã cho với biểu thức $(x+1)$, ta có bất phương trình tương đương

$$(x+1)\sqrt{x} \leq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2\sqrt{x} \leq 0.$$

Chọn đáp án **C** □**Câu 224.** Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} \frac{2x-1}{-2} > -x+1 \\ x-2 > 3 \end{cases}$ là

A. $\emptyset$.

B. $\mathbb{R}$.

C. $(5; +\infty)$.

D. $\left(\frac{3}{4}; 5\right)$.

Lời giải.

$$\begin{cases} \frac{2x-1}{-2} > -x+1 \\ x-2 > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 < 2x-2 \\ x > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < -2 \\ x > 5 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 225. Bộ số nào sau đây là nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} (x+1)(y-1) > 0 \\ x > 3 \end{cases}$?

A. (1; 3). B. (4; -1). C. (5; 1). D. (4; 2).

Lời giải.

$$\text{Xét } \begin{cases} (x+1)(y-1) > 0 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ y > 1. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(D)**

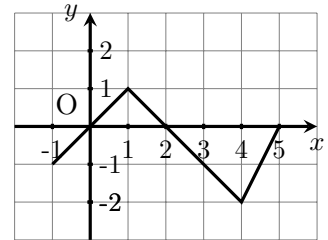
□

Câu 226.

Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $\mathcal{D} = (-1; 5)$ và đồ thị như hình vẽ.

Giá trị nào sau đây là nghiệm của bất phương trình $f(x) > 0$?

- A. $-\frac{1}{2}$. B. 1.
C. 3. D. 4.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta có $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0; 2)$.

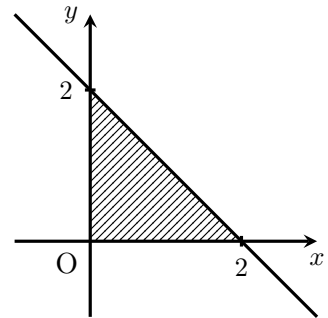
Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 227.

Miền được gạch chéo ở hình bên biểu diễn cho miền nghiệm của một trong bốn hệ bất phương trình được cho sau đây. Đó là hệ bất phương trình nào?

- A. $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0. \\ x + y < 4 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0. \\ x + y > 2 \end{cases}$
C. $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0. \\ x + y < 2 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0. \\ x - y > 2 \end{cases}$



Lời giải.

Dựa vào hình vẽ ta nhận đáp án C.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 228. Tập nghiệm của bất phương trình $(\sqrt{3} - \sqrt{2})x > 1$ là

- A. $(-\sqrt{3} - 2; +\infty)$. B. $(-\infty; \sqrt{3} + 2)$. C. $(-\infty; -\sqrt{3} - 2)$. D. $(\sqrt{3} + 2; +\infty)$.

Lời giải.

Vì $3 > 2$ nên $\sqrt{3} > \sqrt{2}$, suy ra $\sqrt{3} - \sqrt{2} > 0$. Do đó

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \Leftrightarrow x > \sqrt{3} + \sqrt{2}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (\sqrt{3} + \sqrt{2}; +\infty)$.

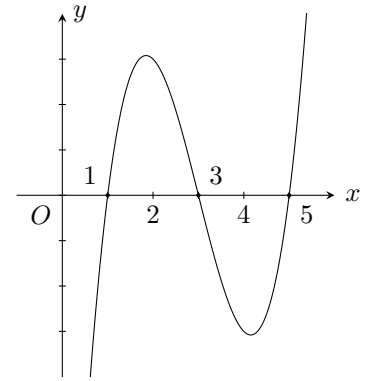
Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 229.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tập nghiệm của bất phương trình $f(x) \geq 0$ là

- A. $[1; 3] \cup [5; +\infty)$.
 B. $\mathbb{R}$.
 C. $[1; 3]$.
 D. $(-\infty; 1) \cup (3; 5)$.

**Lời giải.**

Tập nghiệm của bất phương trình $f(x) \geq 0$ là miền xác định sao cho phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ nằm phía trên trục hoành và các giao điểm của đồ thị hàm số đó với trục hoành.

Dựa vào đồ thị đã cho, tập nghiệm của bất phương trình $f(x) \geq 0$ là $S = [1; 3] \cup [5; +\infty)$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 230. Tập nghiệm của bất phương trình $2(x - 1) + 1 > x$ là

- A. $(-\infty; 1)$.
 B. $(1; +\infty)$.
 C. $(0; +\infty)$.
 D. $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $2(x - 1) + 1 > x \Leftrightarrow 2x - 2 + 1 > x \Leftrightarrow 2x - 1 > x \Leftrightarrow x > 1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(1; +\infty)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 231. Bất phương trình nào sau đây tương đương với bất phương trình $x + 4 > 0$?

- A. $(x - 1)^2(x + 4) > 0$.
 B. $x^2(x + 4) > 0$.
 C. $\sqrt{x + 4}(x + 4) > 0$.
 D. $\sqrt{x + 4}(x - 4) > 0$.

Lời giải.

Bất phương trình $x + 4 > 0$ có tập nghiệm $S_1 = (-4; +\infty)$.

Nhận thấy bất phương trình $\sqrt{x + 4}(x + 4) > 0$ có cùng tập nghiệm nên hai bất phương trình $x + 4 > 0$ và $\sqrt{x + 4}(x + 4) > 0$ tương đương.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 232. Lynne tiết kiệm 45\$ mỗi tuần. Hiện nay cô ấy có 180\$. Lynne định sẽ dành tiền để đi du lịch ở Puerto Rico. Muốn vậy cô ấy cần 900\$. Hỏi Lynne cần tiết kiệm trong bao nhiêu tuần để có đủ số tiền cô ấy cần?

- A. 16 tuần.
 B. 24 tuần.
 C. 15 tuần.
 D. 8 tuần.

Lời giải.

Gọi n là số tuần cô cần tiết kiệm tiền để đi du lịch.

Theo bài ra ta có: $45n + 180 \geq 900 \Leftrightarrow n \geq 16$.

Vậy cô cần 16 tuần để có đủ tiền.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 233. Lynne tiết kiệm 45\$ mỗi tuần. Hiện nay cô ấy có 180\$. Lynne định sẽ dành tiền để đi du lịch ở Puerto Rico. Muốn vậy cô ấy cần 900\$. Hỏi Lynne cần tiết kiệm trong bao nhiêu tuần để có đủ

số tiền cô ấy cần?

A. 16 tuần.

B. 24 tuần.

C. 15 tuần.

D. 8 tuần.

Lời giải.

Gọi n là số tuần cô cần tiết kiệm tiền để đi du lịch.

Theo bài ra ta có: $45n + 180 \geq 900 \Leftrightarrow n \geq 16$.

Vậy cô cần 16 tuần để có đủ tiền.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 234. Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kiogam thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipid. Mỗi kilogram thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid. Biết rằng gia đình này chỉ mua nhiều nhất 1,6 kg thịt bò và 1,1 kg thịt lợn. Giá tiền một kg thịt bò là 160 nghìn đồng, một kg thịt lợn là 110 nghìn đồng. Gọi x, y lần lượt là số kg thịt bò và thịt lợn mà gia đình đó cần mua. Tìm x, y để tổng số tiền họ phải trả là ít nhất mà vẫn đảm bảo lượng protein và lipid trong thức ăn?

A. $x = 0,3$ và $y = 1,1$. B. $x = 0,3$ và $y = 0,7$. C. $x = 0,6$ và $y = 0,7$. D. $x = 1,6$ và $y = 0,2$.

Lời giải.

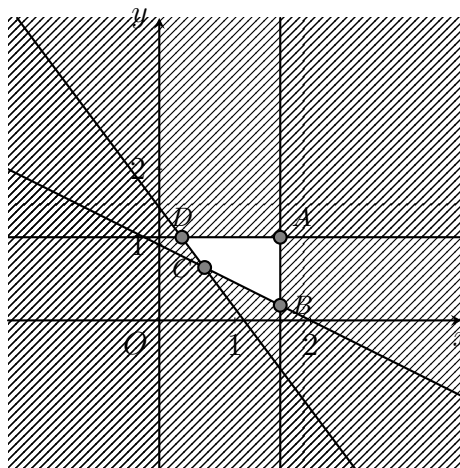
Theo bài ra ta có số tiền gia đình cần trả là $160.x + 110.y$ với x, y thỏa mãn:
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1,6 \\ 0 \leq y \leq 1,1 \end{cases}$$

Số đơn vị protein gia đình có là $0,8.x + 0,6.y \geq 0,9 \Leftrightarrow 8x + 6y \geq 9$ (d_1).

Số đơn vị lipid gia đình có là $0,2.x + 0,4.y \geq 0,4 \Leftrightarrow x + 2y \geq 2$ (d_2).

Bài toán trở thành: Tìm x, y thỏa mãn hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1,6 \\ 0 \leq y \leq 1,1 \\ 8x + 6y \geq 9 \\ x + 2y \geq 2 \end{cases}$$
 sao cho $T = 160.x + 110.y$

nhỏ nhất.



Vẽ hệ trục tọa độ ta tìm được tọa độ các điểm $A(1,6; 1,1)$; $B(1,6; 0,2)$; $C(0,6; 0,7)$; $D(0,3; 1,1)$.

Nhận xét: $T(A) = 377$ nghìn, $T(B) = 278$ nghìn, $T(C) = 173$ nghìn, $T(D) = 169$ nghìn.

Vậy tổng số tiền họ phải trả là ít nhất mà vẫn đảm bảo lượng protein và lipid trong thức ăn thì $x = 0,6$ và $y = 0,7$.

Chọn đáp án 



ĐÁP ÁN

1. C	2. B	3. C	4. B	5. D	6. D	7. B	8. B	9. A	10. C
11. C	12. B	13. B	14. D	15. B	16. D	17. A	18. A	19. D	20. B
21. B	22. D	23. D	24. A	25. A	26. D	27. B	28. B	29. C	30. C
31. C	32. B	33. B	34. A	35. D	36. B	37. B	38. C	39. C	40. A
41. C	42. D	43. D	44. A	45. C	46. A	47. C	48. A	49. A	50. B
51. B	52. A	53. C	54. D	55. C	56. A	57. B	58. C	59. A	60. C
61. B	62. B	63. C	64. A	65. A	66. B	67. D	68. B	69. A	70. B
71. B	72. D	73. A	74. A	75. C	76. C	77. A	78. C	79. A	80. A
81. C	82. A	83. D	84. A	85. A	86. D	87. A	88. A	89. C	90. C
91. C	92. D	93. D	94. A	95. C	96. A	97. C	98. B	99. C	100. C
101. B	102. B	103. D	104. B	105. B	106. D	107. C	108. B	109. C	110. A
111. D	112. B	113. C	114. A	115. C	116. B	117. C	118. A	119. C	120. C
121. A	122. A	123. A	124. A	125. B	126. D	127. B	128. D	129. A	130. C
131. A	132. B	133. A	134. C	135. A	136. A	137. D	138. B	139. B	140. A
141. A	142. C	143. A	144. B	145. C	146. B	147. D	148. D	149. D	150. C
151. D	152. C	153. C	154. C	155. A	156. B	157. D	158. C	159. B	160. B
161. C	162. A	163. D	164. D	165. B	166. A	167. C	168. A	169. C	170. A
171. C	172. C	173. A	174. A	175. A	176. A	177. D	178. B	179. D	180. A
181. B	182. B	183. C	184. A	185. D	186. C	187. C	188. B	189. B	190. C
191. D	192. B	193. A	194. B	195. B	196. B	197. A	198. A	199. C	200. A
201. D	202. D	203. D	204. B	205. D	206. C	207. D	208. C	209. A	210. B
211. D	212. B	213. B	214. C	215. C	216. C	217. C	218. B	219. D	220. C
221. C	222. D	223. C	224. A	225. D	226. B	227. C	228. D	229. A	230. B
231. C	232. A	233. A	234. A						

§3

DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT

A

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1

NHỊ THỨC BẬC NHẤT

Định nghĩa. Nhị thức bậc nhất đối với x là biểu thức dạng $f(x) = ax + b$ trong đó a, b là hai số đã cho, $a \neq 0$.

- Ví dụ 1.**
- a) $-2x + 3$ là nhị thức bậc nhất đối với x .
 - b) $7y - 9$ là nhị thức bậc nhất đối với y .
 - c) $5u$ là nhị thức bậc nhất đối với u .

2

ĐỊNH LÝ VỀ DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT

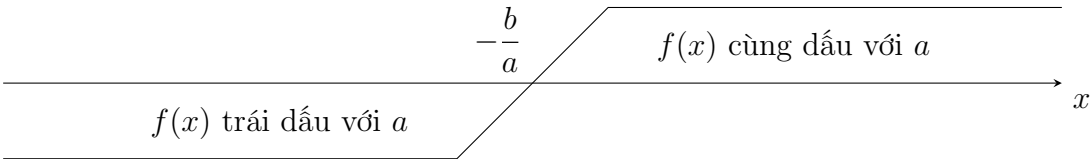
Định lí 1. Nhị thức $f(x) = ax + b$ có giá trị cùng dấu với hệ số a khi x lấy các giá trị trong khoảng $\left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$, trái dấu với hệ số a khi x lấy các giá trị trong khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$.

- Các kết quả của định lý trên được thể hiện qua bảng sau

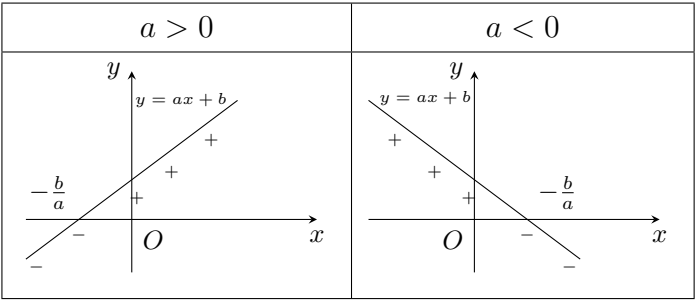
x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x) = ax + b$	trái dấu với a	0	cùng dấu với a

Ta gọi bảng này là *bảng xét dấu* nhị thức $f(x) = ax + b$.

- Biểu diễn trên trục số



- Minh họa bằng đồ thị



! Định lý trên có thể rút gọn bằng một trong hai quy tắc sau: **phải cùng trái trái** hoặc **trước trái sau cùng**.

3

CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Xét dấu của nhị thức bậc nhất: $f(x) = 2x + 1$

Lời giải.

$$f(x) = 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
y	$-$	0	$+$

□

Ví dụ 2. Xét dấu biểu thức: $f(x) = 4mx - 3$

Lời giải.

Xét $m = 0$ thì $f(x) = -3 < 0 \forall x \in \mathbb{R}$

Xét $m \neq 0$ ta có hai trường hợp:

- Trường hợp 1: $m > 0$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{4m}$	$+\infty$
y	$-$	0	$+$

- Trường hợp 2: $m < 0$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{4m}$	$+\infty$
y	$+$	0	$-$

Kết luận:

$m = 0$ thì $f(x) < 0 \forall x \in \mathbb{R}$;

$m > 0$ thì $f(x) < 0$ khi $x < -\frac{3}{4m}$, $f(x) > 0$ khi $x > -\frac{3}{4m}$;

$m < 0$ thì $f(x) < 0$ khi $x > -\frac{3}{4m}$, $f(x) > 0$ khi $x < -\frac{3}{4m}$.

□

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xét dấu tích - thương các nhị thức bậc nhất

Giả sử $f(x)$ là một tích (hoặc thương) của các nhị thức bậc nhất. Ta xét dấu $f(x)$ theo các bước như sau:

Bước 1: Tìm nghiệm của các nhị thức bậc nhất và sắp xếp theo thứ tự tăng dần.

Bước 2: Lập bảng xét dấu: Xét dấu các nhị thức bậc nhất và suy ra dấu của $f(x)$.

Bước 3: Kết luận về dấu của $f(x)$.

🔗🔗🔗 BÀI TẬP DẠNG 1 🔗🔗🔗

Ví dụ 1. Xét dấu biểu thức $f(x) = (3x - 1)(2 - x)$.

Lời giải.

Ta có

- $3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$.
- $2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Bảng xét dấu của $f(x)$:

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		2	$+\infty$
$3x - 1$		−	0	+	+
$2 - x$		+		+	0
$f(x)$		−	0	+	0

Từ bảng xét dấu ta thấy

- $f(x) > 0$ khi $x \in \left(\frac{1}{3}; 2\right)$.
- $f(x) < 0$ khi $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (2; +\infty)$.
- $f(x) = 0$ khi $x = \frac{1}{3}$ hoặc $x = 2$.

□

Ví dụ 2. Xét dấu biểu thức $g(x) = \frac{(x+1)(3x-5)}{-2x+4}$.

Lời giải.

Ta có

- $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.
- $3x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$.
- $-2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Bảng xét dấu của $g(x)$:

x	$-\infty$	-1	$\frac{5}{3}$	2	$+\infty$
$x + 1$	$-$	0	$+$	$ $	$+$
$3x - 5$	$-$	$ $	$-$	0	$+$
$-2x + 4$	$+$	$ $	$+$	$ $	0
$g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu ta thấy

- $g(x) > 0$ khi $x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{5}{3}; 2\right)$.
- $g(x) < 0$ khi $x \in \left(-1; \frac{5}{3}\right) \cup (2; +\infty)$.
- $g(x) = 0$ khi $x = \frac{5}{3}$ hoặc $x = -1$.
- $g(x)$ không xác định khi $x = 2$ (trong bảng xét dấu kí hiệu bởi $|$).

□

Ví dụ 3. Xét dấu biểu thức $h(x) = \frac{2x + 1}{(6 - 2x)(5 - x)}$.

Lời giải.

Ta có

- $2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.
- $6 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 3$.
- $5 - x = 0 \Leftrightarrow x = 5$.

Bảng xét dấu của $h(x)$:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	3	5	$+\infty$
$2x + 1$	$-$	0	$+$	$ $	$+$
$6 - 2x$	$+$	$ $	$+$	0	$-$
$5 - x$	$+$	$ $	$+$	$ $	0
$h(x)$	$-$	0	$+$	$-$	$+$

Từ bảng xét dấu ta thấy

- $h(x) > 0$ khi $x \in \left(-\frac{1}{2}; 3\right) \cup (5; +\infty)$.
- $h(x) < 0$ khi $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (3; 5)$.
- $h(x) = 0$ khi $x = -\frac{1}{2}$.
- $h(x)$ không xác định khi $x = 3$ và $x = 5$.

□

Ví dụ 4. Xét dấu biểu thức $h(x) = \frac{2}{x+1} + \frac{3}{4-2x}$.

Lời giải.

Ta có $h(x) = \frac{2}{x+1} + \frac{3}{4-2x} = \frac{11-x}{(x+1)(4-2x)}$

- $11-x=0 \Leftrightarrow x=11$.
- $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.
- $4-2x=0 \Leftrightarrow x=2$.

Bảng xét dấu của $h(x)$:

x	$-\infty$	-1	2	11	$+\infty$
$11-x$	+		+		+
$x+1$	-	0	+		+
$4-2x$	+		0	-	
$h(x)$	-		+		-

Từ bảng xét dấu ta thấy

- $h(x) > 0$ khi $x \in (-1; 2) \cup (11; +\infty)$.
- $h(x) < 0$ khi $x \in (-\infty; -1) \cup (2; 11)$.
- $h(x) = 0$ khi $x = 11$.
- $h(x)$ không xác định khi $x = -1$ và $x = 2$.

□

Ví dụ 5. Xét dấu biểu thức $f(x) = 3x^2 - x - 2$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = 3x^2 - x - 2 = 3(x-1)\left(x + \frac{2}{3}\right)$

- $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.
- $x + \frac{2}{3}=0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$.

Bảng xét dấu của $f(x)$:

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	1	$+\infty$
$x-1$	-		-	0
$x + \frac{2}{3}$	-	0	+	
$f(x)$	+	0	-	0

Từ bảng xét dấu ta thấy

- $f(x) > 0$ khi $x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup (1; +\infty)$.

- $f(x) < 0$ khi $x \in \left(-\frac{2}{3}; 1\right)$.
 - $f(x) = 0$ khi $x = -\frac{2}{3}$ hoặc $x = 1$.
-

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Xét dấu biểu thức $f(x) = (3 - x)(5x - 2)(x - 1)$.

Lời giải.

Ta có bảng xét dấu của $f(x)$:

x	$-\infty$	$\frac{2}{5}$	1	3	$+\infty$		
$3 - x$	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$	0	$-$
$5x - 2$	$-$	0	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$
$x - 1$	$-$	$ $	$-$	0	$+$	$ $	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

□

Bài 2. Xét dấu biểu thức $f(x) = \frac{1 - x}{2x + 3}$.

Lời giải.

Ta có bảng xét dấu của $f(x)$:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	1	$+\infty$
$1-x$	$+$	$ $	$+$	$0 \quad -$
$2x+3$	$-$	0	$+$	$ \quad +$
$f(x)$	$-$	$ $	$+$	$0 \quad -$

□

Bài 3. Xét dấu biểu thức $f(x) = \frac{x - 3}{(2x - 1)(-x + 2)}$.

Lời giải.

Ta có bảng xét dấu của $f(x)$:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	2	3	$+\infty$
$x - 3$	$-$	$ $	$-$	$ $	$+$
$2x + 1$	$-$	0	$+$	$ $	$+$
$-x + 2$	$+$	$ $	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$

□

Bài 4. Xét dấu biểu thức $f(x) = \frac{(x-3)(4-x)}{x}$.

Lời giải.

Ta có bảng xét dấu của $f(x)$:

x	$-\infty$		0		3		4		$+\infty$
$x-3$		-		-	0	+		+	
$4-x$		+		+		+	0	-	
x		-	0	+		+		+	
$f(x)$		+		-	0	+	0	-	

□

Bài 5. Xét dấu biểu thức $f(x) = x^2 - 4$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$. Bảng xét dấu của $f(x)$ là

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x+2$		-	0	+		+	
$x-2$		-		-	0	+	
$f(x)$		+	0	-	0	+	

□

Bài 6. Xét dấu biểu thức $f(x) = \frac{3}{2x-1} + \frac{1}{x-2}$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \frac{5x-7}{(2x-1)(x-2)}$. Bảng xét dấu của $f(x)$ là

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{7}{5}$		2		$+\infty$
$5x-7$		-		-	0	+		+	
$2x-1$		-	0	+		+		+	
$x-2$		-		-		-	0	+	
$f(x)$		-		+	0	-		+	

□

Bài 7. Xét dấu biểu thức $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x^2 - 4} - 1$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \frac{-2x+9}{x^2-4} = \frac{-2x+9}{(x-2)(x+2)}$. Bảng xét dấu của $f(x)$ là

x	$-\infty$	-2	2	$\frac{9}{2}$	$+\infty$
$-2x + 9$	+		+		+
$x - 2$	-		-	0	+
$x + 2$	-	0	+		+
$f(x)$	+	-	+	0	-

□

Bài 8. Xét dấu biểu thức $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{x-1} + \frac{3}{x-2}$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{x-1} + \frac{3}{x-2} = \frac{2x+2}{x(x-1)(x-2)}$. Bảng xét dấu của $f(x)$ là

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$			
$2x + 2$	$-$	0	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$		
x	$-$	$ $	$-$	0	$+$	$ $	$+$		
$x - 1$	$-$	$ $	$-$	$ $	$-$	0	$+$		
$x - 2$	$-$	$ $	$-$	$ $	$-$	0	$+$		
$f(x)$	$+$	0	$-$	$ $	$+$	$ $	$-$	$ $	$+$

□

Dạng 2. Xét dấu nhị thức có chứa tham số

Khi xét dấu của nhị thức có chứa tham số cần lưu ý, nếu hệ số a có chứa tham số cần xét các trường hợp:

TH1: $a = 0$.

TH2: $a > 0$.

TH3: $a < 0$.

Mỗi trường hợp ta có bảng xét dấu tương ứng.

🔗🔗🔗 BÀI TẬP DẠNG 2 🔗🔗🔗

Ví dụ 1. Xét dấu biểu thức: $f(x) = -mx + 2$.

Lời giải.

Nếu $m = 0$ thì $f(x) = 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Xét $m \neq 0$. Khi đó $f(x)$ là một nhị thức bậc nhất, có nghiệm $x_0 = \frac{2}{m}$. Mặt khác, $a > 0 \Leftrightarrow m < 0$ và $a < 0 \Leftrightarrow m > 0$. Vậy ta có bảng xét dấu trong hai trường hợp như sau:

- Trường hợp 1: $m < 0$

x	$-\infty$	$\frac{2}{m}$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

- Trường hợp 2: $m > 0$

x	$-\infty$	$\frac{2}{m}$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

Kết luận:

$m = 0$ thì $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$;

$m < 0$ thì $f(x) < 0$ khi $x < \frac{2}{m}$, $f(x) > 0$ khi $x > \frac{2}{m}$;

$m > 0$ thì $f(x) < 0$ khi $x > \frac{2}{m}$, $f(x) > 0$ khi $x < \frac{2}{m}$. □

Ví dụ 2. Xét dấu của biểu thức $f(x) = -\frac{m}{2}x + 5$.

Lời giải.

Xét $m = 0$ thì $f(x) = 5 > 0$.

Xét $m \neq 0$, ta có hai trường hợp:

- Trường hợp 1: $\frac{-m}{2} < 0 \Leftrightarrow m > 0$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$\frac{10}{m}$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

- Trường hợp 2: $\frac{-m}{2} > 0 \Leftrightarrow m < 0$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$\frac{10}{m}$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

Ví dụ 3. Xét dấu của biểu thức $f(x) = (m - 2)x - 3 + 2m$

Lời giải.

Xét $m = 2$, ta có $f(x) = 1 > 0$.

Xét $m \neq 2$, ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 - 2m}{m - 2}$.

Lập bảng xét dấu:

- Trường hợp 1: $m > 2$

x	$-\infty$	$\frac{3-2m}{m-2}$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

- Trường hợp 2: $m < 2$

x	$-\infty$	$\frac{3-2m}{m-2}$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

□

Ví dụ 4. Xét dấu biểu thức $f(x) = (m-1)x - 1$ với m là một tham số đã cho.

Lời giải.

Nếu $m = 1$ thì $f(x) = -1 < 0$ với mọi x .

Nếu $m \neq 1$ thì $f(x)$ là một nhị thức bậc nhất có nghiệm $x_0 = \frac{1}{m-1}$.

Ta có bảng xét dấu nhị thức $f(x)$ trong hai trường hợp như sau:

- Trường hợp 1: $m > 1$

x	$-\infty$	$\frac{1}{m-1}$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

- Trường hợp 2: $m < 1$

x	$-\infty$	$\frac{1}{m-1}$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

Bài 1. Xét dấu của biểu thức $f(x) = (m-1)x + m^2 - 1$.

Lời giải.

Nếu $m-1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ thì $f(x) = 0$.

Nếu $m-1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ thì $f(x)$ là một nhị thức bậc nhất có nghiệm $x_0 = \frac{m^2-1}{m-1} = m+1$.

Ta có bảng xét dấu nhị thức $f(x)$ trong hai trường hợp như sau:

- Trường hợp 1: $m-1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$m+1$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

- Trường hợp 2: $m-1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$m+1$	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-

□

Bài 2. Xét dấu của biểu thức $f(x) = (m^2 - 3m + 2)x + m$.

Lời giải.

$$\text{Xét } m^2 - 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$$

+ Với $m = 1$ thì $f(x) = 1 > 0$.

+ Với $m = 2$ thì $f(x) = 2 > 0$.

$$\text{Xét } m^2 - 3m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 2 \end{cases} \text{ thì } f(x) \text{ là một nhị thức bậc nhất có nghiệm } x_0 = \frac{m}{m^2 - 3m + 2}.$$

Ta có bảng xét dấu nhị thức $f(x)$ trong hai trường hợp như sau:

- Trường hợp 1: $m^2 - 3m + 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > 2 \end{cases}$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$\frac{m}{m^2 - 3m + 2}$	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

- Trường hợp 2: $m^2 - 3m + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 2$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$\frac{m}{m^2 - 3m + 2}$	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-

□

Bài 3. Xét dấu biểu thức:

$$f(x) = (2m - 3)x + 2018$$

Lời giải.

Nếu $m = \frac{3}{2}$ thì $f(x) = 2018 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Nếu $m \neq \frac{3}{2}$ thì $f(x)$ là một nhị thức bậc nhất, có nghiệm $x_0 = -\frac{2018}{2m - 3}$.

Mặt khác, $a > 0 \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$ và $a < 0 \Leftrightarrow m < \frac{3}{2}$.

Vậy ta có bảng xét dấu nhị thức $f(x)$ trong hai trường hợp như sau:

- Trường hợp 1: $m > \frac{3}{2}$

x	$-\infty$	$-\frac{2018}{2m-3}$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

- Trường hợp 2: $m < \frac{2}{3}$

x	$-\infty$	$-\frac{2018}{2m-3}$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

□

Bài 4. Xét dấu biểu thức:

$$f(x) = (m^2 + 1)x - 4$$

Lời giải.

Ta có với mọi $m \in \mathbb{R}$ thì $m^2 + 1 > 0$. Do đó $f(x)$ luôn là một nhị thức bậc nhất có hệ số $a > 0$ và có nghiệm $x_0 = \frac{4}{m^2 + 1}$. Vậy với mọi m , ta có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$	$\frac{4}{m^2 + 1}$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

□

Bài 5. Xét dấu của biểu thức sau: $f(x) = (2x - m)(x + m)$

Lời giải.

Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{m}{2} \vee x = -m$. Lập bảng xét dấu:

- Trường hợp 1: $m \geq 0$

x	$-\infty$	$-m$	$\frac{m}{2}$	$+\infty$
$2x - m$	$-$	$-$	0	$+$
$x + m$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	$+$

- Trường hợp 2: $m < 0$

x	$-\infty$	$\frac{m}{2}$	$-m$	$+\infty$	
$2x - m$	$-$	0	$+$	$+$	
$x + m$	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

□

Bài 6. Xét dấu của biểu thức sau: $f(x) = \frac{2-x}{x-2m+1}$

Lời giải.

- Trường hợp 1: $2m - 1 = 2 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$, khi đó ta có:

$$\frac{2-x}{x-2} = -1 < 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Trường hợp 2: $m > \frac{3}{2}$. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	2	$2m-1$	$+\infty$
$2-x$	+	0	+	-
$x-2m+1$	-	0	+	+
$\frac{2-x}{x-2m+1}$	-	0	+	-

- Trường hợp 3: $m < \frac{3}{2}$. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	$2m-1$	2	$+\infty$
$2-x$	+	+	0	-
$x-2m+1$	-	0	+	+
$\frac{2-x}{x-2m+1}$	-	+	0	-

□

Dạng 3. Giải bất phương trình tích

Dạng. $P(x) > 0, P(x) \geq 0, P(x) < 0, P(x) \leq 0$ với $P(x)$ là tích của các nhị thức bậc nhất.

Phương pháp. Lập bảng xét dấu của biểu thức $P(x)$ từ đó suy ra tập nghiệm của bất phương trình đã cho.

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 3 ❖❖❖

Ví dụ 1. Giải bất phương trình $(x+1)(2-x) > 0$.

Lời giải.

Ta có: $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1; 2-x=0 \Leftrightarrow x=2$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$
$2-x$	$+$		$+$	0
VT	$-$	0	$+$	0

Từ đó suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-1; 2)$.

□

Ví dụ 2. Giải bất phương trình $(2x + 1)(x + 5) \geq 0$.

Lời giải.

Ta có: $2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$, $x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-5	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$2x + 1$	$-$	$-$	0	$+$	
$x + 5$	$-$	0	$+$	$+$	
VT	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -5] \cup [-\frac{1}{2}; +\infty)$. □

Ví dụ 3. Giải bất phương trình $(x + 1)(x - 2)(10 - 2x) \leq 0$.

Lời giải.

Ta có: $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$, $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$, $10 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 5$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-1	2	5	$+\infty$
$x + 1$		$-$	0	$+$	$+$
$x - 2$		$-$	$-$	0	$+$
$10 - 2x$		$+$	$+$	$+$	0
VT		$+$	0	$-$	0

Từ bảng xét dấu suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-1; 2] \cup [5; +\infty)$. □

Ví dụ 4. Giải bất phương trình $(x + 2)^2(x - 1)(x + 3) < 0$.

Lời giải.

Ta có: $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$, $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$, $x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-3	-2	1	$+\infty$			
$(x+2)^2$		+	+	0	+	+		
$x-1$		-	-	-	0	+		
$x+3$		-	0	+	+	+		
VT		+	0	-	0	-	0	+

Ví dụ 5. Giải bất phương trình $x^3 + x^2 - 5x + 3 \leq 0$. □

Lời giải.

Ta có $x^3 + x^2 - 5x + 3 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2(x + 3) \leq 0$.

Cho $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$		
$(x-1)^2$		+	+	0	+	
$x+3$		-	0	+	+	
VT		-	0	+	0	+

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -3]$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải bất phương trình $(x - 3)(\sqrt{2} - x) > 0$.

Lời giải.

x	$-\infty$	$\sqrt{2}$	3	$+\infty$
$x - 3$		$-$	$-$	0 $+$
$\sqrt{2} - x$		$+$	0	$-$ $-$
$(x - 3)(\sqrt{2} - x)$		$-$	0	$+$ 0 $-$

Tập nghiệm $S = (\sqrt{2}; 3)$. □

Bài 2. Giải bất phương trình $(3 - 2x)(x - 4) \leq 0$.

Lời giải.

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	4	$+\infty$
$3 - 2x$		$+$	0	$-$
$x - 4$		$-$	$-$	0
$(3 - 2x)(x - 4)$		$-$	0	$+$

Tập nghiệm $S = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right] \cup [4; +\infty)$. □

Bài 3. Tìm tập xác định của hàm số $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (2 - x)(2 + x) \geq 0$.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$		
$2-x$		$+$	$+$	0	$-$	
$2+x$		$-$	0	$+$	$+$	
$(2-x)(2+x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = [-2; 2]$. □

Bài 4. Giải bất phương trình $(x + 1)(x - 2)(3 - x) < 0$.

Lời giải.

x	$-\infty$	-1	2	3	$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	$+$
$x-2$		$-$	$-$	0	$+$
$3-x$		$+$	$+$	$+$	0
$(x+1)(x-2)(3-x)$		$+$	0	$-$	0

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-1; 2) \cup (3; +\infty)$. □

Dạng 4. Giải bất phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Dạng. $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$, với $P(x), Q(x)$ là tích của các nhị thức bậc nhất.

Phương pháp. Lập bảng xét dấu của biểu thức $\frac{P(x)}{Q(x)}$ để từ đó suy ra tập nghiệm của bất phương trình đã cho.

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 4 ❖❖❖

Ví dụ 1. Giải bất phương trình $\frac{2-x}{3x+6} < 0$.

Lời giải.

Ta có: $2-x=0 \Leftrightarrow x=2$; $3x+6=0 \Leftrightarrow x=-2$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$2-x$		$+$	$+$	0
$3x+6$		$-$	0	$+$
$\frac{2-x}{3x+6}$		$-$	$ $	$+$

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. □

Ví dụ 2. Giải bất phương trình $\frac{x+7}{(x+2)(2x-1)} > 0$.

Lời giải.

Ta có: $x+7=0 \Leftrightarrow x=-7$; $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$; $2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-7	-2	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$x+7$		$-$	0	$+$	$+$
$x+2$		$-$	$-$	0	$+$
$2x-1$		$-$	$-$	$-$	0
VT		$-$	0	$+$	$ $

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-7; -2) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$. □

Ví dụ 3. Giải bất phương trình $\frac{(x-3)(x+2)}{x^2-1} \geq 1$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \frac{(x-3)(x+2)}{x^2-1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{(x-3)(x+2)}{x^2-1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x-5}{(x-1)(x+1)} \geq 0.$$

$$\text{Đặt } VT = \frac{-x-5}{(x-1)(x+1)}.$$

$$\text{Khi đó: } -x-5=0 \Leftrightarrow x=-5; x-1=0 \Leftrightarrow x=1; x+1=0 \Leftrightarrow x=-1.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-5	-1	1	$+\infty$			
$-x-5$		$+$	0	$-$	$-$			
$x-1$		$-$	$-$	$-$	0	$+$		
$x+1$		$-$	$-$	0	$+$	$+$		
VT		$+$	0	$-$	$ $	$+$	$ $	$-$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -5] \cup (-1; 1)$. □

Ví dụ 4. Giải bất phương trình $\frac{1}{x-2} \leq \frac{1}{2x+1}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \frac{1}{x-2} \leq \frac{1}{2x+1} \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} - \frac{1}{2x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+3}{(x-2)(2x+1)} \leq 0.$$

$$\text{Đặt } VT = \frac{x+3}{(x-2)(2x+1)}.$$

$$\text{Cho } x+3=0 \Leftrightarrow x=-3; x-2=0 \Leftrightarrow x=2; 2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-3	$-\frac{1}{2}$	2	$+\infty$		
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$		
$x-2$	$-$		$-$	$-$	0	$+$	
$2x+1$	$-$		$-$	0	$+$	$+$	
VT	$-$	0	$+$	$\parallel$	$-$	$\parallel$	$+$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -3] \cup (-\frac{1}{2}; 2)$. □

Ví dụ 5. Giải bất phương trình $\frac{x-1}{mx-2} > 0$ (1) (m là tham số).

Lời giải.

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{x-1}{mx-2}.$$

$$\text{TH1: Nếu } m=0 \text{ thì } f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow x < 1.$$

$$\text{TH2: Nếu } m \neq 0 \text{ thì } x-1=0 \Leftrightarrow x=1; mx-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{m}.$$

Để so sánh 1 và $\frac{2}{m}$ ta xét hiệu $1 - \frac{2}{m} = \frac{m-2}{m} = g(m)$.

Bảng xét dấu của $g(m)$ như sau:

m	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$m-2$		-	- 0 +	
m		- 0 +		+
$\frac{m-2}{m}$		+ - 0 +		

- Với $m < 0$ thì $g(m) > 0$ nên $1 > \frac{2}{m}$.

x	$-\infty$	$\frac{2}{m}$	1	$+\infty$
$x-1$		-	- 0 +	
$mx-2$		+ 0 -		-
$\frac{x-1}{mx-2}$		- + 0 -		

Từ đó tập nghiệm của (1) là $S = \left(\frac{2}{m}; 1\right)$.

- Với $0 < m \leq 2$ thì $g(m) \leq 0$ nên $1 \leq \frac{2}{m}$.

x	$-\infty$	1	$\frac{2}{m}$	$+\infty$
$x-1$		- 0 +		+
$mx-2$		-	- 0 +	
$\frac{x-1}{mx-2}$		+ 0 - +		

Từ đó tập nghiệm của (1) là $S = (-\infty; 1) \cup \left(\frac{2}{m}; +\infty\right)$.

- Với $m > 2$ thì $g(m) > 0$ nên $1 > \frac{2}{m}$.

x	$-\infty$	$\frac{2}{m}$	1	$+\infty$
$x-1$		-	- 0 +	
$mx-2$		- 0 +		+
$\frac{x-1}{mx-2}$		+ - 0 +		

Từ đó tập nghiệm của (1) là $S = \left(-\infty; \frac{2}{m}\right) \cup (1; +\infty)$.

Kết luận:

- $m = 0$: $S = (-\infty; 1)$.
- $m < 0$: $S = \left(\frac{2}{m}; 1\right)$.
- $0 < m \leq 2$: $S = (-\infty; 1) \cup \left(\frac{2}{m}; +\infty\right)$.
- $m > 2$: $S = \left(-\infty; \frac{2}{m}\right) \cup (1; +\infty)$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải bất phương trình $\frac{3x-1}{(x-4)(3-2x)} < 0$.

Lời giải.

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	4	$+\infty$
$3x-1$		$-$	0	$+$	$+$
$x-4$		$-$	$-$	$-$	0
$3-2x$		$+$	$+$	0	$-$
$\frac{3x-1}{(x-4)(3-2x)}$		$+$	0	$-$	$ $

Tập nghiệm $S = \left(\frac{1}{3}; \frac{3}{2}\right) \cup (4; +\infty)$. □

Bài 2. Giải bất phương trình $\frac{3}{2-x} \geq 1$.

Lời giải.

Ta có: $\frac{3}{2-x} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2-x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{2-x} \geq 0$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$
$2-x$		$+$	$+$	0
$\frac{x+1}{2-x}$		$-$	0	$ $

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-1; 2)$. □

Bài 3. Giải bất phương trình $\frac{2}{x-1} \leq \frac{5}{2x-1}$.

Lời giải.

Ta có: $\frac{2}{x-1} \leq \frac{5}{2x-1} \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} - \frac{5}{2x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-x+3}{(x-1)(2x-1)} \leq 0$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	3	$+\infty$
$-x+3$		$+$	$+$	$+$	0
$x-1$		$-$	$-$	0	$+$
$2x-1$		$-$	0	$+$	$+$
$\frac{-x+3}{(x-1)(2x-1)}$		$+$	$ $	$-$	$ $

Tập nghiệm $S = \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup [3; +\infty)$ □

Bài 4. Giải bất phương trình $\frac{x^2-x+2}{x-2} \geq 2x-1$.

Lời giải.

Ta có $\frac{x^2-x+2}{x-2} \geq 2x-1 \Leftrightarrow \frac{x^2-x+2}{x-2} - 2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x(x-4)}{x-2} \geq 0$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$			
$-x$		+	0	-	-			
$x-4$		-	-	-	0	+		
$x-2$		-	-	0	+	+		
$\frac{-x(x-4)}{x-2}$		+	0	-		+	0	-

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; 0] \cup (2; 4]$. □

Dạng 5. Giải bất phương trình bậc nhất chứa dấu giá trị tuyệt đối.

Cách giải: Xét dấu để phá dấu trị tuyệt đối.

Một số dạng thường gặp: Cho $a > 0$, ta có

- $|f(x)| < a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < a \\ f(x) > -a \end{cases}$.
- $|f(x)| \geq a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq a \\ f(x) \leq -a \end{cases}$.
- $|f(x)| < |g(x)| \Leftrightarrow [f(x) + g(x)] \cdot [f(x) - g(x)] < 0$.

BÀI TẬP DẠNG 5

Ví dụ 1. Giải bất phương trình $|3 - 2x| < x + 1$.

Lời giải.

Với $3 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$ thì ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ 3 - 2x < x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ 3x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ x > \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3} < x \leq \frac{3}{2}.$$

Với $3 - 2x < 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$ thì ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ 2x - 3 < x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{2} < x < 4.$$

Kết hợp hai trường hợp, ta có $\frac{2}{3} < x < 4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $S = \left(\frac{2}{3}; 4\right)$. □

Ví dụ 2. Giải bất phương trình $|2x - 2| + |3 - x| > 3$.

Lời giải.

Bỏ dấu giá trị tuyệt đối ở vế trái của phương trình ta có:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$ 2x - 2 $	$2 - 2x$	0	$2x - 2$	$2x - 2$
$ 3 - x $	$3 - x$		$3 - x$	0 $x - 3$
VT	$5 - 3x$		$1 + x$	$3x - 5$

Bất phương trình $|2x - 2| + |3 - x| > 3$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ 5 - 3x > 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 1 < x \leq 3 \\ 1 + x > 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x > 3 \\ 3x - 5 > 3 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x < \frac{2}{3} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 1 < x \leq 3 \\ x > 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x > 3 \\ x > \frac{8}{3} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow x < \frac{2}{3} \text{ hoặc } 2 < x \leq 3 \text{ hoặc } x > 3. \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{2}{3} \\ x > 2 \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $S = \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup (2; +\infty)$. □

Ví dụ 3. Giải bất phương trình $|5 - 8x| < 11$.

Lời giải.

$$\text{Vì } 11 > 0 \text{ nên } |5 - 8x| < 11 \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 8x < 11 \\ 5 - 8x > -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{3}{4} \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{4} < x < 2.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $S = \left(-\frac{3}{4}; 2\right)$. □

Ví dụ 4. Giải bất phương trình $|2x - 4| \geq 2$.

Lời giải.

$$\text{Vì } 2 > 0 \text{ nên } |2x - 4| \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 \geq 2 \\ 2x - 4 \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 6 \\ 2x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 1 \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $S = (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$. □

Ví dụ 5. Giải bất phương trình $\left|\frac{x+3}{2}\right| < \left|\frac{6-2x}{5}\right|$.

Lời giải.

Bất phương trình

$$\begin{aligned} \left| \frac{x+3}{2} \right| &< \left| \frac{6-2x}{5} \right| \Leftrightarrow 5|x+3| < 2|6-2x| \\ &\Leftrightarrow (5x+15)^2 < (12-4x)^2 \\ &\Leftrightarrow (5x+15+12-4x)(5x+15-12+4x) < 0 \\ &\Leftrightarrow (x+27)(9x+3) < 0. \end{aligned}$$

Lập bảng xét dấu của biểu thức $f(x) = (x+27)(9x+3)$, ta được:

x	$-\infty$	-27	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
$x+27$	$-$	0	$+$	$+$
$9x+3$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$

Do đó $f(x) = (x+27)(9x+3) < 0 \Leftrightarrow -27 < x < -\frac{1}{3}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $S = \left(-27; -\frac{1}{3}\right)$. □

Ví dụ 6. Giải bất phương trình $\frac{|x-1|}{x^2+3x-4} \geq 2$.

Lời giải.

Điều kiện: $x^2+3x-4 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -4 \end{cases}$.

Nếu $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ thì $|x-1| = x-1$ và bất phương trình trở thành:

$$\frac{x-1}{(x-1)(x+4)} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x+4} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{-2x-7}{x+4} \geq 0 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq -\frac{7}{2}.$$

Kết hợp $x \geq 1$, ta có $x \in \emptyset$.

Nếu $x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$ thì $|x-1| = 1-x$ và bất phương trình trở thành:

$$\frac{1-x}{(x-1)(x+4)} \geq 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{x+4} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{-2x-7}{x+4} \leq 0 \Leftrightarrow x \geq -4 \text{ hoặc } x \leq -\frac{7}{2}.$$

Kết hợp $x < 1$, ta có $x \leq -4$ hoặc $-\frac{7}{2} \leq x < 1$.

Kết hợp với điều kiện, ta được $x < -4$ hoặc $-\frac{7}{2} \leq x < 1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $S = (-\infty; -4) \cup \left[-\frac{7}{2}; 1\right)$. □

Ví dụ 7. Giải bất phương trình $\frac{|x+3|-x}{x} \geq 1$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \neq 0$.

Nếu $x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$ thì bất phương trình trở thành:

$$\frac{(x+3)-x}{x} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{3}{x} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{3-x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 3.$$

Kết hợp với $x \geq -3$ và điều kiện $x \neq 0$, ta có $0 < x \leq 3$.

Nếu $x + 3 < 0 \Leftrightarrow x < -3$ thì bất phương trình trở thành:

$$\frac{-(x+3)-x}{x} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{-2x-3}{x} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{-3x-3}{x} \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 0.$$

Kết hợp với $x < -3$ và điều kiện $x \neq 0$, ta có $x \in \emptyset$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (0; 3]$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải các bất phương trình sau.

- a) $|3x - 5| \leq 2$.
- b) $|6 - 2x| > 6$.
- c) $|7x + 10| - 3 \geq 0$.
- d) $\left| \frac{8}{x+1} \right| < 2$.

Lời giải.

- a) $|3x - 5| \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 5 \leq 2 \\ 3x - 5 \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{7}{3}.$
- b) $|6 - 2x| > 6 \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 2x > 6 \\ 6 - 2x < -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 6 \end{cases}.$
- c) $|7x + 10| - 3 \geq 0 \Leftrightarrow |7x + 10| \geq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 10 \geq 3 \\ 7x + 10 < -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq -\frac{13}{7} \end{cases}.$
- d) $\left| \frac{8}{x+1} \right| < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ 8 < 2|x+1| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ |x+1| > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ \begin{cases} x+1 > 4 \\ x+1 < -4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < -5 \end{cases}.$

□

Bài 2. Giải bất phương trình $|2x - 4| < x + 1$.

Lời giải.

$$|2x - 4| < x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 2x - 4 < x + 1 \\ x < 2 \\ 4 - 2x < x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x < 5 \\ x < 2 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x < 5 \\ 1 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 5.$$

□

Bài 3. Giải bất phương trình $|x + 5| + 9 \geq 3x$.

Lời giải.

$$|x + 5| + 9 \geq 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ x + 5 + 9 \geq 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ x \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 7 \\ x < -5 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 7.$$

□

Bài 4. Giải bất phương trình $|2x - 9| > |7 - 8x|$.

Lời giải.

$$|2x - 9| > |7 - 8x| \Leftrightarrow (2x - 9)^2 > (7 - 8x)^2 \Leftrightarrow (-6x - 2)(10x - 16) > 0.$$

Lập bảng xét dấu cho biểu thức $f(x) = (-6x - 2)(10x - 16)$, ta được $f(x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < \frac{8}{5}$. □

Bài 5. Giải bất phương trình $|2x + 6| + |5 - 5x| < 2x + 1$.

Lời giải.

Bỏ dấu giá trị tuyệt đối ở vế trái của phương trình ta có:

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$ 2x + 6 $	$-2x - 6$	0	$2x + 6$	$2x + 6$
$ 5 - 5x $	$5 - 5x$	$5 - 5x$	0	$5x - 5$
VT	$-1 - 7x$	$11 - 3x$	$7x + 1$	

Bất phương trình $|2x + 6| + |5 - 5x| < 2x + 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ -1 - 7x < 2x + 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} -3 < x \leq 1 \\ 11 - 3x < 2x + 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x > 1 \\ 7x + 1 < 2x + 1 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow 2 < x \leq 1.$$

□

Bài 6. Giải bất phương trình $2|x - 4| + 3|1 + x| - |x| \leq 3$.

Lời giải.

Bỏ dấu giá trị tuyệt đối ở vế trái của phương trình ta có:

x	$-\infty$	-1	0	4	$+\infty$
$ x - 4 $	$4 - x$	$4 - x$	$4 - x$	0	$x - 4$
$ 1 + x $	$-1 - x$	0	$1 + x$	$1 + x$	$1 + x$
$ x $	$-x$	$-x$	0	x	x
VT	$3 - 3x$	$5 - x$	$5 + x$	$3x - 3$	

Bất phương trình $2|x - 4| + 3|1 + x| - |x| \leq 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ 3 - 3x \leq 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} -1 < x \leq 0 \\ 5 - x \leq 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 0 < x \leq 4 \\ 5 + x \leq 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x > 4 \\ 3x - 3 \leq 3 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

□

Bài 7. Giải bất phương trình $|x - |x - 1|| < 2$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} |x - |x - 1|| < 2 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - |x - 1| < 2 \\ x - |x - 1| > -2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |x - 1| > x - 2 \text{ (đúng với mọi } x \in \mathbb{R}) \\ |x - 1| < x + 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow |x - 1| < x + 2 \\ &\Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 8. Giải bất phương trình $\frac{1}{x-1} > \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$.

Lời giải.

Ta có: $\frac{1}{x-1} > \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \Leftrightarrow \frac{x(x-4)}{(x-1)(x+2)(x-2)} > 0$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-2	0	1	2	4	$+\infty$					
x		$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$					
$x - 4$		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$				
$x - 1$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$				
$x + 2$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$				
$x - 2$		$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$				
$\frac{x(x-4)}{(x-1)(x+2)(x-2)}$		$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$

Tập nghiệm của bất phương trình $S = (-2; 0) \cup (1; 2) \cup (4; +\infty)$.

□

Bài 9. Tìm nghiệm của bất phương trình $(x-1)(4x-5)(2x-4) > 0$ thỏa mãn $|x| < 1$.

Lời giải.

Giải bất phương trình $(x-1)(4x-5)(2x-4) > 0$.

x	$-\infty$	1	$\frac{5}{4}$	2	$+\infty$			
$x - 1$		$-$	0	$+$	$+$			
$4x - 5$		$-$	$-$	0	$+$			
$2x - 4$		$-$	$-$	$-$	0	$+$		
$(x - 1)(4x - 5)(2x - 4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(1; \frac{5}{4}\right) \cup (2; +\infty)$.

Ta có $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

Do đó ta được $S = \emptyset$. □

Bài 10. Giải bất phương trình $\left| \frac{2-|x|}{1+x} \right| < 2$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \neq -1$.

Nếu $x \geq 0$ thì bất phương trình trở thành

$$\left| \frac{2-x}{1+x} \right| < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2-x}{1+x} < 2 \\ \frac{2-x}{1+x} > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 0 \end{cases}.$$

Kết hợp với $x \geq 0$ và điều kiện $x \neq -1$, ta được $x > 0$.

Nếu $x < 0$ thì bất phương trình trở thành

$$\left| \frac{2+x}{1+x} \right| < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2+x}{1+x} < 2 \\ \frac{2+x}{1+x} > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x < -1 \\ x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x > -1 \\ x < -\frac{4}{3} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < -\frac{4}{3} \end{cases}.$$

Kết hợp với $x < 0$ và điều kiện $x \neq -1$, ta được $x < -\frac{4}{3}$.

Vậy $x > 0$ hoặc $x < -\frac{4}{3}$. □

Bài 11. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2 - |x-2|} \leq x$.

Lời giải.

Nếu $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ thì bất phương trình trở thành:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - x + 2} \leq x \\ x^2 - x + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - x + 2 \leq x^2 \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Kết hợp $x \geq 2$ ta được $x \geq 2$.

Nếu $x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$ thì bất phương trình trở thành:

$$\sqrt{x^2 + x - 2} \leq x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x^2 + x - 2 \leq x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+2) \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2.$$

Kết hợp với $x < 2$, ta được $1 \leq x < 2$. Vậy $x \geq 1$. □

Bài 12. Giải và biện luận bất phương trình sau: $2(m+1)x \leq (m+1)^2(x-1)$

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương với:

$$[(m+1)^2 - 2(m+1)]x \geq (m+1)^2 \Leftrightarrow (m-1)(m+1)x \geq (m+1)^2$$

- TH1. Với $m = -1$ bất phương trình trở thành $0 \geq 0$. Tập nghiệm của bất phương trình này là $\mathbb{R}$.
- TH2. Với $m < -1$ hoặc $m > 1$ thì $(m-1)(m+1) > 0$, do đó: $x \geq \frac{m+1}{m-1}$. Vậy $S = \left(\frac{m+1}{m-1}; +\infty\right)$.
- TH3. Với $-1 < m < 1$ thì $(m-1)(m+1) < 0$, do đó: $x \leq \frac{m+1}{m-1}$. Vậy $S = \left(-\infty; \frac{m+1}{m-1}\right)$.

□

Bài 13. Giải và biện luận hệ bất phương trình sau
$$\begin{cases} (x - \sqrt{5})(1 - 2x) > 0 & (1) \\ x - m \leq 0 & (2) \end{cases}$$

Lời giải.

Tập nghiệm của bất phương trình (1) $S = \left(\frac{1}{2}; \sqrt{5}\right)$.

TH1. Nếu $m \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \leq m \leq \frac{1}{2}$. Hệ bất phương trình này vô nghiệm

TH2. Nếu $\frac{1}{2} < m < \sqrt{5}$, khi đó $x \leq m$. Tập nghiệm của hệ là $S = \left(\frac{1}{2}; m\right]$ với $m < \sqrt{5}$

TH3. Nếu $m \geq \sqrt{5}$, bất phương trình (2) $\Leftrightarrow x \leq m$.

Để hệ bất phương trình này có nghiệm thì $x \in \left(\frac{1}{2}; \sqrt{5}\right)$.

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình $S = \left(\frac{1}{2}; \sqrt{5}\right)$.

□

Bài 14. Giải và biện luận các bất phương trình sau

a) $(2x - 4)(x - m) > 0;$

b) $\frac{\sqrt{2} - x}{x - 2m + 1} \leq 0;$

Lời giải.

a) TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Trường hợp 1. $m = 2$, bất phương trình đã cho tương đương $2(x - 2)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Trường hợp 2. $m < 2$. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	m	2	$+\infty$
$2x - 4$	$-$	$-$	0	$+$
$x - m$	$-$	0	$+$	$+$
$(2x-4)(x-m)$	$+$	0	$-$	$+$

Dựa vào bảng xét dấu $(2x - 4)(x - m) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; m) \cup (2; +\infty)$.

Trường hợp 3. $m > 2$. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	2	m	$+\infty$
$2x - 4$	$-$	0	$+$	$+$
$x - m$	$-$	$-$	0	$+$
$(2x-4)(x-m)$	$+$	0	$-$	$+$

Dựa vào bảng xét dấu $(2x - 4)(x - m) \Leftrightarrow x \in (-\infty; 2) \cup (m; +\infty)$.

Vậy bất phương trình đã cho luôn có vô số nghiệm, tập nghiệm là

- $S = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ với $m = 2$;
- $S = (-\infty; m) \cup (2; +\infty)$ nếu $m < 2$
- $S = (-\infty; 2) \cup (m; +\infty)$ nếu $m > 2$.

b) TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2m - 1\}$.

Trường hợp 1. $2m - 1 = \sqrt{2} \Leftrightarrow m = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$, bất phương trình đã cho tương đương

$$-1 \leq 0, \text{ (luôn đúng với mọi } x \in \mathbb{R}).$$

Trường hợp 2. $2m - 1 < \sqrt{2} \Leftrightarrow m < \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	$2m - 1$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$\sqrt{2} - x$	$+$	$+$	0	$-$
$x - 2m + 1$	$-$	0	$+$	$+$
$\frac{\sqrt{2} - x}{x - 2m + 1}$	$-$	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu $\frac{\sqrt{2} - x}{x - 2m + 1} \leq 0$ khi $x \in (-\infty; 2m - 1) \cup x \in [\sqrt{2}; +\infty)$.

Trường hợp 3. $2m - 1 > \sqrt{2} \Leftrightarrow m > \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\sqrt{2}$	$2m - 1$	$+\infty$
$\sqrt{2} - x$	$+$	0	$-$	$-$
$x - 2m + 1$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{\sqrt{2} - x}{x - 2m + 1}$	$-$	0	$+$	$-$

Dựa vào bảng xét dấu $\frac{\sqrt{2} - x}{x - 2m + 1} \leq 0$ khi $x \in (-\infty; \sqrt{2}] \cup x \in (2m - 1; +\infty)$.

Vậy bất phương trình đã cho luôn có vô số nghiệm, tập nghiệm

- $S = \mathbb{R}$ nếu $m = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$;
- $S = (-\infty; 2m - 1) \cup [\sqrt{2}; +\infty)$ nếu $m < \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$;

- $S = (-\infty; \sqrt{2}] \cup (2m - 1; +\infty)$ nếu $m > \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$.

□

Bài 15. Tìm các giá trị của tham số m sao cho hệ bất phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} \frac{-2}{3}x + \frac{7}{2} > \frac{1}{3}x + \frac{1}{2} \\ m^2x + 1 \geq m^4 - x. \end{cases}$$

Lời giải.

TXD: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có

$$\begin{cases} \frac{-2}{3}x + \frac{7}{2} > \frac{1}{3}x + \frac{1}{2} \\ m^2x + 1 \geq m^4 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ (m^2 + 1)x \geq m^4 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x \geq m^2 - 1. \end{cases}$$

Do đó hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$m^2 - 1 < 3 \Leftrightarrow m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow (m - 2)(m + 2) < 0.$$

Bảng xét dấu

m	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$m-2$	$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$
$m+2$	$+$	0	$-$	$\vdots$	$-$
$(m-2)(m+2)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu ta có $m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ là các giá trị cần tìm.

□

C CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho biểu thức $f(x) = 2x - 4$. Tập hợp tất cả các giá trị của x để $f(x) \geq 0$ là

- A. $x \in [2; +\infty)$. B. $x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$. C. $x \in (-\infty; 2]$. D. $x \in (2; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 \Leftrightarrow x \in [2; +\infty)$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 2. Cho biểu thức $f(x) = (x + 5)(3 - x)$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f(x) \leq 0$ là

- A. $x \in (-\infty; 5) \cup (3; +\infty)$. B. $x \in (3; +\infty)$.
C. $x \in (-5; 3)$. D. $x \in (-\infty; -5] \cup [3; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 5)(3 - x) = 0$.

Phương trình $x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$ và $3 - x = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-5	3	$+\infty$
$x + 5$		$-$	0	$+$
$3 - x$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -5] \cup [3; +\infty)$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 3. Cho biểu thức $f(x) = x(x - 2)(3 - x)$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f(x) < 0$ là

- A. $x \in (0; 2) \cup (3; +\infty)$. B. $x \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$.
C. $x \in (-\infty; 0] \cup (2; +\infty)$. D. $x \in (-\infty; 0) \cup (2; 3)$.

Lời giải.

Ta có $x = 0$; $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ và $3 - x = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	0	2	3	$+\infty$
x		$-$	0	$+$	$+$
$x - 2$		$-$	$-$	0	$+$
$3 - x$		$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0; 2) \cup (3; +\infty)$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 4. Cho biểu thức $f(x) = 9x^2 - 1$. Tập hợp tất cả các giá trị của x để $f(x) < 0$ là

A. $x \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$.

B. $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

C. $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

D. $x \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow 9x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (3x - 1)(3x + 1) = 0$.

Phương trình $3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ và $3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$	
$3x - 1$	$-$	$-$	0	$+$	
$3x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 5. Cho biểu thức $f(x) = (2x - 1)(x^3 - 1)$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f(x) \geq 0$ là

A. $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

B. $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

C. $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty)$.

D. $x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Lời giải.

Ta có $(2x - 1)(x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$.

Phương trình $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$; $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ và $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	
$2x - 1$	$-$	0	$+$	$+$	
$x - 1$	$-$	$-$	0	$+$	
x^2+x+1	$+$	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, suy ra $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty)$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 6. Cho biểu thức $f(x) = \frac{1}{3x - 6}$. Tập hợp tất cả các giá trị của x để $f(x) \leq 0$ là

A. $x \in (-\infty; 2]$.

B. $x \in (-\infty; 2)$.

C. $x \in (2; +\infty)$.

D. $x \in [2; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3x - 6} \leq 0 \Leftrightarrow 3x - 6 < 0 \Leftrightarrow x < 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 2)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 7. Cho biểu thức $f(x) = \frac{(x+3)(2-x)}{x-1}$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f(x) > 0$ là

A. $x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

B. $x \in (-3; 1) \cup (2; +\infty)$.

C. $x \in (-3; 1) \cup (1; 2)$.

D. $x \in (-\infty; -3) \cup (1; 2)$.

Lời giải.

Phương trình $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$; $2-x=0 \Leftrightarrow x=2$ và $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-3	1	2	$+\infty$	
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$2-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -3) \cup (1; 2)$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 8. Cho biểu thức $f(x) = \frac{(4x-8)(2+x)}{4-x}$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f(x) \geq 0$ là

A. $x \in (-\infty; -2] \cup [2; 4)$.

B. $x \in (3; +\infty)$.

C. $x \in (-2; 4)$.

D. $x \in (-2; 2) \cup (4; +\infty)$.

Lời giải.

Phương trình $4x-8=0 \Leftrightarrow x=2$; $2+x=0 \Leftrightarrow x=-2$ và $4-x=0 \Leftrightarrow x=4$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	2	4	$+\infty$
$4x - 8$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x + 2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$4 - x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2] \cup [2; 4)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 9. Cho biểu thức $f(x) = \frac{x(x-3)}{(x-5)(1-x)}$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f(x) \geq 0$ là

A. $x \in (-\infty; 0] \cup (3; +\infty)$.

B. $x \in (-\infty; 0] \cup (1; 5)$.

C. $x \in [0; 1) \cup [3; 5)$.

D. $x \in (-\infty; 0) \cup (1; 5)$.

Lời giải.

Phương trình $x=0$; $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$; $x-5=0 \Leftrightarrow x=5$ và $1-x=0 \Leftrightarrow x=1$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	0	1	3	5	$+\infty$
x	-	0	+	+	+	+
$x - 3$	-	-	-	0	+	+
$x - 5$	-	-	-	-	0	+
$1 - x$	+	+	0	-	-	-
$f(x)$	-	0	+	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0; 1) \cup [3; 5)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 10. Cho biểu thức $f(x) = \frac{4x - 12}{x^2 - 4x}$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f(x) \leq 0$ là

A. $x \in (0; 3] \cup (4; +\infty)$.

B. $x \in (-\infty; 0] \cup [3; 4)$.

C. $x \in (-\infty; 0) \cup [3; 4)$.

D. $x \in (-\infty; 0) \cup (3; 4)$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \frac{4x - 12}{x^2 - 4x} = \frac{4x - 12}{x(x - 4)}$.

Phương trình $4x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 3$; $x = 0$ và $x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-3	1	2	$+\infty$
$4x - 12$	-	-	0	+	+
x	-	0	+	+	+
$x - 4$	-	-	-	0	+
$f(x)$	-	+	0	-	+

Dựa vào bảng xét dấu, suy ra $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup [3; 4)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 11. Cho biểu thức $f(x) = \frac{2 - x}{x + 1} + 2$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f(x) < 0$ là

A. $x \in (-\infty; -1)$.

B. $x \in (-1; +\infty)$.

C. $x \in (-4; -1)$.

D. $x \in (-\infty; -4) \cup (-1; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \frac{2 - x}{x + 1} + 2 = \frac{2 - x + 2(x + 1)}{x + 1} = \frac{x + 4}{x + 1}$.

Phương trình $x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$ và $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-4	-1	$+\infty$
$x + 4$	-	0	+	+
$x + 1$	-	-	0	+
$f(x)$	+	0	-	+

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-4; -1)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 12. Cho biểu thức $f(x) = 1 - \frac{2-x}{3x-2}$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f(x) \leq 0$ là

A. $x \in (\frac{2}{3}; 1)$.

B. $x \in (-\infty; \frac{2}{3}) \cup (1; +\infty)$.

C. $x \in (\frac{2}{3}; 1]$.

D. $x \in (-\infty; 1) \cup (\frac{2}{3}; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = 1 - \frac{2-x}{3x-2} = \frac{3x-2-2+x}{3x-2} = \frac{4x-4}{3x-2}$.

Phương trình $4x-4=0 \Leftrightarrow x=1$ và $3x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	1	$+\infty$
$4x - 4$	$-$	$-$	0	$+$
$3x - 2$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (\frac{2}{3}; 1]$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 13. Cho biểu thức $f(x) = \frac{-4}{3x+1} - \frac{3}{2-x}$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f(x) > 0$ là

A. $x \in (-\frac{11}{5}; -\frac{1}{3}) \cup [2; +\infty)$.

B. $x \in (-\frac{11}{5}; -\frac{1}{3}) \cup (2; +\infty)$.

C. $x \in (-\infty; -\frac{11}{5}] \cup (-\frac{1}{3}; 2)$.

D. $x \in (-\infty; -\frac{11}{5}) \cup (-\frac{1}{3}; 2)$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = -\frac{4}{3x+1} - \frac{3}{2-x} = \frac{3}{x-2} - \frac{4}{3x+1} = \frac{5x+11}{(x-2)(3x+1)}$.

Phương trình $5x+11=0 \Leftrightarrow x=-\frac{11}{5}$; $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ và $3x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{11}{5}$	$-\frac{1}{3}$	2	$+\infty$	
$5x+11$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$x-2$	$-$		$-$	$-$	0	$+$
$3x+1$	$-$		$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	$-$		$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\frac{11}{5}; -\frac{1}{3}) \cup (2; +\infty)$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 14. Cho biểu thức $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x+4} - \frac{3}{x+3}$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f(x) < 0$ là

- A. $x \in (-12; -4) \cup (-3; 0)$.
 B. $x \in \left(-\frac{11}{5}; -\frac{1}{3}\right) \cup (2; +\infty)$.
 C. $x \in \left(-\infty; -\frac{11}{5}\right] \cup \left(-\frac{1}{3}; 2\right)$.
 D. $x \in \left(-\infty; -\frac{11}{5}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}; 2\right)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x+4} - \frac{3}{x+3} < 0 \Leftrightarrow \frac{x+12}{x(x+3)(x+4)} < 0.$$

Phương trình $x+12=0 \Leftrightarrow x=-12$; $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$ và $x+4=0 \Leftrightarrow x=-4$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-12	-4	-3	0	$+\infty$
$x+12$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
x		$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+3$		$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x+4$		$-$	$+$	0	$+$	$+$
$f(x)$		$+$	0	$-$	$+$	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-12; -4) \cup (-3; 0)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 15. Cho biểu thức $f(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{x^2-1}$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên âm của x thỏa mãn bất phương trình $f(x) < 1$?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải.

$$\text{Ta có } 1 - f(x) = 1 - \frac{(x-3)(x+2)}{x^2-1} = 1 - \frac{x^2-x-6}{x^2-1} = \frac{x+5}{(x-1)(x+1)}.$$

Phương trình $x+5=0 \Leftrightarrow x=-5$; $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ và $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-5	-1	1	$+\infty$
$x+5$		$-$	0	$+$	$+$
$x-1$		$-$	$-$	0	$+$
$x+1$		$-$	$-$	0	$+$
$1-f(x)$		$-$	0	$+$	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $1 - f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-5; -1) \cup (1; +\infty)$.

Vậy có tất cả 3 giá trị nguyên âm của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 16. Tập nghiệm của bất phương trình $(2x+8)(1-x) > 0$ có dạng $(a; b)$. Khi đó $b-a$ bằng

- A. 3. B. 5. C. 9. D. không giới hạn.

Lời giải.

Đặt $f(x) = (2x + 8)(1 - x)$.

Phương trình $2x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -4$ và $1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$	
$2x + 8$	$-$	0	$+$	$+$	
$1 - x$	$+$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Từ bảng xét dấu ta có $f(x) > 0 \Leftrightarrow -4 < x < 1 \Leftrightarrow x \in (-4; 1)$.

Khi đó $b = 1$, $a = -4 \Rightarrow b - a = 5$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 17. Tập nghiệm $S = (-4; 5)$ là tập nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

A. $(x + 4)(x + 5) < 0$.

B. $(x + 4)(5x - 25) < 0$.

C. $(x + 4)(5x - 25) \geq 0$.

D. $(x - 4)(x - 5) < 0$.

Lời giải.

Phương trình $x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$ và $x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$.

Phương trình $x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ và $5x - 25 = 0 \Leftrightarrow x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-5	-4	4	5	$+\infty$		
$x + 5$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$		
$x + 4$	$-$		$-$	0	$+$	$+$		
$x - 4$	$-$		$-$	$-$	0	$+$		
$x - 5$	$-$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$(x + 4)(x + 5)$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$(x + 4)(x - 5)$	$+$		$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$(x - 4)(x - 5)$	$+$		$+$	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy $S = (-4; 5)$ là tập nghiệm của bất phương trình $(x + 4)(5x - 25) < 0$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 18. Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình $(x + 3)(x - 1) \leq 0$ là

A. 1.

B. -4.

C. -5.

D. 4.

Lời giải.

Đặt $f(x) = (x + 3)(x - 1)$.

Phương trình $x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ và $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
$x + 3$	$-$	0	$+$	$+$	
$x - 1$	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu ta có $(x+3)(x-1) \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-3; 1]$.

Suy ra các nghiệm nguyên của bất phương trình là $-3, -2, -1, 0, 1$.

Suy ra tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình bằng -5 .

Chọn đáp án **C**

□

Câu 19. Tập nghiệm $S = [0; 5]$ là tập nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

- A. $x(x-5) < 0$. B. $x(x-5) \leq 0$. C. $x(x-5) \geq 0$. D. $x(x-5) > 0$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = x(x-5)$.

Phương trình $x = 0$ và $x-5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	0	5	$+\infty$
x	$-$	0	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $x \in [0; 5] \Leftrightarrow f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x(x-5) \leq 0$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 20. Nghiệm nguyên nhỏ nhất thỏa mãn bất phương trình $x(x-2)(x+1) > 0$ là

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Lời giải.

Đặt $f(x) = x(x-2)(x+1)$.

Phương trình $x = 0$; $x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ và $x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 0) \cup (2; +\infty)$.

Vậy nghiệm nguyên nhỏ nhất thỏa mãn bất phương trình là 3.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 21. Tập nghiệm $S = (-\infty; 3) \cup (5; 7)$ là tập nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

- A. $(x+3)(x-5)(14-2x) \leq 0$. B. $(x-3)(x-5)(14-2x) > 0$.
C. $(x-3)(x-5)(14-2x) < 0$. D. $(x+3)(x-5)(14-2x) < 0$.

Lời giải.

Phương trình $x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$; $x-3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ và $x-5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$; $14-2x = 0 \Leftrightarrow x = 7$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-3	3	5	7	$+\infty$
$x + 3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x - 3$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - 5$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$14 - 2x$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$(x + 3)(x - 5)(14 - 2x)$	$+$	0	$-$	$+$	0	$-$
$(x - 3)(x - 5)(14 - 2x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$-$

Từ bảng xét dấu ta thấy $S = (-\infty; 3) \cup (5; 7)$ là tập nghiệm của bất phương trình $(x - 3)(x - 5)(14 - 2x) > 0$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 22. Hỏi bất phương trình $(2 - x)(x + 1)(3 - x) \leq 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

A. 1.

B. 3.

C. 4.

D. 2.

Lời giải.

Đặt $f(x) = (2 - x)(x + 1)(3 - x)$.

Phương trình $2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$; $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ và $3 - x = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	2	3	$+\infty$
$2 - x$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$3 - x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [2; 3]$. Vậy bất phương trình đã cho có 2 nghiệm nguyên dương.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 23. Tích của nghiệm nguyên âm lớn nhất và nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của bất phương trình $(3x - 6)(x - 2)(x + 2)(x - 1) > 0$ là

A. -9.

B. -6.

C. -4.

D. 8.

Lời giải.

Bất phương trình $(3x - 6)(x - 2)(x + 2)(x - 1) > 0 \Leftrightarrow 3(x - 2)^2(x + 2)(x - 1) > 0$.

Vì $(x - 2)^2 > 0, \forall x \neq 2$ nên bất phương trình trở thành $\begin{cases} x \neq 2 \\ (x + 2)(x - 1) > 0. \end{cases}$

Đặt $f(x) = (x + 2)(x - 1)$.

Phương trình $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ và $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x + 2$	$-$	0	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$.

Kết hợp với điều kiện $x \neq 2$, ta được $\Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$.

Do đó, nghiệm nguyên âm lớn nhất của bất phương trình là -3 và nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của bất phương trình là 3 .

Vậy tích cần tính là $(-3) \cdot 3 = -9$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 24. Tập nghiệm của bất phương trình $2x(4-x)(3-x)(3+x) > 0$ là

A. Một khoảng.

B. Hợp của hai khoảng.

C. Hợp của ba khoảng.

D. Toàn trục số.

Lời giải.

Đặt $f(x) = 2x(4-x)(3-x)(3+x)$.

Phương trình $2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $4 - x = 0 \Leftrightarrow x = 4$ và $3 - x = 0 \Leftrightarrow x = 3$; $3 + x = 0 \Leftrightarrow x = -3$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-3	0	3	4	$+\infty$
$x + 3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$2x$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$3 - x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$4 - x$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	$+$

Từ bảng xét dấu ta có $f(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ 0 < x < 3 \\ x < -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -3) \cup (0; 3) \cup (4; +\infty)$.

Suy ra tập nghiệm bất phương trình là hợp của ba khoảng.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 25. Nghiệm nguyên nhỏ nhất thỏa mãn bất phương trình $(x-1)\sqrt{x(x+2)} \geq 0$ là

A. $x = -2$.

B. $x = 0$.

C. $x = 1$.

D. $x = 2$.

Lời giải.

Bất phương trình $(x-1)\sqrt{x(x+2)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x(x+2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x(x+2) \geq 0 \end{cases}$.

Đặt $f(x) = x(x+2)$.

Phương trình $x = 0$ và $x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
x	$-$	$-$	0	$+$
$x + 2$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -2. \end{cases}$

Kết hợp với điều kiện $x \geq 1$, ta được tập nghiệm $S = [1; +\infty)$.

Vậy nghiệm nguyên nhỏ nhất thỏa mãn bất phương trình là $x = 1$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 26. Bất phương trình $\frac{2-x}{2x+1} \geq 0$ có tập nghiệm là

A. $S = \left(-\frac{1}{2}; 2\right)$. B. $S = \left[-\frac{1}{2}; 2\right]$. C. $S = \left(-\frac{1}{2}; 2\right]$. D. $S = \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = \frac{2-x}{2x+1}$. Ta có $2-x=0 \Leftrightarrow x=2$ và $2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$2-x$	$+$	$+$	0	$-$
$2x+1$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy rằng $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x \leq 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\frac{1}{2}; 2\right]$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 27. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{(3-x)(x-2)}{x+1} \leq 0$ là

A. $S = (-1; 2] \cup [3; +\infty)$. B. $S = (-\infty; 1) \cup [2; 3]$.
C. $S = [-1; 2] \cup [3; +\infty)$. D. $S = (-1; 2) \cup (3; +\infty)$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = \frac{(3-x)(x-2)}{x+1}$.

Ta có $\begin{cases} 3-x=0 \Leftrightarrow x=3 \\ x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \end{cases}$; $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	2	3	$+\infty$
$3-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$x-2$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	$-$	0	$+$	$-$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x \leq 2 \\ x \geq 3. \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-1; 2] \cup [3; +\infty)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 28. Bất phương trình $\frac{3}{2-x} < 1$ có tập nghiệm là

A. $S = (-1; 2)$.

B. $S = [-1; 2)$.

C. $S = (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

D. $S = (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$.

Lời giải.

Bất phương trình $\frac{3}{2-x} < 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2-x} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{2-x} < 0$.

Đặt $f(x) = \frac{x+1}{2-x}$.

Ta có $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ và $2-x=0 \Leftrightarrow x=2$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$2-x$	$+$	$+$	0	$-$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	$-$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 2. \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 29. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x^2+x-3}{x^2-4} \geq 1$ là

A. $S = (-\infty; -2) \cup (-1; 2)$.

B. $S = (-2; 1] \cup (2; +\infty)$.

C. $S = [-2; 1) \cup (2; +\infty)$.

D. $S = (-2; 1] \cup [2; +\infty)$.

Lời giải.

Bất phương trình $\frac{x^2+x-3}{x^2-4} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2+x-3}{x^2-4} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{(x-2)(x+2)} \geq 0$.

Đặt $f(x) = \frac{x+1}{(x-2)(x+2)}$.

Ta có $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ và $(x-2)(x+2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=2. \end{cases}$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	-1	2	$+\infty$
$x+1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	0	$-$	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x \leq -1 \\ x > 2. \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-2; -1] \cup (2; +\infty)$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 30. Bất phương trình $\frac{4}{x-1} - \frac{2}{x+1} < 0$ có tập nghiệm là

A. $S = (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

B. $S = (-\infty; -3) \cup (-1; 1)$.

C. $S = (-3; -1) \cup (1; +\infty)$.

D. $S = (-3; 1) \cup (-1; +\infty)$.

Lời giải.

Bất phương trình $\frac{4}{x-1} - \frac{2}{x+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x+6}{(x-1)(x+1)} < 0$.

Đặt $f(x) = \frac{2x+6}{(x-1)(x+1)}$.

Ta có $2x+6=0 \Leftrightarrow x=-3$ và $(x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1. \end{cases}$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$2x+6$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	$-$	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ -1 < x < 1. \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -3) \cup (-1; 1)$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 31. Bất phương trình $\frac{3}{1-x} \geq \frac{5}{2x+1}$ có tập nghiệm là

A. $S = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{2}{11}; 1\right)$.

B. $S = \left(-\frac{1}{2}; \frac{2}{11}\right) \cup (1; +\infty)$.

C. $S = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{2}{11}; 1\right)$.

D. $S = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{2}{11}; 1\right)$.

Lời giải.

Bất phương trình $\frac{3}{1-x} \geq \frac{5}{2x+1} \Leftrightarrow \frac{11x-2}{(1-x)(2x+1)} \geq 0$.

Đặt $f(x) = \frac{11x-2}{(1-x)(2x+1)}$.

Ta có $11x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{11}$; $\begin{cases} 1-x=0 \Leftrightarrow x=1 \\ 2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2} \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{11}$	1	$+\infty$
$11x - 2$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$1 - x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$2x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	$-$	0	$+$	$-$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{11} \leq x < 1. \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{2}{11}; 1\right)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 32. Bất phương trình $\frac{2x}{x+1} - \frac{1}{x-1} \leq 2$ có tập nghiệm là

- A. $S = \left(-1; \frac{1}{3}\right] \cup (1; +\infty)$. B. $S = (-\infty; -1] \cup (1; +\infty)$.
 C. $S = \left(-1; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$. D. $S = (-\infty; -1] \cup \left(\frac{1}{3}; 1\right)$.

Lời giải.

Bất phương trình $\frac{2x}{x+1} - \frac{1}{x-1} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1-3x}{(x-1)(x+1)} \leq 0$.

Đặt $f(x) = \frac{1-3x}{(x-1)(x+1)}$.

Ta có $1-3x=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$; $\begin{cases} x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \\ x+1=0 \Leftrightarrow x=-1. \end{cases}$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
$1-3x$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	$-$	0	$+$	$-$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x \leq \frac{1}{3} \\ x > 1. \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-1; \frac{1}{3}\right] \cup (1; +\infty)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 33. Bất phương trình $\frac{1}{x} + \frac{2}{x+4} < \frac{3}{x+3}$ có tập nghiệm là

- A. $S = (-\infty; -12) \cup (-4; 3) \cup (0; +\infty)$. B. $S = [-12; -4) \cup (-3; 0)$.
 C. $S = (-\infty; -12) \cup [-4; 3] \cup (0; +\infty)$. D. $S = (-12; -4) \cup (-3; 0)$.

Lời giải.

Bất phương trình $\frac{1}{x} + \frac{2}{x+4} < \frac{3}{x+3} \Leftrightarrow \frac{x+12}{x(x+3)(x+4)} < 0$.

Đặt $f(x) = \frac{x+12}{x(x+3)(x+4)}$.

Ta có $x+12=0 \Leftrightarrow x=-12$; $\begin{cases} x+3=0 \Leftrightarrow x=-3 \\ x+4=0 \Leftrightarrow x=-4. \end{cases}$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-12	-4	-3	0	$+\infty$
$x+12$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
x		$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+3$		$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x+4$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$		$+$	0	$-$	$+$	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -12 < x < -4 \\ -3 < x < 0. \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-12; -4) \cup (-3; 0)$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 34. Bất phương trình $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{(x-1)^2}$ có tập nghiệm S là

A. $T = (-\infty; -1) \cup (0; 1) \cup [1; 3]$.

B. $T = [-1; 0) \cup (-3; +\infty)$.

C. $T = (-\infty; -1) \cup (0; 1) \cup (1; 3)$.

D. $T = (-1; 0] \cup (-3; +\infty)$.

Lời giải.

Bất phương trình $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{(x-1)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x-1)^2} < 0$.

$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2 - (x+1)}{(x+1)(x-1)^2} < 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-3)}{(x+1)(x-1)^2} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \frac{x(x-3)}{x+1} < 0 \end{cases}$ (vì $(x-1)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$).

Đặt $f(x) = \frac{x(x-3)}{x+1}$.

Ta có $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$ và $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	0	3	$+\infty$
x		$-$	0	$+$	$+$
$x-3$		$-$	$-$	0	$+$
$x+1$		0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$		$-$	$+$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ 0 < x < 3. \end{cases}$

Kết hợp với điều kiện $x \neq 1$, ta được tập nghiệm $S = (-\infty; -1) \cup (0; 1) \cup (1; 3)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 35. Bất phương trình $\frac{x+4}{x^2-9} - \frac{2}{x+3} < \frac{4x}{3x-x^2}$ có nghiệm nguyên lớn nhất là
A. $x = 2$. **B.** $x = 1$. **C.** $x = -2$. **D.** $x = -1$.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương với

$$\frac{x(x+4)}{x(x-3)(x+3)} - \frac{2x(x-3)}{x(x-3)(x+3)} < -\frac{4x(x+3)}{x(x-3)(x+3)} \Leftrightarrow \frac{3x+22}{(x-3)(x+3)} < 0.$$

Đặt $f(x) = \frac{3x+22}{(x-3)(x+3)}$.

Ta có $3x+22=0 \Leftrightarrow x = -\frac{22}{3}$; $\begin{cases} x-3=0 \Leftrightarrow x=3 \\ x+3=0 \Leftrightarrow x=-3. \end{cases}$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{22}{3}$	-3	3	$+\infty$
$3x+22$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+3$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	0	$-$	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\frac{22}{3}) \cup (-3; 3)$.

Vậy nghiệm nguyên lớn nhất thỏa mãn bất phương trình là $x = 2$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 36. Tất cả các giá trị của x thỏa mãn $|x-1| < 1$ là

A. $-2 < x < 2$. **B.** $0 < x < 1$. **C.** $x < 2$. **D.** $0 < x < 2$.

Lời giải.

Ta có $|x-1| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 37. Nghiệm của bất phương trình $|2x-3| \leq 1$ là

A. $1 \leq x \leq 3$. **B.** $-1 \leq x \leq 1$. **C.** $1 \leq x \leq 2$. **D.** $-1 \leq x \leq 2$.

Lời giải.

Ta có $|2x-3| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 2x-3 \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq 2x \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 38. Bất phương trình $|3x-4| \leq 2$ có nghiệm là

A. $(-\infty; \frac{2}{3}] \cup [2; +\infty)$. **B.** $[\frac{2}{3}; 2]$.
C. $(-\infty; \frac{2}{3}]$. **D.** $[2; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $|3x-4| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq 3x-4 \leq 2 \Leftrightarrow 2 \leq 3x \leq 6 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq x \leq 2$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 39. Bất phương trình $|1-3x| > 2$ có nghiệm là

A. $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$.
 C. $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$.

B. $(1; +\infty)$.
 D. $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } |1 - 3x| > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 3x > 2 \\ 1 - 3x < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 > 3x \\ 3x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{3} \\ x > 1. \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 40. Tập nghiệm của bất phương trình $|x - 3| > -1$ là

A. $(3; +\infty)$. B. $(-\infty; 3)$. C. $(-3; 3)$. D. $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Vì $|x - 3| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên suy ra $|x - 3| > -1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \mathbb{R}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 41. Tập nghiệm của bất phương trình $|5x - 4| \geq 6$ có dạng $S = (-\infty; a] \cup [b; +\infty)$. Tính tổng $P = 5a + b$.

A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Lời giải.

Cách 1. Bất phương trình $|5x - 4| \geq 6 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 4 \geq 6 \\ 5x - 4 \leq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x \geq 10 \\ 5x \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -\frac{2}{5}. \end{cases}$

Cách 2.

TH1. Với $5x - 4 \geq 0$, bất phương trình $|5x - 4| \geq 6 \Leftrightarrow 5x - 4 \geq 6 \Leftrightarrow x \geq 2$.

TH2. Với $5x - 4 < 0$, bất phương trình $|5x - 4| \geq 6 \Leftrightarrow -5x + 4 \geq 6 \Leftrightarrow 5x \leq -2 \Leftrightarrow x \leq -\frac{2}{5}$.

Do đó, tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; -\frac{2}{5}\right] \cup [2; +\infty)$.

Mặt khác $S = (-\infty; a] \cup [b; +\infty)$ suy ra $\begin{cases} a = -\frac{2}{5} \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow 5a + b = 5 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) + 2 = 0$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 42. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên x thỏa mãn bất phương trình $\left|\frac{2-x}{x+1}\right| \geq 2$?

A. 1. B. 2. C. 4. D. 3.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$.

Ta có

$$\left|\frac{2-x}{x+1}\right| \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2-x}{x+1} \geq 2 \\ \frac{2-x}{x+1} \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2-x}{x+1} - 2 \geq 0 \\ \frac{2-x}{x+1} + 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3x}{x+1} \geq 0 \quad (1) \\ \frac{4+x}{x+1} \leq 0. \quad (2) \end{cases}$$

Giải từng bất phương trình (1) và (2).

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow -1 < x \leq 0.$$

$$(2) \Leftrightarrow -4 \leq x < -1.$$

Do đó, tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-4; -1) \cup (-1; 0]$.

Vậy có tất cả 4 giá trị nguyên x cần tìm là $x \in \{-4; -3; -2; 0\}$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 43. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $1 \leq |x - 2| \leq 4$ là

A. 2.

B. 4.

C. 6.

D. 8.

Lời giải.

Ta có

$$1 \leq |x - 2| \leq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} |x - 2| \leq 4 \\ |x - 2| \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq x - 2 \leq 4 \\ \begin{cases} x - 2 \geq 1 \\ x - 2 \leq -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 6 \\ \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 1 \\ 3 \leq x \leq 6. \end{cases}$$

Do đó, tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-2; 1] \cup [3; 6]$.

Vì x nguyên nên $x \in \{-2; -1; 0; 1; 3; 4; 5; 6\}$.

Vậy số nghiệm nguyên thỏa mãn bất phương trình là 8.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 44. Bất phương trình $|3x - 3| \leq |2x + 1|$ có nghiệm là

A. $[4; +\infty)$.

B. $\left(-\infty; \frac{2}{5}\right]$.

C. $\left[\frac{2}{5}; 4\right]$.

D. $(-\infty; 4]$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} |3x - 3| \leq |2x + 1| &\Leftrightarrow |3x - 3|^2 \leq |2x + 1|^2 \\ &\Leftrightarrow (3x - 3)^2 - (2x + 1)^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (3x - 3 - 2x - 1)(3x - 3 + 2x + 1) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 4)(5x - 2) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{5} \leq x \leq 4. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[\frac{2}{5}; 4\right]$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 45. Bất phương trình $|x - 3| > |2x + 4|$ có nghiệm là

A. $\left(-7; \frac{1}{3}\right)$.

B. $\left(7; -\frac{1}{3}\right)$.

C. $\left(-7; -\frac{1}{3}\right)$.

D. $(-\infty; -7) \cup \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Ta có

$$|x - 3| > |2x + 4| \Leftrightarrow |x - 3|^2 > |2x + 4|^2$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (x-3)^2 - (2x+4)^2 > 0 \\
&\Leftrightarrow (x-3-2x-4)(x-3+2x+4) > 0 \\
&\Leftrightarrow (-x-7)(3x+1) > 0 \\
&\Leftrightarrow -7 < x < -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-7; -\frac{1}{3}\right)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 46. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên $x \in [-2017; 2017]$ thỏa mãn bất phương trình $|2x+1| < 3x$?

A. 2016.

B. 2017.

C. 4032.

D. 4034.

Lời giải.

Trường hợp 1. Với $2x+1 \geq 0$ hay $x \geq -\frac{1}{2}$, khi đó

$$|2x+1| < 3x \Leftrightarrow 2x+1 < 3x \Leftrightarrow x > 1.$$

Kết hợp với điều kiện $x \geq -\frac{1}{2}$ suy ra $S_1 = (1; +\infty)$.

Trường hợp 2. Với $2x+1 < 0$ hay $x < -\frac{1}{2}$, khi đó

$$|2x+1| < 3x \Leftrightarrow -2x-1 < 3x \Leftrightarrow x > -\frac{1}{5}.$$

Kết hợp với điều kiện $x < -\frac{1}{2}$ suy ra $S_2 = \emptyset$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = S_1 \cup S_2 = (1; +\infty)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 47. Số nghiệm nguyên thỏa mãn bất phương trình $x+12 \geq |2x-4|$ là

A. 5.

B. 19.

C. 11.

D. 16.

Lời giải.

Trường hợp 1. Với $2x-4 \geq 0$ hay $x \geq 2$, ta có

$$x+12 \geq |2x-4| \Leftrightarrow x+12 \geq 2x-4 \Leftrightarrow x \leq 16.$$

Kết hợp với điều kiện $x \geq 2$, ta được tập nghiệm $S_1 = [2; 16]$.

Trường hợp 2. Với $2x-4 < 0$ hay $x < 2$, ta có

$$x+12 \geq -2x+4 \Leftrightarrow 3x \geq -8 \Leftrightarrow x \geq -\frac{8}{3}.$$

Kết hợp với điều kiện $x < 2$, ta được tập nghiệm $S_2 = \left[-\frac{8}{3}; 2\right)$.

Do đó, tập nghiệm của bất phương trình là $S = S_1 \cup S_2 = \left[-\frac{8}{3}; 16\right]$.

Vậy số nghiệm nguyên x thỏa mãn bất phương trình là 19.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 48. Bất phương trình $|3x - 4| \geq x - 3$ có tập nghiệm là

- A. $\left(-\infty; \frac{7}{4}\right]$. B. $\left[\frac{1}{2}; \frac{7}{4}\right]$. C. $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$. D. $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có

$$|3x - 4| \geq x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4 \geq x - 3 \\ 3x - 4 \leq -(x - 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 1 \\ 4x \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x \leq \frac{7}{4} \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[\frac{1}{2}; \frac{7}{4}\right]$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 49. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{|x - 1|}{x + 2} < 1$ là

- A. $S = \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. B. $S = (-\infty; -2) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.
C. $S = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$. D. $S = \left(-2; -\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x + 2 \neq 0$ hay $x \neq -2$.

Trường hợp 1. Với $x - 1 \geq 0$ hay $x \geq 1$, ta có

$$\frac{|x - 1|}{x + 2} < 1 \Leftrightarrow \frac{x - 1}{x + 2} < 1 \Leftrightarrow \frac{3}{x + 2} > 0 \Leftrightarrow x > -2.$$

Kết hợp với điều kiện $x \geq 1$, ta được tập nghiệm $S_1 = (1; +\infty)$.

Trường hợp 2. Với $x - 1 < 0$ hay $x < 1$, ta có

$$\frac{|x - 1|}{x + 2} < 1 \Leftrightarrow \frac{1 - x}{x + 2} < 1 \Leftrightarrow \frac{2x + 1}{x + 2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x < -2. \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện $x < 1$, ta được tập nghiệm là $S_2 = (-\infty; -2) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = S_1 \cup S_2 = (-\infty; -2) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 50. Nghiệm của bất phương trình $\frac{|x + 2| - x}{x} \leq 2$ là

- A. $(0; 1]$. B. $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$.
C. $(-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$. D. $[0; 1]$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x \neq 0$.

Trường hợp 1. Với $x + 2 \geq 0$ hay $x \geq -2$, ta có

$$\frac{|x + 2| - x}{x} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{x + 2 - x}{x} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1 - x}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x < 0. \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện $x \geq -2$, ta được tập nghiệm $S_1 = (-2; 0) \cup [1; +\infty)$.

Trường hợp 2. Với $x + 2 < 0$ hay $x < -2$, ta có

$$\begin{aligned} \frac{|x+2| - x}{x} \leq 2 &\Leftrightarrow \frac{-x-2-x}{x} \leq 2 \Leftrightarrow -\frac{2x+2}{x} \leq 2 \Leftrightarrow -\frac{x+1}{x} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow 1 + \frac{x+1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leq -\frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện $x < -2$, ta được tập nghiệm là $S_2 = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = S_1 \cup S_2 = (-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 51. Số nghiệm nguyên thỏa mãn bất phương trình $|x+2| + |-2x+1| \leq x+1$ là

A. 3.

B. 5.

C. 2.

D. 0.

Lời giải.

Xét bất phương trình $|x+2| + |-2x+1| \leq x+1$.

(*)

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$
$-2x+1$	$+$	$+$	0	$-$

Trường hợp 1. Với $x < -2$, khi đó

$$(*) \Leftrightarrow (-x-2) + (-2x+1) \leq x+1 \Leftrightarrow -2 \leq 4x \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}.$$

Kết hợp với điều kiện $x < -2$, ta được tập nghiệm $S_1 = \emptyset$.

Trường hợp 2. Với $-2 \leq x < -\frac{1}{2}$, khi đó

$$(*) \Leftrightarrow x+2-2x+1 \leq x+1 \Leftrightarrow 2x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Kết hợp với điều kiện $-2 \leq x < -\frac{1}{2}$, ta được tập nghiệm $S_2 = \emptyset$.

Trường hợp 3. Với $x \geq -\frac{1}{2}$, khi đó

$$(*) \Leftrightarrow x+2-(-2x+1) \leq x+1 \Leftrightarrow 2x \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0.$$

Kết hợp với điều kiện $x \geq -\frac{1}{2}$, ta được tập nghiệm $S_3 = \emptyset$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \emptyset$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 52. Bất phương trình $|x+2| - |x-1| < x - \frac{3}{2}$ có tập nghiệm là

A. $(-2; +\infty)$.

B. $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

C. $\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

D. $\left(\frac{9}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Xét bất phương trình $|x+2| - |x-1| \leq x - \frac{3}{2}$.

(*)

Lập bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x + 2$		$-$	0	$+$
$x - 1$	$-$	$+$	0	$+$

Trường hợp 1. Với $x < -2$, khi đó

$$(*) \Leftrightarrow -x - 2 + x - 1 < x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2}.$$

Kết hợp với điều kiện $x < -2$, ta được tập nghiệm $S_1 = \emptyset$.

Trường hợp 2. Với $-2 \leq x < 1$, khi đó

$$(*) \Leftrightarrow x + 2 + x - 1 < x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow x < -\frac{5}{2}.$$

Kết hợp với điều kiện $-2 \leq x < 1$, ta được tập nghiệm $S_2 = \emptyset$.

Trường hợp 3. Với $x \geq 1$, khi đó

$$(*) \Leftrightarrow x + 2 - x + 1 < x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow x > \frac{9}{2}.$$

Kết hợp với điều kiện $x \geq 1$ ta được tập nghiệm $S_3 = \left(\frac{9}{2}; +\infty\right)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left(\frac{9}{2}; +\infty\right)$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 53. Tập nghiệm của bất phương trình $|x + 1| - |x - 2| \geq 3$ là

A. $[-1; 2]$.

B. $[2; +\infty)$.

C. $(-\infty; -1)$.

D. $(-2; 1)$.

Lời giải.

Xét bất phương trình $|x + 1| - |x - 2| \geq 3$.

(*)

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x + 1$		$-$	0	$+$
$x - 2$	$-$	$+$	0	$+$

Trường hợp 1. Với $x < -1$, khi đó

$$(*) \Leftrightarrow -x - 1 + x - 2 \geq 3 \Leftrightarrow -3 \geq 3 \text{ (vô lý)}.$$

Suy ra tập nghiệm $S_1 = \emptyset$.

Trường hợp 2. Với $-1 \leq x < 2$, khi đó

$$(*) \Leftrightarrow x + 1 + x - 2 \geq 3 \Leftrightarrow 2x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Kết hợp với điều kiện $-1 \leq x < 2$, ta được tập nghiệm $S_2 = \emptyset$.

Trường hợp 3. Với $x \geq 2$, khi đó

$$(*) \Leftrightarrow x + 1 - x + 2 \geq 3 \Leftrightarrow 3 \geq 3 \text{ (luôn đúng)}.$$

Kết hợp với điều kiện $x \geq 2$, ta được tập nghiệm $S_3 = [2; +\infty)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = [2; +\infty)$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 54. Tập nghiệm của bất phương trình $\left| \frac{-5}{x+2} \right| < \left| \frac{10}{x-1} \right|$ là

- A. một khoảng. B. hai khoảng. C. ba khoảng. D. toàn trục số.

Lời giải.

Điều kiện xác định $\begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq 1. \end{cases}$

Ta có

$$\left| \frac{-5}{x+2} \right| < \left| \frac{10}{x-1} \right| \Leftrightarrow \frac{1}{|x+2|} < \frac{2}{|x-1|} \Leftrightarrow |x-1| - 2|x+2| < 0. \quad (*)$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$

Trường hợp 1. Với $x < -2$, khi đó

$$(*) \Leftrightarrow -x + 1 + 2(x+2) < 0 \Leftrightarrow x < -5.$$

Kết hợp với điều kiện $x < -2$, ta được tập nghiệm $S_1 = (-\infty; -5)$.

Trường hợp 2. Với $-2 < x < 1$, khi đó

$$(*) \Leftrightarrow -x + 1 - 2(x+2) < 0 \Leftrightarrow 3x > -3 \Leftrightarrow x > -1.$$

Kết hợp với điều kiện $-2 < x < 1$, ta được tập nghiệm $S_2 = (-1; 1)$.

Trường hợp 3. Với $x > 1$, khi đó

$$(*) \Leftrightarrow x - 1 - 2(x+2) < 0 \Leftrightarrow x > -5.$$

Kết hợp với điều kiện $x > 1$, ta được tập nghiệm $S_3 = (1; +\infty)$.

Vậy tập nghiệm bất phương trình là $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = (-\infty; -5) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 55. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left| \frac{2-3|x|}{1+x} \right| \leq 1$ là

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x+1 \neq 0$ hay $x \neq -1$.

Trường hợp 1. Với $x \geq 0$, ta có

$$\left| \frac{2-3|x|}{1+x} \right| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{2-3x}{x+1} \right| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{2-3x}{x+1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{2}.$$

Kết hợp với điều kiện $x \geq 0$, ta được tập nghiệm $S_1 = \left[\frac{1}{4}; \frac{3}{2} \right]$.

Trường hợp 2. Với $x < 0$, ta có

$$\left| \frac{2-3|x|}{1+x} \right| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{2+3x}{x+1} \right| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{2+3x}{x+1} \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \leq x \leq -\frac{1}{2}.$$

Kết hợp với điều kiện $x < 0$, ta được tập nghiệm $S_2 = \left[-\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}\right]$.

Do đó, tập nghiệm của bất phương trình là $S = S_1 \cup S_2 = \left[\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right] \cup \left[-\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}\right]$.

Vậy có 1 nghiệm nguyên x cần tìm là $x = 1$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 56. Biểu thức nào sau đây là một nhị thức bậc nhất đối với x ?

- A. $f(x) = \sqrt{3}x + 1$. B. $f(x) = 2\sqrt{5}$. C. $f(x) = \frac{x-1}{x-3}$. D. $f(x) = \frac{1}{x+2}$.

Lời giải.

Biểu thức bậc nhất là biểu thức có dạng $ax + b$ với a, b là các số thực, $a \neq 0$. Vậy, biểu thức bậc nhất trong các biểu thức trên là $f(x) = \sqrt{3}x + 1$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 57. Cho $f(x) = 2x - 3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $f(1) > 0$. B. $f(2) > 0$. C. $f(3) < 0$. D. $f(4) < 0$.

Lời giải.

$f(1) = 2 \cdot 1 - 3 = -1 < 0$; $f(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1 > 0$; $f(3) = 2 \cdot 3 - 3 = 3 > 0$; $f(4) = 2 \cdot 4 - 3 = 5 > 0$.

Vậy, khẳng định đúng là $f(2) > 0$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 58. Cho nhị thức $f(x) = ax + b$, với $a \neq 0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $a.f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{b}{a}\right\}$.
 B. $a.f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{b}{a}\right\}$.
 C. $a.f(x) > 0, \forall x \in \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$ và $a.f(x) < 0, \forall x \in \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$.
 D. $a.f(x) < 0, \forall x \in \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$ và $a.f(x) > 0, \forall x \in \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$.

Lời giải.

$f(x)$ có nghiệm là $x_0 = -\frac{b}{a}$. Theo kết quả dấu nhị thức bậc nhất, $f(x)$ trái dấu với a khi $x \in (-\infty; x_0)$, cùng dấu với a khi $x \in (x_0; +\infty)$. Vậy, khẳng định đúng là $a.f(x) > 0, \forall x \in \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$ và $a.f(x) < 0, \forall x \in \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 59. Trên khoảng nào trong các khoảng sau đây, $f(x) = -2x + 6$ trái dấu với hệ số của x ?

- A. $(-3; +\infty)$. B. $(-\infty; -3)$. C. $(-\infty; 3)$. D. $(3; +\infty)$.

Lời giải.

$f(x)$ có nghiệm là 3, hệ số bậc nhất âm, nên $f(x)$ trái dấu với hệ số của x (hệ số bậc nhất) khi x thuộc khoảng $(-\infty; 3)$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 60. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $|x - 1| < x + 1$.

- A. $S = (0; 1)$. B. $S = (1; +\infty)$. C. $S = (0; +\infty)$. D. $S = [0; +\infty)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } |x-1| < x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ -x-1 < x-1 < x+1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0.$$

Chọn đáp án **C** □**Câu 61.** Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $|x-2017| < |2017-x|$.

A. $S = \emptyset$.

B. $S = \mathbb{R}$.

C. $S = (2017; +\infty)$.

D. $S = (-\infty; 2017)$.

Lời giải.Do $|A| = |-A| \Rightarrow$ Phương trình $|x-2017| < |-(x-2017)|$ vô nghiệm.Chọn đáp án **A** □**Câu 62.** Đẳng thức $|2x-5| = 2x-5$ xảy ra khi và chỉ khi

A. $x \in \mathbb{R}$.

B. $x \geq \frac{5}{2}$.

C. $x > \frac{5}{2}$.

D. $x \leq \frac{5}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } |a| = a \Leftrightarrow a \geq 0 \text{ nên } |2x-5| = 2x-5 \Leftrightarrow 2x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2}.$$

Chọn đáp án **B** □**Câu 63.** Tập nghiệm S của bất phương trình $3x+1 \geq 0$ là

A. $S = \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

B. $S = \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

C. $S = \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

D. $S = \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } 3x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của bất phương trình là } S = \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right).$$

Chọn đáp án **B** □**Câu 64.** Tập hợp S của các giá trị x làm cho biểu thức $f(x) = 2-3x$ mang dấu không âm là

A. $S = \left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$.

B. $S = \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

C. $S = \left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$.

D. $S = \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

Lời giải.

$$\text{Để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì } 2-3x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3}.$$

$$\text{Tập hợp } S \text{ cần tìm là } S = \left(-\infty; \frac{2}{3}\right].$$

Chọn đáp án **C** □**Câu 65.** Xác định tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} 5-4x < 0 \\ 2x+3 > 0 \end{cases}$

A. $S = \left(-\frac{5}{4}; \frac{2}{3}\right)$.

B. $S = \left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$.

C. $S = \left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

D. $S = \left(-\frac{2}{3}; \frac{5}{4}\right)$.

Lời giải.

$$\text{Hệ đã cho tương đương với } \begin{cases} x > \frac{5}{4} \\ x > -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{5}{4}.$$

$$\text{Vậy tập nghiệm } S \text{ cần tìm là } S = \left(\frac{5}{4}; +\infty\right).$$

Chọn đáp án **B** □

Câu 66. Cho m là tham số thực, trong các biểu thức $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = 2mx + 1$, $h(x) = 1 - m^2x$, $k(x) = 3m - 1 + (m^2 + 2)x$, có bao nhiêu biểu thức là nhị thức bậc nhất?

- A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

Lời giải.

Các nhị thức bậc nhất là $f(x) = 2x - 1$; $k(x) = 3m - 1 + (m^2 + 2)x$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 67. Với x thuộc khoảng nào sau đây thì nhị thức $f(x) = 2 - 5x$ mang dấu dương?

- A. $\left(\frac{2}{5}; +\infty\right)$. B. $(2; 4)$. C. $\left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$. D. $(-2; -1)$.

Lời giải.

$f(x)$ mang dấu dương $\Leftrightarrow 2 - 5x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{2}{5}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 68. Nhận xét nào sau đây là đúng về biểu thức $f(x) = ax + b$ với $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$?

- A. Hàm số $y = f(x)$ là một hàm luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến.
 B. Đồ thị biểu diễn của $f(x)$ là một đường parabol.
 C. Biểu thức $f(x)$ luôn mang một dấu nhất định với mọi giá trị x .
 D. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{b}{a}$.

Lời giải.

B sai vì đồ thị của $f(x)$ là một đường thẳng.

C sai thì $f(x)$ đổi dấu qua mốc $-\frac{b}{a}$.

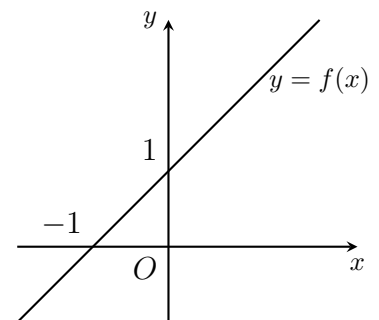
D sai vì $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 69.

Cho hình vẽ bên, biết $f(x) = ax + b$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $f(x) > 0, \forall x \in (-1; +\infty)$. B. $f(x) < 0, \forall x \in (-1; +\infty)$.
 C. $f(x) > 0, \forall x \in (-\infty; 1)$. D. $f(x) < 0, \forall x \in (-\infty; 1)$.



Lời giải.

Từ hình vẽ, ta suy ra nhị thức bậc nhất $f(x)$ có nghiệm là -1 , hơn nữa, hệ số bậc nhất (a) dương. Theo kết quả về dấu của nhị thức bậc nhất, ta suy ra khẳng định đúng trong các khẳng định trên là $f(x) > 0, \forall x \in (-1; +\infty)$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 70. Bảng xét dấu sau đây là của một trong số bốn nhị thức bậc nhất được cho dưới đây. Hỏi đó là nhị thức nào?

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

- A. $f(x) = x - 2$. B. $f(x) = 2x - 4$. C. $f(x) = -2x + 4$. D. $f(x) = -x - 2$.

Lời giải.

Từ bảng xét dấu, ta suy ra $f(2) = 0$ và hệ số bậc nhất (hệ số a) âm. Trong các nhị thức đã cho, nhị thức phù hợp là $f(x) = -2x + 4$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 71. Cho nhị thức bậc nhất $f(x) = ax + b$ với $a \neq 0$ và $g(x) = -2f(x)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $f(x).g(x) \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. B. $f(x).g(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
 C. $\frac{f(x)}{g(x)} = -2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. D. $\frac{g(x)}{f(x)} = -2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Cả $f(x)$ và $g(x)$ đều có cùng nghiệm, là $x_0 = -\frac{b}{a}$; nên các phân thức $\frac{f(x)}{g(x)}$ và $\frac{g(x)}{f(x)}$ đều không xác định tại x_0 .

Xét tích $f(x) \cdot g(x)$. Ta có $f(x) \cdot g(x) = -2(f(x))^2 \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy, khẳng định đúng là $f(x).g(x) \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 72. Với giá trị tùy ý của m , biểu thức nào sau đây luôn là một nhị thức bậc nhất đối với x ?

- A. $f(x) = mx + 1987$. B. $g(x) = (3m^2 - 1)x + m - 1$.
 C. $h(x) = (2m + 1)x - 1$. D. $k(x) = (-2m^2 - 5)x - 2017 + m$.

Lời giải.

Các biểu thức $f(x), g(x), h(x)$ sẽ không là nhị thức bậc nhất, khi m nhận giá trị lần lượt là $0, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{2}$. Trong khi $-2m^2 - 5 \leq 5 < 0 \forall m \in \mathbb{R}$, nên $k(x)$ luôn là nhị thức bậc nhất đối với x , dù cho m nhận bất kì giá trị nào.

Chọn đáp án **D** □

Câu 73. Tìm m để bất phương trình $(m^2 - 25)x + 3m - 2 > 0$ vô nghiệm.

- A. $m = 5$. B. $m = -5$. C. $m = \pm 5$. D. $m > 5$.

Lời giải.

Nếu $m^2 - 25 \neq 0$, biểu thức ở vế trái là một nhị thức bậc nhất, nên nó nhận các giá trị cả dương lẫn âm. Do đó bất phương trình đã cho luôn có nghiệm.

Xét khi $m^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 5$. Với $m = -5$, bất phương trình đã cho trở thành $-17 > 0$, vô nghiệm.

Với $m = 5$, bất phương trình đã cho trở thành $13 > 0$, nghiệm đúng với mọi số thực x .

Vậy, $m = -5$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 74. Cho $f(x) = (x - 1)(2x - 1)$. Tìm điều kiện của x để $f(x)$ không âm.

- A. $x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$. B. $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty)$.

C. $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

D. $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty)$.

Lời giải.Lập bảng xét dấu của $f(x) = (x - 1)(2x - 1)$:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ đó suy ra tập nghiệm của bất phương trình $f(x) \geq 0$ là $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty)$.Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 75. Hệ bất phương trình $1 < \frac{1+x}{1-x} \leq 2$ có tập nghiệm S là

A. $S = (\infty; 1)$. B. $S = \left(\infty; \frac{1}{3}\right]$. C. $S = \left(0; \frac{1}{3}\right)$. D. $S = \left(0; \frac{1}{3}\right]$.

Lời giải.Xét các trường hợp $x < 1$ và $x > 1$.TH1. $x < 1$. Hệ bất phương trình tương đương với

$$\begin{cases} 1 - x < 1 + x, \\ 1 + x \leq 2(1 - x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x, \\ 3x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(0; \frac{1}{3}\right],$$

thỏa mãn $x < 1$.TH2. $x > 1$. Hệ bất phương trình tương đương với

$$\begin{cases} 1 - x > 1 + x, \\ 1 + x \geq 2(1 - x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 > x, \\ 3x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

Kết hợp hai trường hợp trên, ta được tập nghiệm của hệ bất phương trình là $S = \left(0; \frac{1}{3}\right]$.Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 76. Tìm m để biểu thức $(m - 2)x - 4 - 3m$ luôn âm.

A. $m = 2$. B. $m = -2$. C. $m \in (2; +\infty)$. D. $m \in (-\infty; -2)$.

Lời giải.Nếu $m \neq 2$, biểu thức đã cho là một nhị thức bậc nhất, nên nó nhận các giá trị cả dương lẫn âm.Nếu $m = 2$, biểu thức đã cho trở thành biểu thức hằng, là -6 , rõ ràng luôn âm.Vậy, $m = 2$.Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 77. Tìm m để biểu thức $(m - 1)x - 1 + 2m$ luôn dương.

A. $m > 13$. B. $m = 1$. C. $m < -1$. D. $m = -1$.

Lời giải.Nếu $m \neq 1$, biểu thức đã cho là một nhị thức bậc nhất, nên nó nhận các giá trị cả dương lẫn âm.Nếu $m = 1$, biểu thức đã cho trở thành biểu thức hằng, là 1 , rõ ràng luôn dương.Vậy, $m = 1$.Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 78. Tìm m để bất phương trình $(m^2 - 1)x + 2m + 1 < 0$ nghiệm đúng với mọi x .

- A. $m = 1$. B. $m < 1$. C. $m = -1$. D. $m = \pm 1$.

Lời giải.

Nếu $m^2 - 1 \neq 0$, biểu thức đã cho là một nhị thức bậc nhất, nên nó nhận các giá trị cả dương lẫn âm. Xét khi $m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$. Với $m = 1$, biểu thức đã cho trở thành biểu thức hằng, là 3, rõ ràng luôn dương. Còn với $m = -1$, biểu thức đã cho trở thành biểu thức hằng -1 , rõ ràng luôn âm.

Vậy, $m = -1$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 79. Tìm m để bất phương trình $(m^2 - 4)x + 2m + 3 > 0$ nghiệm đúng với mọi x .

- A. $m = -2$. B. $m > 2$. C. $m = \pm 2$. D. $m = 2$.

Lời giải.

Nếu $m^2 - 4 \neq 0$, biểu thức đã cho là một nhị thức bậc nhất, nên nó nhận các giá trị cả dương lẫn âm. Xét khi $m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$. Với $m = 2$, biểu thức đã cho trở thành biểu thức hằng, là 9, rõ ràng luôn dương; với $m = -2$, biểu thức đã cho trở thành biểu thức hằng -3 , rõ ràng luôn âm.

Vậy, $m = 2$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 80. Tìm m để bất phương trình $(m^2 - 9)x + 3m + 1 < 0$ vô nghiệm.

- A. $m = 3$. B. $m = -3$. C. $m = \pm 3$. D. $m < 3$.

Lời giải.

Nếu $m^2 - 9 \neq 0$, biểu thức ở vế trái là một nhị thức bậc nhất, nên nó nhận các giá trị cả dương lẫn âm. Do đó bất phương trình đã cho luôn có nghiệm.

Xét khi $m^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 3$. Với $m = 3$, bất phương trình đã cho trở thành $10 < 0$, vô nghiệm. Với $m = -3$, bất phương trình đã cho trở thành $-8 < 0$, nghiệm đúng với mọi số thực x .

Vậy, $m = 3$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 81. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\frac{1}{x-2} > 1$.

- A. $S = (2; 3)$. B. $S = (3; +\infty)$. C. $S = (-\infty; 3)$. D. $S = (2; +\infty)$.

Lời giải.

Xét các trường hợp $x > 2$ và $x < 2$.

TH1. $x > 2$. Bất phương trình tương đương với $1 > x - 2 \Leftrightarrow x < 3$. Trường hợp này ta thu được $x \in (2; 3)$.

TH2. $x < 2$. Bất phương trình tương đương với $1 < x - 2 \Leftrightarrow x > 3$, không thỏa mãn $x < 2$. Trường hợp này không có x nào thỏa mãn.

Kết hợp hai trường hợp trên, ta được tập nghiệm của bất phương trình là $S = (2; 3)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 82. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $(x - 2)(3 - 2x)(4 - x) \leq 0$.

- A. $S = \left(\frac{3}{2}; 2\right) \cup (4; +\infty)$. B. $S = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right] \cup [2; 4]$.
C. $S = \left[\frac{3}{2}; 2\right] \cup [4; +\infty)$. D. $S = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right) \cup (2; 4)$.

Lời giải.

Bảng xét dấu của biểu thức ở vế trái như sau.

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	2	4	$+\infty$
VT	$-$	0	$+$	0	$+$

Từ bảng xét dấu trên, ta thu được tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right] \cup [2; 4]$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 83. Xác định tập nghiệm S của bất phương trình $\frac{2-x}{(x+1)(3-4x)} \geq 0$.

A. $S = \left[-1; \frac{3}{4}\right] \cup [2; +\infty)$.

B. $S = (-\infty; -1) \cup \left(\frac{3}{4}; 2\right]$.

C. $S = (-\infty; -1] \cup \left[\frac{3}{4}; 2\right]$.

D. $S = \left(-1; \frac{3}{4}\right) \cup [2; +\infty)$.

Lời giải.

Bảng xét dấu của biểu thức ở vế trái như sau.

x	$-\infty$	-1	$\frac{3}{4}$	2	$+\infty$
VT	$-$	$+$	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu trên, ta thu được tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-1; \frac{3}{4}\right) \cup [2; +\infty)$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 84. Xác định tập nghiệm S của bất phương trình $(x-1)^2(2x+3) > 0$

A. $S = \left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

B. $S = \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

C. $S = \left(-\frac{3}{2}; +\infty\right) \setminus \{1\}$.

D. $S = \left(-\frac{3}{2}; 1\right)$.

Lời giải.

Với $x = 1$, vế trái của bất phương trình bằng 0, nên không thỏa mãn.

Với $x \neq 1$, thì $(x-1)^2 > 0$, nên bất phương trình tương đương với $2x+3 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\frac{3}{2}; +\infty\right) \setminus \{1\}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 85. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \sqrt{\frac{2x+1}{(x-3)(5-x)}}$.

A. $\mathcal{D} = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup (3; 5)$.

B. $\mathcal{D} = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup [3; 5]$.

C. $\mathcal{D} = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup [3; 5]$.

D. $\mathcal{D} = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (3; 5)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\frac{2x+1}{(x-3)(5-x)} \geq 0$. Bảng xét dấu của biểu thức ở vế trái như sau.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	3	5	$+\infty$
VT	+ 0 -			+	-

Từ bảng xét dấu, ta suy ra tập nghiệm của bất phương trình trên là $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup (3; 5)$, đây cũng chính là tập xác định của hàm số đã cho.

Vậy, $\mathcal{D} = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup (3; 5)$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 86. Xác định tập nghiệm S của bất phương trình $\frac{2}{x-2} < \frac{1}{3x+4}$.

A. $S = (-\infty; -2) \cup \left(-\frac{4}{3}; 2\right)$.

B. $S = (-\infty; -2)$.

C. $S = \left(-2; -\frac{4}{3}\right) \cup (2; +\infty)$.

D. $S = \left(-\frac{4}{3}; -\frac{6}{7}\right) \cup (2; +\infty)$.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{2}{x-2} - \frac{1}{3x+4} < 0 \Leftrightarrow \frac{2(3x+4) - (x-2)}{(x-2)(3x+4)} \Leftrightarrow \frac{5x+10}{(x-2)(3x+4)} < 0.$$

Bảng xét dấu của biểu thức ở vế trái của bất phương trình cuối cùng như sau.

x	$-\infty$	-2	$-\frac{4}{3}$	2	$+\infty$
VT	-	0	+	-	+

Từ bảng xét dấu trên, ta thu được tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (-\infty; -2) \cup \left(-\frac{4}{3}; 2\right)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 87. Bất phương trình $|2x+1| \leq 4x-5$ có tập nghiệm là

A. $S = \left(-\infty; \frac{2}{3}\right] \cup [3; +\infty)$.

B. $S = \left[\frac{2}{3}; 3\right]$.

C. $S = [3; +\infty)$.

D. $S = (-\infty; 3]$.

Lời giải.

Xét các trường hợp $x \geq -\frac{1}{2}$ và $x < -\frac{1}{2}$.

TH1. $x \geq -\frac{1}{2}$. Bất phương trình tương đương với $2x+1 \leq 4x-5 \Leftrightarrow x \geq 3$. Trường hợp này ta thu được $x \in [3; +\infty)$.

TH2. $x < -\frac{1}{2}$. Bất phương trình tương đương với $-(2x+1) \leq 4x-5 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$, không thỏa mãn $x < -\frac{1}{2}$. Trường hợp này không có x nào thỏa mãn.

Kết hợp hai trường hợp trên, ta được tập nghiệm của bất phương trình là $S = [3; +\infty)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 88. Tập nghiệm S của bất phương trình $(x^2-1)^5(3x+1)^{10} \geq 0$.

A. $S = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

B. $S = \left[-1; \frac{1}{3}\right] \cup [1; +\infty]$.

$$\text{C. } S = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \cup \left\{ -\frac{1}{3} \right\}.$$

$$\text{D. } S = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \setminus \left\{ -\frac{1}{3} \right\}.$$

Lời giải.

Nhận thấy $x = -\frac{1}{3}$ nghiệm đúng bất phương trình đã cho.

Với $x \neq -\frac{1}{3}$, thì $(3x+1)^2 > 0$; nên bất phương trình đã cho tương đương với

$$(x^2 - 1)^5 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty).$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \cup \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 89. Bất phương trình $\frac{1}{x} + \frac{2}{x-8} \geq \frac{1}{x+4}$ có tập nghiệm là

$$\text{A. } S = [-8; -4) \cup (0; 2] \cup (8; +\infty).$$

$$\text{B. } S = [-8; -4] \cup [0; 2] \cup [8; +\infty).$$

$$\text{C. } S = (-8; -4) \cup (0; 2) \cup (8; +\infty).$$

$$\text{D. } S = (-8; -4) \cup [0; 2) \cup [8; +\infty).$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{2}{x-8} \leq \frac{1}{x+4} &\Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{2}{x-8} - \frac{1}{x+4} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x^2 + 12x - 32}{x(x-8)(x+4)} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2(x-2)(x+8)}{x(x-8)(x+4)} \geq 0. \end{aligned}$$

Lập bảng xét dấu

x	$-\infty$	-8	-4	0	2	8	$+\infty$
VT	$-$	0	$+$	$-$	$+$	0	$-$

Từ đó suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-8; -4) \cup (0; 2] \cup (8; +\infty)$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 90. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $f(x) = \sqrt{\frac{2x+4}{2-3x}} + 1$.

$$\text{A. } \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{3} \right\}.$$

$$\text{B. } \mathcal{D} = \left(\frac{2}{3}; 6 \right).$$

$$\text{C. } \mathcal{D} = \left(-\infty; \frac{2}{3} \right) \cup [6; +\infty).$$

$$\text{D. } \mathcal{D} = \left(-\infty; \frac{2}{3} \right] \cup [6; +\infty).$$

Lời giải.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \frac{2x+4}{2-3x} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x+6}{2-3x} \geq 0$.

Lập bảng xét dấu của $f(x) = \frac{-x+6}{2-3x}$:

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	6	$+\infty$
$f(x)$	$+$	$-$	0	$+$

Từ đó suy ra tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup [6; +\infty)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 91. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 1} \geq 1$.

A. $S = (-1; 1) \cup [2; +\infty)$.

B. $S = (-\infty; -1) \cup (1; 2]$.

C. $S = (-\infty; -1] \cup [1; 2]$.

D. $S = (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$.

Lời giải.

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{-x + 2}{(x - 1)(x + 1)} \geq 0.$$

Lập bảng xét dấu của $f(x) = \frac{-x + 2}{(x - 1)(x + 1)}$

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$f(x)$	+	-	+	0	-

Từ đó suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty; -1) \cup (1; 2]$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 92. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x(2 - x)}{x^2 - 3x} < 0$.

A. $S = (2; 3) \cup (-\infty; 0)$.

B. $S = (0; 2) \cup (3; +\infty)$.

C. $S = (0; +\infty) \setminus \{3\}$.

D. $S = (-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (3; \infty)$.

Lời giải.

$$\frac{x(2 - x)}{x^2 - 3x} < 0 \Leftrightarrow \frac{x(2 - x)}{x(x - 3)} < 0.$$

Lập bảng xét dấu của $f(x) = \frac{x(2 - x)}{x(x - 3)}$

x	$-\infty$	0	2	3	$+\infty$
$f(x)$	-	-	0	+	-

Từ đó suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (3; \infty)$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 93. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{1}{2x + 1} \leq \frac{3}{x - 2}$ là

A. $S = (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{2}; 2\right)$.

B. $S = (-\infty; -1] \cup \left[-\frac{1}{2}; 2\right]$.

C. $S = \left(-1; -\frac{1}{2}\right) \cup [2; +\infty)$.

D. $S = \left[-1; -\frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \frac{1}{2x + 1} \leq \frac{3}{x - 2} \Leftrightarrow \frac{-5x - 5}{(2x + 1)(x - 2)} \leq 0.$$

Lập bảng xét dấu của $f(x) = \frac{-5x - 5}{(2x + 1)(x - 2)}$

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$f(x)$	+ 0 -			+	-

Từ đó suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[-1; -\frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 94. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{1}{5-2x} < \frac{1}{(x-1)^2}$ là

- A. $S = (-2; 2) \cup \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$.
 B. $S = (-2; 1) \cup (1; 2) \cup \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$.
 C. $S = (-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$.
 D. $S = (-\infty; -2) \cup (1; 2)$.

Lời giải.

Ta có $\frac{1}{5-2x} < \frac{1}{(x-1)^2} \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)^2(2x-5)} > 0$.

Lập bảng xét dấu của $f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)^2(2x-5)}$

x	$-\infty$	-2	1	2	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+	+	0	-

Từ đó suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-2; 1) \cup (1; 2) \cup \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 95. Gọi a là nghiệm nguyên dương bé nhất và b là nghiệm nguyên âm lớn nhất của bất phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} > \frac{2}{x+1}$. Khi đó giá trị của $5a + b^3$ là

- A. -8 .
 B. 2 .
 C. 4 .
 D. 7 .

Lời giải.

Ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} > \frac{2}{x+1} \Leftrightarrow \frac{3x-1}{(x-1)x(x+1)} > 0$.

Lập bảng xét dấu của $f(x) = \frac{3x-1}{(x-1)x(x+1)}$

x	$-\infty$	-1	0	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
$f(x)$	+	-	+	0	-	+

Từ bảng xét dấu ta suy ra nghiệm nguyên dương bé nhất là $a = 2$, nghiệm nguyên âm lớn nhất là $b = -2$ nên $5a + b^3 = 2$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 96. Hệ bất phương trình $\begin{cases} (1+x)^2 < x^2 - 3x + 5 \\ x^3 - 6x^2 - 7x - 5 < (x-2)^3 \end{cases}$ có tập nghiệm là

A. $S = \left(\frac{3}{19}; \frac{4}{5}\right)$. B. $S = \left(-\infty; \frac{4}{5}\right)$. C. $S = \left(\frac{3}{19}; +\infty\right)$. D. $S = \left[\frac{3}{19}; \frac{4}{5}\right]$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} (1+x)^2 < x^2 - 3x + 5 \\ x^3 - 6x^2 - 7x - 5 < (x-2)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 4 < 0 \\ 3 - 19x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{4}{5} \\ x > \frac{3}{19} \end{cases}$.

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $S = \left(\frac{3}{19}; \frac{4}{5}\right)$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 97. Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 7x - 5 < 0 \\ (2x + 3)(x - 1) \geq 0 \end{cases}$ là

A. $S = \left(-\infty; \frac{5}{7}\right)$. B. $S = \left[-\frac{3}{2}; \frac{5}{7}\right)$. C. $S = [1; +\infty)$. D. $S = \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right]$.

Lời giải.

Lập bảng xét dấu của $f(x) = (2x + 3)(x - 1)$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	1	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ đó ta có $\begin{cases} 7x - 5 < 0 \\ (2x + 3)(x - 1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{5}{7} \\ \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -\frac{3}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -\frac{3}{2}$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 98. Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} \frac{x-2}{x-3} > 7 \\ (2x-3)(x+3) \geq 0 \end{cases}$ là

A. $S = (-\infty; 3]$. B. $S = \left[3; \frac{19}{6}\right]$. C. $S = \left(3; \frac{19}{6}\right)$. D. $S = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải.

$\begin{cases} \frac{x-2}{x-3} > 7 \\ (2x-3)(x+3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-6x+19}{x-3} > 0 \\ \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x \leq -3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < x < \frac{19}{6} \\ \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x \leq -3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x < \frac{19}{6}$.

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình là $S = \left(3; \frac{19}{6}\right)$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 99. Giải hệ bất phương trình $\begin{cases} \frac{(x-3)(x+2)}{x^2-1} < 1, \\ \frac{1}{(x-2)^2} \leq \frac{1}{x+4}. \end{cases}$

A. $S = (-4; -1) \cup [5; +\infty)$. B. $S = [4; +\infty)$.
C. $S = (-5; -1) \cup (1; +\infty)$. D. $S = (-4; 0] \cup [4; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $\frac{(x-3)(x+2)}{x^2-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{-x-5}{(x-1)(x+1)} < 0 \Leftrightarrow x \in (-5; -1) \cup (1; +\infty)$.

$$\frac{1}{(x-2)^2} \leq \frac{1}{x+4} \Leftrightarrow \frac{-x(x-5)}{(x-2)^2(x+4)} \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-4; 0] \cup [5; +\infty).$$

Từ đó suy ra tập nghiệm của hệ là $S = (-4; -1) \cup [5; +\infty)$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 100. Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} (2x-1)(x^3-1) \leq 0 \\ x(\sqrt{3}x-3)(3-x^2) \leq 0 \end{cases}$ là

A. $S = \left(\frac{1}{2}; 1\right)$. B. $S = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. C. $S = (-\infty; 1)$. D. $S = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Lời giải.

Ta có $(2x-1)(x^3-1) \leq 0 \Leftrightarrow (2x-1)(x-1)(x^2+x+1) \leq 0 \Leftrightarrow (2x-1)(x-1) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

$$x(\sqrt{3}x-3)(3-x^2) \leq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3}x(x-\sqrt{3})^2(x+\sqrt{3}) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\sqrt{3}] \cup [0; +\infty).$$

Từ đó suy ra tập nghiệm của hệ bất phương trình là $S = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 101. Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} |2x+1| < 3x \\ |x+1| - |x-2| \geq 3 \end{cases}$ là

A. $S = (1; +\infty)$. B. $S = [2; +\infty)$. C. $S = (1; 2)$. D. $S = (1; 2]$.

Lời giải.

• Xét bất phương trình $|2x+1| < 3x$.

Với $x < 0$ không thoả mãn.

Với $x \geq 0$ ta có $|2x+1| = 2x+1$ nên $|2x+1| < 3x \Leftrightarrow 2x+1 < 3x \Leftrightarrow -x+1 < 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Vậy bất phương trình $|2x+1| < 3x$ có tập nghiệm $(1; +\infty)$.

• Xét bất phương trình $|x+1| - |x-2| \geq 3$.

Với $x \geq 2$ ta có $|x+1| - |x-2| \geq 3 \Leftrightarrow 3 \geq 3 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$, kết hợp với $x \geq 2$ ta có nghiệm $x \geq 2$.

Với $-1 \geq x < 2$ ta có $|x+1| - |x-2| \geq 3 \Leftrightarrow 2x \geq 6 \Leftrightarrow x \geq 3$ (không thoả mãn).

Với $x < -1$ ta có $|x+1| - |x-2| \geq 3 \Leftrightarrow -3 \geq 3$ (vô nghiệm).

Vậy bất phương trình $|x+1| - |x-2| \geq 3$ có tập nghiệm $[2; +\infty)$.

Từ đó suy ra tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} |2x+1| < 3x \\ |x+1| - |x-2| \geq 3 \end{cases}$ là

$$S = (1; +\infty) \cap [2; +\infty) = [2; +\infty).$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 102. Hệ bất phương trình $\begin{cases} 6x + \frac{5}{7} > 4x + 7 \\ \frac{8x+3}{2} < 2x + 25 \end{cases}$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 6. B. 7. C. 11. D. 8.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} 6x + \frac{5}{7} > 4x + 7 \\ \frac{8x+3}{2} < 2x + 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{22}{7} \\ x < \frac{47}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{22}{7} < x < \frac{47}{4}.$$

Từ đó suy ra có 8 nghiệm nguyên của hệ là các nghiệm 4; 5; ...; 11.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 103. Tìm m để nhị thức $x + m - 1$ luôn dương trên miền $S = [-3; +\infty)$.

- A. $m < 4$. B. $m \leq 4$. C. $m \geq 4$. D. $m > 4$.

Lời giải.

Ta có $x + m - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 - m$ nên $x + m - 1$ dương trên $(1 - m; +\infty)$ do đó yêu cầu bài toán tương đương $1 - m < -3 \Leftrightarrow m > 4$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 104. Tìm m để nhị thức $-2x + m + 5$ luôn âm trên miền $S = (2; +\infty)$.

- A. $m \leq -1$. B. $m \geq -9$. C. $m \leq -9$. D. $m \geq -1$.

$$\text{Ta có } -2x + m + 5 < 0 \Leftrightarrow x > \frac{m+5}{2}.$$

Từ đó suy ra $-2x + m + 5$ luôn âm trên $(2; +\infty)$ khi và chỉ khi $\frac{m+5}{2} \leq 2 \Leftrightarrow m \leq -1$.

Câu 105. Giá trị của m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x - 4 < 0 \\ mx + m - 2 > 0 \end{cases}$ vô nghiệm là

- A. $0 \leq m \leq \frac{2}{3}$. B. $m \leq \frac{2}{3}$. C. $m \geq 3$. D. $0 < m < \frac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $2x - 4 < 0 \Leftrightarrow x < 2$.

Với $m = 0$ thì $mx + m - 2 = -2 < 0$, nên hệ vô nghiệm.

Với $m < 0$ thì $mx + m - 2 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{2-m}{m}$. Khi đó hệ luôn có nghiệm.

Với $m > 0$ thì $mx + m - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{2-m}{m}$. Khi đó hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow \frac{2-m}{m} \geq 2 \Leftrightarrow 0 < m \leq \frac{2}{3}$ (ta đang xét $m > 0$).

Vậy hệ vô nghiệm khi và chỉ khi $0 \leq m \leq \frac{2}{3}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 106. Với giá trị nào của m thì hệ bất phương trình $\begin{cases} x - 2m \geq 2 \\ x - m^2 \leq -1 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất?

- A. $m \in \{1; 3\}$. B. $m \in \{-1; 3\}$. C. $m \in \{-3; 4\}$. D. $m \in \emptyset$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} x - 2m \geq 2 \\ x - m^2 \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2m + 2 \\ x \leq m^2 - 1 \end{cases}.$$

Vậy hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m^2 - 1 = 2m + 2 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 107. Xác định m để bất phương trình $(m+1)x > 2m-3$ luôn đúng với mọi x .

- A. $m > \frac{3}{2}$. B. $m = 1$. C. $m = -1$. D. $m < \frac{3}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Bất phương trình luôn đúng với mọi } x \Leftrightarrow \begin{cases} m+1=0 \\ 2m-3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 108. Tìm m để hệ bất phương trình $\begin{cases} \frac{x-1}{x+2} \leq 1 \\ 2x+1 \leq m \end{cases}$ có nghiệm.

A. $m \geq -3$.

B. $m \leq -3$.

C. $m < -3$.

D. $m > -3$.

Lời giải.

Tập nghiệm của bất phương trình thứ nhất là $S_1 = (-2; +\infty)$.

Tập nghiệm của bất phương trình thứ hai là $S_2 = \left(-\infty; \frac{m-1}{2}\right]$.

Hệ có nghiệm khi $-2 < \frac{m-1}{2}$ hay $m > -3$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 109. Tìm m lớn nhất để hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x-2 \geq -4x+5 \\ 3x+m+2 \leq 0 \end{cases}$ có nghiệm.

A. $m = -5$.

B. $m = -3$.

C. $m = 5$.

D. $m = 3$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} 3x-2 \geq -4x+5 \\ 3x+m+2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq \frac{-m-2}{3} \end{cases}.$$

Để hệ có nghiệm thì $1 \leq \frac{-m-2}{3} \Leftrightarrow m \leq -5$.

Vậy giá trị lớn nhất để bất phương trình có nghiệm là $m = -5$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 110. Tìm m để bất phương trình $(m^2 + 4m + 3)x - m^2 - m < 0$ có tập hợp nghiệm là $\mathbb{R}$.

A. $m = -1$.

B. $m = -3$.

C. $m = 0$.

D. $m = 1$.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương $(m+1)(m+3)x < m(m+1)$.

Điều kiện cần là $(m+1)(m+3) = 0$ hay $m = -1$ hoặc $m = -3$. Thử lại ta thấy $m = -3$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 111. Xác định m để hàm số $y = \sqrt{mx - m + 6}$ xác định với mọi $x < 1$.

A. $m \geq 0$.

B. $m < 0$.

C. $m \leq 0$.

D. $m > 0$.

Lời giải.

$$\text{Hàm số xác định với mọi } x < 1 \text{ khi và chỉ khi } \begin{cases} m = 0 \\ \begin{cases} m < 0 \\ 1 \leq \frac{m-6}{m} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 0.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 112. Bất phương trình $\frac{1}{x^2+1} + 2(x+1)^2 < 4x+3$ có tập nghiệm là

A. $S = \left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

B. $S = \left(-1; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right)$.

C. $S = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right)$.

D. $S = \emptyset$.

Lời giải.

$$\frac{1}{x^2 + 1} + 2(x + 1)^2 < 4x + 3 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2 + 1} + 2(x^2 + 1) - 3 < 0 \Leftrightarrow 2(x^2 + 1)^2 - 3(x^2 + 1) + 1 < 0$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + 1, \text{ ta có bất phương trình } 2t^2 - 3t + 1 < 0 \Leftrightarrow (2t - 1)(t - 1) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < t < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < x^2 + 1 < 1 \text{ (vô nghiệm)}$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 113. Xác định tập hợp S các giá trị m làm cho hệ bất phương trình

$$\begin{cases} \frac{2x+1}{x} < 2 \\ 2x+1-2m \geq 0 \end{cases}$$

có nghiệm

A. $S = \emptyset$.

B. $S = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$.

C. $S = \mathbb{R}$.

D. $S = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \frac{2x+1}{x} < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} < 0 \Leftrightarrow x < 0.$$

$$2x+1-2m \geq 0 \Leftrightarrow x > \frac{2m-1}{2}.$$

$$\text{Vậy hệ có nghiệm khi và chỉ khi } \frac{2m-1}{2} < 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 114. Xác định tổng các giá trị của tham số m để hàm số $y = \sqrt{(2x+m)(4-x)}$ xác định trên đoạn có độ dài 3 đơn vị.

A. 18.

B. 12.

C. -16.

D. -12.

Lời giải.

$$\text{Ta có } (2x+m)(4-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{-m}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Với } \frac{-m}{2} \geq 4 \text{ ta có bảng xét dấu của } f(x) = (2x+m)(4-x) \text{ như sau}$$

x	$-\infty$	4	$-\frac{m}{2}$	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$\text{Với } \frac{-m}{2} < 4 \text{ ta có bảng xét dấu của } f(x) = (2x+m)(4-x) \text{ như sau}$$

x	$-\infty$	$-\frac{m}{2}$	4	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Do đó tập xác định của hàm số đã cho là đoạn có độ dài là $\left|4 + \frac{m}{2}\right|$.

Vậy yêu cầu bài toán $\left|4 + \frac{m}{2}\right| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -14 \\ m = -2 \end{cases}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 115. Giải bất phương trình $\frac{|x+1|-2}{x-1} \geq 1$.

A. $S = [-1; +\infty)$.

B. $S = [-1; +\infty) \setminus \{1\}$.

C. $S = (-1; +\infty) \setminus \{1\}$.

D. $S = (1; +\infty)$.

Lời giải.

Với $x \geq -1$ và $x \neq 1$ ta có $\frac{|x+1|-2}{x-1} \geq 1 \Leftrightarrow 1 \geq 1$ (đúng).

Với $x < -1$ ta có $\frac{|x+1|-2}{x-1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{-x-3}{x-1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2x+2}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x < 1$ (loại).

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S = [-1; +\infty) \setminus \{1\}$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 116. Xác định giá trị của m để bất phương trình $\frac{m}{x^2+1} + 3m - 1 > 0$ luôn đúng với mọi giá trị của x .

A. $m > \frac{1}{3}$.

B. $m > \frac{1}{4}$.

C. $\frac{1}{4} < m < \frac{1}{3}$.

D. $m < \frac{1}{4}$.

Lời giải.

Đặt $t = \frac{1}{x^2+1}$, $0 < t \leq 1$. Khi đó, ta có bất phương trình $\Leftrightarrow mt + 3m - 1 > 0$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} m \cdot 0 + 3m - 1 > 0 \\ m \cdot 1 + 3m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{3} \\ m > \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{1}{3}$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 117. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{1}{x} > 0$ là

A. $\emptyset$.

B. $\mathbb{R}$.

C. $(0; +\infty)$.

D. $(-\infty; 0)$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$, với điều kiện ta có $\frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (0; +\infty)$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 118. Bất phương trình $\frac{(1-x)(x+2)}{x} \leq 0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên âm?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. Vô số.

Lời giải.

Ta có bảng xét dấu của biểu thức $f(x) = \frac{(1-x)(x+2)}{x}$

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$	
$1-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$	
$\frac{(1-x)(x+2)}{x}$	$+$	0	$-$	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu ta được tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-2; 0) \cup [1; +\infty)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 119. Bất phương trình $\frac{3}{x} \geq 1$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 3.

B. 2.

C. Vô số.

D. 4.

Lời giải.

Ta có

$$\frac{3}{x} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{3}{x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3-x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 3.$$

Do $x \in \mathbb{Z}$ và $0 < x \leq 3$ nên $x \in \{1; 2; 3\}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 120. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\frac{1-x}{2+x}}$ là

A. $(-2; 1]$.

B. $(-\infty; -2) \cup [1; +\infty)$.

C. $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

D. $[-2; 1]$.

Lời giải.

Hàm số $y = \sqrt{\frac{1-x}{2+x}}$ xác định khi

$$\frac{1-x}{2+x} \geq 0 \Leftrightarrow -2 < x \leq 1.$$

Vậy tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\frac{1-x}{2+x}}$ là $\mathcal{D} = (-2; 1]$.

Chọn đáp án **A**

□

ĐÁP ÁN

1. A	2. D	3. A	4. D	5. C	6. B	7. D	8. A	9. C	10. C
11. C	12. C	13. B	14. A	15. C	16. B	17. B	18. C	19. B	20. B
21. B	22. D	23. A	24. C	25. C	26. C	27. A	28. C	29. B	30. B
31. A	32. A	33. D	34. C	35. A	36. D	37. C	38. B	39. A	40. D
41. C	42. B	43. D	44. C	45. C	46. A	47. B	48. B	49. B	50. C
51. D	52. D	53. B	54. C	55. A	56. A	57. B	58. C	59. C	60. C
61. A	62. B	63. B	64. C	65. B	66. A	67. D	68. A	69. A	70. C
71. A	72. D	73. B	74. B	75. D	76. A	77. B	78. C	79. D	80. A
81. A	82. B	83. D	84. C	85. A	86. A	87. C	88. C	89. A	90. C
91. B	92. D	93. D	94. B	95. B	96. A	97. D	98. C	99. A	100. D
101. B	102. D	103. D	104. A	105. A	106. B	107. C	108. D	109. A	110. B
111. C	112. D	113. B	114. C	115. B	116. A	117. C	118. C	119. A	120. A

§4 BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Định nghĩa. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng tổng quát là

$$ax + by \leq c \quad (1)$$

$$(ax + by < c; ax + by \geq c; ax + by > c)$$

trong đó a, b, c là những số thực đã cho, a và b không đồng thời bằng 0, x và y là các ẩn.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp các điểm có tọa độ là nghiệm bất phương trình (1) được gọi là **miền nghiệm** của nó.

! Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , đường thẳng $ax + by = c$ chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng, một trong hai nửa mặt phẳng đó là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by \leq c$, nửa mặt phẳng kia là miền nghiệm của bất phương trình $ax + by \geq c$.

2 HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT 2 ẨN

Định nghĩa. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn gồm một số bất phương trình bậc nhất 2 ẩn x, y mà ta phải tìm các nghiệm chung của chúng. Mỗi nghiệm chung đó được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Cũng như bất phương trình bậc nhất hai ẩn, ta có thể *biểu diễn hình học tập nghiệm* của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Biểu diễn tập nghiệm bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Quy tắc biểu diễn hình học tập nghiệm (hay biểu diễn miền nghiệm) của bất phương trình $ax + by \leq c$ như sau:

Bước 1. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ đường thẳng $\Delta: ax + by = c$.

Bước 2. Lấy một điểm $M_0(x_0; y_0)$ **không** thuộc Δ (lấy tọa độ có nhiều số 0 nhất có thể)

Bước 3. Tính $ax_0 + by_0$ và so sánh với c .

Bước 4. Kết luận

Nếu $ax_0 + by_0 < c$ thì nửa mặt phẳng kể cả bờ Δ chứa M_0 là miền nghiệm của $ax + by \leq c$.

Nếu $ax_0 + by_0 > c$ thì nửa mặt phẳng kể cả bờ Δ **không** chứa M_0 là miền nghiệm của $ax + by \leq c$.

! Miền nghiệm của bất phương trình $ax + by \leq c$ bỏ đi đường thẳng $ax + by = c$ là miền nghiệm của phương trình $ax + by < c$.

BÀI TẬP DẠNG 1

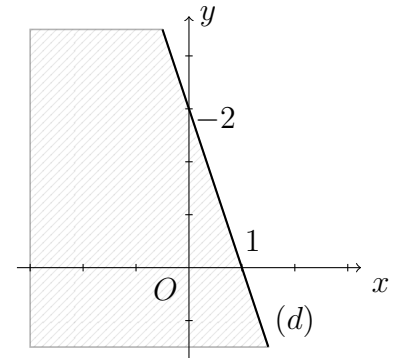
Ví dụ 1. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $3x + y \geq 3$.

Lời giải.

Vẽ đường thẳng $d : 3x + y = 3$.

Thay tọa độ điểm $O(0;0)$ vào vế trái phương trình đường thẳng (d) , ta được: $0 < 3$.

Vậy miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng không chứa điểm O , kể cả bờ (d) . (Trên hình là nửa mặt phẳng không bị gạch bỏ).



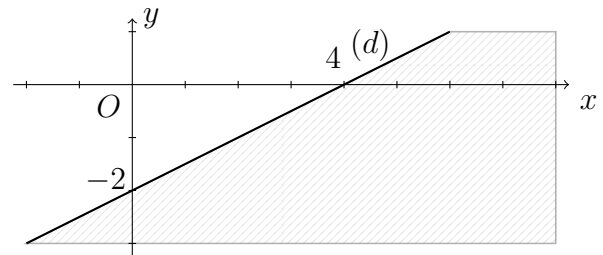
Ví dụ 2. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $2x - 4y < 8$.

Lời giải.

Vẽ đường thẳng $d : 2x - 4y = 8$.

Thay tọa độ điểm $O(0;0)$ vào vế trái phương trình đường thẳng (d) , ta được: $0 < 8$.

Vậy miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng chứa điểm O . (Trên hình là nửa mặt phẳng không bị gạch bỏ).



Ví dụ 3. a) Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

$$-2x + 3y > 0.$$

b) Cho hai điểm $A(2;1)$ và $B(3;3)$, hỏi hai điểm này cùng phía hay khác phía đối với bờ (d) .

Lời giải.

a) Vẽ đường thẳng $d : -2x + 3y = 0$.

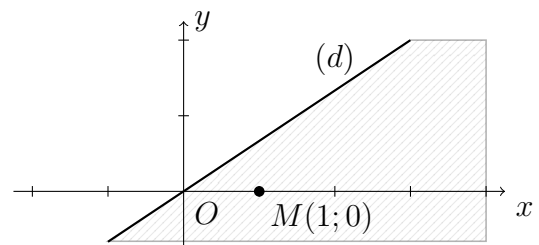
Thay tọa độ điểm $M(1;0)$ vào vế trái phương trình đường thẳng (d) , ta được: $-2 < 0$.

Vậy miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng không chứa điểm M . (Trên hình là nửa mặt phẳng không bị gạch bỏ).

b) Thế tọa độ điểm A vào vế trái của phương trình đường thẳng (d) ta được $-2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = -1 < 0$. (1)

Thế tọa độ điểm B vào vế trái của phương trình đường thẳng (d) ta được $-2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 3 > 0$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra hai điểm nằm ở hai phía đối với bờ (d) .



□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

Bài 1. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $x + \frac{3}{2}y \geq 1 - x + \frac{1}{2}y$.

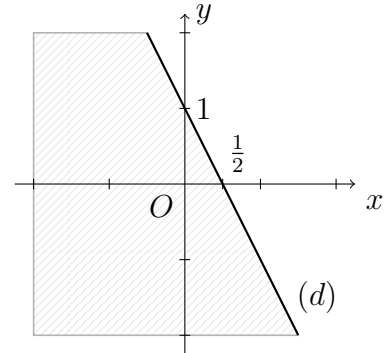
Lời giải.

$$x + \frac{3}{2}y \geq 1 - x + \frac{1}{2}y \Leftrightarrow 2x + y \geq 1$$

Vẽ đường thẳng $d: 2x + y = 1$.

Thay tọa độ điểm $O(0; 0)$ vào vế trái phương trình đường thẳng (d) , ta được: $0 < 1$.

Vậy miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng không chứa điểm O , kể cả bờ (d) . (Trên hình là nửa mặt phẳng không bị gạch bỏ).



□

Bài 2. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

$$-2017x - 2018y \leq 2016y.$$

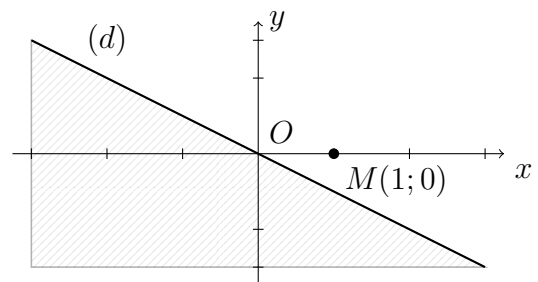
Lời giải.

$$-2017x - 2018y \leq 2016y \Leftrightarrow -x - 2y \leq 0$$

Vẽ đường thẳng $d: -x - 2y = 0$.

Thay tọa độ điểm $M(1; 0)$ vào vế trái phương trình đường thẳng (d) , ta được: $-1 < 0$.

Vậy miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng chứa điểm M , kể cả bờ (d) . (Trên hình là nửa mặt phẳng không bị gạch bỏ).



□

Bài 3. a) Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} < 1$.

b) Tìm điểm A thuộc miền nghiệm của bất phương trình trên. Biết rằng điểm A là giao điểm của parabol (P) có dạng $y = x^2 - 5x + 4$ và trục hoành.

Lời giải.

a) $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} < 1 \Leftrightarrow 2x + y < 6$

Vẽ đường thẳng $d: 2x + y = 6$.

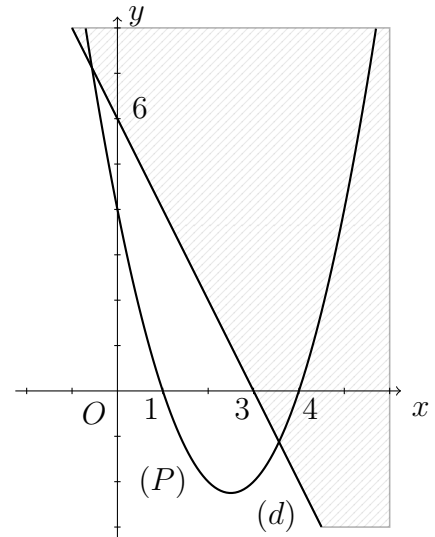
Thay tọa độ điểm $O(0;0)$ vào vế trái phương trình đường thẳng (d) , ta được: $0 < 6$.

Vậy miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng chứa điểm O . (Trên hình là nửa mặt phẳng không bị gạch bỏ).

b) Điểm A nằm trên parabol (P) có dạng $y = x^2 - 5x + 4$ và trục hoành nên hoành độ của A là nghiệm của phương trình

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4. \end{cases}$$

Suy ra ta được hai điểm $(1;0)$ và $(4;0)$. Lần lượt thế tọa độ từng điểm vào vế trái của phương trình đường thẳng (d) , do A thuộc miền nghiệm của bất phương trình đã cho nên ta được A có tọa độ là $(1;0)$.



Dạng 2. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

- Viết các bất phương trình trong hệ dưới dạng phương trình đường thẳng (thay dấu lớn, bé bởi dấu bằng).
- Vẽ các đường thẳng trên cùng một hệ trục tọa độ.
- Xác định một điểm M thỏa các bất phương trình trong hệ.
- Lần lượt tô đậm các nửa mặt phẳng không chứa M và có bờ là các đường thẳng đã vẽ. Ta được miền nghiệm của hệ.

BÀI TẬP DẠNG 2

Ví dụ 1. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} x + y > 1 \\ x - y < 2 \end{cases}$$

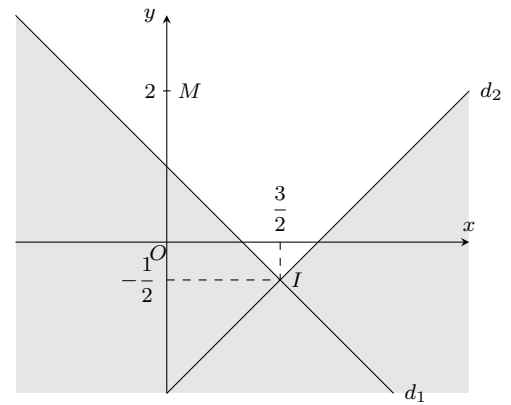
Lời giải.

Vẽ các đường thẳng

$$d_1 : x + y = 1;$$

$$d_2 : x - y = 2.$$

Vì điểm $M(0, 2)$ có tọa độ thỏa mãn các bất phương trình trong hệ nên ta tô đậm các nửa mặt phẳng bờ d_1, d_2 không chứa M . Miền không bị tô đậm trong hình vẽ và không chứa các tia giới hạn miền là miền nghiệm của hệ đã cho.



□

Ví dụ 2. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} x + y < 2 \\ x - y > 1 \\ y > -1 \end{cases}$$

Lời giải.

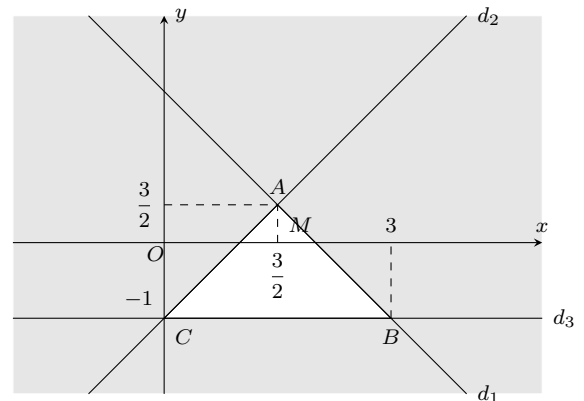
Vẽ các đường thẳng

$$d_1 : x + y = 2,$$

$$d_2 : x - y = 1,$$

$$d_3 : y = -1.$$

Vì điểm $M\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ có tọa độ thỏa mãn các bất phương trình trong hệ nên ta tô đậm các nửa mặt phẳng bờ d_1, d_2, d_3 không chứa M . Miền không bị tô đậm trong hình vẽ, không bao gồm các đoạn giới hạn miền là miền nghiệm của hệ đã cho.



□

Ví dụ 3. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} 2x + 5y > 2 \\ x - 3y \geq 1 \\ x + y < 3 \end{cases}$$

Lời giải.

Vẽ các đường thẳng

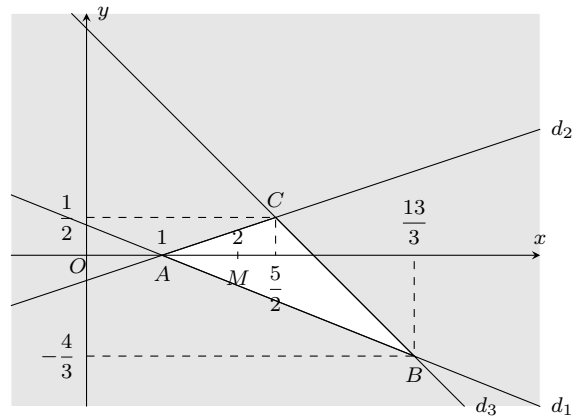
$$d_1 : 2x + 5y = 2,$$

$$d_2 : x - 3y = 1,$$

$$d_3 : x + y = 3.$$

Vì điểm $M(2, 0)$ có tọa độ thỏa mãn các bất phương trình trong hệ nên ta tô đậm các nửa mặt phẳng bờ d_1, d_2, d_3 không chứa M .

Miền không bị tô đậm trong hình vẽ có chứa đoạn AC và không chứa các điểm A, C , không chứa các đoạn AB, BC là miền nghiệm của hệ đã cho.



□

Ví dụ 4. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} 2x + y \geq 2 \\ x - 2y \leq 1 \\ y \leq 2 \\ x \leq 3 \end{cases}$$

Lời giải.

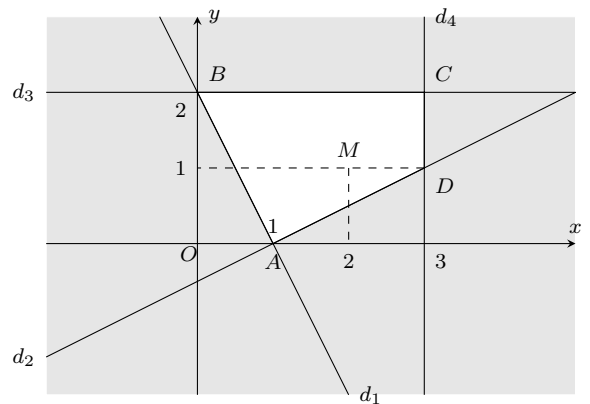
Vẽ các đường thẳng

$$d_1 : 2x + y = 2,$$

$$d_2 : x - 2y = 1,$$

$$d_3 : y = 2, d_4 : x = 3.$$

Vì điểm $M(2, 1)$ có tọa độ thỏa mãn các bất phương trình trong hệ nên ta tô đậm các nửa mặt phẳng bờ d_1, d_2, d_3, d_4 không chứa M . Miền không bị tô đậm trong hình vẽ là miền nghiệm của hệ đã cho bao gồm các đoạn thẳng xác định miền.



□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} x + 2y \geq 1 \\ 3x - y \leq 2 \end{cases}$$

Bài 2. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} x - 2y < 1 \\ x + 3y > -2 \\ -x + y < 2 \end{cases}$$

Bài 3. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} 3x + y \leq 5 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Bài 4. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} 3x + y \geq 9 \\ x > y - 2 \\ 3y \geq 4 - x \\ y \leq 5 \end{cases}$$

Bài 5. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} - 1 < 0 \\ x - \frac{2y}{3} \leq 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Bài 6. Xác định hình tính của đa giác biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} 2x + y \geq 1 \\ x - 2y \geq -2 \\ 2x + y \leq 5 \\ x \leq 3 \end{cases}$$

Lời giải.

Hướng dẫn: đa giác biểu diễn miền nghiệm là hình thang vuông. □

Bài 7. Xác định hình tính của đa giác biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau

$$\begin{cases} x + 4y \geq 9 \\ x + 4y \leq 17 \\ x - 4y \geq -7 \\ x - 4y \leq 1 \end{cases}$$

Lời giải.

Hướng dẫn: Đa giác biểu diễn miền nghiệm là hình bình hành. □

Dạng 3. Các bài toán thực tiễn

BÀI TẬP DẠNG 3

Ví dụ 1. Trong một cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa $24g$ hương liệu, 9 lít nước và $210g$ đường để pha chế nước cam và nước táo. Để pha chế 1 lít nước cam cần $30g$ đường, 1 lít nước và $1g$ hương liệu; pha chế 1 lít nước táo cần $10g$ đường, 1 lít nước và $4g$ hương liệu. Mỗi lít nước cam nhận được 60 điểm thưởng, mỗi lít nước táo nhận được 80 điểm thưởng. Hỏi cần pha chế bao nhiêu lít nước trái cây mỗi loại để được số điểm thưởng là lớn nhất.

Lời giải.

- Gọi x, y lần lượt là số lít nước cam và táo của một đội pha chế ($x, y \geq 0$).
- Số điểm thưởng của đội chơi này là $f(x; y) = 60x + 80y$.
- Số gam đường cần dùng là $30x + 10y$.
- Số lít nước cần dùng là $x + y$.
- Số gam hương liệu cần dùng là $x + 4y$.
- Vì trong cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi sử dụng tối đa $24g$ hương liệu, 9 lít nước và $210g$ đường

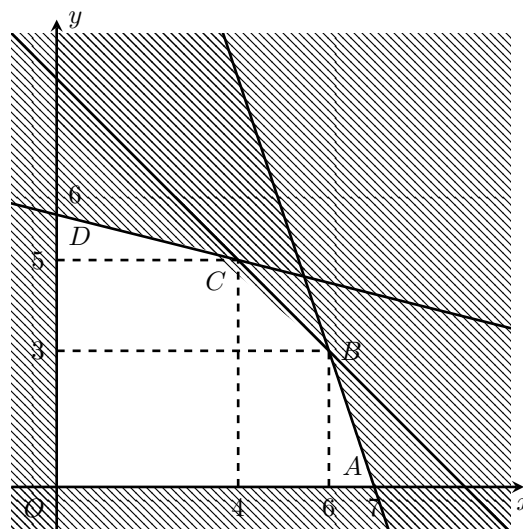
nên ta có hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 30x + 10y \leq 210 \\ x + y \leq 9 \\ x + 4y \leq 24 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y \leq 21 \\ x + y \leq 9 \\ x + 4y \leq 24 \\ x, y \geq 0 \end{cases} (*).$$

- Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x; y)$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*).
- Miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là ngũ giác $OABCD$ (kể cả biên). Hàm số $f(x; y) = 60x + 80y$ sẽ đạt giá trị lớn nhất trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) khi $(x; y)$ là tọa độ của một trong các đỉnh $O(0; 0), A(7; 0), B(6; 3), C(4; 5), D(0; 6)$.
- Ta có: $f(0; 0) = 0; f(7; 0) = 420; f(6; 3) = 600; f(4; 5) = 640; f(0; 6) = 480$.

Suy ra $f(4; 5)$ là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x; y)$ trên miền nghiệm của hệ (*).

Như vậy để được số điểm thưởng là lớn nhất cần pha chế 6 lít nước cam và 5 lít nước táo.



□

Ví dụ 2. Một công ty kinh doanh thương mại chuẩn bị cho một đợt khuyến mại nhằm thu hút khách hàng bằng cách tiến hành quảng cáo sản phẩm của công ty trên hệ thống phát thanh và truyền hình. Chi phí cho 1 phút quảng cáo trên sóng phát thanh là 800.000 đồng, trên sóng truyền hình là 4.000.000 đồng. Đài phát thanh chỉ nhận phát các chương trình quảng cáo dài ít nhất là 5 phút. Do nhu cầu quảng cáo trên truyền hình lớn nên đài truyền hình chỉ nhận phát các chương trình dài tối đa là 4 phút. Theo các phân tích, cùng thời lượng một phút quảng cáo, trên truyền hình sẽ có hiệu quả gấp 6 lần trên sóng phát thanh. Công ty dự định chi tối đa 16.000.000 đồng cho quảng cáo. Công ty cần đặt thời lượng quảng cáo trên sóng phát thanh và truyền hình như thế nào để hiệu quả nhất?

Lời giải.

Gọi thời lượng công ty đặt quảng cáo trên sóng phát thanh là x (phút), trên truyền hình là y (phút). Chi phí cho việc này là: $800.000x + 4.000.000y$ (đồng).

Mức chi này không được phép vượt quá mức chi tối đa, tức $800.000x + 4.000.000y \leq 16.000.000$ hay $x + 5y - 20 \leq 0$.

Do các điều kiện đài phát thanh, truyền hình đưa ra, ta có $x \geq 5, y \leq 4$.

Đồng thời do x, y là thời lượng nên $x \geq 0, y \geq 0$.

Hiệu quả chung của quảng cáo là $x + 6y$.

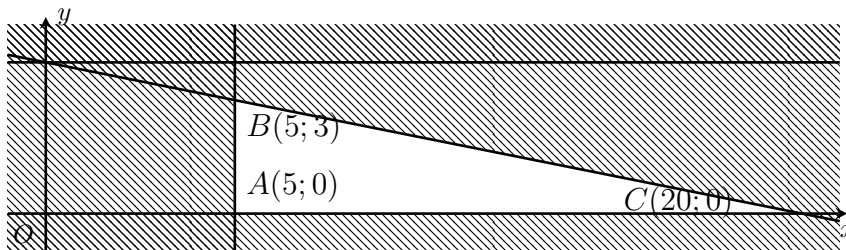
Bài toán trở thành: Tìm x, y sao cho $f(x; y) = x + 6y$ đạt giá trị lớn nhất với các điều kiện

$$\begin{cases} x + 5y - 20 \leq 0 \\ x \geq 5 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases} \quad (*).$$

Hàm số $f(x; y) = x + 6y$ sẽ đạt giá trị lớn nhất trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) khi $(x; y)$ là tọa độ của một trong các đỉnh $A(5; 0), B(5; 3), C(20; 0)$.

Ta có $f(5; 3) = 23, f(5; 0) = 5, f(20; 0) = 20$.

Suy ra giá trị lớn nhất của $M(x; y)$ bằng 23 tại $(5; 3)$ tức là nếu đặt thời lượng quảng cáo trên sóng phát thanh là 5 phút và trên truyền hình là 3 phút thì sẽ đạt hiệu quả nhất?



□

Ví dụ 3. Trong một cuộc thi gói bánh vào dịp năm mới, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 20 kg gạo nếp, 2 kg thịt ba chỉ, 5 kg đậu xanh để gói bánh chưng và bánh ống. Để gói một cái bánh chưng cần 0,4 kg gạo nếp, 0,05 kg thịt và 0,1 kg đậu xanh; để gói một cái bánh ống cần 0,6 kg gạo nếp, 0,075 kg thịt và 0,15 kg đậu xanh. Mỗi cái bánh chưng nhận được 5 điểm thưởng, mỗi

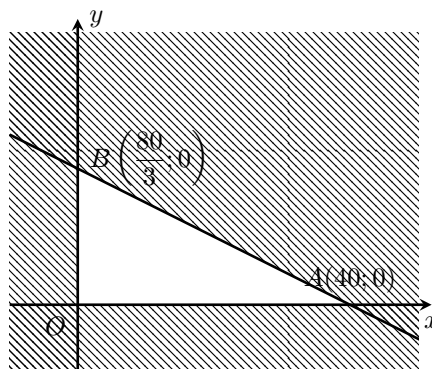
cái bánh ống nhận được 7 điểm thưởng. Hỏi cần phải gói mấy cái bánh mỗi loại để được nhiều điểm thưởng nhất?

Lời giải.

- Gọi số bánh chưng gói được là x , số bánh ống gói được là y . Khi đó số điểm thưởng là $f(x; y) = 5x + 7y$.
- Số kg gạo nếp cần dùng là $0,4x + 0,6y$.
- Số kg thịt ba chỉ cần dùng là $0,05x + 0,075y$.
- Số kg đậu xanh cần dùng là $0,1x + 0,15y$.
- Vì trong cuộc thi này chỉ được sử dụng tối đa 20 kg gạo nếp, 2 kg thịt ba chỉ và 5 kg đậu xanh nên ta có hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 0,4x + 0,6y \leq 20 \\ 0,05x + 0,075y \leq 2 \\ 0,1x + 0,15y \leq 5 \\ 0,1x + 0,15y \leq 5 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y \leq 100 \\ 2x + 3y \leq 80 \\ 2x + 3y \leq 100 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y \leq 80 \\ x, y \geq 0 \end{cases} (*)$$

- Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x; y)$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*).
- Miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là tam giác OAB (kể cả biên).
- Hàm số $f(x; y) = 5x + 7y$ sẽ đạt giá trị lớn nhất trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) khi $(x; y)$ là tọa độ một trong các đỉnh $O(0; 0)$, $A(40; 0)$, $B\left(0; \frac{80}{3}\right)$.
- Ta có: $f(0; 0) = 0$, $f(40; 0) = 200$, $f\left(0; \frac{80}{3}\right) = \frac{560}{3}$.
- Suy ra $f(x; y)$ lớn nhất khi $(x; y) = (40; 0)$. Do đó cần phải gói 40 cái bánh chưng để nhận được số điểm thưởng là lớn nhất.



□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kg thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipid. Mỗi kg thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400

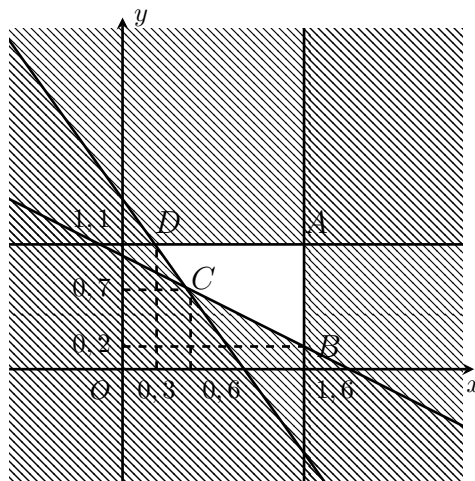
đơn vị lipit. Biết rằng gia đình này chỉ mua tối đa 1,6 kg thịt bò và 1,1 kg thịt lợn; giá tiền 1 kg thịt bò là 45 nghìn đồng, 1 kg thịt lợn là 35 nghìn đồng. Hỏi gia đình đó phải mua bao nhiêu kg thịt mỗi loại để số tiền bỏ ra là ít nhất?

Lời giải.

- Gọi x và y lần lượt là số kg thịt bò và thịt lợn mà gia đình đó mua mỗi ngày ($0 \leq x \leq 1,6; 0 \leq y \leq 1,1$).
- Khi đó chi phí để mua số thịt trên là $f(x; y) = 45x + 35y$ nghìn đồng.
- Trong x kg thịt bò chứa $800x$ đơn vị protein và $200x$ đơn vị lipit.
- Trong y kg thịt lợn chứa $600y$ đơn vị protein và $400y$ đơn vị lipit.
- Suy ra số đơn vị protein và số đơn vị lipit lần lượt là $800x + 600y$ đơn vị và $200x + 400y$ đơn vị.
- Do gia đình này cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày nên

$$\text{ta có hệ bất phương trình sau } \begin{cases} 800x + 600y \geq 900 \\ 200x + 400y \geq 400 \\ 0 \leq x \leq 1,6 \\ 0 \leq y \leq 1,1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 6y \geq 9 \\ x + 2y \geq 2 \\ 0 \leq x \leq 1,6 \\ 0 \leq y \leq 1,1 \end{cases} (*)$$

- Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x; y)$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*).
- Miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là tứ giác $ABCD$ (kể cả biên).
- Hàm số $f(x; y) = 45x + 35y$ sẽ đạt giá trị nhỏ nhất khi $(x; y)$ là tọa độ của một trong các đỉnh $A(1,6; 1,1)$, $B(1,6; 0,2)$, $C(0,6; 0,7)$, $D(0,3; 1,1)$.
- Ta có: $f(1,6; 1,1) = 110,5$; $f(1,6; 0,2) = 79$; $f(0,6; 0,7) = 51,5$; $f(0,3; 1,1) = 52$.
- Suy ra $f(x; y)$ nhỏ nhất khi $(x; y) = (0,6; 0,7)$. Do đó gia đình này cần phải mua 0,6 kg thịt bò và 0,7 kg thịt lợn để số tiền bỏ ra là ít nhất.



□

Bài 2. Một gia đình định trồng cà phê và ca cao trên diện tích 10 ha. Nếu trồng cà phê thì cần 20 công và thu về 10.000.000 đồng trên diện tích mỗi ha, nếu trồng ca cao thì cần 30 công và thu 12.000.000 đồng trên diện tích mỗi ha. Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên với diện tích là bao nhiêu để thu được nhiều tiền nhất. Biết rằng cà phê do các thành viên trong gia đình tự chăm sóc và số công không vượt quá 80, còn ca cao gia đình thuê người làm với giá 100.000 đồng cho mỗi công?

Lời giải.

Gọi x và y lần lượt là số ha cà phê và ca cao mà hộ nông dân này trồng ($x, y \geq 0$).

Số tiền cần bỏ ra để thuê người trồng ca cao là $30y \cdot 100000 = 3000000y$ (trồng).

Lợi nhuận thu được là $f(x; y) = 10000000x + 12000000 - 3000000y$

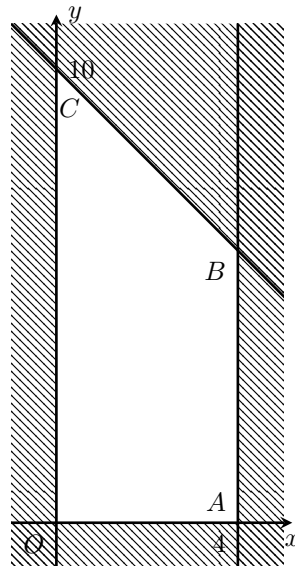
$\Rightarrow f(x; y) = 10000000x + 9000000y$ (đồng).

Vì số công để trồng cà phê không vượt qua 80 nên $20x \leq 80 \Leftrightarrow x \leq 4$.

Ta có hệ bất phương trình sau
$$\begin{cases} x + y \leq 10 \\ 0 \leq x \leq 4 \quad (*) \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của $f(x; y)$ trên miền nghiệm của hệ (*).

Miền nghiệm của hệ (*) là tứ giác $OABC$ (kể cả biên). Hàm số $f(x; y)$ sẽ đạt giá trị lớn nhất khi $(x; y)$ là toạ độ của một trong các đỉnh $O(0; 0)$, $A(4; 0)$, $B(4; 6)$, $C(0; 10)$. Suy ra $f(x; y)$ lớn nhất khi $(x; y) = (4; 6)$. Như vậy cần phải trồng 4 ha cà phê và 6 ha ca cao để thu về lợi nhuận lớn nhất



□

Bài 3. Một hộ nông dân định trồng đậu và cà trên diện tích 8 ha. Nếu trồng đậu thì cần 20 công và thu 3000000 đồng trên diện tích mỗi ha, nếu trồng cà thì cần 30 công và thu 4000000 đồng trên diện tích mỗi ha. Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên với diện tích là bao nhiêu để thu được nhiều tiền nhất biết rằng tổng số công không quá 180?

Lời giải.

Gọi số ha đậu và cà mà hộ nông dân này trồng lần lượt là x và y ($x, y \geq 0$).

Lợi nhuận thu được là $f(x; y) = 3000000x + 4000000y$ (đồng).

Tổng số công dùng để trồng x ha đậu và y ha cà là $20x + 30y$.

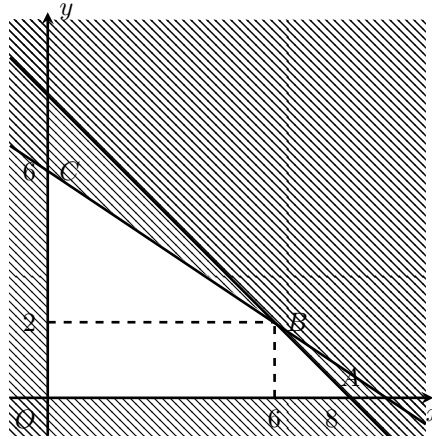
Ta có hệ bất phương trình sau
$$\begin{cases} x + y \leq 8 \\ 20x + 30y \leq 180 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \leq 8 \\ 2x + 3y \leq 18 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x; y)$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*). Miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là tứ giác $OABC$ (kể cả biên).

Hàm số $f(x; y)$ sẽ đạt giá trị lớn nhất khi $(x; y)$ là tọa độ của một trong các đỉnh $O(0; 0)$, $A(8; 0)$, $B(6; 2)$, $C(0; 6)$.

Ta có: $f(0; 0) = 0$, $f(8; 0) = 24000000$, $f(6; 2) = 26000000$, $f(0; 6) = 2400000$.

Suy ra $f(x; y)$ lớn nhất khi $(x; y) = (6; 2)$ tức là hộ nông dân này cần phải trồng 6 ha đậu và 2 ha cà thì sẽ thu về lợi nhuận lớn nhất.



□

Bài 4. Một phân xưởng có hai máy đặc chủng M_1, M_2 sản xuất hai loại sản phẩm kí hiệu là A và B. Một tấn sản phẩm loại A lãi 2 triệu đồng, một tấn sản phẩm loại B lãi 1,6 triệu đồng. Muốn sản xuất một tấn sản phẩm loại A phải dùng máy M_1 trong 3 giờ và máy M_2 trong 1 giờ. Muốn sản xuất một tấn sản phẩm loại B phải dùng máy M_1 trong 1 giờ và máy M_2 trong 1 giờ. Một máy không thể dùng để sản xuất đồng thời hai loại sản phẩm. Máy M_1 làm việc không quá 6 giờ một ngày, máy M_2 làm việc không quá 4 giờ một ngày. Hỏi số tiền lãi lớn nhất mà phân xưởng này có thể thu được trong một ngày là bao nhiêu?

Lời giải.

Gọi x, y lần lượt là số tấn sản phẩm loại A, B mà phân xưởng này sản xuất trong một ngày ($x, y > 0$). Khi đó số tiền lãi một ngày của phân xưởng này là $f(x; y) = 2x + 1,6y$ (triệu đồng); số giờ làm việc trong ngày của máy M_1 là $3x + y$ và số giờ làm việc trong ngày của máy M_2 là $x + y$.

Vì mỗi ngày máy M_1 làm việc không quá 6 giờ và máy M_2 làm việc không quá 4 giờ nên ta có hệ bất

$$\text{phương trình } \begin{cases} 3x + y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \quad (*)$$

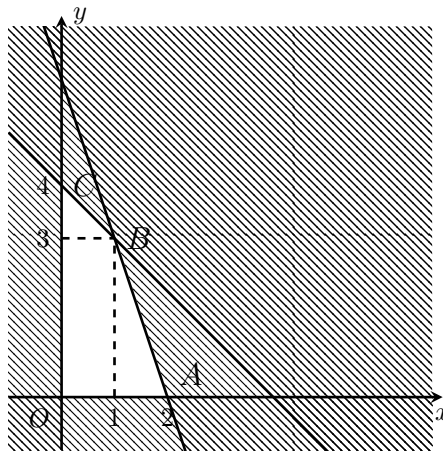
Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x; y)$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là tứ giác $OABC$ (kể cả biên).

Hàm số $f(x; y)$ sẽ đạt giá trị lớn nhất trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) khi $(x; y)$ là tọa độ một trong các đỉnh $O(0; 0)$, $A(2; 0)$, $B(1; 3)$, $C(0; 4)$.

Ta có $f(0; 0) = 0$; $f(2; 0) = 4$; $f(1; 3) = 6,8$; $f(0; 4) = 6,4$.

Suy ra $\max f(x; y) = 6,8$ khi $(x; y) = (1; 3)$.



□

Bài 5. Một công ty cần thuê xe để chở 140 người và 9 tấn hàng. Nơi thuê xe có hai loại xe A và B, trong đó loại xe A có 10 chiếc và loại xe B có 9 chiếc. Một chiếc xe loại A cho thuê với giá 4 triệu đồng, một chiếc xe loại B cho thuê với giá 3 triệu. Biết rằng mỗi xe loại A có thể chở tối đa 20 người và 0,6 tấn hàng; mỗi xe loại B có thể chở tối đa 10 người và 1,5 tấn hàng. Hỏi phải thuê bao nhiêu xe mỗi loại để chi phí bỏ ra là ít nhất?

Lời giải.

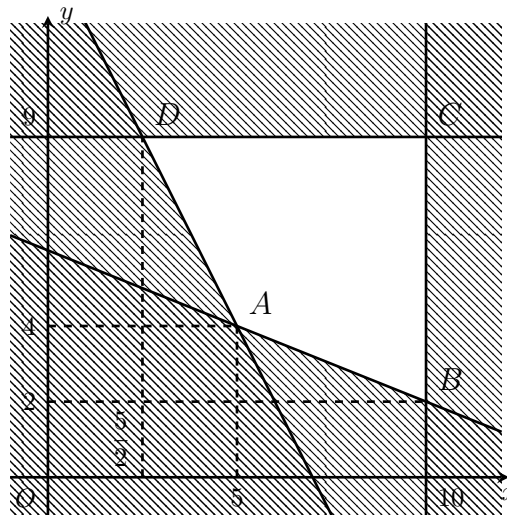
Gọi x, y lần lượt là số xe loại A và B. Khi đó số tiền cần bỏ ra để thuê xe là $f(x; y) = 4x + 3y$. Ta có x xe loại A sẽ chở được $20x$ người và $0,6x$ tấn hàng; y xe loại B sẽ chở được $10y$ người và $1,5y$ tấn hàng. Suy ra x xe loại A và y xe loại B sẽ chở được $20x + 10y$ người và $0,6x + 1,5y$ tấn hàng.

$$\text{Ta có hệ bất phương trình sau } \begin{cases} 20x + 10 \geq 40 \\ 0,6x + 1,5y \geq 9 \\ 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y \geq 14 \\ 2x + 5y \geq 30 \\ 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \end{cases} (*)$$

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x; y)$ trên miền nghiệm của hệ (*). Miền nghiệm của hệ (*) là tứ giác $ABCD$ (kể cả biên). Hàm số $f(x; y) = 4x + 3y$ sẽ đạt giá trị nhỏ nhất trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) khi $(x; y)$ là tọa độ của một trong các đỉnh $A(5; 4)$, $B(10; 2)$, $C(10; 9)$, $D\left(\frac{5}{2}; 9\right)$.

$$\text{Ta có: } f(5; 4) = 32; f(10; 2) = 46; f(10; 9) = 67; f\left(\frac{5}{2}; 9\right) = 37.$$

Suy ra $f(x; y)$ nhỏ nhất khi $(x; y) = (5; 4)$. Như vậy để chi phí vận chuyển thấp nhất cần thuê 5 xe loại A và 4 xe loại B.



□

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 6. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $x - y > 1 - 3x$.

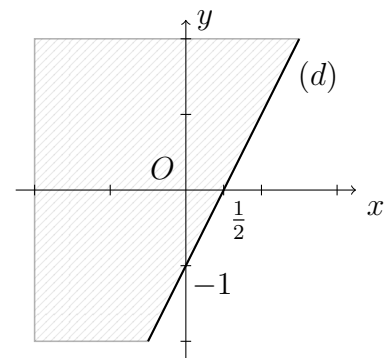
Lời giải.

$$x - y > 1 - 3x \Leftrightarrow 2x - y > 1$$

Vẽ đường thẳng $d: 2x - y = 1$.

Thay tọa độ điểm $O(0;0)$ vào vế trái phương trình đường thẳng (d) , ta được: $0 < 1$.

Vậy miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng không chứa điểm O . (Trên hình là nửa mặt phẳng không bị gạch bỏ).



□

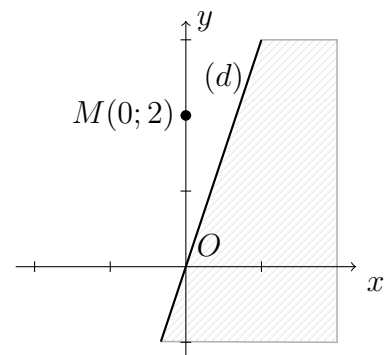
Bài 7. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $3x - y \leq 0$.

Lời giải.

Vẽ đường thẳng $d: 3x - y = 0$.

Thay tọa độ điểm $M(0;2)$ vào vế trái phương trình đường thẳng (d) , ta được: $-2 < 0$.

Vậy miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng không chứa điểm M , kể cả bờ (d) . (Trên hình là nửa mặt phẳng không bị gạch bỏ).



□

Bài 8. a) Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $x + y - 3 < 0$.

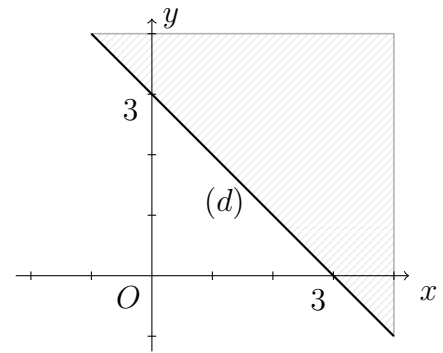
b) Tìm điều kiện của m và n để mọi điểm thuộc đường thẳng (d') : $(m^2 - 2)x - y + m + n = 0$ đều là nghiệm của bất phương trình trên.

Lời giải.

- a) Vẽ đường thẳng $d : x + y = 3$.

Thay tọa độ điểm $O(0;0)$ vào vế trái phương trình đường thẳng (d) , ta được: $0 < 3$.

Vậy miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng chứa điểm O . (Trên hình là nửa mặt phẳng không bị gạch bỏ).



- b) Để mọi điểm thuộc đường thẳng (d') đều là nghiệm của bất phương trình thì điều kiện cần là (d') phải song song với (d) .

Ta có $d : y = -x + 3$ và $d' : y = (m^2 - 2)x + m + n$. Để (d)

$$\text{song song } (d') \text{ thì } \begin{cases} m^2 - 2 = -1 \\ m + n \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n \neq 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} m = -1 \\ n \neq 4 \end{cases}$$

Với $\begin{cases} m = 1 \\ n \neq 2 \end{cases}$ thì ta được $d' : y = -x + n + 1$. Để thỏa yêu cầu

bài toán thì điều kiện đủ là đường thẳng (d') là đồ thị của đường thẳng (d) khi (d) tịnh tiến xuống dưới theo trục Oy .

Tức $n + 1 < 3 \Leftrightarrow n < 2$.

□

Bài 9. Cho bất phương trình $2x + y - 1 \leq 0$.

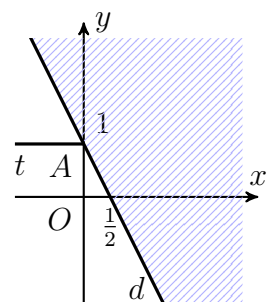
- a) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình đã cho trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

b) Tìm tất cả giá trị tham số m để điểm $M(m, 1)$ nằm trong miền nghiệm của bất phương trình đã và biểu diễn tập hợp M tìm được trong cùng hệ trục tọa độ Oxy ở câu a).

Lời giải.

a) Đường thẳng $(d): 2x + y - 1 = 0$ có đồ thị như hình vẽ bên. Ta có $2 \cdot 0 + 0 - 1 < 0$. Do đó, miền nghiệm là đường thẳng (d) và miền không gạch chéo như hình vẽ bên (Miền chứa gốc tọa độ).

b) Để M là một nghiệm thì $2m + 1 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 0$. Vì M nằm trên đường thẳng $(\Delta) : y = 1$. Do đó, tập hợp tất cả điểm M là nghiệm của bất phương trình đã cho là tia At như hình vẽ.



□

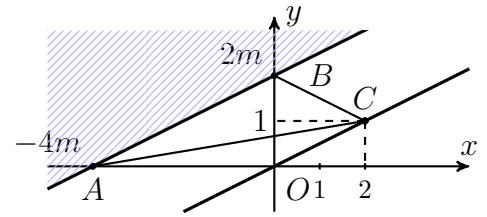
Bài 10. Cho bất phương trình $x - 2y + 4m > 0$.

a) Tùy theo giá trị tham số m , hãy biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình đã cho trong hệ trục tọa độ Oxy .

b) Gọi A, B lần lượt là giao của đường thẳng $x - 2y + 4m = 0$ với trục hoành và trục tung. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để tập nghiệm của bất phương trình đã cho chứa điểm $C(2; 1)$ sao cho diện tích tam giác ABC bằng 4.

Lời giải.

a) Xét đường thẳng $(d_m): x - 2y + 4m = 0$ có đồ thị như hình vẽ bên. Ta có $0 - 2 \cdot 0 + 4m = 4m$. Do đó, với mọi $m \neq 0$ miền nghiệm luôn chứa gốc tọa độ. Nếu $m = 0$ thì miền nghiệm chứa điểm $(1; 0)$. Vậy với mọi m miền nghiệm là miền không gạch chéo như hình vẽ bên.



b) Để C là một nghiệm của bất phương trình đã cho thì $2 - 2 + 4m > 0 \Leftrightarrow m > 0$. Khi đó, $OC \parallel (d_m)$, suy ra $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABO} = 4m^2$. Theo giả thiết, ta có $4m^2 = 4 \Leftrightarrow m = 1$. □

Bài 11. Cho hệ bất phương trình
$$\begin{cases} y \geq 0 \\ x - y \geq 0 \\ x + y - 4 \leq 0 \end{cases}$$

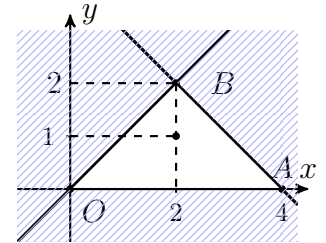
a) Biểu diễn tập nghiệm của hệ đã trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

b) Tính diện tích miền nghiệm đó.

Lời giải.

a) Vẽ các đường thẳng $x - y = 0$ và $x + y - 4 = 0$ trên cùng hệ trục tọa độ. Chọn điểm $(2, 1)$ để xác định miền nghiệm. Khi đó ta được miền nghiệm như hình vẽ bên.

b) Từ hình vẽ bên ta có $OA = 4$ và độ dài đường cao của tam giác OAB hạ từ B bằng 2. Vậy $S_{\triangle OAB} = 4$. □



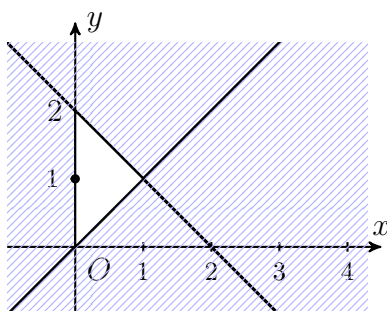
Bài 12. Tìm m để hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x - y \leq 0 \\ y - mx - 2 \leq 0 \end{cases}$$

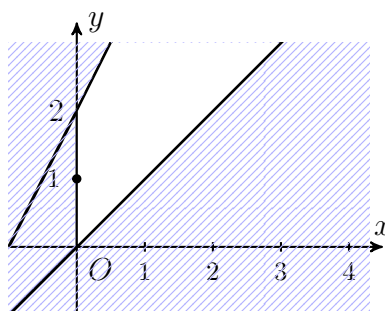
có tập nghiệm được biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là một hình tam giác.

Lời giải.

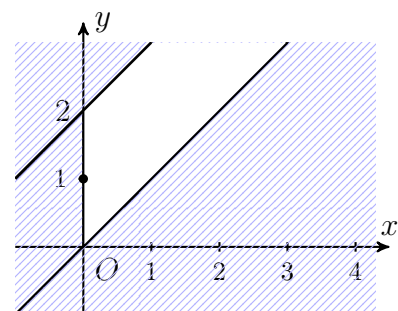
Nhận xét: Họ đường thẳng $(d_m): y - mx - 2 = 0$ luôn đi qua điểm $A(0; 2)$, hay nói cách khác các đường thẳng (d_m) xoay quanh A . Mặt khác, ta có $1 - m \cdot 0 - 2 \leq 0$ đúng với mọi m , nên miền nghiệm của bất phương trình $y - mx - 2 \leq 0$ luôn chứa điểm $(0; 1)$. Do đó ta có 3 khả năng sau:



$m < 0$



$m > 0$



$m = 0$

Vậy $m < 0$. □

Bài 13. Một xưởng sản xuất gỗ cửa các khúc gỗ thành các tấm ván. Có hai loại ván: ván thành phẩm và ván sử dụng trong xây dựng. Giả sử, đối với:

Ván thành phẩm cần 1 giờ để cửa và 3 giờ để bào 10m ván.

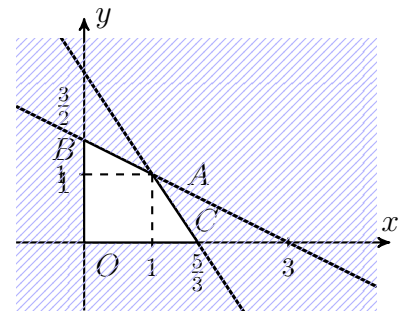
Ván xây dựng cần 2 giờ để cửa và 2 giờ để bào 10m ván.

Máy cửa làm việc tối đa 3 giờ trong ngày, và máy bào làm việc tối đa 5 giờ trong ngày. Nếu lợi nhuận của 10m ván thành phẩm là 100 (ngàn đồng) và lợi nhuận của 10m ván xây dựng là 80 (ngàn đồng). Trong ngày, xưởng sản xuất phải cửa bao nhiêu ván mỗi loại để lợi nhuận lớn nhất?

Lời giải.

Gọi x, y lần lượt là chiều dài ván thành phẩm và ván xây dựng hoàn thành trong một ngày. Đơn vị 10m. Do đó bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của $T = 10x + 8y$ (ngàn đồng), biết x, y thỏa mãn hệ bất phương trình sau

$$\begin{cases} x + 2y \leq 3 \\ 3x + 2y \leq 5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}.$$



Miền nghiệm của hệ là tứ giác $OBAC$, trong đó $A(1; 1), B(0; \frac{3}{2}), C(\frac{5}{3}; 0)$. Do đó, giá trị lớn nhất của T là 18 khi $x = y = 1$. □

Bài 14. Chuyên gia dinh dưỡng định thành lập một thực đơn gồm 2 loại thực phẩm chính A và B . Cứ một trăm gram:

Thực phẩm A chứa 2 đơn vị chất béo, 3 đơn vị carbohydrate và 4 đơn vị protein.

Thực phẩm B chứa 1 đơn vị chất béo, 1 đơn vị carbohydrate và 1 đơn vị protein.

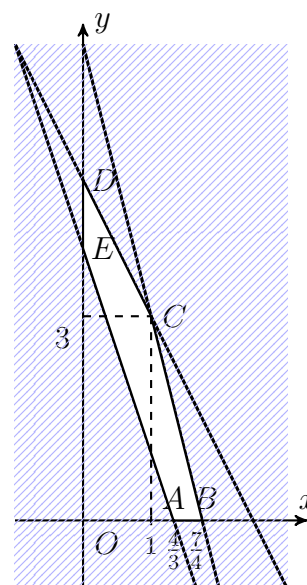
Nếu một trăm gram thực phẩm A giá 10 ngàn đồng và một trăm gram thực phẩm B giá 15 ngàn đồng. Nhà dinh dưỡng muốn thức ăn phải cung cấp nhiều nhất 5 đơn vị chất béo, 7 đơn vị protein và ít nhất 4 đơn vị carbohydrate. Cần bao nhiêu trăm gram thực phẩm mỗi loại để có giá thành nhỏ nhất nhưng vẫn cung cấp đủ dinh dưỡng?

Lời giải.

Gọi x, y lần lượt là khối lượng thực phẩm A và B . Đơn vị trăm gam. Do đó bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của $T = 10x + 15y$ (ngàn đồng), biết x, y thỏa mãn hệ bất phương trình sau

$$\begin{cases} 2x + y \leq 5 \\ 3x + y \geq 4 \\ 4x + y \leq 7 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Miền nghiệm của hệ là đa giác $ABCDE$, trong đó $A\left(\frac{4}{3}; 0\right), B\left(\frac{7}{4}; 0\right), C(1; 3), D(0; 5), E(0; 4)$. Do đó, giá trị nhỏ nhất của T là $\frac{4000}{3}$ gam khi $x = \frac{4}{3}$ và $y = 0$.



□

§5 DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 TAM THỨC BẬC HAI

Định nghĩa. Tam thức bậc hai là biểu thức có dạng $f(x) = ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là những hệ số, $a \neq 0$. Nghiệm của tam thức bậc hai là giá trị của x làm cho tam thức có giá trị bằng 0.

2 ĐỊNH LÝ VỀ DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

Định lý 1. Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0, \Delta = b^2 - 4ac$. Khi đó:

- $\Delta < 0 \Rightarrow af(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- $\Delta = 0 \Rightarrow af(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$ và $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0$.
- $\Delta > 0 \Rightarrow \begin{cases} af(x) > 0, \forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty) \\ af(x) < 0, \forall x \in (x_1; x_2) \end{cases}$.

Với $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình $f(x) = 0, x_1 < x_2$.

3 ĐỊNH LÝ VỀ DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

Định nghĩa. Bất phương trình bậc hai một ẩn số là bất phương trình có dạng $ax^2 + bx + c > 0$ (hoặc $ax^2 + bx + c < 0; ax^2 + bx + c \geq 0; ax^2 + bx + c \leq 0$) với a, b, c là những số thực đã cho, $a \neq 0, x$ là ẩn số.

4 BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

Định nghĩa. Bất phương trình bậc hai ẩn x là bất phương trình dạng $ax^2 + bx + c < 0$ (hoặc $ax^2 + bx + c \leq 0, ax^2 + bx + c > 0, ax^2 + bx + c \geq 0$), trong đó a, b, c là những số thực đã cho, $a \neq 0$.

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xét dấu tam thức bậc hai

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$. Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Nếu $\Delta < 0$ thì $a.f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Nếu $\Delta = 0$ thì $a.f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$.
- Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$ và
 - $\oplus a.f(x) > 0, \forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.
 - $\oplus a.f(x) < 0, \forall x \in (x_1; x_2)$

BÀI TẬP DẠNG 1

Ví dụ 1. Xét dấu tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - 2x + 5$

Lời giải.

Ta có $\Delta' = -4 < 0$ và $a = 1 > 0$ nên $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. □

Ví dụ 2. Xét dấu của tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - 5x - 6$.

Lời giải.

Ta có: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 6 \end{cases}$.

Do $a = 1 > 0$ nên

- $f(x) > 0, \forall x \in (-\infty; -1) \cup (6; +\infty)$.
 - $f(x) < 0, \forall x \in (-1; 6)$.
-

Ví dụ 3. Xét dấu của tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 + 3x + 4$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$.

Do $a = -1 < 0$ nên

- $f(x) > 0, \forall x \in (-1; 4)$.
 - $f(x) < 0, \forall x \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$.
-

Ví dụ 4. Xét dấu của biểu thức $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x - 1}$

Lời giải.

Ta có $g(x) = x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -1 \end{cases}$.

$h(x) = x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	-		-		-
$f(x)$	-	0	+	0	-

Từ bảng xét dấu ta thấy

- $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-3; -1) \cup (1; +\infty)$.
 - $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -3) \cup (-1; 1)$.
-

Ví dụ 5. Cho tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - (2m - 1)x + m^2 - m$. Tìm các giá trị của tham số m để $f(x) < 0$ với $\forall x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } f(x) = (x - m)(x - m + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m - 1 \\ x = m \end{cases}.$$

$$\Rightarrow f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (m - 1; m).$$

$$\text{Để } f(x) < 0, \forall x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \text{ thì } \left(\frac{1}{2}; 1\right) \subset (m - 1; m) \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \leq \frac{1}{2} \\ m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m \leq \frac{3}{2}. \quad \square$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Xét dấu tam thức bậc hai $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$.

Lời giải.

Ta có

- $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.
- $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

□

Bài 2. Xét dấu tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 - 4x - 6$.

Lời giải.

Ta có $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

□

Bài 3. Xét dấu của biểu thức $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = (x - 1)^2(x + 2)$

- $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-2; +\infty) \setminus \{1\}$.
- $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2)$.

□

Bài 4. Xét dấu của biểu thức $f(x) = 1 + \frac{x - 6}{x^2 - 5x + 6}$

Lời giải.

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 5x + 6}.$$

$$g(x) = x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$h(x) = x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	0	2	3	4	$+\infty$			
$g(x)$	+	0	-		-		-	0	+
$h(x)$	+		+	0	-	0	+		+
$f(x)$	+	0	-		+		-	0	+

Từ bảng xét dấu ta thấy

- $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (2; 3) \cup (4; +\infty)$.
- $f(x) < 0 \Leftrightarrow (0; 2) \cup (3; 4)$.

□

Dạng 2. Tìm điều kiện của tham số để tam thức bậc hai luôn mang một dấu

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$). Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$.

- $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$.
- $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$
- $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$.
- $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

🔗🔗🔗 BÀI TẬP DẠNG 2 🔗🔗🔗

Ví dụ 1. Cho $f(x) = (m^2 + 2)x^2 - 2(m + 1)x + 1$. Tìm các giá trị của tham số m để $f(x)$ luôn dương với mọi x .

Lời giải.

Ta có $a = m^2 + 2 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ và $\Delta' = (m + 1)^2 - (m^2 + 2) = 2m - 1$.

Để $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì $\Delta < 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$

□

Ví dụ 2. Cho $f(x) = (m + 2)x^2 + 2(m + 2)x + m + 3$. Tìm các giá trị của tham số m để $f(x) \geq 0$ với mọi giá trị của x .

Lời giải.

- Với $m = -2 \Rightarrow f(x) = 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Với $m \neq -2$, để $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì điều kiện là

$$\begin{cases} m + 2 > 0 \\ \Delta' = (m + 2)^2 - (m + 2)(m + 3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 > 0 \\ -m - 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2$$

Vậy với $m \geq -2$ thì $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

□

Ví dụ 3. Cho $f(x) = mx^2 - x - 1$. Tìm các giá trị của tham số m để $f(x) < 0$ với mọi giá trị của x .

Lời giải.

- Với $m = 0 \Rightarrow f(x) = -x - 1 < 0 \Leftrightarrow x > -1$
- Với $m \neq 0$, để $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì điều kiện là

$$\begin{cases} m < 0 \\ \Delta = 1 + 4m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m < -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m < -\frac{1}{4}$$

Vậy với $m < -\frac{1}{4}$ thì $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. □

Ví dụ 4. Cho $f(x) = (m-4)x^2 + (2m-8)x + m-5$. Tìm các giá trị của tham số m để $f(x) \leq 0$ với mọi giá trị của x .

Lời giải.

- Với $m = 4 \Rightarrow f(x) = -1 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Với $m \neq 4$, để $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì điều kiện là

$$\begin{cases} m-4 < 0 \\ \Delta' = (m-4)^2 - (m-4)(m-5) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m-4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 4$$

Vậy với $m \leq 4$ thì $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ □

Ví dụ 5. Cho $f(x) = \sqrt{x^2 - x + m} - 1$. Tìm các giá trị của tham số m để $f(x) > 0$ với mọi giá trị của x .

Lời giải.

Ta có

$$f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - x + m > 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + m - 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \Delta = 1 - 4(m-1) < 0$$

$$\Leftrightarrow m < \frac{5}{4}$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho $f(x) = (2m^2 - 3m - 2)x^2 + 2(m-2)x - 1$. Tìm các giá trị của tham số m để $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

$$\text{TH1. Xét } 2m^2 - 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ m = 2 \end{cases}$$

$$\oplus \text{ Nếu } m = -\frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = -5x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{5}.$$

⊕ Nếu $m = 2 \Rightarrow f(x) = -1 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

TH2. Xét $2m^2 - 3m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -\frac{1}{2} \\ m \neq 2 \end{cases}$, khi đó, điều kiện để $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là

$$\begin{cases} 2m^2 - 3m - 2 < 0 \\ \Delta' = (m-2)^2 + (2m^2 - 3m - 2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} \leq m \leq 2 \\ -\frac{1}{2} < m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq m < 2.$$

□

Bài 2. Cho $f(x) = (m+4)x^2 - 2mx + 2m - 3$. Tìm các giá trị của tham số m để $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

- Với $m = -4 \Rightarrow f(x) = 8x - 14 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{7}{4}$.
- Với $m \neq -4$, để $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì điều kiện là

$$\begin{cases} m + 4 < 0 \\ \Delta' = m^2 - (m+4)(2m-6) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 \\ m \in (-\infty; -6) \cup (4; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; -6)$$

Vậy với $m < -6$ thì $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

□

Bài 3. Cho $f(x) = \frac{-x^2 + 4(m+1)x + 1 - 4m^2}{-4x^2 + 5x - 2}$. Tìm các giá trị của tham số m để $f(x) > 0$ với mọi giá trị của x .

Lời giải.

Ta có $-4x^2 + 5x - 2 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Để $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì $g(x) = -x^2 + 4(m+1)x + 1 - 4m^2 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \Delta' = 4(m+1)^2 + (1 - 4m^2) < 0 \Leftrightarrow 8m + 5 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{5}{8}$$

□

Dạng 3. Giải bất phương trình bậc hai.

Giải bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c < 0$ thực chất là tìm các khoảng mà trong đó $f(x) = ax^2 + bx + c$ cùng dấu với hệ số a (trường hợp $a < 0$) hay trái dấu với hệ số a (trường hợp $a > 0$).

🔗🔗🔗 BÀI TẬP DẠNG 3 🔗🔗🔗

Ví dụ 1. Giải bất phương trình $3x^2 + 2x + 5 > 0$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$, ta có $a = 3 > 0$ và phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm nên $f(x)$ luôn dương. Do đó tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; +\infty)$.

□

Ví dụ 2. Giải bất phương trình $-2x^2 + 3x + 5 > 0$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = -2x^2 + 3x + 5$, ta có $a = -2 < 0$ và $f(x) = 0 \iff \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{5}{2} \end{cases}$.

Lập bảng xét dấu của $f(x)$ ta có

x	$-\infty$	-1	$\frac{5}{2}$	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-1; \frac{5}{2}\right)$. □

Ví dụ 3. Giải bất phương trình $(3x^2 - 10x + 3)(4x - 5) \geq 0$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = (3x^2 - 10x + 3)(4x - 5)$.

Ta có $f(x) = 0 \iff \begin{cases} 3x^2 - 10x + 3 = 0 \\ 4x - 5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = 3 \\ x = \frac{5}{4} \end{cases}$.

Lập bảng xét dấu của $f(x)$ ta có

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{4}$	3	$+\infty$
$3x^2 - 10x + 3$	$+$	0	$-$	$+$	$+$
$4x - 5$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[\frac{1}{3}; \frac{5}{4}\right] \cup [3; \infty)$. □

Ví dụ 4. Giải bất phương trình $\frac{(3x^2 - x)(3 - x^2)}{4x^2 + x - 3} \leq 0$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = \frac{(3x^2 - x)(3 - x^2)}{4x^2 + x - 3}$. Ta có

$+ 3x^2 - x = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$.

$+ 3 - x^2 = 0 \iff x = \pm\sqrt{3}$.

$+ 4x^2 + x - 3 = 0 \iff \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{3}{4} \end{cases}$.

Lập bảng xét dấu của $f(x)$ ta được

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$		-1		0		$\frac{1}{3}$		$\frac{3}{4}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$			
$3x^2 - x$		+		+		+	0	-	0	+		+		+			
$3 - x^2$		-	0	+		+		+		+		+	0	-			
$4x^2 + x - 3$		+		+	0	-		-		-	0	+		+			
$f(x)$		-	0	+				-	0	+	0	-			+	0	-

Dựa vào bảng xét dấu ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -\sqrt{3}] \cup (-1; 0] \cup \left[\frac{1}{3}; \frac{3}{4}\right) \cup [\sqrt{3}; +\infty)$. $\square$

Ví dụ 5. Giải bất phương trình $\frac{1}{x^2 - 4} < \frac{3}{3x^2 + x - 4}$.

Lời giải.

Ta có $\frac{1}{x^2 - 4} < \frac{3}{3x^2 + x - 4} \iff \frac{x + 8}{(x^2 - 4)(3x^2 + x - 4)} < 0$.

Lập bảng xét dấu cho $f(x) = \frac{x + 8}{(x^2 - 4)(3x^2 + x - 4)}$ ta có

x	$-\infty$	-8	-2	$-\frac{4}{3}$	1	2	$+\infty$
$x + 8$	$-$	0	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$
$x^2 - 4$	$+$	$ $	$+$	0	$-$	$ $	$-$
$3x^2 + x - 4$	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-$	0	$+$	$ $	$-$	$ $	$+$

Dựa vào bảng xét dấu ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -8) \cup \left(-2; -\frac{4}{3}\right) \cup (1; 2)$. $\square$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Giải bất phương trình $-2x^2 + 3x + 5 \geq 0$.

Lời giải.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	$\frac{5}{2}$	$+\infty$	
$-2x^2 + 3x + 5$	$-$	0	$+$	0	$-$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -1) \cup \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$. $\square$

Bài 2. Giải bất phương trình $x^2 + 12x + 36 \leq 0$.

Lời giải.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-6	$+\infty$
$x^2 + 12x + 36$	+	0	+

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \{-6\}$. □

Bài 3. Giải bất phương trình $(3x^2 - 4x)(2x^2 - x - 1) > 0$.

Lời giải.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{4}{3}$	$+\infty$			
$3x^2 - 4x$	+		+	0	-		-	0	+
$2x^2 - x - 1$	+	0	-		-	0	+		+
VT	+	0	-	0	+	0	-	0	+

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (0; 1) \cup \left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$. □

Bài 4. Giải bất phương trình $(4x^2 - 1)(-8x^2 + x - 3)(2x + 9) < 0$.

Lời giải.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$		
$4x^2 - 1$	+		+	0	-	0	+
$-8x^2 + x - 3$	-		-		-		-
$2x + 9$	-	0	+		+		+
VT	+	0	-	0	+	0	-

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\frac{9}{2}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. □

Bài 5. Giải bất phương trình $\frac{4x^2 + 3x - 1}{x^2 + 5x + 7} \geq 0$.

Lời giải.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{4}$	$+\infty$	
$4x^2 + 3x - 1$	+	0	-	0	+
$x^2 + 5x + 7$	+		+		+
VT	+	0	-	0	+

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -1] \cup \left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$. □

Bài 6. Giải bất phương trình $\frac{5x^2 + 3x - 8}{x^2 - 7x + 6} \leq 0$.

Lời giải.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{8}{5}$	1	6	$+\infty$				
$5x^2 + 3x - 8$	+	0	-	0	+		+		
$x^2 - 7x + 6$	+		+	0	-	0	+		
VT	+	0	-			-			+

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[-\frac{8}{5}; 1\right) \cup (1; 6)$. □

Bài 7. Giải bất phương trình $\frac{x^4 - 17x^2 + 60}{x(x^2 - 8x + 5)} > 0$.

Lời giải.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\sqrt{12}$	$-\sqrt{5}$	0	$4-\sqrt{11}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{12}$	$4+\sqrt{11}$	$+\infty$									
x^4-17x^2+60	+	0	-	0	+		+		+	0	-	0	+		+			
x	-		-		-	0	+		+		+		+		+			
x^2-8x+5	+		+		+		+	0	-		-		-	0	+			
VT	-	0	+	0	-			+			-	0	+	0	-			+

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\sqrt{12}; -\sqrt{5}) \cup (0; 4 - \sqrt{11}) \cup (\sqrt{5}; \sqrt{12}) \cup (4 + \sqrt{11}; +\infty)$. □

Bài 8. Giải bất phương trình $\frac{1}{x^2 + 5x + 6} > \frac{1}{x^2 - 17x + 72}$.

Lời giải.

Ta có $\frac{1}{x^2 + 5x + 6} > \frac{1}{x^2 - 17x + 72} \iff \frac{-22x + 66}{(x^2 + 5x + 6)(x^2 - 17x + 72)} > 0$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-3		-2		3		8		9		$+\infty$
$-22x + 66$		+		+		+	0	-		-		-
$x^2 + 5x + 6$		+	0	-	0	+		+		+		+
$x^2 - 17x + 72$		+		+		+		+	0	-	0	+
VT		+	-		+		0	-	+		-	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -3) \cup (-2; 3) \cup (8; 9)$. □

Bài 9. Giải bất phương trình $\frac{5x^2 - 7x - 3}{3x^2 - 2x - 5} > 1$.

Lời giải.

Ta có $\frac{5x^2 - 7x - 3}{3x^2 - 2x - 5} > 1 \iff \frac{2x^2 - 5x + 2}{3x^2 - 2x - 5} > 0$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{3}$	2	$+\infty$					
$2x^2 - 5x + 2$	$+$	$ $	$+$	0	$-$	$ $	$-$	0	$+$		
$3x^2 - 2x - 5$	$+$	0	$-$	$ $	$-$	0	$+$	$ $	$+$		
VT	$+$	$-$			0	$+$	$-$			0	$+$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{5}{3}\right) \cup (2; +\infty)$. □

Bài 10. Giải bất phương trình $\frac{x-2}{1-x} + \frac{x-3}{x+1} \geq \frac{x^2+4x+15}{x^2-1}$.

Lời giải.

Ta có $\frac{x-2}{1-x} + \frac{x-3}{x+1} \geq \frac{x^2+4x+15}{x^2-1} \iff \frac{-x^2-7x-10}{x^2-1} \geq 0$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-5	-2	-1	1	$+\infty$			
$-x^2 - 7x - 10$	$-$	0	$+$	0	$-$	$ $	$-$	$ $	$-$
$x^2 - 1$	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$	0	$-$	0	$+$
VT	$-$	0	$+$	0	$-$	$ $	$+$	$ $	$-$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-5; -2) \cup (-1; 1)$. □

Bài 11. Giải bất phương trình $(x^2 + 3x)(2x + 3) - 16 \cdot \frac{2x + 3}{x^2 + 3x}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } (x^2 + 3x)(2x + 3) - 16 \cdot \frac{2x + 3}{x^2 + 3x} &\iff \frac{(x^2 + 3x)^2(2x + 3) - 16(2x + 3)}{x^2 + 3x} \geq 0 \\ &\iff \frac{(2x + 3)((x^2 + 3x)^2 - 16)}{x^2 + 3x} \geq 0 \iff \frac{(2x + 3)(x^2 + 3x - 4)(x^2 + 3x + 4)}{x^2 + 3x} \geq 0. \end{aligned}$$

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-4	-3	$-\frac{3}{2}$	0	1	$+\infty$
$2x + 3$	$-$	$ $	$-$	$ $	$-$	0	$+$
$x^2 + 3x - 4$	$+$	0	$-$	$ $	$-$	$ $	$-$
$x^2 + 3x + 4$	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$
$x^2 + 3x$	$+$	$ $	$+$	0	$-$	$ $	$-$
VT	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$	$+$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-4; -3) \cup \left[-\frac{3}{2}; 0\right) \cup [1; +\infty)$. □

Dạng 4. Bài toán có chứa tham số

Để giải dạng toán này ta phải xác định dấu của hệ số của x^2 và dấu của biệt thức Δ từ đó áp dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai.

✦✦✦ BÀI TẬP DẠNG 4 ✦✦✦

Ví dụ 1. Tìm giá trị của tham số m để các biểu thức sau đây luôn không dương với mọi $x \in \mathbb{R}$

a) $f(x) = -2x^2 + 2(m - 2)x + m - 2$

b) $f(x) = (m - 1)x^2 - 2(m - 1)x - 4$.

Lời giải.

a) Ta phải tìm m sao cho $f(x) = -2x^2 + 2(m - 2)x + m - 2 \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do $a = -2 < 0$ nên $f(x) \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\Delta' = (m - 2)^2 - (-2) \cdot (m - 2) \leq 0$.

Ta có $\Delta' = (m - 2)^2 + 2(m - 2) = m(m - 2) \Rightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2$.

b) Ta phải tìm m sao cho $f(x) = (m - 1)x^2 - 2(m - 1)x - 4 \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

+) Trường hợp 1: $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$, khi đó $f(x) = -4 < 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

+) Trường hợp 2: $m - 1 \neq 0$, khi đó $f(x) \leq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 < 0 \\ \Delta' = (m - 1)^2 + 4(m - 1) \leq 0 \end{cases}$.

Từ đó suy ra $\begin{cases} m - 1 < 0 \\ \Delta' = (m - 1)(m + 3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 < 0 \\ m + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m < 1$.

Kết hợp hai trường hợp ta suy ra giá trị m cần tìm là $-3 \leq m \leq 1$. □

Ví dụ 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 3]$.

$$x^2 - 2(m+2)x + m^2 + 4m \leq 0 \quad (1)$$

Lời giải.

Xét phương trình $x^2 - 2(m+2)x + m^2 + 4m = 0$ (2), ta có $\Delta' = (m+2)^2 - m^2 - 4m = 4$.

Từ đó suy ra (2) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1 = m < x_2 = m + 4$.

Từ đó suy ra (1) có tập nghiệm $[m; m + 4]$.

Vậy (1) nghiệm đúng với mọi $x \in [1; 3]$ khi và chỉ khi $m \leq 1 < 3 \leq m + 4 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1$. □

Ví dụ 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 - (2m+3)x + 6m}}{x^2 + 2x + 3}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

Từ đó suy ra hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $x^2 - (2m+3)x + 6m \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

Do $\Delta = (2m+3)^2 - 4 \cdot 6m = (2m-3)^2 \geq 0 \forall m$ nên hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $x^2 - (m-2)x - 8m + 1 \geq 0$ có nghiệm.

Lời giải.

Do $a = 1 > 0$ nên bất phương trình trên luôn có nghiệm với mọi m . □

Bài 2. Tìm giá trị của m để biểu thức $f(x) = x^2 - (m+2)x + 2m$ có giá trị không âm với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Do $a = 1 > 0$ nên $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\Delta = (m-2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow m = 2$. □

[Vũ Văn Trường]

Bài 3. Tìm giá trị của m để hàm số $f(x) = \sqrt{mx^2 + 2(m+1)x + m-1}$ có tập xác $D \neq \emptyset$.

Lời giải.

Với $m = 0$ thì $f(x) = \sqrt{2x-1}$, khi đó hàm số có tập xác định $D = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \neq \emptyset$.

Với $m \neq 0$, hàm số có tập xác định $D \neq \emptyset \Leftrightarrow \Delta' = (m+1)^2 - m^2 + m \geq 0 \Rightarrow m \geq -\frac{1}{3}$. Trong trường

$$\text{hợp này ta có } \begin{cases} m \neq 0 \\ m \geq -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Từ đó suy ra giá trị m cần tìm là $m \geq -\frac{1}{3}$. □

Bài 4. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta luôn có:

$$-1 \leq \frac{x^2 + 5x + m}{2x^2 - 3x + 2} < 7$$

Lời giải.

Ta có $2x^2 - 3x + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Suy ra } -1 \leq \frac{x^2 + 5x + m}{2x^2 - 3x + 2} < 7 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2x + m + 2 \geq 0 \\ 13x^2 - 26x + 14 - m > 0 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } 3x^2 + 2x + m + 2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \geq -\frac{5}{3}.$$

$$13x^2 - 26x + 14 - m > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m < 1.$$

$$\text{Do đó } -\frac{5}{3} \leq m < 1. \quad \square$$

Bài 5. Chứng minh rằng hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 + 5x + 4 \leq 0 \\ x^2 - (m+3)x + 2(m+1) \leq 0 \end{cases}$ luôn có nghiệm.

Lời giải.

Ta có $x^2 + 5x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 4$, suy ra tập nghiệm của bất phương trình $x^2 + 5x + 4 \leq 0$ là $S = [1; 4]$.

Phương trình $x^2 - (m+3)x + 2(m+1) = 0$ có hai nghiệm $x = 2, x = m+1$. Từ đó suy ra bất phương trình $x^2 - (m+3)x + 2(m+1) \leq 0$ có tập nghiệm $S' = \{2\}, S' = [2; m+1], S' = [m+1; 2]$ tương ứng khi $m+1 = 2; m+1 > 2; m+1 < 2$.

Trong cả 3 trường hợp ta đều có $S \cap S' \neq \emptyset$, do đó hệ phương trình đã cho luôn có nghiệm. $\square$

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 6. Xét dấu của biểu thức $f(x) = (|2x - 3| - 1)(|x^2 - 2x + 4| - 2x^2 + 9x - 16)$.

Lời giải.

Do $|2x - 3| + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên dấu của $|2x - 3| - 1$ là dấu của

$$(|2x - 3| - 1)(|2x - 3| + 1) = (2x - 3)^2 - 1 = 4x^2 - 12x + 8 = 4(x^2 - 3x + 2).$$

Vì $x^2 - 2x + 4 = (x - 1)^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $|x^2 - 2x + 4| = x^2 - 2x + 4$.

$$\text{Suy ra } |x^2 - 2x + 4| - 2x^2 + 9x - 16 = x^2 - 2x + 4 - 2x^2 + 9x - 16 = -x^2 + 7x - 12.$$

Dấu của $f(x)$ là dấu của biểu thức $g(x) = (x^2 - 3x + 2)(-x^2 + 7x - 12)$.

Bảng xét dấu của $g(x)$:

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$			
$x^2 - 3x + 2$	+	0	-	0	+	+			
$-x^2 + 7x - 12$	-	-	-	0	+	0	-		
$g(x)$	-	0	+	0	-	0	+	0	-

Vậy: $f(x) > 0, \forall x \in (1; 2) \cup (3; 4); f(x) < 0, \forall x \in (-\infty; 1) \cup (2; 3) \cup (4; +\infty)$. □

Bài 7. Giải các bất phương trình sau:

- a) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} \geq \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x};$
 b) $(x+2)^2(x-1)(x+5) + 8 \geq 0.$

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} \geq \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} &\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \geq \frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} \\ &\Leftrightarrow \frac{-2}{x^2-1} \geq \frac{-2}{x^2-2x} \\ &\Leftrightarrow \frac{-2}{x^2-1} + \frac{2}{x^2-2x} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-2(x^2-2x) + 2(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2-2x)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4x-2}{(x^2-1)(x^2-2x)} \geq 0. \end{aligned}$$

Bảng xét dấu của vế trái:

x	$-\infty$	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	$+\infty$
$4x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2-1	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	$+$
x^2-2x	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
VT	$-$	$+$	$-$	0	$+$	$-$	$+$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $T = (-1; 0) \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right) \cup (2; +\infty)$.

b) $(x+2)^2(x-1)(x+5) + 8 \geq 0 \Leftrightarrow (x+2)^2(x^2+4x-5) + 8 \geq 0 \Leftrightarrow (x+2)^2[(x+2)^2-9] + 8 \geq 0.$

Đặt $t = (x+2)^2 \geq 0$, bất phương trình đã cho có dạng $t(t-9) + 8 \geq 0 \Leftrightarrow t^2 - 9t + 8 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 1 \\ t \geq 8 \end{cases}.$

Thay $t = (x+2)^2$ ta có:

$$\begin{cases} (x+2)^2 \leq 1 \\ (x+2)^2 \geq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x+2 \leq 1 \\ -2\sqrt{2} \leq x+2 \leq 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq -1 \\ -2-2\sqrt{2} \leq x \leq -2+2\sqrt{2} \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $T = [-2-2\sqrt{2}; -2+2\sqrt{2}]$. □

Bài 8. Xác định tham số m để hệ $\begin{cases} x^2 - 2mx - m^2 + m - 1 > 0 \\ \frac{2x-1}{x+1} > \frac{x-3}{x} \end{cases}$ có nghiệm.

Lời giải.

$$\text{Xét hệ } \begin{cases} x^2 - 2mx - m^2 + m - 1 > 0 & (1) \\ \frac{2x-1}{x+1} > \frac{x-3}{x} & (2) \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow \frac{(2x-1)x - (x+1)(x-3)}{x(x+1)} > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 + x + 3}{x(x+1)} > 0 \Leftrightarrow x(x+1) > 0 \text{ vì } x^2 + x + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra tập nghiệm của (2) là $T_2 = (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$.

Giải (1): Ta có $\Delta' = 2m^2 - m + 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Suy ra tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - 2mx - m^2 + m - 1$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) và (1) luôn có tập nghiệm $T_1 = (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

Suy ra tập nghiệm của hệ $T = T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$.

Vậy hệ đã cho luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m . □

Bài 9. Tìm giá trị của tham số m để $f(x) = (m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m-6 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

- Với $m = 2$ thì $f(x) = 2x + 4 \Rightarrow f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$. Suy ra $m = 2$ không phải giá trị cần tìm.
- Với $m \neq 2$ thì $f(x)$ là tam thức bậc hai. Do đó, ta có

$$\begin{aligned} f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \begin{cases} m-2 > 0 \\ \Delta' = (2m-3)^2 - (m-2)(5m-6) \leq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ -m^2 + 4m - 3 \leq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ \begin{cases} m \geq 3 \Leftrightarrow m \geq 3. \\ m \leq 1 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Kết luận: $m \geq 3$. □

Bài 10. Chứng minh bất đẳng thức $x^2 + 2y^2 - 2xy + 2x - 4y + 3 > 0$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = x^2 + 2y^2 - 2xy + 12x - 4y + 3 = x^2 - 2(y-1)x + (2y^2 - 4y + 3)$.

Suy ra $f(x)$ là tam thức bậc hai đối với x .

Ta có $\Delta_x = (y-1)^2 - (2y^2 - 4y + 3) = -y^2 + 2y - 2 < 0, \forall y \in \mathbb{R}$.

Vậy $f(x) > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ (đpcm). □

Bài 11. Cho $a^3 > 36$ và $abc = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a^3}{3} + b^2 + c^2 > ab + bc + ca$.

Lời giải.

Do $a^3 > 36$ nên $a > 0$ và $abc = 1 \Rightarrow bc = \frac{1}{a}$.

Bất đẳng thức đã cho tương đương với $(b+c)^2 - a(b+c) - \frac{3}{a} + \frac{a^2}{3} > 0$.

Xét tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - ax - \frac{3}{a} + \frac{a^2}{3}$.

$$\Delta = a^2 - 4\left(-\frac{3}{a} + \frac{a^2}{3}\right) = a^2 + \frac{12}{a} - \frac{4a^2}{3} = \frac{3a^3 - 4a^3 + 36}{3a} = \frac{36 - a^3}{3a} > 0.$$

Suy ra $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow (b+c)^2 - a(b+c) - \frac{3}{a} + \frac{a^2}{3} > 0$ (đpcm). □

C CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$, có $\Delta = b^2 - 4ac$. Điều kiện để $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là

- A. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$

Lời giải.

$f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ khi $a > 0$ và $\Delta < 0$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 2. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$, có $\Delta = b^2 - 4ac$. Điều kiện để $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là

- A. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$

Lời giải.

$f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ khi $a > 0$ và $\Delta \leq 0$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 3. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$, có $\Delta = b^2 - 4ac$. Điều kiện để $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là

- A. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$

Lời giải.

$f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ khi $a < 0$ và $\Delta < 0$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 4. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$, có $\Delta = b^2 - 4ac$. Điều kiện để $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là

- A. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$

Lời giải.

$f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ khi $a < 0$ và $\Delta \leq 0$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 5. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$, có $\Delta = b^2 - 4ac$. Khi đó mệnh đề nào đúng?

- A. $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. B. $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
C. $f(x)$ không đổi dấu. D. Tồn tại x để $f(x) = 0$.

Lời giải.

Vì $\Delta < 0$ và $a \neq 0$ nên $f(x)$ không đổi dấu trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 6. Tam thức bậc hai $f(x) = 2x^2 + 2x + 5$ nhận giá trị dương khi và chỉ khi

- A. $x \in (0; +\infty)$. B. $x \in (-2; +\infty)$. C. $x \in \mathbb{R}$. D. $x \in (-\infty; 2)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} a = 2 > 0 \\ \Delta' = 1^2 - 2 \cdot 5 = -9 < 0 \end{cases}$ nên $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 7. Tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ nhận giá trị dương khi và chỉ khi

- A. $x \in (-\infty; 2)$. B. $x \in (3; +\infty)$. C. $x \in (2; +\infty)$. D. $x \in (2; 3)$.

Lời giải.

Ta có

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3. \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$		
$f(x)$		-	0	+	0	-

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $f(x) > 0$ khi $x \in (2; 3)$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 8. Tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + (\sqrt{5} - 1)x - \sqrt{5}$ nhận giá trị dương khi và chỉ khi

- A. $x \in (-\sqrt{5}; 1)$. B. $x \in (-\sqrt{5}; +\infty)$.
C. $x \in (-\infty; -\sqrt{5}) \cup (1; +\infty)$. D. $x \in (-\infty; 1)$.

Lời giải.

Ta có

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\sqrt{5}. \end{cases}$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\sqrt{5}$	1	$+\infty$		
$f(x)$		+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $f(x) > 0$ khi $x \in (-\infty; -\sqrt{5})$ hoặc $x \in (1; +\infty)$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 9. Tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ nhận giá trị không âm khi và chỉ khi

- A. $x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$. B. $x \in [1; 2]$.
C. $x \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$. D. $x \in (1; 2)$.

Lời giải.

Ta có

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2. \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$		
$f(x)$		-	0	+	0	-

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $f(x) \geq 0$ khi $1 \leq x \leq 2$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 10. Số giá trị nguyên của x để tam thức $f(x) = 2x^2 - 7x - 9$ nhận giá trị âm là

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải.

Ta có

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{9}{2} \end{cases}.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	$\frac{9}{2}$	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $f(x) < 0$ khi $-1 < x < \frac{9}{2}$.

Mà x nguyên nên $x \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 11. Tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + (1 - \sqrt{3})x - 8 - 5\sqrt{3}$

A. dương với mọi $x \in \mathbb{R}$.B. âm với mọi $x \in \mathbb{R}$.C. âm với mọi $x \in (-2 - \sqrt{3}; 1 + 2\sqrt{3})$.D. âm với mọi $x \in (-\infty; 1)$.

Lời giải.

Ta có

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 - \sqrt{3} \\ x = 1 + 2\sqrt{3} \end{cases}.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-2 - \sqrt{3}$	$1 + 2\sqrt{3}$	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $f(x) < 0$ khi $-2 - \sqrt{3} < x < 1 + 2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 12. Tam thức bậc hai $f(x) = (1 - \sqrt{2})x^2 + (5 - 4\sqrt{2})x - 3\sqrt{2} + 6$

A. dương với mọi $x \in \mathbb{R}$.B. dương với mọi $x \in (-3; \sqrt{2})$.C. dương với mọi $x \in (-4; \sqrt{2})$.D. âm với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = \sqrt{2} \end{cases}.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-3	$\sqrt{2}$	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $f(x) > 0$ khi $-3 < x < \sqrt{2}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 13. Cho $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề đúng là

- A. $f(x) < 0, \forall x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$.
 B. $f(x) \leq 0, \forall x \in [1; 3]$.
 C. $f(x) \geq 0, \forall x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.
 D. $f(x) > 0, \forall x \in [1; 3]$.

Lời giải.

Ta có

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1. \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$		
$f(x)$		+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $f(x) \leq 0$ khi $1 \leq x \leq 3$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 14. Cho tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 + 5x - 6$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $f(x) < 0$ với $2 < x < 3$ và $f(x) > 0$ với $x < 2$ hoặc $x > 3$.
 B. $f(x) < 0$ với $3 < x < 2$ và $f(x) > 0$ với $x < 3$ hoặc $x > 2$.
 C. $f(x) > 0$ với $2 < x < 3$ và $f(x) < 0$ với $x < 2$ hoặc $x > 3$.
 D. $f(x) > 0$ với $3 < x < 2$ và $f(x) < 0$ với $x < 3$ hoặc $x > 2$.

Lời giải.

Ta có

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 2. \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu ta được $f(x) > 0$ với $2 < x < 3$ và $f(x) < 0$ với $x < 2$ hoặc $x > 3$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 15. Cho các tam thức $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$; $g(x) = -x^2 + 3x - 4$; $h(x) = 4 - 3x^2$. Số tam thức bậc hai đổi dấu trên $\mathbb{R}$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải.

Vì $f(x) = 0$ vô nghiệm, $g(x) = 0$ vô nghiệm, $h(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt nên chỉ có $h(x)$ đổi dấu trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 16. Tập nghiệm của bất phương trình $2x^2 - 7x - 15 \geq 0$ là

- A. $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right] \cup [5; +\infty)$.
 B. $\left[\frac{3}{2}; 5\right]$.
 C. $(-\infty; -5] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.
 D. $\left[-5; \frac{3}{2}\right]$.

Lời giải.

Ta có

$$2x^2 - 7x - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	5	$+\infty$	
$x+1$	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu ta được tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right] \cup [5; +\infty)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 17. Tập nghiệm của bất phương trình $-x^2 + 6x + 7 \geq 0$ là

A. $(-\infty; -1] \cup [7; +\infty)$.

B. $[-1; 7]$.

C. $(-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$.

D. $[-7; 1]$.

Lời giải.

Ta có

$$-x^2 + 6x + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	7	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu ta được tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = [-1; 7]$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 18. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $-2x^2 + 3x - 7 \geq 0$.

A. $S = 0$.

B. $S = \{0\}$.

C. $S = \emptyset$.

D. $S = \mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $2x^2 + 3x - 7 = 0$ vô nghiệm.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu ta được tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \emptyset$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 19. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 3x + 2 < 0$ là

A. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

B. $(2; +\infty)$.

C. $(1; 2)$.

D. $(-\infty; 1)$.

Lời giải.

Ta có

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$		
$f(x)$		+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu ta được tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (1; 2)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 20. Tập nghiệm của bất phương trình $-x^2 + 5x - 4 < 0$ là

A. $[1; 4]$.

B. $(1; 4)$.

C. $(-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$.

D. $(-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có

$$-x^2 + 5x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 1. \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$		
$f(x)$		-	0	+	0	-

Dựa vào bảng xét dấu ta được tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 21. Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{2}x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + 1 < 0$ là

A. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$.

B. $\emptyset$.

C. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$.

D. $\left(-\infty; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có

$$\sqrt{2}x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = 1. \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$+\infty$	
$f(x)$	+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu ta được tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 22. Tập nghiệm của bất phương trình $6x^2 + x - 1 \leq 0$ là

A. $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right]$.

B. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$.

C. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

D. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Ta có

$$6x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$	
VT	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu ta được tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right]$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 23. Số thực dương lớn nhất thỏa mãn $x^2 - x - 12 \leq 0$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải.

Ta có

$$x^2 - x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -3 \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-3	4	$+\infty$	
VT	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu ta được nghiệm của bất phương trình đã cho là $-3 \leq x \leq 4$.

Suy ra số thực dương lớn nhất thỏa $x^2 - x - 12 \leq 0$ là 4.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 24. Bất phương trình nào sau đây có tập nghiệm là $\mathbb{R}$?

A. $-3x^2 + x - 1 \geq 0$. B. $-3x^2 + x - 1 > 0$. C. $-3x^2 + x - 1 < 0$. D. $3x^2 + x - 1 \leq 0$.

Lời giải.

Xét $f(x) = -3x^2 + x - 1$ có $a = -3 < 0$, $\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-1) = -11 < 0$ nên $f(x) < 0, \forall x$ tức là tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 25. Cho bất phương trình $x^2 - 8x + 7 \geq 0$. Trong các tập hợp sau đây, tập nào có chứa phần tử **không phải** là nghiệm của bất phương trình đã cho.

A. $(-\infty; 0]$.

B. $[8; +\infty)$.

C. $(-\infty; 1]$.

D. $[6; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có

$$x^2 - 8x + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 7 \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	1	7	$+\infty$	
VT	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu ta được tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; 1] \cup [7; +\infty)$.

Vì $\frac{13}{2} \in [6; +\infty)$ và $\frac{13}{2} \notin S$ nên $[6; +\infty)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 26. Giải bất phương trình $x(x+5) \leq 2(x^2+2)$.

A. $x \leq 1$.

B. $1 \leq x \leq 4$.

C. $x \in (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$.

D. $x \geq 4$.

Lời giải.

Bất phương trình

$$x(x+5) \leq 2(x^2+2) \Leftrightarrow x^2+5x \leq 2x^2+4 \Leftrightarrow x^2-5x+4 \geq 0.$$

Xét phương trình

$$x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=4. \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$		
$x^2 - 5x + 4$		+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu, ta được nghiệm của bất phương trình đã cho là $x \in (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 27. Biểu thức $(3x^2-10x+3)(4x-5)$ âm khi và chỉ khi

A. $x \in \left(-\infty; \frac{5}{4}\right)$.

B. $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{4}; 3\right)$.

C. $x \in \left(\frac{1}{3}; \frac{5}{4}\right) \cup (3; +\infty)$.

D. $x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right)$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = (3x^2-10x+3)(4x-5)$.

Ta có

$$\begin{aligned} 3x^2-10x+3=0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=\frac{1}{3}. \end{cases} \\ 4x-5=0 &\Leftrightarrow x=\frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{4}$	3	$+\infty$	
$3x^2 - 10x + 3$	+	0	−	−	0	+
$4x - 5$	−	−	0	+	−	+
$f(x)$	−	0	+	0	−	+

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $f(x) < 0$ khi $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{4}; 3\right)$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 28. Cặp bất phương trình nào sau đây là tương đương?

A. $x - 2 \leq 0$ và $x^2(x - 2) \leq 0$.

B. $x - 2 < 0$ và $x^2(x - 2) > 0$.

C. $x - 2 < 0$ và $x^2(x - 2) < 0$.

D. $x - 2 \geq 0$ và $x^2(x - 2) \geq 0$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = x^2(x - 2)$.

Ta có

$$x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
x^2	+	0	+	+
$x - 2$	-	-	0	+
$f(x)$	-	0	-	+

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy rằng bất phương trình $x - 2 \geq 0$ tương đương với $x^2(x - 2) \geq 0$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 29. Biểu thức $(4 - x^2)(x^2 + 2x - 3)(x^2 + 5x + 9)$ âm khi

A. $x \in (1; 2)$.

B. $x \in (-3; -2) \cup (1; 2)$.

C. $x \geq 4$.

D. $x \in (-\infty; -3) \cup (-2; 1) \cup (2; +\infty)$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = (4 - x^2)(x^2 + 2x - 3)(x^2 + 5x + 9)$.

Ta có

$$4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2. \end{cases}$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3. \end{cases}$$

$$x^2 + 5x + 9 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-3	-2	1	2	$+\infty$
$4 - x^2$	-	-	0	+	0	-
$x^2 + 2x - 3$	+	0	-	0	+	+
$x^2 + 5x + 9$	+	+	+	+	+	+
$f(x)$	-	0	+	0	+	-

Vậy $(4 - x^2)(x^2 + 2x - 3)(x^2 + 5x + 9) < 0$ khi $x \in (-\infty; -3) \cup (-2; 1) \cup (2; +\infty)$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 30. Tập nghiệm của bất phương trình $x^3 + 3x^2 - 6x - 8 \geq 0$ là

A. $[-4; -1] \cup [2; +\infty)$.

B. $(-4; -1) \cup (2; +\infty)$.

C. $[-1; +\infty)$.D. $(-\infty; -4] \cup [-1; 2]$.**Lời giải.**

Bất phương trình

$$x^3 + 3x^2 - 6x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 5x + 4) \geq 0.$$

Ta có

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 4 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = -1. \end{cases} \\ x - 2 = 0 &\Leftrightarrow x = 2. \end{aligned}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-4	-1	2	$+\infty$
$x^2 + 5x + 4$	+	0	-	0	+
$x - 2$	-	-	-	0	+
$(x - 2)(x^2 + 5x + 4)$	-	0	+	0	+

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-4; -1] \cup [2; +\infty)$.Chọn đáp án **A**

□

Câu 31. Biểu thức $f(x) = \frac{11x + 3}{-x^2 + 5x - 7}$ nhận giá trị dương khi và chỉ khi

A. $x \in \left(-\frac{3}{11}; +\infty\right)$. B. $x \in \left(-\frac{3}{11}; 5\right)$. C. $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{11}\right)$. D. $x \in \left(-5; -\frac{3}{11}\right)$.

Lời giải.Ta có $-x^2 + 5x - 7 = -(x^2 - 5x + 7) = -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó,

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow 11x + 3 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{3}{11}.$$

Vậy $f(x)$ nhận giá trị dương khi $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{11}\right)$.Chọn đáp án **C**

□

Câu 32. Tập nghiệm S của bất phương trình $\frac{x - 7}{4x^2 - 19x + 12} > 0$ là

A. $S = \left(-\infty; \frac{3}{4}\right) \cup (4; 7)$. B. $S = \left(\frac{3}{4}; 4\right) \cup (7; +\infty)$.
 C. $S = \left(\frac{3}{4}; 4\right) \cup (4; +\infty)$. D. $S = \left(\frac{3}{4}; 7\right) \cup (7; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định

$$4x^2 - 19x + 12 \neq 0 \Leftrightarrow (x - 4)(4x - 3) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 4 \\ x \neq \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Ta có

$$x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = 7.$$

$$4x^2 - 19x + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{3}{4}$	4	7	$+\infty$
$x - 7$	—	—	—	0	+
$4x^2 - 19x + 12$	+	0	—	0	+
$\frac{x - 7}{4x^2 - 19x + 12}$	—	+	—	0	+

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(\frac{3}{4}; 4\right) \cup (7; +\infty)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 33. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của x thỏa mãn $\frac{x+3}{x^2-4} - \frac{1}{x+2} < \frac{2x}{2x-x^2}$?

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải.

Điều kiện xác định

$$\begin{cases} x^2 - 4 \neq 0 \\ x + 2 \neq 0 \\ 2x - x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 2. \end{cases}$$

Ta có

$$\frac{x+3}{x^2-4} - \frac{1}{x+2} < \frac{2x}{2x-x^2} \Leftrightarrow \frac{x+3}{x^2-4} - \frac{1}{x+2} + \frac{2x}{x^2-2x} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x+9}{x^2-4} < 0.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{9}{2}$	-2	2	$+\infty$
$2x + 9$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x^2 - 4$	$+$	$+$	0	$-$	0
$\frac{2x + 9}{x^2 - 4}$	$-$	0	$+$	$-$	$+$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; -\frac{9}{2}\right) \cup (-2; 2)$.

Do đó chỉ có duy nhất một giá trị nguyên dương của x ($x = 1$) thỏa mãn yêu cầu.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 34. Tập nghiệm S của bất phương trình $\frac{-2x^2+7x+7}{x^2-3x-10} \leq -1$ là

A. hai khoảng.

B. một khoảng và một đoạn.

C. hai khoảng và một đoạn.

D. ba khoảng.

Lời giải.

Điều kiện xác định

$$x^2 - 3x - 10 \neq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-5) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq 5. \end{cases}$$

Ta có

$$\frac{-2x^2+7x+7}{x^2-3x-10} \leq -1 \Leftrightarrow \frac{-2x^2+7x+7}{x^2-3x-10} + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+4x-3}{x^2-3x-10} \leq 0.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	1	3	5	$+\infty$
$-x^2 + 4x - 3$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$
$x^2 - 3x - 10$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{-x^2 + 4x - 3}{x^2 - 3x - 10}$	$-$	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -2) \cup [1; 3] \cup (5; +\infty)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 35. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của x thỏa mãn bất phương trình $\frac{x^4 - x^2}{x^2 + 5x + 6} \leq 0$?

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải.

Ta có

$$\frac{x^4 - x^2}{x^2 + 5x + 6} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2(x^2 - 1)}{x^2 + 5x + 6} \leq 0.$$

Vì $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên bất phương trình trên tương đương

$$\begin{cases} x^2 = 0 \\ \frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x + 6} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x + 6} \leq 0. \end{cases}$$

Ta có

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1. \end{cases}$$

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -3. \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-3	-2	-1	1	$+\infty$
$x^2 - 1$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0
$x^2 + 5x + 6$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x + 6}$	$+$	$-$	$+$	0	$-$	0

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $f(x) \leq 0$ khi $x \in (-3; -2) \cup [-1; 1]$.

Kết hợp với $x \in \mathbb{Z}$, ta được $x \in \{-1; 0; 1\}$.

Vậy có tất cả 3 giá trị nguyên cần tìm.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 36. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 2}$.

A. $\mathcal{D} = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$.

B. $\mathcal{D} = [2; +\infty)$.

C. $\mathcal{D} = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$.

D. $\mathcal{D} = \left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi $2x^2 - 5x + 2 \geq 0$. Ta có

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(2x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$	
$2x^2 - 5x + 2$	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy

$$2x^2 - 5x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty).$$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 37. Giá trị nguyên dương lớn nhất để hàm số $y = \sqrt{5 - 4x - x^2}$ xác định là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi $5 - 4x - x^2 \geq 0$.

Ta có

$$5 - 4x - x^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -5 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-5	1	$+\infty$	
$5 - 4x - x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy

$$5 - 4x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-5; 1].$$

Vậy nghiệm dương lớn nhất để hàm số xác định là $x = 1$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 38. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \sqrt{(2 - \sqrt{5})x^2 + (15 - 7\sqrt{5})x + 25 - 10\sqrt{5}}$.

A. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

B. $\mathcal{D} = (-\infty; 1)$.

C. $\mathcal{D} = [-5; 1]$.

D. $\mathcal{D} = [-5; \sqrt{5}]$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $f(x) = (2 - \sqrt{5})x^2 + (15 - 7\sqrt{5})x + 25 - 10\sqrt{5} \geq 0$.

Ta có

$$(2 - \sqrt{5})x^2 + (15 - 7\sqrt{5})x + 25 - 10\sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow (x + 5)(x - \sqrt{5}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = \sqrt{5} \end{cases}.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-5	$\sqrt{5}$	$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy

$$(2 - \sqrt{5})x^2 + (15 - 7\sqrt{5})x + 25 - 10\sqrt{5} \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-5; \sqrt{5}].$$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = [-5; \sqrt{5}]$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 39. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{3-x}{\sqrt{4-3x-x^2}}$.

A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1; -4\}$.

B. $\mathcal{D} = [-4; 1]$.

C. $\mathcal{D} = (-4; 1)$.

D. $\mathcal{D} = (-\infty; 4) \cup (1; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $4 - 3x - x^2 > 0$.

Ta có

$$4 - 3x - x^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -4. \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$
$4 - 3x - x^2$		$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy

$$4 - 3x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-4; 1).$$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = (-4; 1)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 40. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{3x^2 - 4x + 1}}$.

A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{1; \frac{1}{3}\right\}$.

B. $\mathcal{D} = \left(\frac{1}{3}; 1\right)$.

C. $\mathcal{D} = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$.

D. $\mathcal{D} = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup [1; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $3x^2 - 4x + 1 > 0$.

Ta có

$$3x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(3x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
$3x^2 - 4x + 1$		$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy

$$3x^2 - 4x + 1 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty).$$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 41. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \sqrt{x^2 + x - 6} + \frac{1}{\sqrt{x + 4}}$.

A. $\mathcal{D} = [-4; -3] \cup [2; +\infty)$.

B. $\mathcal{D} = (-4; +\infty)$.

C. $\mathcal{D} = (-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$.

D. $\mathcal{D} = (-4; -3] \cup [2; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} x^2 + x - 6 \geq 0 \\ x + 4 > 0. \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned} x^2 + x - 6 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3. \end{cases} \\ x + 4 = 0 &\Leftrightarrow x = -4. \end{aligned}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-4	-3	2	$+\infty$	
$x^2 + x - 6$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$x + 4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy

$$\begin{cases} x^2 + x - 6 \geq 0 \\ x + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-4; -3] \cup [2; +\infty).$$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = (-4; -3] \cup [2; +\infty)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 42. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \sqrt{x^2 + 2x + 3} + \frac{1}{\sqrt{5 - 2x}}$.

A. $\mathcal{D} = \left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

B. $\mathcal{D} = \left(-\infty; \frac{5}{2}\right]$.

C. $\mathcal{D} = \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

D. $\mathcal{D} = \left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} x^2 + 2x + 3 \geq 0 \\ 5 - 2x > 0. \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 3 &= 0 \text{ vô nghiệm.} \\ 5 - 2x &= 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$x^2 + 2x + 3$	+	+	+
$5 - 2x$	+	0	-

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 3 \geq 0 \\ 5 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{5}{2}\right).$$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$.

Chọn đáp án **A**

□

- Câu 43.** Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $f(x) = \sqrt{\frac{3-3x}{-x^2-2x+15}} - 1$.
- A. $\mathcal{D} = [4; +\infty)$.
 B. $\mathcal{D} = (-5; -3] \cup (3; 4]$.
 C. $\mathcal{D} = (-\infty; -5)$.
 D. $\mathcal{D} = (-5; 3) \cup (3; 4]$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\frac{3-3x}{-x^2-2x+15} - 1 \geq 0$.

$$\text{Đặt } g(x) = \frac{3-3x}{-x^2-2x+15} - 1 = \frac{x^2-x-12}{-x^2-2x+15}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} x^2 - x - 12 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -3. \end{cases} \\ -x^2 - 2x + 15 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-5	-3	3	4	$+\infty$
$x^2 - x - 12$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$+$
$-x^2 - 2x + 15$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$-$	$+$	0	$-$	$+$	0

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy

$$\frac{3-3x}{-x^2-2x+15} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-5; -3] \cup (3; 4].$$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = (-5; -3] \cup (3; 4]$.

Chọn đáp án **B**

□

- Câu 44.** Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \sqrt{\frac{x^2+5x+4}{2x^2+3x+1}}$.

- A. $\mathcal{D} = [-4; -1) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.
 B. $\mathcal{D} = (-\infty; -4] \cup \left(-1; -\frac{1}{2}\right)$.
 C. $\mathcal{D} = (-\infty; -4] \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.
 D. $\mathcal{D} = \left[-4; -\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 4}{2x^2 + 3x + 1} \geq 0$.

Ta có

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 4 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -4. \end{cases} \\ 2x^2 + 3x + 1 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-4	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$x^2 + 5x + 4$	+	0	-	0	+
$2x^2 + 3x + 1$	+	+	0	-	0
$f(x)$	+	0	-	-	+

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy

$$\frac{x^2 + 5x + 4}{2x^2 + 3x + 1} \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -4] \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = (-\infty; -4] \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 45. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $f(x) = \sqrt{\sqrt{x^2 + x - 12} - 2\sqrt{2}}$.

A. $\mathcal{D} = (-5; 4]$.

B. $\mathcal{D} = (-\infty; -5) \cup (4; +\infty)$.

C. $\mathcal{D} = (-\infty; -4] \cup [3; +\infty)$.

D. $\mathcal{D} = (-\infty; -5] \cup [4; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + x - 12} - 2\sqrt{2} \geq 0 \\ x^2 + x - 12 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 12 \geq 8 \\ x^2 + x - 12 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + x - 12 \geq 8 \Leftrightarrow x^2 + x - 20 \geq 0.$$

Ta có

$$x^2 + x - 20 = 0 \Leftrightarrow (x + 5)(x - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 4. \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-5	4	$+\infty$
$x^2 + x - 20$	+	0	-	0

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy

$$x^2 + x - 20 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -5] \cup [4; +\infty).$$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = (-\infty; -5] \cup [4; +\infty)$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 46. Phương trình $x^2 - (m + 1)x + 1 = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

- A. $m > 1$. B. $-3 < m < 1$.
C. $m \leq -3$ hoặc $m \geq 1$. D. $-3 \leq m \leq 1$.

Lời giải.

Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow (m + 1)^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 1.$$

Vậy $-3 < m < 1$ là các giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 47. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình sau vô nghiệm

$$(2m^2 + 1)x^2 - 4mx + 2 = 0.$$

- A. $m \in \mathbb{R}$. B. $m > 3$. C. $m = 2$. D. $m > -\frac{3}{5}$.

Lời giải.

Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi

$$\begin{cases} 2m^2 + 1 \neq 0 \\ \Delta' = 4m^2 - 2(2m^2 + 1) = -2 < 0 \end{cases}, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Vậy phương trình đã cho luôn vô nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 48. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(m - 2)x^2 + 2(2m - 3)x + 5m - 6 = 0$ vô nghiệm.

- A. $m < 0$. B. $m > 2$.
C. $m > 3$ hoặc $m < 1$. D. $m \neq 2$ và $1 < m < 3$.

Lời giải.

Xét phương trình $(m - 2)x^2 + 2(2m - 3)x + 5m - 6 = 0$.

(*)

Trường hợp 1. Với $m - 2 = 0$ hay $m = 2$, khi đó

$$(*) \Leftrightarrow 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

Suy ra với $m = 2$ thì phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = -2$.

Do đó $m = 2$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2. Với $m - 2 \neq 0$ hay $m \neq 2$, khi đó để phương trình (*) vô nghiệm khi

$$\begin{aligned} \Delta' < 0 &\Leftrightarrow (2m - 3)^2 - (m - 2)(5m - 6) < 0 \\ &\Leftrightarrow 4m^2 - 12m + 9 - (5m^2 - 16m + 12) < 0 \\ &\Leftrightarrow -m^2 + 4m - 3 < 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp hai trường hợp, ta được $m > 3$ hoặc $m < 1$ là các giá trị cần tìm.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 49. Phương trình $mx^2 - 2mx + 4 = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

- A. $0 < m < 4$. B. $m < 0$ hoặc $m > 4$. C. $0 \leq m \leq 4$. D. $0 \leq m < 4$.

Lời giải.

Xét phương trình $mx^2 - 2mx + 4 = 0$. (*)

Trường hợp 1. Với $m = 0$, khi đó phương trình (*) trở thành $4 = 0$, vô lý.

Suy ra với $m = 0$ thì phương trình (*) vô nghiệm.

Trường hợp 2. Với $m \neq 0$, khi đó để phương trình (*) vô nghiệm khi

$$\Delta' < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4.$$

Kết hợp hai trường hợp, ta được $0 \leq m < 4$ là các giá trị cần tìm.

Chọn đáp án **D** □

Câu 50. Phương trình $(m^2 - 4)x^2 + 2(m - 2)x + 3 = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

- A. $m \geq 0$. B. $m = \pm 2$.
C. $m \geq 2$ hoặc $m < -4$. D. $m \geq 2$ hoặc $m \leq -4$.

Lời giải.

Xét phương trình $(m^2 - 4)x^2 + 2(m - 2)x + 3 = 0$. (*)

Trường hợp 1. Với $m^2 - 4 = 0$ hay $m = \pm 2$.

- Khi $m = 2$ phương trình (*) trở thành $3 = 0$, vô lý.
- Khi $m = -2$ phương trình (*) trở thành $-8x + 3 = 0$ có nghiệm $x = \frac{3}{8}$.

Suy ra với $m = 2$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Trường hợp 2. Với $m^2 - 4 \neq 0$ hay $m \neq \pm 2$ khi đó để phương trình (*) vô nghiệm khi

$$\begin{aligned} \Delta' < 0 &\Leftrightarrow (m - 2)^2 - 3(m^2 - 4) < 0 \\ &\Leftrightarrow m^2 - 4m + 4 - 3m^2 + 12 < 0 \\ &\Leftrightarrow -2m^2 - 4m + 16 < 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -4. \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp hai trường hợp, ta được $m \geq 2$ hoặc $m < -4$ là các giá trị cần tìm.

Chọn đáp án **C** □

Câu 51. Cho tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - bx + 3$. Với giá trị nào của b thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm?

- A. $b \in [-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}]$. B. $b \in (-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$.
C. $b \in (-\infty; -2\sqrt{3}] \cup [2\sqrt{3}; +\infty)$. D. $b \in (-\infty; -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}; +\infty)$.

Lời giải.

Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm khi

$$\begin{aligned} \Delta \geq 0 &\Leftrightarrow (-b)^2 - 4 \cdot 3 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow b^2 - 12 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 2\sqrt{3} \\ b \leq -2\sqrt{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $b \in (-\infty; -2\sqrt{3}] \cup [2\sqrt{3}; +\infty)$ là các giá trị cần tìm.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 52. Phương trình $x^2 + 2(m+2)x - 2m - 1 = 0$ (với m là tham số) có nghiệm khi

A. $m = -1$ hoặc $m = -5$.

B. $-5 \leq m \leq -1$.

C. $m < -5$ hoặc $m > -1$.

D. $m \leq -5$ hoặc $m \geq -1$.

Lời giải.

Phương trình $x^2 + 2(m+2)x - 2m - 1 = 0$ có $\Delta' = (m+2)^2 + 2m + 1 = m^2 + 6m + 5$.

Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi

$$\begin{aligned}\Delta' \geq 0 &\Leftrightarrow -m^2 - 4m - 2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m \leq -5. \end{cases}\end{aligned}$$

Vậy $m \leq -5$ hoặc $m \geq -1$ là các giá trị cần tìm.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 53. Cho phương trình $2x^2 + 2(m+2)x + 3 + 4m + m^2 = 0$, với m là tham số. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

Lời giải.

Phương trình $2x^2 + 2(m+2)x + 3 + 4m + m^2 = 0$ có $\Delta' = (m+2)^2 - 2(m^2 + 4m + 3) = -m^2 - 4m - 2$.

Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi

$$\begin{aligned}\Delta' \geq 0 &\Leftrightarrow -m^2 - 4m - 2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow -2 - \sqrt{2} \leq m \leq -2 + \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Vậy với $m \in [-2 - \sqrt{2}; -2 + \sqrt{2}]$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-3; -2; -1\}$ là các giá trị cần tìm.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 54. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $(m-5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0$ có nghiệm.

A. $m \neq 5$.

B. $-\frac{10}{3} \leq m \leq 1$.

C. $m \leq -\frac{10}{3}$ hoặc $m \geq 1$.

D. $m \leq -\frac{10}{3}$ hoặc $1 \leq m \neq 5$.

Lời giải.

Xét phương trình $(m-5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0$

(*)

Trường hợp 1. Với $m-5=0$ hay $m=5$ khi đó (*) trở thành $-20x + 3 = 0$ có nghiệm $x = \frac{3}{20}$.

Suy ra với $m=1$ thì phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = \frac{3}{20}$.

Trường hợp 2. Với $m-5 \neq 0$ hay $m \neq 5$ khi đó để phương trình (*) có nghiệm khi

$$\begin{aligned}\Delta' \geq 0 &\Leftrightarrow (-2m)^2 - (m-5)(m-2) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 4m^2 - (m^2 - 7m + 10) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 3m^2 + 7m - 10 \geq 0\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -\frac{10}{3} \end{cases}.$$

Do đó, với $1 \leq m \neq 5$ hoặc $m \leq -\frac{10}{3}$ thì phương trình (*) có nghiệm.

Kết hợp hai trường hợp, ta được $m \geq 1$ hoặc $m \leq -\frac{10}{3}$ là các giá trị cần tìm.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 55. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $(m-1)x^2 - 2(m+3)x - m + 2 = 0$ có nghiệm.

- A. Không tồn tại m . B. $m \in \mathbb{R}$. C. $-1 < m < 3$. D. $-2 < m < 2$.

Lời giải.

Xét phương trình $(m-1)x^2 - 2(m+3)x - m + 2 = 0$. (*)

Trường hợp 1. Với $m-1=0$ hay $m=1$ khi đó (*) trở thành $\Leftrightarrow -8x+1=0$ có nghiệm $x=\frac{1}{8}$.

Suy ra với $m=1$ thì phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x=\frac{1}{8}$.

Trường hợp 2. Với $m-1 \neq 0$ hay $m \neq 1$ khi đó để phương trình (*) có

$$\Delta' = (m+3)^2 - (m-1)(2-m) = 2m^2 + 3m + 11 = 2\left(m + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{79}{8} \geq 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Vì vậy, $\Delta' \geq 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Do đó, với $m \neq 1$ thì phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Kết hợp hai trường hợp, ta được $m \in \mathbb{R}$ là các giá trị cần tìm.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 56. Các giá trị của tham số m để tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - (m+2)x + 8m + 1$ đổi dấu hai lần là

- A. $m \leq 0$ hoặc $m \geq 28$. B. $m < 0$ hoặc $m > 28$.
C. $0 < m < 28$. D. $m > 0$.

Lời giải.

Tam thức bậc hai $f(x)$ đổi dấu hai lần khi $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt, tức là

$$\begin{aligned} \Delta > 0 &\Leftrightarrow (m+2)^2 - 4(8m+1) > 0 \\ &\Leftrightarrow m^2 - 28m > 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m > 28 \\ m < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $m < 0$ hoặc $m > 28$ là các giá trị cần tìm.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 57. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình $x^2 + (m+1)x + m - \frac{1}{3} = 0$ có nghiệm.

- A. $m \in \mathbb{R}$. B. $m > 1$. C. $-\frac{3}{4} < m < 1$. D. $m > -\frac{3}{4}$.

Lời giải.

Phương trình $x^2 + (m+1)x + m - \frac{1}{3} = 0$ có

$$\Delta = (m+1)^2 - 4\left(m - \frac{1}{3}\right) = m^2 - 2m + \frac{7}{3} = (m-1)^2 + \frac{4}{3} > 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 58. Cho phương trình $(m-1)x^2 + (3m-2)x + 3-2m = 0$, với m là tham số. Tìm các giá trị của m sao cho phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

A. $m \in \mathbb{R}$.

B. $m \neq 1$.

C. $-1 < m < 6$.

D. $-1 < m < 2$.

Lời giải.

Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a = m-1 \neq 0 \\ (3m-2)^2 - 4(m-1)(3-2m) > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} m \neq 1 \\ 17m^2 - 32m + 16 > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} m \neq 1 \\ 16(m-1)^2 + m^2 > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & m \neq 1. \end{aligned}$$

Do đó, với $m \neq 1$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 59. Phương trình $(m-1)x^2 - 2x + m+1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi

A. $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

B. $m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$.

C. $m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \setminus \{1\}$.

D. $m \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \setminus \{1\}$.

Lời giải.

Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi

$$\begin{aligned} & \begin{cases} m-1 \neq 0 \\ (-1)^2 - (m-1)(m+1) > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} m \neq 1 \\ -m^2 + 2 > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} m \neq 1 \\ -\sqrt{2} < m < \sqrt{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \setminus \{1\}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 60. Giá trị nào của m thì phương trình $(m-3)x^2 + (m+3)x - (m+1) = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

A. $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup (1; +\infty) \setminus \{3\}$.

B. $m \in \left(-\frac{3}{5}; 1\right)$.

C. $m \in \left(-\frac{3}{5}; +\infty\right)$.

D. $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Lời giải.

Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi

$$\begin{aligned} \begin{cases} m-3 \neq 0 \\ (m+3)^2 - 4(m-3)(m+1) > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} m-3 \neq 0 \\ 5m^2 - 2m - 3 > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ \begin{cases} m > 1 \\ m < -\frac{3}{5} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup (1; +\infty) \setminus \{3\}$ là các giá trị cần tìm.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 61. Tìm m để phương trình $x^2 - mx + m + 3 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

A. $m > 6$.

B. $m < 6$.

C. $6 > m > 0$.

D. $m > 0$.

Lời giải.

Phương trình đã cho có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m^2 - 4(m+3) > 0 \\ m > 0 \\ m+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m - 12 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m < -2 \\ m > 6 \end{cases} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 6.$$

Vậy $m > 6$ là giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 62. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(m-2)x^2 - 2mx + m + 3 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

A. $2 < m < 6$.

B. $m < -3$ hoặc $2 < m < 6$.

C. $m < 0$ hoặc $-3 < m < 6$.

D. $-3 < m < 6$.

Lời giải.

Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi

$$\begin{cases} m-2 \neq 0 \\ m^2 - (m-2)(m+3) > 0 \\ \frac{2m}{m-2} > 0 \\ \frac{m+3}{m-2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ -m+6 > 0 \\ \begin{cases} m < 0 \\ m > 2 \end{cases} \\ \begin{cases} m < -3 \\ m > 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ 2 < m < 6 \end{cases}$$

Vậy $m < -3$ hoặc $2 < m < 6$ là các giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 63. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $x^2 + 2(m+1)x + 9m - 5 = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt.

- A. $m < 6$.
 B. $\frac{5}{9} < m < 1$ hoặc $m > 6$.
 C. $m > 1$.
 D. $1 < m < 6$.

Lời giải.

Phương trình đã cho có hai nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} (m+1)^2 - (9m-5) > 0 \\ -2(m+1) < 0 \\ 9m-5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 7m + 6 > 0 \\ m > -1 \\ m > \frac{5}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > 6 \\ m > \frac{5}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{9} < m < 1 \\ m > 6. \end{cases}$$

Vậy $\frac{5}{9} < m < 1$ hoặc $m > 6$ là các giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 64. Phương trình $x^2 - (3m-2)x + 2m^2 - 5m - 2 = 0$ có hai nghiệm **không** âm khi

- A. $m \in \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$.
 B. $m \in \left[\frac{5+\sqrt{41}}{4}; +\infty\right)$.
 C. $m \in \left[\frac{2}{3}; \frac{5+\sqrt{41}}{4}\right]$.
 D. $m \in \left(-\infty; \frac{5-\sqrt{41}}{4}\right]$.

Lời giải.

Phương trình đã cho có hai nghiệm không âm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} (3m-2)^2 - 4(2m^2 - 5m - 2) \geq 0 \\ 3m-2 \geq 0 \\ 2m^2 - 5m - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 8m + 12 \geq 0 \\ m \geq \frac{2}{3} \\ \begin{cases} m \leq \frac{5-\sqrt{41}}{4} \\ m \geq \frac{5+\sqrt{41}}{4} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -6 \\ m \geq -2 \\ m \geq \frac{5+\sqrt{41}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{5+\sqrt{41}}{4}.$$

Vậy $m \in \left[\frac{5+\sqrt{41}}{4}; +\infty\right)$ là các giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 65. Phương trình $2x^2 - (m^2 - m + 1)x + 2m^2 - 3m - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu khi và chỉ khi

- A. $m < -1$ hoặc $m > \frac{5}{2}$.
 B. $-1 < m < \frac{5}{2}$.

C. $m \leq -1$ hoặc $m \geq \frac{5}{2}$.

D. $-1 \leq m \leq \frac{5}{2}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

$$2 \cdot (2m^2 - 3m - 5) < 0 \Leftrightarrow -1 < m < \frac{5}{2}.$$

Vậy $-1 < m < \frac{5}{2}$ là các giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 66. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(m^2 - 3m + 2)x^2 - 2m^2x - 5 = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

A. $m \in (1; 2)$.

B. $m \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

C. $m \neq 1$ và $m \neq 2$.

D. Không tồn tại m .

Lời giải.

Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

$$(m^2 - 3m + 2)(-5) < 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < 1. \end{cases}$$

Vậy $m \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$ là các giá trị cần tìm.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 67. Giá trị thực của tham số m để phương trình $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 2m = 0$ có hai nghiệm trái dấu trong đó nghiệm âm có trị tuyệt đối lớn hơn là

A. $0 < m < 2$.

B. $0 < m < 1$.

C. $1 < m < 2$.

D. $m > 1$ hoặc $m < 0$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 2m = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 + 2x - 2m = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - m)^2 + 2(x - m) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - m)(x - m + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m - 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu khi

$$m(m - 2) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 2. \quad (*)$$

Với $m \in (0; 2)$ suy ra $m > 0$ và $m - 2 < 0$, do đó theo bài ra ta có

$$|m - 2| > |m| \Leftrightarrow (m - 2)^2 > m^2 \Leftrightarrow -4m + 4 > 0 \Leftrightarrow m < 1.$$

Kết hợp với điều kiện (*) ta được $0 < m < 1$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 68. Với giá trị nào của m thì phương trình $(m-1)x^2 - 2(m-2)x + m-3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1 + x_2 + x_1x_2 < 1$?

- A. $1 < m < 2$. B. $1 < m < 3$. C. $m > 2$. D. $m > 3$.

Lời giải.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi

$$\begin{cases} m-1 \neq 0 \\ (m-2)^2 - (m-1)(m-3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 1.$$

Khi đó, ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m-4}{m-1} \\ x_1x_2 = \frac{m-3}{m-1}. \end{cases}$$

Theo bài ra, ta có

$$x_1 + x_2 + x_1x_2 < 1 \Leftrightarrow \frac{3m-7}{m-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{2m-6}{m-1} < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 3.$$

Kết hợp với $m \neq 1$ ta được $1 < m < 3$ là các giá trị cần tìm.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 69. Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $(m+1)x^2 - 2mx + m-2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} < 3$?

- A. $m < 2, m > 6$. B. $-2 < m < 2, m \neq -1, m > 6$.
C. $2 < m < 6$. D. $-2 < m < 6$.

Lời giải.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 0 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m+1 \neq 0 \\ m^2 - (m+1)(m-2) > 0 \\ \frac{m-2}{m+1} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m+2 > 0 \\ m-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m > -2 \\ m \neq 2. \end{cases}$$

Khi đó, ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m}{m+1} \\ x_1x_2 = \frac{m-2}{m+1}. \end{cases}$$

Theo bài ra, ta có

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{2m}{m-2} < 3 \Leftrightarrow \frac{m-6}{m-2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 6 \\ m < 2. \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện trên, ta được $-2 < m < 2, m \neq -1, m > 6$ là các giá trị cần tìm.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 70. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^2 - (m-1)x + m+2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} > 1$.

- A. $m \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (7; +\infty)$. B. $m \in (-\infty; -2) \cup \left(-2; -\frac{11}{10}\right)$.
 C. $m \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1)$. D. $m \in (7; +\infty)$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = x^2 - (m-1)x + m+2$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 0 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} (m-1)^2 - 4(m+2) > 0 \\ f(0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m - 7 > 0 \\ m+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 7 \\ m \neq -2. \end{cases} \quad (*)$$

Theo Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m-1 \\ x_1 x_2 = m+2. \end{cases}$

Theo đề bài ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} > 1 &\Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 x_2^2} > 1 \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{(x_1 x_2)^2} > 1 \Leftrightarrow \frac{(m-1)^2 - 2(m+2)}{(m+2)^2} > 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{8m+7}{(m+2)^2} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 8m+7 < 0 \\ m+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{7}{8} \\ m \neq -2. \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện (*) ta được $m \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1)$ là các giá trị cần tìm.

Chọn đáp án **C** □

Câu 71. Tam thức $f(x) = 3x^2 + 2(2m-1)x + m+4$ dương với mọi x khi

- A. $-1 < m < \frac{11}{4}$. B. $-\frac{11}{4} < m < 1$.
 C. $-\frac{11}{4} \leq m \leq 1$. D. $m < -1$ hoặc $m > \frac{11}{4}$.

Lời giải.

Tam thức $f(x)$ có $a = 3 > 0$. Do đó

$$f(x) > 0, \forall x \Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow (2m-1)^2 - 3(m+4) < 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 7m - 11 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < \frac{11}{4}.$$

Vậy $-1 < m < \frac{11}{4}$ là các giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **A** □

Câu 72. Tam thức $f(x) = -2x^2 + (m-2)x - m+4$ **không** dương với mọi x khi

- A. $m \in \mathbb{R} \setminus \{6\}$. B. $m \in \emptyset$. C. $m = 6$. D. $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Tam thức $f(x)$ có $a = -2 < 0$. Do đó

$$f(x) \leq 0, \forall x \Leftrightarrow (m-2)^2 + 8(-m+4) \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - 12m + 36 \leq 0 \Leftrightarrow (m-6)^2 \leq 0 \Leftrightarrow m = 6.$$

Vậy $m = 6$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án **C** □

Câu 73. Tam thức $f(x) = -2x^2 + (m+2)x + m - 4$ âm với mọi x khi

- A. $m < -14$ hoặc $m > 2$. B. $-14 \leq m \leq 2$.
C. $-2 < m < 14$. D. $-14 < m < 2$.

Lời giải.

Tam thức $f(x)$ có $a = -2 < 0$. Do đó

$$f(x) < 0, \forall x \Leftrightarrow (m+2)^2 + 8(m-4) < 0 \Leftrightarrow m^2 + 12m - 28 \leq 0 \Leftrightarrow -14 < m < 2.$$

Vậy $-14 < m < 2$ là các giá trị cần tìm.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 74. Tam thức $f(x) = x^2 - (m+2)x + 8m + 1$ **không** âm với mọi x khi

- A. $m > 28$. B. $0 \leq m \leq 28$. C. $m < 1$. D. $0 < m < 28$.

Lời giải.

Tam thức $f(x)$ có $a = 1 > 0$. Do đó

$$f(x) \geq 0, \forall x \Leftrightarrow (m+2)^2 - 4(8m+1) \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - 28m \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 28.$$

Vậy $0 \leq m \leq 28$ là các giá trị cần tìm.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 75. Bất phương trình $x^2 - mx - m \geq 0$ có nghiệm đúng với mọi x khi và chỉ khi

- A. $m \leq -4$ hoặc $m \geq 0$. B. $-4 < m < 0$.
C. $m < -4$ hoặc $m > 0$. D. $-4 \leq m \leq 0$.

Lời giải.

Tam thức $f(x) = x^2 - mx - m$ có hệ số $a = 1 > 0$. Do đó bất phương trình $f(x) \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $\forall x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$m^2 + 4m \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 0.$$

Vậy $-4 \leq m \leq 0$ là các giá trị cần tìm.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 76. Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình $-x^2 + (2m-1)x + m < 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

- A. $m = \frac{1}{2}$. B. $m = -\frac{1}{2}$. C. $m \in \mathbb{R}$. D. Không tồn tại m .

Lời giải.

Tam thức $f(x) = -x^2 + (2m-1)x + m$ có hệ số $a = -1 < 0$ nên bất phương trình $f(x) < 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi

$$(2m-1)^2 + 4m < 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 1 < 0, \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy không có giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 77. Bất phương trình $x^2 - (m+2)x + m + 2 \leq 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

A. $m \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

B. $m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

C. $m \in [-2; 2]$.

D. $m \in (-2; 2)$.

Lời giải.

Bất phương trình $f(x) = x^2 - (m+2)x + m + 2 \leq 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi $f(x) > 0$ nghiệm đúng với mọi x .

Tam thức $f(x) = x^2 - (m+2)x + m + 2$ có hệ số $a = 1 > 0$. Do đó

$$f(x) > 0, \forall x \Leftrightarrow (m+2)^2 - 4(m+2) < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2.$$

Vậy $m \in (-2; 2)$ là các giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 78. Tam thức $f(x) = (m^2 + 2)x^2 - 2(m+1)x + 1$ dương với mọi x khi

A. $m < \frac{1}{2}$.

B. $m \leq \frac{1}{2}$.

C. $m > \frac{1}{2}$.

D. $m \geq \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Tam thức $f(x)$ có hệ số $a = m^2 + 2 > 0, \forall m$. Do đó

$$f(x) > 0, \forall x \Leftrightarrow (m+1)^2 - (m^2 + 2) < 0 \Leftrightarrow 2m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}.$$

Vậy $m < \frac{1}{2}$ là giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 79. Tam thức $f(x) = (m-4)x^2 + (2m-8)x + m-5$ không dương với mọi x khi

A. $m \leq 4$.

B. $m \geq 4$.

C. $m < 4$.

D. $m > 4$.

Lời giải.

Trường hợp 1. Với $m = 4$, ta có $f(x) = -1 < 0$, luôn đúng với mọi x .

Trường hợp 2. Với $m \neq 4$, yêu cầu bài toán thỏa mãn khi

$$\begin{cases} m-4 < 0 \\ (m-4)^2 - (m-4)(m-5) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m-4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 4.$$

Kết hợp hai trường hợp ta được $m \leq 4$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 80. Tam thức $f(x) = mx^2 - mx + m + 3$ âm với mọi x khi

A. $m \in (-\infty; -4]$.

B. $m \in (-\infty; -4)$.

C. $m \in (-\infty; -4] \cup [0; +\infty)$.

D. $m \in (-\infty; -4] \cup (0; +\infty)$.

Lời giải.

Trường hợp 1. Với $m = 0$ thay vào ta được $f(x) = 3 < 0$ (vô lý) suy ra $m = 0$ không thỏa mãn.

Trường hợp 2. Với $m \neq 0$, yêu cầu bài toán thỏa mãn khi

$$\begin{cases} m < 0 \\ m^2 - 4m(m+3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -3m^2 - 12m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \begin{cases} m < -4 \\ m > 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m < -4.$$

Kết hợp hai trường hợp ta được $m < -4$ là các giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 81. Tam thức $f(x) = (m+2)x^2 + 2(m+2)x + m+3$ **không** âm với mọi x khi

- A. $m \geq -2$. B. $m \leq -2$. C. $m > -2$. D. $m < -2$.

Lời giải.

Trường hợp 1. Với $m = -2$, ta được $f(x) = 1 > 0$, luôn đúng với mọi x . Do đó $m = -2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2. Với $m \neq -2$, yêu cầu bài toán thỏa mãn khi

$$\begin{cases} m+2 > 0 \\ (m+2)^2 - (m+2)(m+3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ -m-2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2.$$

Kết hợp hai trường hợp ta được $m \geq -2$ là các giá trị cần tìm.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 82. Bất phương trình $(3m+1)x^2 - (3m+1)x + m+4 \geq 0$ có nghiệm đúng với mọi x khi và chỉ khi

- A. $m > -\frac{1}{3}$. B. $m \geq -\frac{1}{3}$. C. $m > 0$. D. $m > 15$.

Lời giải.

Xét bất phương trình $(3m+1)x^2 - (3m+1)x + m+4 \geq 0$. (*)

Trường hợp 1. Với $3m+1 = 0$ hay $m = -\frac{1}{3}$, bất phương trình (*) trở thành $4 - \frac{1}{3} \geq 0$ (luôn đúng).

Do đó $m = -\frac{1}{3}$ là giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2. Với $3m+1 \neq 0$ hay $m \neq -\frac{1}{3}$, bất phương trình (*) nghiệm đúng với mọi x khi

$$\begin{cases} 3m+1 > 0 \\ (3m+1)^2 - 4(3m+1)(m+4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{3} \\ 3m^2 + 46m + 15 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{3} \\ \begin{cases} m < -15 \\ m > -\frac{1}{3} \end{cases} \end{cases}$$

Kết hợp hai trường hợp, ta được $m \geq -\frac{1}{3}$ là các giá trị cần tìm.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 83. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $(2m^2 - 3m - 2)x^2 + 2(m-2)x - 1 \leq 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

- A. $\frac{1}{3} \leq m < 2$. B. $\frac{1}{3} \leq m \leq 2$. C. $m \geq \frac{1}{3}$. D. $m \leq 2$.

Lời giải.

Khi $2m^2 - 3m - 2 = 0$ ta được $m = -\frac{1}{2}$ hoặc $m = 2$.

Trường hợp 1. Khi $m = -\frac{1}{2}$ hoặc $m = 2$.

- Với $m = -\frac{1}{2}$, bất phương trình đã cho trở thành $-5x - 1 \leq 0$ có nghiệm $x \geq -\frac{1}{5}$, không nghiệm đúng với mọi x . Vậy $m = -\frac{1}{2}$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Với $m = 2$, bất phương trình đã cho trở thành $-1 \leq 0$, luôn nghiệm đúng với mọi x . Vậy $m = 2$ là giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2. Khi $m \neq -\frac{1}{2}$ và $m \neq 2$, yêu cầu bài toán thỏa mãn khi

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2m^2 - 3m - 2 < 0 \\ (m-2)^2 + (2m^2 - 3m - 2) \leq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2m^2 - 3m - 2 < 0 \\ 3m^2 - 7m + 2 \leq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -\frac{1}{2} < m < 2 \\ \frac{1}{3} \leq m \leq 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{3} \leq m < 2. \end{aligned}$$

Kết hợp hai trường hợp ta được $\frac{1}{3} \leq m \leq 2$ là các giá trị cần tìm.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 84. Cho bất phương trình $(m^2 - 4)x^2 + (m - 2)x + 1 < 0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình vô nghiệm.

A. $m \in \left(-\infty; -\frac{10}{3}\right] \cup [2; +\infty)$.

B. $m \in \left(-\infty; -\frac{10}{3}\right] \cup (2; +\infty)$.

C. $m \in \left(-\infty; -\frac{10}{3}\right) \cup (2; +\infty)$.

D. $m \in [2; +\infty)$.

Lời giải.

Khi $m^2 - 4 = 0$ ta được $m = \pm 2$.

Trường hợp 1. Khi $m = \pm 2$.

- Với $m = -2$ bất phương trình đã cho trở thành $-4x + 1 < 0$ có nghiệm $x > \frac{1}{4}$. Vậy $m = -2$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.
- Với $m = 2$ bất phương trình đã cho trở thành $1 < 0$, vô nghiệm. Vậy $m = 2$ là giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2. Khi $m \neq \pm 2$, yêu cầu bài toán thỏa mãn khi

$$\begin{aligned} & \begin{cases} m^2 - 4 > 0 \\ (m-2)^2 - 4(m^2 - 4) \leq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} m^2 - 4 > 0 \\ -3m^2 - 4m + 20 \leq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases} \\ \begin{cases} m \leq -\frac{10}{3} \\ m \geq 2 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -\frac{10}{3} \\ m > 2. \end{cases}$$

Kết hợp hai trường hợp, ta được $m \leq -\frac{10}{3}$ hoặc $m \geq 2$ là các giá trị cần tìm.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 85. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{(m+4)x^2 - (m-4)x - 2m+1}$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

- A. $m \leq 0$. B. $-\frac{20}{9} \leq m \leq 0$. C. $m \geq -\frac{20}{9}$. D. $m > 0$.

Lời giải.

$f(x)$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Trường hợp 1. Với $m = -4$ ta được

$$f(x) = 8x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{9}{8}.$$

Vậy $m = -4$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2. Với $m \neq -4$, yêu cầu bài toán thỏa mãn khi

$$\begin{aligned} & \begin{cases} m+4 > 0 \\ (m-4)^2 - 4(m+4)(1-2m) \leq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} m > -4 \\ 9m^2 + 20m \leq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} m > -4 \\ -\frac{20}{9} \leq m \leq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & -\frac{20}{9} \leq m \leq 0. \end{aligned}$$

Vậy $-\frac{20}{9} \leq m \leq 0$ là các giá trị cần tìm.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 86. Hàm số $y = \sqrt{(m+1)x^2 - 2(m+1)x + 4}$ có tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ khi

- A. $-1 \leq m \leq 3$. B. $-1 < m < 3$. C. $-1 < m \leq 3$. D. $m > -1$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định khi $f(x) = (m+1)x^2 - 2(m+1)x + 4 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. (*)

Trường hợp 1. Với $m = -1$ ta được $f(x) = 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy $m = -1$ là giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2. Với $m \neq -1$, khi đó (*) tương đương

$$\begin{cases} m+1 > 0 \\ (m+1)^2 - 4(m+1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m^2 - 2m - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ -1 \leq m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \leq 3.$$

Kết hợp hai trường hợp ta được $-1 \leq m \leq 3$ là các giá trị cần tìm.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 87. Cho biểu thức $f(x) = \frac{-x^2 + 4(m+1)x + 1 - 4m^2}{-4x^2 + 5x - 2}$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị thực của m để biểu thức luôn dương.

- A. $m \geq -\frac{5}{8}$. B. $m < -\frac{5}{8}$. C. $m < \frac{5}{8}$. D. $m \geq \frac{5}{8}$.

Lời giải.

Ta có $-4x^2 + 5x - 2 = -\left(2x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{7}{16} < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó $f(x) = \frac{-x^2 + 4(m+1)x + 1 - 4m^2}{-4x^2 + 5x - 2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ khi

$$\begin{aligned} & -x^2 + 4(m+1)x + 1 - 4m^2 < 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow & 4(m+1)^2 + 1 - 4m^2 < 0 \\ \Leftrightarrow & 8m + 5 < 0 \\ \Leftrightarrow & m < -\frac{5}{8}. \end{aligned}$$

Vậy $m < -\frac{5}{8}$ là các giá trị cần tìm.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 88. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $-2x^2 + 2(m-2)x + m - 2 < 0$ có nghiệm.

- A. $m \in \mathbb{R}$. B. $m \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.
C. $m \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$. D. $m \in [0; 2]$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = -2x^2 + 2(m-2)x + m - 2$ và $\Delta' = (m-2)^2 + 2(m-2) = m^2 - 2m$.

- Nếu $\Delta' < 0$ thì $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$, tức là bất phương trình đã cho có nghiệm.
- Nếu $\Delta' = 0$ thì $f(x) < 0, \forall x \neq \frac{m-2}{2}$, tức là bất phương trình đã cho có nghiệm.
- Nếu $\Delta' > 0$ thì $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$. Khi đó bất phương trình đã cho có nghiệm $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

Trong cả ba trường hợp ta thấy bất phương trình đều có nghiệm.

Vậy bất phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi giá trị của m .

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 89. Cho bất phương trình $-2x^2 + 2(m-2)x + m - 2 \geq 0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị thực của m để bất phương trình có nghiệm.

- A. $m \in \mathbb{R}$. B. $m \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.
C. $m \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$. D. $m \in [0; 2]$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = -2x^2 + 2(m-2)x + m - 2$ và $\Delta' = (m-2)^2 + 2(m-2) = m^2 - 2m$.

- Nếu $\Delta' < 0$ thì $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$, suy ra bất phương trình đã cho vô nghiệm.
- Nếu $\Delta' = 0$ hay $m = 0, m = 2$ thì bất phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{m-2}{2}$.
- Nếu $\Delta' > 0$ hay $m < 0, m > 2$ thì $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$. Khi đó bất phương trình đã cho có nghiệm $x \in [x_1; x_2]$.

Do đó trường hợp này có $m < 0$ hoặc $m > 2$ thỏa mãn.

Kết hợp các trường hợp ta được $m \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$ là các giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **C** □

Câu 90. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $mx^2 + 2(m+1)x + m - 2 > 0$ có nghiệm.

- A. $m \in \mathbb{R}$. B. $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right)$. C. $m \in \left(-\frac{1}{4}; +\infty\right)$. D. $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = mx^2 + 2(m+1)x + m - 2$ và $\Delta' = (m+1)^2 - m(m-2) = 4m + 1$.

- Với $m = 0$ ta được $f(x) = 2x - 2 > 0$ có nghiệm $x > 1$. Do đó $m = 0$ là giá trị thỏa mãn.
- Với $m > 0$ thì $\Delta' > 0$, nên $f(x) = 0$ có hai nghiệm $x_1 < x_2$. Do đó bất phương trình đã cho có nghiệm $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$. Vậy $m > 0$ là giá trị thỏa mãn.
- Với $m < 0$ bất phương trình đã cho có nghiệm khi

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow 4m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{4}.$$

Khi đó $f(x) = 0$ có hai nghiệm $x_1 < x_2$, suy ra bất phương trình đã cho có nghiệm $x \in (x_1; x_2)$.
Do đó $-\frac{1}{4} < m < 0$ là giá trị thỏa mãn.

Kết hợp các trường hợp ta được $m > -\frac{1}{4}$ là các giá trị cần tìm.

Chọn đáp án **C** □

Câu 91. Tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 < 0 \end{cases}$ là

A. $S = [1; 2)$. B. $S = [1; 3)$. C. $S = (1; 2]$. D. $S = [2; 3)$.

Lời giải.

Tập nghiệm của $2 - x \geq 0$ là $S_1 = (-\infty; 2]$.

Tập nghiệm của $x^2 - 4x + 3 < 0$ là $S_2 = (1; 3)$.

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình là $S = S_1 \cap S_2 = (1; 2]$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 92. Tìm các giá trị của x thỏa mãn hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0 \\ x^2 - 11x + 28 \geq 0 \end{cases}$

A. $x > 3$. B. $3 < x \leq 7$. C. $4 \leq x \leq 7$. D. $3 < x \leq 4$.

Lời giải.

Tập nghiệm của $x^2 - 2x - 3 > 0$ là $S_1 = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

Tập nghiệm của $x^2 - 11x + 28 \geq 0$ là $S_2 = (-\infty; 4] \cup [7; +\infty)$.

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình là $S = S_1 \cap S_2 = (-\infty; -1) \cup (3; 4] \cup [7; +\infty)$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 93. Tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ x^2 - 6x + 8 > 0 \end{cases}$ là

A. $S = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$. B. $S = (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$.
C. $S = (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$. D. $S = (1; 4)$.

Lời giải.

Tập nghiệm của $x^2 - 4x + 3 > 0$ là $S_1 = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.

Tập nghiệm của $x^2 - 6x + 8 > 0$ là $S_2 = (-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$.

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình là $S = S_1 \cap S_2 = (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 94. Tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \leq 0 \\ x^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$ là

A. $S = 1$.

B. $S = \{1\}$.

C. $S = [1; 2]$.

D. $S = [-1; 1]$.

Lời giải.

Tập nghiệm của $x^2 - 3x + 2 \leq 0$ là $S_1 = [1; 2]$.

Tập nghiệm của $x^2 - 1 \leq 0$ là $S_2 = [-1; 1]$.

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình là $S = S_1 \cap S_2 = \{1\}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 95. Giải hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x^2 - 4x + 1 > 0 \\ 3x^2 - 5x + 2 \leq 0 \end{cases}$

A. $x \geq 1$.

B. $x \leq \frac{1}{3}$.

C. Vô nghiệm.

D. $x \leq \frac{2}{3}$.

Lời giải.

Tập nghiệm của $3x^2 - 4x + 1 > 0$ là $S_1 = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$.

Tập nghiệm của $3x^2 - 5x + 2 \leq 0$ là $S_2 = \left[\frac{2}{3}; 1\right]$

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình là $S = S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 96. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x thỏa mãn $\begin{cases} -2x^2 - 5x + 4 < 0 \\ -x^2 - 3x + 10 > 0 \end{cases}$?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

Tập nghiệm của $-2x^2 - 5x + 4 < 0$ là $S_1 = \left(-\infty; \frac{-5 - \sqrt{57}}{4}\right) \cup \left(\frac{-5 + \sqrt{57}}{4}; +\infty\right)$.

Tập nghiệm của $-x^2 - 3x + 10 > 0$ là $S_2 = (-5; 2)$.

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình là $S = S_1 \cap S_2 = \left(-5; \frac{-5 - \sqrt{57}}{4}\right) \cup \left(\frac{-5 + \sqrt{57}}{4}; 2\right)$.

Do đó các giá trị nguyên của x thuộc tập S là $\{-4; 1\}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 97. Hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 9 < 0 \\ (x - 1)(3x^2 + 7x + 4) \geq 0 \end{cases}$ có nghiệm là

A. $-1 \leq x < 2$.

B. $-3 < x \leq -\frac{4}{3}$ hoặc $-1 \leq x \leq 1$.

C. $-\frac{4}{3} \leq x \leq -1$ và $1 \leq x \leq 3$.

D. $-\frac{4}{3} \leq x \leq -1$ hoặc $1 \leq x < 3$.

Lời giải.

Tập nghiệm của $x^2 - 9 < 0$ là $S_1 = (-3; 3)$.

Tập nghiệm của $(x - 1)(3x^2 + 7x + 4) \geq 0$ là $S_2 = \left[-\frac{4}{3}; -1\right] \cup [1; +\infty)$.

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình là $S = S_1 \cap S_2 = \left[-\frac{4}{3}; -1\right] \cup [1; 3)$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 98. Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 7x + 6 < 0 \\ |2x - 1| < 3 \end{cases}$ là

A. $(1; 2)$. B. $[1; 2]$. C. $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$. D. $\emptyset$.

Lời giải.

Tập nghiệm của $x^2 - 7x + 6 < 0$ là $S_1 = (1; 6)$.

Tập nghiệm của $|2x - 1| < 3$ là $S_2 = (-1; 2)$.

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình là $S = S_1 \cap S_2 = (1; 2)$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 99. Hệ bất phương trình nào sau đây vô nghiệm?

- A. $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0 \\ -2x^2 + x - 1 < 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 < 0 \\ -2x^2 + x - 1 > 0 \end{cases}$
- C. $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0 \\ 2x^2 + x + 1 > 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 < 0 \\ 2x^2 - x + 1 > 0 \end{cases}$

Lời giải.

- Hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0 \\ -2x^2 + x - 1 < 0 \end{cases}$.

Tập nghiệm của $x^2 - 2x - 3 > 0$ là $S_1 = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

Tập nghiệm của $-2x^2 + x - 1 < 0$ là $S_2 = \mathbb{R}$.

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình là $S = S_1 \cap S_2 = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

- Hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 < 0 \\ -2x^2 + x - 1 > 0 \end{cases}$.

Tập nghiệm của $x^2 - 2x - 3 < 0$ là $S_1 = (-1; 3)$.

Tập nghiệm của $-2x^2 + x - 1 > 0$ là $S_2 = \emptyset$.

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình là $S = S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

- Hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0 \\ 2x^2 + x + 1 > 0 \end{cases}$.

Tập nghiệm của $x^2 - 2x - 3 > 0$ là $S_1 = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

Tập nghiệm của $2x^2 + x + 1 > 0$ là $S_2 = \mathbb{R}$.

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình là $S = S_1 \cap S_2 = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

- Hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 < 0 \\ 2x^2 - x + 1 > 0 \end{cases}$.

Tập nghiệm của $x^2 - 2x - 3 < 0$ là $S_1 = (-1; 3)$.

Tập nghiệm của $2x^2 - x + 1 > 0$ là $S_2 = \mathbb{R}$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 = (-1; 3)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 100. Số nghiệm nguyên của hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 + 4x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 - x - 10 \leq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0 \end{cases}$ là

A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Lời giải.

Tập nghiệm của $x^2 + 4x + 3 \geq 0$ là $S_1 = (-\infty; -3] \cup [-1; +\infty)$.

Tập nghiệm của $2x^2 - x - 10 \leq 0$ là $S_2 = \left[-2; \frac{5}{2}\right]$.

Tập nghiệm của $2x^2 - 5x + 3 > 0$ là $S_3 = (-\infty; 1) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = [-1; 1) \cup \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right]$.

Suy ra nghiệm nguyên là $\{-1; 0; 2\}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 101. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $(m+1)x^2 - 2(m+1)x + 4 \geq 0$ có tập nghiệm $S = \mathbb{R}$?

A. $m > -1$. B. $-1 \leq m \leq 3$. C. $-1 < m \leq 3$. D. $-1 < m < 3$.

Lời giải.

Trường hợp 1: $m+1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$ bất phương trình đã cho trở thành

$$4 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (luôn đúng).} \quad (*)$$

Trường hợp 2: $m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$ bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ m^2 - 2m - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \leq 3 \quad (**)$$

Từ (*) và (**) ta suy ra $-1 \leq m \leq 3$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 102. Bất phương trình $\sqrt{2x-1} \leq 8-x$ có tập nghiệm là đoạn $[a; b]$. Tính giá trị biểu thức $2a+b$.

A. $2a+b=23$. B. $2a+b=18$. C. $2a+b=6$. D. $2a+b=14$.

Lời giải.

$$\sqrt{2x-1} \leq 8-x \Leftrightarrow \begin{cases} 8-x \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \\ 2x-1 \leq (8-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 8 \\ x \geq \frac{1}{2} \\ 2x-1 \leq 64-16x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 8 \\ x \geq \frac{1}{2} \\ x \leq 5 \text{ hoặc } x \geq 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 5.$$

Vậy $2a+b = 2 \cdot \frac{1}{2} + 5 = 6$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 103. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $(m+1)x^2 - 2(m+1)x + 4 \geq 0$ (1) có tập nghiệm $S = \mathbb{R}$?

- A. $m > -1$. B. $-1 \leq m \leq 3$. C. $-1 < m \leq 3$. D. $-1 < m < 3$.

Lời giải.

TH1: $m+1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$, bất phương trình (1) trở thành $4 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (luôn đúng) (*).

TH2: $m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$, bất phương trình (1) có tập nghiệm $S = \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ \Delta' = m^2 - 2m - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \leq 3 \quad (**).$$

Từ (*) và (**) ta suy ra: $-1 \leq m \leq 3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 104. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ chứa trong tập hợp nào sau đây?

- A. $(-1 - \sqrt{2}; 3 + \sqrt{2})$. B. $(-1; 3]$. C. $(-1 - \sqrt{2}; 3 - \sqrt{2})$. D. $[1; 3]$.

Lời giải.

Ta có $x^2 - 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$ nên $S = [-1; 3] \subset (-1 - \sqrt{2}; 3 + \sqrt{2})$

Chọn đáp án (A) □

Câu 105. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số $y = 1 - \sqrt{(m+1)x^2 - 2(m-1)x + 2 - 2m}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Lời giải.

Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R} \Leftrightarrow (m+1)x^2 - 2(m-1)x + 2 - 2m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - (m+1)(2-2m) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ 3m^2 - 2m - 1 \leq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ -\frac{1}{3} \leq m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq m \leq 1 \end{aligned}$$

Vậy có 2 giá trị nguyên $m = 0, m = 1$ để hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 106. Cho a là số thực dương. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $|x| \geq a \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -a \\ x \geq a. \end{cases}$ B. $|x| \geq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.
C. $|x| \leq a \Leftrightarrow x \leq a$. D. $|x| > a \Leftrightarrow x > a$.

Lời giải.

$$\text{Mệnh đề đúng là } |x| \geq a \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -a \\ x \geq a. \end{cases}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 107. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\sqrt{x^2 - 2x - 15} > 2x + 5$.

- A. $S = (-\infty; -3)$. B. $S = (-\infty; -3]$. C. $S = (-\infty; 3)$. D. $S = (-\infty; 3]$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sqrt{x^2 - 2x - 15} > 2x + 5 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5 < 0 \\ x^2 - 2x - 15 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{5}{2} \\ x \leq -3 \vee x \geq 5 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5 \geq 0 \\ x^2 - 2x - 15 > (2x + 5)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{5}{2} \\ -4 < x < -\frac{10}{3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x \leq -3. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 108. Gọi $S = [a; b]$ là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để với mọi số thực x ta có $\left| \frac{x^2 + x + 4}{x^2 - mx + 4} \right| \leq 2$. Tính tổng $a + b$.

- A. $a + b = 0$. B. $a + b = 1$. C. $a + b = -1$. D. $a + b = 4$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2 - mx + 4 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên suy ra $x^2 - mx + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Mà $x^2 + x + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên ta có

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^2 + x + 4}{x^2 - mx + 4} \right| \leq 2, \forall x \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \frac{x^2 + x + 4}{x^2 - mx + 4} \leq 2, \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow x^2 + x + 4 \leq 2(x^2 - mx + 4), \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow x^2 - (2m + 1)x + 4 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \Delta \leq 0 \Leftrightarrow (2m + 1)^2 - 16 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leq m \leq \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Vậy $a = -\frac{5}{2}, b = \frac{3}{2}$ nên $a + b = -1$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 109. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\sqrt{2(x^2 - 1)} \leq x + 1$ là

- A. 3. B. 1. C. 4. D. 2.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \sqrt{2(x^2 - 1)} \leq x + 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ 2x^2 - 2 \leq x^2 + 2x + 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \text{ hoặc } x \geq 1 \\ x^2 - 2x - 3 \leq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \text{ hoặc } x \geq 1 \\ -1 \leq x \leq 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 1 \leq x \leq 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy bất phương trình có 4 nghiệm nguyên.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 110. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-10; 10]$ của tham số m để bất phương trình $mx^2 + 4x - 1 > 0$ vô nghiệm?

A. 7.

B. 8.

C. 6.

D. 9.

Lời giải.

Bất phương trình $mx^2 + 4x - 1 > 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi bất phương trình $mx^2 + 4x - 1 \leq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Điều này tương đương với

$$\begin{cases} m < 0 \\ 2^2 - m \cdot (-1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -4.$$

Do đó, các giá trị nguyên của m trong đoạn $[-10; 10]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m \in \{-10; -9; -8; -7; -6; -5; -4\}$.

Có 7 giá trị m như vậy.

Chọn đáp án **A** □

Câu 111. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m^2(x^4 - 1) + m(x^2 - 1) - 6(x - 1) \geq 0$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A. $-\frac{3}{2}$.

B. 1.

C. $-\frac{1}{2}$.D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Bất phương trình

$$\begin{aligned} m^2(x^4 - 1) + m(x^2 - 1) - 6(x - 1) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (x - 1)[m^2(x^3 + x^2 + x + 1) + m(x + 1) - 6] &\geq 0. \end{aligned}$$

Đặt $f(x) = (x - 1)[m^2(x^3 + x^2 + x + 1) + m(x + 1) - 6]$.

Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ m^2(x^3 + x^2 + x + 1) + m(x + 1) - 6 = 0 \end{cases} \quad (1).$

Nếu $x = 1$ không là nghiệm của phương trình (1) thì $x = 1$ là nghiệm đơn của phương trình $f(x) = 0$.

Do vậy $f(x)$ đổi dấu khi qua nghiệm $x = 1$.

Suy ra mệnh đề $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là mệnh đề sai.

Do đó điều kiện cần để $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là $x = 1$ là nghiệm của phương trình (1).

Khi đó ta có $4m^2 + 2m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{3}{2} \end{cases}$.

- Với $m = 1$, ta có $f(x) = (x - 1)^2(x^2 + 2x + 4) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow m = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Với $m = -\frac{3}{2}$, ta có $f(x) = \frac{3}{4}(x - 1)^2(3x^2 + 6x + 7) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow m = -\frac{3}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $S = \left\{1; -\frac{3}{2}\right\} \Rightarrow$ Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng $-\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 112. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 3x + 1 + |x - 2| \leq 0$ có tất cả bao nhiêu số nguyên?

A. Vô số.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 x^2 - 3x + 1 + |x - 2| \leq 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2 - 3x + 1 + 2 - x \leq 0 \\ x < 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 3x + 1 + x - 2 \leq 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \leq 0 \\ x < 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 2x - 1 \leq 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ x < 2 \end{cases} \\ \begin{cases} 1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2} \\ x \geq 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x < 2 \\ 2 \leq x \leq 1 + \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 1 + \sqrt{2}. \text{ Với } x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{1; 2\}.
 \end{aligned}$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 113. Phương trình $\sqrt{x^2 - 1}(\sqrt{2x + 1} - x) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Lời giải.

- Điều kiện $\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$
- $\sqrt{x^2 - 1}(\sqrt{2x + 1} - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} = 0 \\ \sqrt{2x + 1} - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 & (1) \\ \sqrt{2x + 1} = x & (2) \end{cases}$

$$\text{Giải (1): } x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & (n) \\ x = -1 & (l) \end{cases}$$

$$\text{Giải (2): } \sqrt{2x + 1} = x \Rightarrow 2x + 1 = x^2 \text{ (do } x \geq 1) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} & (n) \\ x = 1 - \sqrt{2} & (l) \end{cases}$$

Vậy số nghiệm của phương trình là 2.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 114. Giải bất phương trình $4(x + 1)^2 < (2x + 10)(1 - \sqrt{3 + 2x})^2$ ta được tập nghiệm T là

A. $T = (-\infty; 3).$

B. $T = \left[-\frac{3}{2}; -1\right) \cup (-1; 3].$

C. $T = \left[-\frac{3}{2}; 3\right).$

D. $T = \left[-\frac{3}{2}; -1\right) \cup (-1; 3).$

Lời giải.

Cách 1:

$$\text{Xét bất phương trình } 4(x + 1)^2 < (2x + 10)(1 - \sqrt{3 + 2x})^2 \quad (1).$$

Điều kiện xác định: $x \geq -\frac{3}{2}, (*)$.

Với điều kiện $(*)$ ta có bất phương trình (1) tương đương với bất phương trình

$$\begin{aligned}
 &4(x + 1)^2 \cdot (1 + \sqrt{3 + 2x})^2 < (2x + 10) \cdot 4(x + 1)^2 \\
 &\Leftrightarrow 4(x + 1)^2 \cdot [4 + 2x + 2\sqrt{3 + 2x} - 2x - 10] < 0 \\
 &\Leftrightarrow (x + 1)^2 (2\sqrt{3 + 2x} - 6) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ 3 + 2x < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x < 3. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện (*) ta được $\begin{cases} x \neq -1 \\ -\frac{3}{2} \leq x < 3. \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình (1) là $T = \left[-\frac{3}{2}; -1\right) \cup (-1; 3)$.

Cách 2: dùng phương pháp loại suy cho trắc nghiệm.

Thay $x = -1$ vào bất phương trình (1) ta được $0 < 0$ (vô lý) $\Rightarrow$ loại $T = (-\infty; 3)$ và $T = \left[-\frac{3}{2}; 3\right)$.

Thay $x = 3$ vào bất phương trình (1) ta được $64 < 64$ (vô lý) $\Rightarrow$ loại $T = \left[-\frac{3}{2}; -1\right) \cup (-1; 3]$.

Vậy đáp án của bài là $T = \left[-\frac{3}{2}; -1\right) \cup (-1; 3)$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 115. Bất phương trình $\sqrt{2x-1} \leq 3x-2$ có tổng năm nghiệm nguyên nhỏ nhất là S . Giá trị của S là

A. $S = 15$.

B. $S = 20$.

C. $S = 10$.

D. $S = 5$.

Lời giải.

$$\sqrt{2x-1} \leq 3x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2 \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \\ 2x-1 \leq (3x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x \geq \frac{1}{2} \\ 9x^2 - 14x + 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x \leq \frac{5}{9} \vee x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Vậy tổng năm nghiệm nguyên nhỏ nhất là $T = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 116. Tập nghiệm của bất phương trình $(\sqrt{3x-2}-1)\sqrt{x^2+1} < 0$ là

A. $\left[1; \frac{3}{2}\right)$.

B. $[1; +\infty)$.

C. $\left[\frac{2}{3}; 1\right)$.

D. $[2; 3]$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 3x-2 \geq 0 \\ x^2+1 \geq 0 \text{ (luôn đúng)} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} (\sqrt{3x-2}-1)\sqrt{x^2+1} < 0 &\Leftrightarrow \sqrt{3x-2}-1 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{3x-2} < 1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2 \geq 0 \\ 3x-2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm là $S = \left[\frac{2}{3}; 1\right)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 117. Biết tập nghiệm của bất phương trình $x - \sqrt{2x+7} \leq 4$ là $[a; b]$. Tính giá trị của biểu thức $P = 2a + b$.

A. $P = 2$.

B. $P = 17$.

C. $P = 11$.

D. $P = -1$.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương với

$$\sqrt{2x+7} \geq x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 < 0 \\ 2x+7 \geq 0 \\ x-4 \geq 0 \\ 2x+7 \geq (x-4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{7}{2} \leq x < 4 \\ 4 \leq x \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{7}{2} \leq x \leq 9.$$

Vậy $a = -\frac{7}{2}$, $b = 9$. Do đó $P = 2$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 118. Bất phương trình $\sqrt{2x-1} \leq 3x-2$ có tổng 5 nghiệm nguyên nhỏ nhất là

A. 10.

B. 20.

C. 15.

D. 5.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{2x-1} \leq 3x-2 &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2 \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \\ 2x-1 \leq (3x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x \geq \frac{1}{2} \\ 9x^2-14x+5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x \in \left(-\infty; \frac{5}{9}\right] \cup [1; +\infty) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x \in [1; +\infty). \end{aligned}$$

Suy ra 5 nghiệm nguyên nhỏ nhất là 1; 2; 3; 4; 5. Tổng 5 nghiệm nguyên trên là $1+2+3+4+5=15$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 119. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $(m+1)x^2-2(m+1)x+4 \geq 0$ (1) có tập nghiệm $S=R$?

A. $m > -1$.

B. $-1 \leq m \leq 3$.

C. $-1 < m \leq 3$.

D. $-1 < m < 3$.

Lời giải.

TH1: $m+1=0 \Leftrightarrow m=-1$ bất phương trình (1) trở thành $4 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ (luôn đúng) (*)

TH2: $m+1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$ bất phương trình (1) có tập nghiệm $S=R$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ \Delta' = m^2-2m-3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \leq 3 (**)$$

Từ (*) và (**) ta suy ra: $-1 \leq m \leq 3$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 120. Tam thức $f(x) = 3x^2 + 2(2m-1)x + m+4$ dương với mọi x khi

A. $-\frac{11}{4} < m < 1$.

B. $m < -1$ hoặc $m > \frac{11}{4}$.

C. $-1 < m < \frac{11}{4}$.

D. $-\frac{11}{4} \leq m \leq 1$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = 3x^2 + 2(2m-1)x + m+4$

$$\text{Khi đó } f(x) > 0; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0 \\ \Delta' = (2m-1)^2 - 3(m+4) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 7m - 11 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < \frac{11}{4}.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 121. Gọi S là tập các giá trị m thỏa mãn hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} \sqrt[4]{x^2 - 1} + m(\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 1}) + 2019m \leq 0 \\ mx^2 + 3m - \sqrt{x^4 - 1} \geq 0. \end{cases}$$

Trong tập S có bao nhiêu phần tử là số nguyên?

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 4.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$.

Xét bất phương trình $mx^2 + 3m - \sqrt{x^4 - 1} \geq 0 \Leftrightarrow m(x^2 + 3) \geq \sqrt{x^4 - 1} \Rightarrow m \geq 0$.

- Với $m = 0$, hệ phương trình trở thành $\begin{cases} \sqrt[4]{x^4 - 1} \leq 0 \\ -\sqrt{x^4 - 1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 1$.
- Với $m > 0$, bất phương trình $\sqrt[4]{x^2 - 1} + m(\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 1}) + 2019m \leq 0$ vô nghiệm vì

$$\sqrt[4]{x^2 - 1} + m(\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 1}) + 2019m > 0, \forall x \geq 1.$$

Vậy có duy nhất giá trị $m = 0$ thỏa mãn bài.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 122. Biết tập nghiệm của bất phương trình $x^2 + 2mx + 2m^2 - 5 \leq 0$ là đoạn $[1; 3]$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m \in \left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. B. $m \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. C. $m \in \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$. D. $m \in \left(-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

Lời giải.

Xét $\Delta' = -m^2 + 5$.

- Trường hợp $\Delta' < 0 \Leftrightarrow |m| > \sqrt{5}$ thì $x^2 + 2mx + 2m^2 - 5 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Nên trường hợp này không thỏa yêu cầu bài toán.
- Trường hợp $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{5}$ thì $x^2 + 2mx + 2m^2 - 5 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $x^2 + 2mx + 2m^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x = -m = \pm\sqrt{5}$.
- Trường hợp $\Delta' > 0 \Leftrightarrow |m| < \sqrt{5}$ thì $x^2 + 2mx + 2m^2 - 5 \leq 0$ có tập nghiệm là $[x_1; x_2]$, với x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 + 2mx + 2m^2 - 5 = 0$.

Vậy, yêu cầu bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi 1 và 3 là hai nghiệm của phương trình $x^2 + 2mx + 2m^2 - 5 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2m + 2m^2 - 5 = 0 \\ 9 + 6m + 2m^2 - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 + 2m - 4 = 0 \\ 2m^2 + 6m + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2 \text{ (thỏa điều kiện } |m| < \sqrt{5} \text{)}.$$

Kết luận $m = -2$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 123. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 - 2(m-3)x + 2m^2 - 9m + 11}}{x^2 - x + 1}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $\begin{cases} m \leq 1 \\ m \geq 2 \end{cases}$ B. $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 2 \end{cases}$ C. $1 \leq m \leq 2$. D. $-2 \leq m \leq 1$.

Lời giải.

Vì phương trình $x^2 - x + 1 = 0$ vô nghiệm nên hàm số y xác định khi $x^2 - 2(m-3)x + 2m^2 - 9m + 11 \geq 0$.
Ta có $\Delta' = (m-3)^2 - (2m^2 - 9m + 11) = -m^2 + 3m - 2$.

Để hàm số y xác định $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow -m^2 + 3m - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ m \geq 2 \end{cases}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 124. Phương trình $mx^2 - 2mx + 4 = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

A. $\begin{cases} m < 0 \\ m > 4 \end{cases}$ B. $0 \leq m \leq 4$. C. $0 < m < 4$. D. $0 \leq m < 4$.

Lời giải.

Xét phương trình $mx^2 - 2mx + 4 = 0$ (*)

- Với $m = 0$, từ (*) ta có $4 = 0$ (vô lý). Suy ra phương trình vô nghiệm.
- Với $m \neq 0$, phương trình (*) vô nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' = m^2 - 4m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$.

Vậy phương trình $mx^2 - 2mx + 4 = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi $0 \leq m < 4$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 125. Cho $a, b, c \in [-1; 2]$, biết $a+b+c = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2$.

A. 3. B. 6. C. 0. D. 12.

Lời giải.

Ta có $a, b, c \in [-1; 2] \Rightarrow \begin{cases} (a+1)(a-2) \leq 0 \\ (b+1)(b-2) \leq 0 \\ (c+1)(c-2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 \leq a+2 \\ b^2 \leq b+2 \\ c^2 \leq c+2 \end{cases}$.

Từ đó ta có $P = a^2 + b^2 + c^2 \leq a + b + c + 6$ hay $P \leq 6$.

Dấu "=" xảy ra khi 2 trong 3 số bằng -1 và một số bằng 2 .

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 6 .

Chọn đáp án (B) □

Câu 126. Có bao nhiêu giá trị nguyên x để tam thức bậc hai $-x^2 + 5x - 6$ luôn dương?

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải.

Ta có $-x^2 + 5x - 6 > 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3$.

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên không có giá trị nào của x thỏa mãn.

Chọn đáp án (A) □

Câu 127. Tam thức bậc hai $x^2 - 5x - 6$ luôn dương khi

A. $x < -1$ hoặc $x > 6$. B. $-1 < x < 6$. C. $x \leq -1$ hoặc $x \geq 6$. D. $-1 \leq x \leq 6$.

Lời giải.

Ta có $x^2 - 5x - 6 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 6 \end{cases}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 128. Tam thức bậc hai $-x^2 + 5x - 4$ không âm khi

- A. $x < 1$ hoặc $x > 4$. B. $1 < x < 4$. C. $x \leq 1$ hoặc $x \geq 4$. D. $1 \leq x \leq 4$.

Lời giải.

Ta có $-x^2 + 5x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 4$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 129. Có bao nhiêu giá trị nguyên x để tam thức bậc hai $x^2 - 5x + 4$ luôn âm?

- A. 0. B. 1. C. 4. D. 2.

Lời giải.

Ta có $x^2 - 5x + 4 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 4$.

Mặt khác $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{2, 3\}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 130. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - x - 6 \leq 0$ là

- A. $(-3; 2)$. B. $[-2; 3]$. C. $(-2; 3)$. D. $[-3; 2]$.

Lời giải.

Ta có $x^2 - x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 3$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = [-2; 3]$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 131. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $-5x^2 + 4x + 12 > 0$.

- A. $\left(-\infty; -\frac{6}{5}\right) \cup (2; +\infty)$. B. $\left(-2; \frac{6}{5}\right)$.
C. $\left(-\frac{6}{5}; 2\right)$. D. $(-\infty; -2) \cup \left(\frac{6}{5}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Ta có $-5x^2 + 4x + 12 > 0 \Leftrightarrow -\frac{6}{5} < x < 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left(-\frac{6}{5}; 2\right)$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 132. Tập hợp $T = (-1; 3)$ là tập nghiệm của bất phương trình nào dưới đây?

- A. $-x^2 + 2x + 3 < 0$. B. $3x^2 - 2x - 1 > 0$. C. $x^2 + 2x - 3 < 0$. D. $x^2 - 2x - 3 < 0$.

Lời giải.

- Phương trình $f(x) = -x^2 + 2x + 3 = 0$ có hai nghiệm là -1 và 3 ; hệ số $a = -1 < 0$ nên có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

- Phương trình $f(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 0$ có hai nghiệm là $-\frac{1}{3}$ và 1 ; hệ số $a = 3 > 0$ nên có bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

- Phương trình $f(x) = x^2 + 2x - 3 = 0$ có hai nghiệm là 1 và -3 ; hệ số $a = 1 > 0$ nên có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

- Phương trình $f(x) = x^2 - 2x - 3 = 0$ có hai nghiệm là -1 và 3 ; hệ số $a = 1 > 0$ nên có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ các bảng xét dấu, ta được $T = (-1; 3)$ là tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 2x - 3 < 0$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 133. Bất phương trình nào dưới đây có tập nghiệm là $\mathbb{R}$?

- A. $x^2 + 5x - 7 < 0$. B. $-x^2 + x - 5 < 0$.
C. $x^2 - 4x + 4 > 0$. D. $-2x^2 + 9x - 13 > 0$.

Lời giải.

- Xét phương trình $f(x) = x^2 - 5x - 7 = 0$ có hai nghiệm là $x = \frac{-5 \pm \sqrt{53}}{2}$ nên không thỏa điều kiện đầu bài.
- Xét phương trình $f(x) = -x^2 + x - 5 = 0$ vô nghiệm và có hệ số $a < 0$ nên thỏa điều kiện đầu bài.
- Xét phương trình $f(x) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ do đó không thỏa.
- Xét phương trình $f(x) = -2x^2 + 9x - 13 = 0$ vô nghiệm và có hệ số $a = -2 < 0$ nên bất phương trình $-2x^2 + 9x - 13 > 0$ vô nghiệm.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 134. Bất phương trình nào trong các bất phương trình sau vô nghiệm?

- A. $2x^2 - x + 5 \leq 0$. B. $2x^2 + 3x - 5 > 0$. C. $x^2 - 6x + 9 \leq 0$. D. $2x^2 - x + 5 > 0$.

Lời giải.

- Xét phương trình $f(x) = 2x^2 - x + 5 = 0$ vô nghiệm và có hệ số $a = 2 > 0$ nên bất phương trình $2x^2 - x + 5 \leq 0$ vô nghiệm.
- Xét phương trình $f(x) = 2x^2 + 3x - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt và $a > 0$ nên không thỏa điều kiện đầu bài.
- Xét phương trình $f(x) = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$, có hệ số $a = 1 > 0$ nên không thỏa điều kiện đầu bài.
- Xét phương trình $f(x) = 2x^2 - x + 5 = 0$ vô nghiệm và có hệ số $a > 0$ nên không thỏa điều kiện đầu bài.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 135. Tìm tập xác định của hàm số $f(x) = \sqrt{2x^2 - 7x - 15}$.

- A. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup (5; +\infty)$. B. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup [5; +\infty)$.

C. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup [5; +\infty)$.

D. $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right] \cup [5; +\infty)$.

Lời giải.Điều kiện xác định $2x^2 - 7x - 15 \geq 0$.Phương trình $f(x) = 2x^2 - 7x - 15$ có hai nghiệm là $x_1 = -\frac{3}{2}$ và $x_2 = 5$ nên có bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	5	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy tập xác định là $S = \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup [5; +\infty)$.Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 136. Cho bất phương trình $x^2 - 6x + 5 \geq 0$. Trong các tập hợp sau đây, tập nào có chứa phần tử **không phải** là nghiệm của bất phương trình đã cho?

A. $(-\infty; 0]$.

B. $[6; +\infty)$.

C. $(-\infty; 1]$.

D. $[4; +\infty)$.

Lời giải.Phương trình $f(x) = x^2 - 6x + 5$ có hai nghiệm là $x_1 = 1$, $x_2 = 5$ và có hệ số $a > 0$ nên có bảng xét dấu

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Do đó tập có chứa phần tử **không phải** là nghiệm của bất phương trình đã cho là $[4; +\infty)$.Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 137. Giải bất phương trình $\frac{x^2 + 4}{x^2 + 7x + 12} \leq 0$.

A. $(3; 4)$.

B. $(-4; -3)$.

C. $[-4; -3]$.

D. $[3; 4]$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 + 7x + 12}$.

- Phương trình $x^2 + 4 = 0$ vô nghiệm và có hệ số $a > 0$.
- Phương trình $x^2 + 7x + 12 = 0$ có hai nghiệm là -4 ; -3 và có hệ số $a > 0$.

Khi đó, ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-4	-3	$+\infty$	
$x^2 + 4$	+		+		+
$x^2 + 7x + 12$	+	0	-	0	+
$f(x)$	+		-		+

Vậy bất phương trình $\frac{x^2 + 4}{x^2 + 7x + 12} \leq 0$ có tập nghiệm là $S = (-4; -3)$.Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 138. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 + x + 1 > 0$ là

- A. $\emptyset$. B. $\mathbb{R}$. C. $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$. D. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Lời giải.

Phương trình $f(x) = x^2 + x + 1 = 0$ vô nghiệm và có hệ số $a > 0$ nên bất phương trình $x^2 + x + 1 > 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 139. Tập nghiệm của bất phương trình $2x^2 + 3x + 5 \leq 0$ là

- A. $\mathbb{R}$. B. $\mathbb{R} \setminus \left\{1; \frac{5}{2}\right\}$. C. $\emptyset$. D. $\left\{1; \frac{5}{2}\right\}$.

Lời giải.

Phương trình $f(x) = 2x^2 + 3x + 5 = 0$ vô nghiệm và có hệ số $a > 0$ nên bất phương trình $2x^2 + 3x + 5 \leq 0$ có tập nghiệm là $\emptyset$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 140. Bất phương trình $x^2 + 4x + 4 > 0$ có tập nghiệm là

- A. $\mathbb{R}$. B. $\{-2\}$. C. $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$. D. $\emptyset$.

Lời giải.

Phương trình $f(x) = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ và có hệ số $a > 0$ nên có bảng xét dấu là

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$+$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 141. Bất phương trình $3x^2 - 6x + 9 \geq 0$ có tập nghiệm là

- A. $\{1\}$. B. $\mathbb{R}$. C. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. D. $[1; +\infty)$.

Lời giải.

Phương trình $f(x) = 3x^2 - 6x + 9 = 0$ vô nghiệm và có hệ số $a > 0$ nên bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 142. Bất phương trình $x^2 - 10x + 25 \leq 0$ có tập nghiệm là

- A. $\emptyset$. B. $\mathbb{R} \setminus \{5\}$. C. $\{5\}$. D. $(-\infty; 5]$.

Lời giải.

Phương trình $f(x) = x^2 - 10x + 25 = 0 \Leftrightarrow (x - 5)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 5$ và có hệ số $a > 0$ nên có bảng xét dấu là

x	$-\infty$	5	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$+$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S = \{5\}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 143. Tập nghiệm của bất phương trình $3x^2 - 5x - 8 < 0$ là

- A. $\emptyset$. B. $\left(-1; \frac{8}{3}\right)$. C. $\mathbb{R} \setminus \left[-1; \frac{8}{3}\right]$. D. $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Phương trình $f(x) = 3x^2 - 5x - 8 = 0$ có hai nghiệm là $x_1 = -1$; $x_2 = \frac{8}{3}$ và có hệ số $a > 0$ nên có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	$\frac{8}{3}$	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Do đó, tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-1; \frac{8}{3}\right)$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 144. Tập nghiệm của bất phương trình $-3x^2 + 2x + 1 < 0$ là

- A. $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$. B. $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}; 1\right\}$.
C. $\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$. D. $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Phương trình $f(x) = -3x^2 + 2x + 1 = 0$ có nghiệm $x_1 = -\frac{1}{3}$; $x_2 = 1$ và có hệ số $a < 0$ nên có bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S = \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 145. Tìm tập hợp nghiệm nguyên của bất phương trình $-2x^2 + 2x + 1 \geq 0$.

- A. $S = \left\{-\frac{1}{2}; 0; 1\right\}$. B. $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$. C. $S = \{1\}$. D. $S = \{0; 1\}$.

Lời giải.

Phương trình $f(x) = -2x^2 + 2x + 1 = 0$ có hai nghiệm là $x_1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$, $x_2 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ và có hệ số $a < 0$ nên có bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Vậy tập hợp nghiệm nguyên của bất phương trình $-2x^2 + 2x + 1 \geq 0$ là $S = \{0; 1\}$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 146. Tính tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $4x^2 - 3x - 7 < 0$.

A. 2.

B. 0.

C. -1.

D. 1.

Lời giải.

Phương trình $f(x) = 4x^2 - 3x - 7 = 0$ có hai nghiệm là $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{7}{4}$ và có hệ số $a > 0$ nên có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		$\frac{7}{4}$		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	0	+	

Vậy bất phương trình có các nghiệm nguyên là 0, 1 nên có tổng các nghiệm nguyên là 1.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 147. Tìm tập hợp nghiệm nguyên của bất phương trình $x^2 - x - 6 \leq 0$ được ký hiệu là S . Hãy chọn câu **đúng**.

A. $S \subset (-2; 3)$.B. $S = (-2; 3)$.C. $S = (-2; 3]$.D. $S \subset (-3; 4)$.

Câu 148. Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x - 4 < 0 \\ 2x^2 - x - 3 < 0 \end{cases}$ là

A. $\left(-1; \frac{4}{3}\right)$.B. $(-1; +\infty)$.C. $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$.D. $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} 3x - 4 < 0 \\ 2x^2 - x - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{4}{3} \\ -1 < x < \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < \frac{4}{3}.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 149. Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x + 1 < 2 \\ x^2 + 5x > 6 \end{cases}$ là

A. $(-6; -3)$.B. $(-\infty; -6)$.C. $(1; +\infty)$.D. $\emptyset$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} x + 1 < 2 \\ x^2 + 5x > 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x^2 + 5x - 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ \begin{cases} x < -6 \\ x > 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -6 \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x < -6.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 150. Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x + 1 > 3 \\ x^2 - 4x < 5 \end{cases}$ là

A. $(1; 2)$.B. $(-4; -1)$.C. $(-1; 1)$.D. $(2; 5)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} x + 1 > 3 \\ x^2 - 4x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x^2 - 4x - 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ -1 < x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < 5.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 151. Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x + 1 > 5 \\ 2x^2 - 9x + 7 \leq 0 \end{cases}$ là

A. $(2; +\infty)$. B. $\left(2; \frac{7}{2}\right]$. C. $\left(1; \frac{7}{2}\right]$. D. $\left(-\infty; \frac{7}{2}\right]$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} 2x + 1 > 5 \\ 2x^2 - 9x + 7 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ 1 \leq x \leq \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x \leq \frac{7}{2}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 152. Hệ bất phương trình $\begin{cases} 4x - 3 < 3x + 4 \\ x^2 - 7x + 10 \leq 0 \end{cases}$ có tập nghiệm là

A. $[2; 7)$. B. $(-\infty; 5]$. C. $(-\infty; 7)$. D. $[2; 5]$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} 4x - 3 < 3x + 4 \\ x^2 - 7x + 10 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 7 \\ 2 \leq x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 5.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 153. Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x^2 - 7x + 2 > 0 \\ -2x^2 + x + 3 > 0 \end{cases}$ là

A. $\left(-1; \frac{1}{3}\right)$. B. $(-1; +\infty)$. C. $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$. D. $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} 3x^2 - 7x + 2 > 0 \\ -2x^2 + x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x < \frac{1}{3} \\ x > 2 \end{cases} \\ -1 < x < \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < \frac{1}{3}.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 154. Hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ x^2 - 6x + 8 > 0 \end{cases}$ có tập nghiệm là

A. $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$. B. $(-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$. C. $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$. D. $(1; 4)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ x^2 - 6x + 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x < 1 \\ x > 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2 \\ x > 4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > 4 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 155. Hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 + 6x + 8 \leq 0 \\ x^2 + 4x + 3 \leq 0 \end{cases}$ có tập nghiệm $S = [a; b]$. Tính $P = b - a$.

A. $P = 1$. B. $P = 2$. C. $P = 3$. D. $P = 4$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} x^2 + 6x + 8 \leq 0 \\ x^2 + 4x + 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq -2 \\ -3 \leq x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq -2.$

Vậy ta có $S = [-3; -2] \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow P = b - a = 1.$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 156. Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 8x + 7 < 0 \\ x^2 - 8x + 20 > 0 \end{cases}$ là

A. $(1; 7).$

B. $(1; +\infty).$

C. $\emptyset.$

D. $\mathbb{R}.$

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} x^2 - 8x + 7 < 0 \\ x^2 - 8x + 20 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 7 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 7.$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 157. Cho $f(x) = \frac{2x^2 + 5x + 3}{9 - x^2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}.$

B. $f(x) \geq 0, \forall x \in \left(-3; -\frac{3}{2}\right] \cup [-1; 3).$

C. $f(x) \geq 0, \forall x \in \left[-3; -\frac{3}{2}\right] \cup [-1; 3].$

D. $f(x) \leq 0, \forall x \in (-\infty; -3] \cup [3; +\infty).$

Lời giải.

Ta có: $2x^2 + 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$ và $9 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3.$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-3	$-\frac{3}{2}$	-1	3	$+\infty$
$2x^2 + 5x + 3$		+		+	0	-
$9 - x^2$	-	0	+		+	0
$f(x)$	-	-	+	0	-	0

Từ bảng xét dấu ta thấy $f(x) \geq 0, \forall x \in \left(-3; -\frac{3}{2}\right] \cup [-1; 3).$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 158. Cho $f(x) = \frac{11x^2 - 5x + 6}{x^2 + 5x + 6} - x$. Tìm x để $f(x) < 0$.

A. $x \in (-3; -2) \cup (1; 2) \cup (3; +\infty).$

B. $x \in (-3; 1) \cup \left(2; \frac{3}{2}\right) \cup (3; +\infty).$

C. $x \in (-3; -1) \cup (1; 2) \cup (3; +\infty).$

D. $x \in (-2; -1) \cup \left(1; \frac{3}{2}\right) \cup (3; +\infty).$

Lời giải.

$$f(x) = \frac{11x^2 - 5x + 6}{x^2 + 5x + 6} - x = \frac{-x^3 + 6x^2 - 11x + 6}{x^2 + 5x + 6} = \frac{(1-x)(x-2)(x-3)}{x^2 + 5x + 6}.$$

Ta có: $1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1; x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2; x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3; x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -2. \end{cases}$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-3		-2		1		2		3		$+\infty$
$1-x$		+		+		+	0	-		-		-
$x-2$		-		-		-		-	0	+		+
$x-3$		-		-		-		-		-	0	+
x^2+5x+6		+	0	-	0	+		+		+		+
$f(x)$		+		-		+	0	-	0	+	0	-

Từ đó ta được $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-3; -2) \cup (1; 2) \cup (3; +\infty)$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 159. Cho $f(x) = 4x^4 - x^2 + 2x - 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $f(x) > 0, \forall x \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. B. $f(x) < 0, \forall x \in \left(-1; \frac{1}{2}\right)$.
- C. $f(x) > 0, \forall x \in \left(-\infty; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. D. $f(x) < 0, \forall x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = x^2(4x^2 - 1) + 2x - 1 = (2x - 1)(2x^3 + x^2 + 1) = (2x - 1)(x + 1)(2x^2 - x + 1)$.

Ta có: $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$; $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$; $2x^2 - x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$2x - 1$	$-$	$ $	$-$	0	$+$
$x + 1$	$-$	0	$+$	$ $	$+$
$2x^2 - x + 1$	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ đó ta được $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 160. Phương trình $x^2 - 2mx - m^2 + m + 6 = 0$ có hai nghiệm trái dấu khi

- A. $m < -6$. B. $\begin{cases} m > 3 \\ m < -2 \end{cases}$. C. $-2 < m < 3$. D. $\begin{cases} m \geq 3 \\ m \leq -2 \end{cases}$.

Lời giải.

Phương trình có hai nghiệm trái dấu khi $\Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow 1 \cdot (-m^2 + m + 6) < 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 6 > 0$.

Ta có $m^2 - m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -2 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

m	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
$f(m)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy $\begin{cases} m > 3 \\ m < -2 \end{cases}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 161. Cho biểu thức $f(x) = \frac{2x+3}{4x^2-2x-12}$. Mệnh đề nào dưới đây là **sai**?

A. $f(x) > 0, \forall x \in (2; +\infty)$.

B. $f(x) \neq 0, \forall x \neq 2, x \neq -\frac{3}{2}$.

C. $f(x) < 0, \forall x < -\frac{3}{2}$.

D. $f(x) < 0, \forall x < 2$.

Lời giải.

Ta có: $2x+3=0 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}; 4x^2-2x-12=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{3}{2} \\ x=2. \end{cases}$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		2	$+\infty$
$2x+3$		—	0	+	+
$4x^2-2x-12$		+	0	—	0
$f(x)$		—	0	—	+

Từ bảng xét dấu của $f(x)$ suy ra $f\left(-\frac{3}{2}\right)=0$.

Vậy trong 4 khẳng định trên, khẳng định sai là $f(x) < 0, \forall x < 2$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 162. Xác định tất cả các giá trị của m để tam thức bậc hai

$$f(x) = (m+1)x^2 - 3mx + 4m$$

có hai nghiệm dương.

A. $m \in \left(-\frac{1}{3}; -1\right)$.

B. $m \in \left(-\frac{16}{7}; -1\right)$.

C. $m \in \left(-\frac{3}{4}; 1\right)$.

D. $m \in \left(-\frac{14}{3}; 3\right)$.

Lời giải.

Xét hai trường hợp:

Nếu $m = -1$ thì $f(x) = 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$ nên $m = -1$ loại.

Nếu $m \neq -1$ thì $f(x)$ có hai nghiệm dương khi $\begin{cases} \Delta = -7m^2 - 16m > 0 \\ S = \frac{3m}{m+1} > 0 \\ P = \frac{4m}{m+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{16}{7} < m < -1$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 163. Hãy chỉ ra một khoảng của x để biểu thức $f(x) = \frac{2x^2-5x+2}{x^2+7x+12}$ luôn âm?

A. $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

B. $(2; +\infty)$.

C. $(-\infty; -4)$.

D. $\left(-3; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Ta có: $2x^2-5x+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}; x^2+7x+12=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=-4. \end{cases}$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-4	-3	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$			
$2x^2-5x+2$	$+$	$ $	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$x^2+7x+12$	$+$	0	$-$	0	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$
$f(x)$	$+$	$ $	$-$	$ $	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ đó ta thấy $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-4; -3) \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 164. Biểu thức $f(x) = \frac{3x+2}{2x+1} - \frac{x-2}{x-1}$ luôn dương trên khoảng nào?

- A. $(0; 1)$. B. $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$. C. $(-1; 0)$. D. $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{3x+2}{2x+1} - \frac{x-2}{x-1} = \frac{x^2+2x}{2x^2-x-1}.$$

$$\text{Do đó: } x^2+2x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases} \text{ và } 2x^2-x-1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	1	$+\infty$						
$x^2 + 2x$	$+$	0	$-$	$ $	$-$	0	$+$	$ $	$+$			
$2x^2 - x - 1$	$+$	$ $	$+$	0	$-$	$ $	$-$	0	$+$			
$f(x)$	$+$	0	$-$	$ $			$+$	0	$-$	$ $		$+$

Từ đó ta thấy $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup (1; +\infty)$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 165. Có bao nhiêu số nguyên x để biểu thức $f(x) = (3x^2+x-2)^2 - (x^2-x-7)^2$ luôn âm?

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Lời giải.

$$\text{Ta có } f(x) = (3x^2+x-2)^2 - (x^2-x-7)^2 = (2x^2+2x+5) \cdot (4x^2-9).$$

$$\text{Do } 2x^2+2x+5 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ nên } f(x) < 0 \Leftrightarrow 4x^2-9 < 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}.$$

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-1, 0, 1\}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 166. Cho hai biểu thức $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$ và $g(x) = \frac{2}{x+1}$. Tìm x để $f(x) < g(x)$.

- A. $-2 < x < -1$. B. $1 < x < 2$. C. $x > 2$. D. $-1 < x < 2$.

Lời giải.

Ta có:

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow \frac{x+4}{x-2} < \frac{2}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x^2+3x+8}{x^2-x-2} < 0 \Leftrightarrow x^2-x-2 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 2 \text{ (do } x^2+3x+8 > 0, \forall x \in \mathbb{R}).$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 167. Cho biểu thức $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - x^3}$. Tìm một khoảng của x để biểu thức $f(x)$ luôn dương.

A. $(2; 3)$. B. $(1; 2)$. C. $(-1; 0)$. D. $(0; 2)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - x^3} = \frac{x^2 - 5x + 6}{x(1 - x^2)}.$$

$$\text{Cho } x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}; x(1 - x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1. \end{cases}$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	3	$+\infty$
x	$-$	$ $	$-$	0	$+$	$ $	$+$
$x^2 - 5x + 6$	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$	0	$-$
$1 - x^2$	$-$	0	$+$	$ $	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+$	$ $	$-$	$ $	$+$	0	$-$

Từ bảng xét dấu ta thấy $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1) \cup (2; 3)$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 168. Biểu thức $f(x) = \frac{x^2 - 12x + 36}{2x^2 + 9x - 5}$ luôn âm trên khoảng nào?

A. $(6; +\infty)$. B. $\left(\frac{1}{2}; 6\right)$. C. $\left(-5; \frac{1}{2}\right)$. D. $(-\infty; -5)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } x^2 - 12x + 36 = 0 \Leftrightarrow x = 6; 2x^2 + 9x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-5	$\frac{1}{2}$	6	$+\infty$
$x^2 - 12x + 36$	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$
$2x^2 + 9x - 5$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	$ $	$-$	$ $	$+$

Từ đó ta thấy $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-5; \frac{1}{2}\right)$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 169. Cho biểu thức $f(x) = (2x^2 - 6x - 8)(12 - x - x^2)$. Tìm một khoảng của x để biểu thức $f(x)$ luôn dương.

A. $(-4; -1)$. B. $(-3; 0)$. C. $(-6; -1)$. D. $(-1; 4)$.

Lời giải.

Ta có: $2x^2 - 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$ và $12 - x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 3 \end{cases}$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-4		-1		3		4		$+\infty$
$2x^2-6x-8$		+		+	0	-		-	0	+
$12-x-x^2$		-	0	+		+	0	-		-
$f(x)$		-	0	+	0	-	0	+	0	-

Từ đó ta thấy $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-4; -1) \cup (3; 4)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 170. Tập xác định của hàm số $f(x) = \sqrt{(2 - \sqrt{5})x^2 + (15 - 7\sqrt{5})x + 25 - 10\sqrt{5}}$ là

- A. $(-\infty; 1)$. B. $[-5; 1]$. C. $[-5; \sqrt{5}]$. D. $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Điều kiện để hàm số xác định là $(2 - \sqrt{5})x^2 + (15 - 7\sqrt{5})x + 25 - 10\sqrt{5} \geq 0 \Leftrightarrow h(x) \geq 0$.

Ta có: $h(x) = (2 - \sqrt{5})x^2 + (15 - 7\sqrt{5})x + 25 - 10\sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{5} \\ x = -5 \end{cases}$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-5	$\sqrt{5}$	$+\infty$	
$h(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Do đó $h(x) \geq 0 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq \sqrt{5}$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathcal{D} = [-5; \sqrt{5}]$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 171. Trong các bất phương trình dưới đây, bất phương trình nào tương đương với bất phương trình $x - 1 > 0$.

- A. $(x^2 - 4x + 4)(x - 1) > 0$. B. $(x^2 + 2x + 1)(x - 1) > 0$.
C. $(x - 3)^2(x - 1) > 0$. D. $(x + 1)^2(x - 1) \geq 0$.

Lời giải.

Bất phương trình $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ có tập nghiệm là $S = (1; +\infty)$.

- Xét $f(x) = (x^2 - 4x + 4)(x - 1) > 0$ có bảng xét dấu

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$x^2 - 4x + 4$	$+$	$ $	$+$	0	$+$
$x - 1$	$-$	0	$+$	$ $	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Do đó tập nghiệm bất phương trình $(x^2 - 4x + 4)(x - 1) > 0$ là $S_1 = (1; 2) \cup (2 + \infty)$.

- Xét $f(x) = (x^2 + 2x + 1)(x - 1) > 0$ có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$x^2 + 2x + 1$	+	0	+		+
$x - 1$	-		-	0	+
$f(x)$	-	0	-	0	+

Do đó tập nghiệm bất phương trình $(x^2 + 2x + 1)(x - 1) > 0$ là $S_2 = (1; +\infty)$.

- Xét $f(x) = (x - 3)^2(x - 1)$ có bảng xét dấu

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$(x-3)^2$	$+$	$ $	$+$	0	$+$
$x-1$	$-$	0	$+$	$ $	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Do đó tập nghiệm bất phương trình $(x - 3)^2(x - 1) > 0$ là $S_3 = (1; 3) \cup (3; +\infty)$.

- Xét $f(x) = (x^2 + 2x + 1)(x - 1) > 0$ có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$x^2 + 2x + 1$	+	0	+		+
$x - 1$	-		-	0	+
$f(x)$	-	0	-	0	+

Do đó tập nghiệm bất phương trình $(x + 1)^2(x - 1) \geq 0$ là $S_4 = [1; +\infty)$.

Do đó, ta có bất phương trình tương đương với bất phương trình $x - 1 > 0$ là $(x^2 + 2x + 1)(x - 1) > 0$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 172. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 4x + 4} < 0$ là

- A. $(-3; -1)$.
 B. $(-3; -2) \cup (-2; -1)$.
 C. $(1; 3)$.
 D. $(-2; 1) \cup (1; 3)$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 4x + 4}$.

- Phương trình $x^2 + 4x + 3 = 0$ có hai nghiệm là $x_1 = -3$ và $x_2 = -1$.
- Phương trình $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 = 0$ có nghiệm kép $x = -2$.

Khi đó, ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-3	-2	-1	$+\infty$		
$x^2 + 4x + 3$	+	0	-		-	0	+
$x^2 + 4x + 4$	+		+	0	+		+
$f(x)$	+	0	-		-	0	+

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 4x + 4} < 0$ là $S = (-3; -2) \cup (-2; -1)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 173. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x^2 + 2x + 5}{x + 4} \geq x - 3$.

A. $(-\infty; -17] \cup (-4; +\infty)$.

B. $(-\infty; -17] \cup [-4; +\infty)$.

C. $(-17; -4)$.

D. $[-17; -4)$.

Lời giải.

Ta có

$$\frac{x^2 + 2x + 5}{x + 4} \geq x - 3 \Leftrightarrow \frac{x + 17}{x + 4} \geq 0.$$

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{x + 17}{x + 4}.$$

- Phương trình $x + 17 = 0$ có nghiệm $x = -17$.
- Phương trình $x + 4 = 0$ có nghiệm $x = -4$.

Khi đó, ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-17	-4	$+\infty$
$x + 17$	$-$	0	$+$	$+$
$x + 4$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	$+$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -17] \cup (-4; +\infty)$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 174. Tính tổng của các nghiệm nguyên của bất phương trình $(-x^2 + 3x - 2)(x^2 - 5x + 6) \geq 0$.

A. 5.

B. 6.

C. 3.

D. 4.

Lời giải.

$$\text{Đặt } f(x) = (-x^2 + 3x - 2)(x^2 - 5x + 6).$$

- Phương trình $-x^2 + 3x - 2 = 0$ có nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = 2$.
- Phương trình $x^2 - 5x + 6 = 0$ có nghiệm $x_1 = 2$ và $x_2 = 3$.

Khi đó, ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$-x^2 + 3x - 2$	$-$	0	$+$	0	$-$
$x^2 - 5x + 6$	$+$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Vậy bất phương trình có các nghiệm nguyên 1, 2, 3, nên có tổng là 6.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 175. Gọi T là tập nghiệm của bất phương trình $\frac{2}{x+2} + \frac{1}{2} \leq \frac{-4}{x^2 + 2x}$. Tập hợp nào trong các tập hợp dưới đây **không** là tập con của T ?

A. $(-2; 0)$.B. $[-4; -2)$.C. $(-3; -1)$.D. $(-4; -3)$.**Lời giải.**

Ta có

$$\frac{2}{x+2} + \frac{1}{2} \leq \frac{-4}{x^2+2x} \Leftrightarrow \frac{4x+x(x+2)+4 \cdot 2}{2x(x+2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+6x+8}{2x(x+2)} \leq 0.$$

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{x^2+6x+8}{2x(x+2)}.$$

- Phương trình $x^2+6x+8=0$ có hai nghiệm là $x_1=-2$ và $x_2=-4$.
- Phương trình $2x(x+2)=0$ có hai nghiệm là $x_1=0$ và $x_2=-2$.

Khi đó, ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-4	-2	0	$+\infty$
x^2+6x+8	+	0	-	0	+
$2x(x+2)$	+		+	0	+
$f(x)$	+	0	-		+

Vậy tập hợp thỏa mãn đầu bài là $(-3; -1)$.Chọn đáp án **C**

□

Câu 176. Giải bất phương trình $\frac{x-1}{x+2} \geq \frac{x+2}{x-1}$.A. $(-\infty; -2) \cup \left[-\frac{1}{2}; 1\right)$.B. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$.C. $\left(-2; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.D. $\left(-2; -\frac{1}{2}\right] \cup (1; +\infty)$.**Lời giải.**

Ta có

$$\frac{x-1}{x+2} \geq \frac{x+2}{x-1} \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2 - (x+2)^2}{(x+2)(x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-6x-3}{(x+2)(x-1)} \geq 0.$$

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{-6x-3}{(x+2)(x-1)}.$$

- Phương trình $-6x-3=0$ có nghiệm $x=-\frac{1}{2}$.
- Phương trình $(x+2)(x-1)=0$ có hai nghiệm $x_1=-2$ và $x_2=1$.

Khi đó, ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$-6x-3$	+		+	0	-
$(x+2)(x-1)$	+	0	-		+
$f(x)$	+		-	0	

Vậy bất phương trình $\frac{x-1}{x+2} \geq \frac{x+2}{x-1}$ có tập nghiệm là $S = (-\infty; -2) \cup \left[-\frac{1}{2}; 1\right)$.Chọn đáp án **A**

□

Câu 177. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 + 8x + 15} \geq 0$.

A. $(-\infty; -5] \cup [-3; 3] \cup [5; +\infty)$.

B. $(-\infty; -5) \cup (-3; 3] \cup [5; +\infty)$.

C. $[-5; -3] \cup [3; 5]$.

D. $(-5; -3) \cup (3; 5)$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 + 8x + 15}$.

- Phương trình $x^2 - 8x + 15 = 0$ có hai nghiệm là $x_1 = 3$ và $x_2 = 5$.
- Phương trình $x^2 + 8x + 15 = 0$ có hai nghiệm là $x_1 = -3$ và $x_2 = -5$.

Khi đó, ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-5		$-3e$		3	5		$+\infty$
$x^2-8x+15$	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$	0	$-$	0	$+$
$x^2+8x+15$	$+$	0	$-$	0	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$
$f(x)$	$+$	$ $	$-$	$ $	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 + 8x + 15} \geq 0$ là $S = (-\infty; -5) \cup (-3; 3] \cup [5; +\infty)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 178. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $x^2(3x^2 - 10x + 3) > 0$.

A. $(-\infty; -3) \cup \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right) \setminus \{0\}$.

B. $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (3; +\infty) \setminus \{0\}$.

C. $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (3; +\infty)$.

D. $(-\infty; -3) \cup \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = x^2(3x^2 - 10x + 3)$.

- Phương trình $x^2 = 0$ có nghiệm kép $x = 0$.
- Phương trình $3x^2 - 10x + 3 = 0$ có hai nghiệm là $x_1 = \frac{1}{3}$ và $x_2 = 3$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{3}$	3	$+\infty$		
x^2	$+$	0	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$
$3x^2 - 10x + 3$	$+$	$ $	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $x^2(3x^2 - 10x + 3) > 0$ là $S = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (3; +\infty) \setminus \{0\}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 179. Trong các bất phương trình sau, bất phương trình nào có tập nghiệm $S = [0; 5]$?

A. $x^2 + 5x > 0$.

B. $x^2 + 5x \leq 0$.

C. $x^2 + 5x < 0$.

D. $-x^2 + 5x \geq 0$.

Lời giải.

Ta có

- Đặt $f(x) = x^2 + 5x = x(x + 5) = 0$ có hai nghiệm là $x_1 = 0$ và $x_2 = -5$. Khi đó, ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-5	0	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

- Đặt $g(x) = -x^2 + 5x = x(5 - x) = 0$ có hai nghiệm $x_1 = 0$ và $x_2 = 5$. Khi đó, có bảng xét dấu

x	$-\infty$	0	5	$+\infty$	
$g(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Từ các bảng xét dấu, bất phương trình có tập nghiệm $S = [0; 5]$ là $-x^2 + 5x \geq 0$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 180. Bất phương trình $(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 1) \leq 0$ có tập nghiệm là

- A. $\mathbb{R}$. B. $\emptyset$. C. $\{1\}$. D. $\{\pm 1\}$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 2x + 1)$.

- Phương trình $x^2 + 1 = 0$ vô nghiệm,
- Phương trình $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 = 0$ có nghiệm kép $x = 1$.

Khi đó, ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x^2 + 1$	$+$	$ $	$+$
$x^2 - 2x + 1$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$+$

Vậy bất phương trình $(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 1) \leq 0$ có tập nghiệm là $S = \{1\}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 181. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{(2x + 5)(1 - 2x)}$ là

- A. $\left(-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$. B. $\left(-\infty; -\frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.
- C. $\left[-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right]$. D. $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right\}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $(2x + 5)(1 - 2x) \geq 0$.

Đặt $f(x) = (2x + 5)(1 - 2x)$.

- Phương trình $2x + 5 = 0$ có nghiệm $x = -\frac{5}{2}$.
- Phương trình $1 - 2x = 0$ có nghiệm là $x = \frac{1}{2}$.

Khi đó, ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x + 5$	$-$	0	$+$	$+$
$1 - 2x$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-$	0	$+$	$-$

Vậy tập xác định của hàm số $y = \sqrt{(2x+5)(1-2x)}$ là $\left[-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 182. Tập nghiệm của bất phương trình $(x^2 - x + 1)(1 - 3x) \leq 0$ là

A. $S = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$. B. $S = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$. C. $S = \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$. D. $S = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = (x^2 - x + 1)(1 - 3x)$.

- Phương trình $x^2 - x + 1 = 0$ vô nghiệm và có hệ số $a > 0$.
- Phương trình $1 - 3x = 0$ có nghiệm $x = \frac{1}{3}$.

Khi đó, ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$x^2 - x + 1$	$+$	$+$	$+$
$1 - 3x$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+$	0	$-$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $(x^2 - x + 1)(1 - 3x) \leq 0$ là $S = \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 183. Tập nghiệm của bất phương trình $16x^2 + 40x + 25 < 0$ là S_1 . Tập nghiệm của bất phương trình: $3x^2 - 4x + 4 \geq 0$ là S_2 . Khẳng định nào dưới đây **đúng**.

A. $S_1 = S_2$. B. $S_1 \subset S_2$. C. $S_2 \subset S_1$. D. $S_1 \cap S_2 = \mathbb{R}$.

Lời giải.

- Đặt $f(x) = 16x^2 + 40x + 25$, phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm là $x = -\frac{5}{4}$. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{5}{4}$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$+$

Vậy $S_1 = \emptyset$.

- Đặt $g(x) = 3x^2 - 4x + 4$, phương trình $g(x) = 0$ vô nghiệm. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$	$+$	$+$

Do đó, $S_2 = \mathbb{R}$.

Vậy $S_1 \subset S_2$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 184. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $(1 - 2x)(x^2 - x - 1) > 0$.

A. $S = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2}; \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}$.

B. $S = \left(-\infty; \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; +\infty \right)$.

C. $S = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{1}{2} \right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; +\infty \right)$.

D. $S = \left(-\infty; \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = (1 - 2x)(x^2 - x - 1)$.

- Phương trình $1 - 2x = 0$ có nghiệm $x = \frac{1}{2}$.
- Phương trình $x^2 - x - 1 = 0$ có hai nghiệm là $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Khi đó, ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
$1 - 2x$	+		+	0	-
$x^2 - x - 1$	+	0	-		-
$f(x)$	+	0	-	0	+

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left(-\infty; \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 185. Bất phương trình $-3x^2 + 6x + 9 \leq 0$ có tập nghiệm là S . Khẳng định nào dưới đây **đúng**.

A. $(-1; 3) \subset S$.

B. $S = [-1; 3]$.

C. $(-\infty; 3) \subset S$.

D. $(-\infty; -2) \subset S$.

Lời giải.

Ta có $-3x^2 + 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3. \end{cases}$

Ta có bảng xét dấu là

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
VT	-	0	+	0

Từ đó, ta suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 186. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2 - 9x + 14} \leq 0$.

A. $[-2; -1] \cup [1; 2) \cup (2; 7)$.

B. $[-2; -1] \cup [1; 7)$.

C. $(-\infty; -2] \cup [1; 2) \cup (2; 7)$.

D. $(-\infty; -2] \cup [-1; 1] \cup (7; +\infty)$.

Lời giải.

BPT $\Leftrightarrow \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}{x^2 - 9x + 14} \leq 0$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	-1	1	2	7	$+\infty$	
$x^2 - 1$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	
$x^2 - 4$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$x^2 - 9x + 14$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$\frac{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}{x^2 - 9x + 14}$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$

Từ BXD ta có tập nghiệm của BPT là $[-2; -1] \cup [1; 2) \cup (2; 7)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 187. Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 9 < 0 \\ (x - 1)(3x^2 + 7x + 4) \geq 0 \end{cases}$ là

A. $S = \left(-\frac{4}{3}; 3\right)$.

B. $S = \left[-\frac{4}{3}; -1\right] \cup [1; 3)$.

C. $S = (-3; 3)$.

D. $S = (-3; -1] \cup [1; 3)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} x^2 - 9 < 0 & (1) \\ (x - 1)(3x^2 + 7x + 4) \geq 0 & (2) \end{cases}$

Xét (1), ta có $x^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 3$.

Xét (2), ta có

x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	-1	1	$+\infty$
$x - 1$	-	-	-	0	+
$3x^2 + 7x + 4$	+	0	-	0	+
VT	-	0	+	0	+

Từ bảng xét dấu, ta có (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{4}{3} \leq x \leq -1 \\ x \geq 1. \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình là $S = \left[-\frac{4}{3}; -1\right] \cup [1; 3)$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 188. Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2(x - 1) - 3(x - 4) > x + 5 \\ \frac{3x - 4}{x^2 + 4x + 4} \geq 0 \end{cases}$ là

A. $S = \left[\frac{4}{3}; \frac{5}{2}\right)$.

B. $S = \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

C. $S = \left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$.

D. $S = \left(-\infty; \frac{4}{3}\right]$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} 2(x - 1) - 3(x - 4) > x + 5 \\ \frac{3x - 4}{x^2 + 4x + 4} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{5}{2} \\ \frac{3x - 4}{x^2 + 4x + 4} \geq 0 \end{cases} (*)$

Xét bất phương trình (*), ta có

x	$-\infty$	-2	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$3x - 4$	$-$	$-$	0	$+$
$x^2 + 4x + 4$	$+$	0	$+$	$+$
VT	$-$	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta có $(*) \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{3}$.

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình là $S = \left[\frac{4}{3}; \frac{5}{2}\right)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 189. Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} \frac{3x^2 - 7x + 8}{x^2 + 1} > 1 \\ \frac{3x^2 - 7x + 8}{x^2 + 1} \leq 2 \end{cases}$ là

A. $[1; 6]$.

B. $[1; +\infty)$.

C. $(1; 6]$.

D. $\mathbb{R}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \frac{3x^2 - 7x + 8}{x^2 + 1} > 1 & (1) \\ \frac{3x^2 - 7x + 8}{x^2 + 1} \leq 2 & (2) \end{cases}$$

Xét bất phương trình (1).

$$\frac{3x^2 - 7x + 8}{x^2 + 1} > 1 \Leftrightarrow \frac{3x^2 - 7x + 8}{x^2 + 1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 7x + 7}{x^2 + 1} > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

(vì $2x^2 - 7x + 7 > 0$ và $x^2 + 1 > 0$, với mọi $x \in \mathbb{R}$.)

Xét bất phương trình (2).

$$\frac{3x^2 - 7x + 8}{x^2 + 1} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{3x^2 - 7x + 8}{x^2 + 1} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 + 1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 6.$$

(vì $x^2 + 1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.)

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình là $S = [1; 6]$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 190. Số nghiệm nguyên của hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 4x - 5 < 0 \\ x^2 - 6x + 8 > 0 \\ 2x - 3 \geq 0 \end{cases}$ là

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} x^2 - 4x - 5 < 0 \\ x^2 - 6x + 8 > 0 \\ 2x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 5 \\ \begin{cases} x < 2 \\ x > 4 \end{cases} \\ x \geq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} \leq x < 2 \\ 4 < x < 5. \end{cases}$$

Vậy hệ bất phương trình không có nghiệm nguyên.

Chọn đáp án 

□

Câu 191. Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} \sqrt{-x^2 + 6x - 5} > 8 - 2x \\ x^2 - 10x + 24 < 0 \end{cases}$ là

A. (4; 5).

B. (3; 6).

C. (4; 5].

D. (3; 5].

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \sqrt{-x^2 + 6x - 5} > 8 - 2x & (1) \\ x^2 - 10x + 24 < 0 & (2) \end{cases}$$

Xét bất phương trình (1)

$$\begin{aligned} \sqrt{-x^2 + 6x - 5} > 8 - 2x &\Leftrightarrow \begin{cases} 8 - 2x < 0 \\ -x^2 + 6x - 5 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 8 - 2x \geq 0 \\ -x^2 + 6x - 5 > (8 - 2x)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ 1 \leq x \leq 5 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq 4 \\ 5x^2 - 38x + 69 < 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow 4 < x \leq 5 \vee \begin{cases} x \leq 4 \\ 3 < x < \frac{23}{5} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow 4 < x \leq 5 \vee 3 < x \leq 4 \Leftrightarrow 3 < x \leq 5. \end{aligned}$$

Xét bất phương trình (2), ta có

$$x^2 - 10x + 24 < 0 \Leftrightarrow 4 < x < 6.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (4; 5]$.

Chọn đáp án 

□

Câu 192. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-10; 10]$ để hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \leq 0 \\ x^2 - (m + 3)x + 2(m + 1) \leq 0 \end{cases}$ có tập nghiệm biểu diễn trên trục số là một đoạn có độ dài bằng 1. Khi đó số phần tử của tập S là

A. 12.

B. 20.

C. 5.

D. 9.

Lời giải.

$$\text{Ta có } x^2 - 5x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 4.$$

Phương trình $x^2 - (m + 3)x + 2(m + 1) = 0$ có hai nghiệm $x = 2, x = m + 1$.

- Nếu $m + 1 \geq 2 \Leftrightarrow m \geq 1$ thì $x^2 - (m + 3)x + 2(m + 1) \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq m + 1$.

+ Với $m + 1 \geq 4 \Leftrightarrow m \geq 3$ thì khi đó tập nghiệm của hệ là $[2; 4]$ (loại).

+ Với $m + 1 < 4 \Leftrightarrow m < 3$ thì khi đó tập nghiệm của hệ là $[2; m + 1]$.

Do đó $m + 1 - 2 = 1 \Leftrightarrow m = 2$ (thỏa mãn).

- Nếu $m + 1 < 2 \Leftrightarrow m < 1$ thì $x^2 - (m + 3)x + 2(m + 1) \leq 0 \Leftrightarrow m + 1 \leq x \leq 2$.

+ Với $m + 1 \leq 1 \Leftrightarrow m \leq 0$ thì khi đó tập nghiệm của hệ là $[1; 2]$ (thỏa mãn).

+ Với $m + 1 > 1 \Leftrightarrow m > 0$ thì khi đó tập nghiệm của hệ là $[m + 1; 2]$.

Do đó $2 - (m + 1) = 1 \Leftrightarrow m = 0$ (loại).

Suy ra $m \leq 0$ hoặc $m = 2$. Hay có 12 giá trị của m thỏa mãn.

Chọn đáp án 

□

Câu 193. Với giá trị nào của x thì $f(x) = (x^2 + 4x + 10)^2 - 7(x^2 + 4x + 11) + 7$ mang giá trị âm?

- A. $(1; 3)$. B. $(-1; 3)$. C. $(-3; 1)$. D. $(-3; -1)$.

Lời giải.

Đặt $t = x^2 + 4x + 10 = (x + 2)^2 + 6 \geq 6$ thì $f(t) = t^2 - 7(t + 1) + 7 = t^2 - 7t$.

Ta có $f(t) < 0 \Leftrightarrow t^2 - 7t < 0 \Leftrightarrow 0 < t < 7$.

Suy ra $x^2 + 4x + 10 < 7 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < -1$.

Vậy $f(x) < 0 \Leftrightarrow -3 < x < -1$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 194. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} a + b + c = 6 \\ a^2 + b^2 + c^2 = \frac{117}{2} \end{cases}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. $a \in [1; 3]$. B. $a \in [0; 2]$. C. $a \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$. D. $a \in [-3; 0]$.

Lời giải.

$$\begin{cases} a + b + c = 6 \\ a^2 + b^2 + c^2 = \frac{117}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 6 \\ (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = \frac{117}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 6 \\ ab + bc + ca = \frac{45}{4} \end{cases}$$

Ta có: $b + c = 6 - a$ và $bc = \frac{45}{4} - a(b + c) = \frac{45}{4} - a(6 - a) = a^2 - 6a + \frac{45}{4}$.

Do đó b, c là nghiệm của phương trình: $X^2 - (6 - a)X + a^2 - 6a + \frac{45}{4} = 0$

Phương trình có nghiệm khi $\Delta = (6 - a)^2 - 4\left(a^2 - 6a + \frac{45}{4}\right) = -3a^2 + 12a - 9 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq a \leq 3$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 195. Xác định m để phương trình $mx^2 - (m + 1)x + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt và giá trị tuyệt đối của chúng nhỏ hơn 1.

- A. $m < 3 - \sqrt{8}$. B. $m > 3 + \sqrt{8}$. C. $\begin{cases} m < 0 \\ m > 1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m > 0 \\ m < -\frac{1}{3} \end{cases}$.

Lời giải.

Phương trình có hai nghiệm thỏa mãn $-1 < x_1 < x_2 < 1$ thì các điều kiện sau phải thỏa mãn:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ a.f(1) > 0 \\ a.f(-1) > 0 \\ -1 < S = -\frac{b}{2a} < 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 - \sqrt{8} \text{ hoặc } m > 3 + \sqrt{8} \\ m > 0 \\ m > 0 \text{ hoặc } m < -\frac{3}{2} \\ m < -\frac{1}{3} \text{ hoặc } m > 0 \\ m < 0 \text{ hoặc } m > 1. \end{cases} \Leftrightarrow m > 3 + \sqrt{8}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 196. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để

$$A = 9x^2 + 20y^2 + 4z^2 - 12xy + 6xz + myz > 0$$

với mọi x, y, z không đồng thời bằng 0.

A. 18.

B. 27.

C. 9.

D. 36.

Lời giải.

Ta có $A = 9x^2 - 6(2y - z)x + 20y^2 + 4z^2 + myz$.

Để $A > 0$ với mọi x ta phải có: $\Delta'_A < 0$ với mọi $y, z \Leftrightarrow 16y^2 + (m + 4)yz + 3z^2 > 0$ với mọi y, z .

Để $16y^2 + (m + 4)yz + 3z^2 > 0$ với mọi y ta phải có: $\Delta_y < 0$ với mọi $z \Leftrightarrow z^2(m^2 + 8m - 176) < 0$ với mọi z .

Nếu $z \neq 0$, thì điều kiện là $m^2 + 8m - 176 < 0 \Leftrightarrow -4 - 8\sqrt{3} < m < -4 + 8\sqrt{3}$.

Nếu $z = 0$, thì biểu thức ban đầu trở thành: $A = 9x^2 + 20y^2 - 12xy = (3x - 2y)^2 + 16y^2 > 0$ với mọi x, y không đồng thời bằng 0.

Vậy với $-4 - 8\sqrt{3} < m < -4 + 8\sqrt{3}$, yêu cầu bài toán được thỏa mãn.

Số giá trị nguyên của m thỏa mãn là 27.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 197. Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2 - (x^2 - y^2) = 0$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2$. Giá trị của $M + m$ là

A. 1.

B. $\frac{3}{2}$.C. $\frac{5}{2}$.

D. 0.

Lời giải.

Ta có $(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2 - (x^2 - y^2) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 - 3(x^2 + y^2) + 1 = -4x^2$

Để phương trình có nghiệm thì: $(x^2 + y^2)^2 - 3(x^2 + y^2) + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

$\Rightarrow M + m = \frac{3}{2}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 198. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P(x, y) = x^2 + 11y^2 - 6xy + 8x - 28y + 21$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải.

Đặt $P(x, y) = m \Leftrightarrow f(x) = P(x, y) - m = x^2 - 2(3y - 4)x + (11y^2 - 28y + 21 - m) = 0$ có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' = -2y^2 + 4y + m - 5 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 2(y - 1)^2 + 3$.

Từ đó Min $P = 3$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 199. Có bao nhiêu số nguyên x để biểu thức $f(x) = \left(x^2 - 2x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(2x - \frac{7}{2}\right)^2$ luôn âm?

A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Lời giải.

Biến đổi biểu thức ta được $f(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 4x + 3)$. Lập bảng xét dấu ta được $f(x)$ luôn âm khi $-2 < x < 1$ hoặc $2 < x < 3$. Từ đó suy ra 2 số nguyên cần tìm là -1 và 0 .

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 200. Tìm các số nguyên x để biểu thức $f(x) = x^2 + x - \frac{14}{2x^2 + 2x + 3}$ luôn âm?

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 0.

Lời giải.

Biến $f(x)$ ta được $(x^2 + x)(2x^2 + 2x + 3) - 14$. Đặt $t = x^2 + x$ ta được $2t^2 + 3t - 14$.

Biểu thức có dấu âm khi $-\frac{7}{2} < t < 2$ hay $-2 < x < 1$. Từ đó ta suy ra có 2 số nguyên cần tìm.

Chọn đáp án **C** □

Câu 201. Tìm các số nguyên x để biểu thức $f(x) = \left(\frac{2x-1}{x+3}\right)^2 - \frac{|2x-1|}{|x+3|} - 6$ luôn âm?

A. 2.

B. 8.

C. 4.

D. 6.

Lời giải.

Đặt $t = \frac{|2x-1|}{|x+3|} \geq 0$ ta được $t^2 - t - 6 < 0$ hay $-2 < x < 3$.

Suy ra $\left|\frac{2x-1}{x+3}\right| < 3$ hay $(2x-1)^2 - 9(x+3)^2 < 0$ với $x \neq -3$.

Từ đó $-5x^2 - 58x - 80 \leq 0$ hay $-10 < x < -\frac{8}{5}$. Từ đó có 8 số nguyên cần tìm.

Chọn đáp án **B** □

Câu 202. Có bao nhiêu số nguyên dương x để biểu thức $f(x) = \left|\frac{x^2+2x-3}{-x^2+3x-3}\right|$ luôn nhỏ hơn 1.

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Lời giải.

Ta có $f(x) < 1 \Leftrightarrow -1 \frac{x^2+2x-3}{-x^2+3x-3} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+2x-3}{-x^2+3x-3} > -1 \\ \frac{x^2+2x-3}{-x^2+3x-3} < 1 \end{cases}$.

Giải hệ bất phương trình trên ta được tập nghiệm là $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{6}{5}\right)$.

Từ đó suy ra có 1 số nguyên dương cần tìm.

Chọn đáp án **C** □

Câu 203. Biết rằng bất phương trình $x^2 + (x+1)^2 \leq \frac{15}{x^2+x+1}$ có tập nghiệm là đoạn $[a; b]$. Tính $T = b - a$.

A. $T = \frac{11}{2}$.B. $T = 1$.C. $T = 3$.D. $T = \frac{3}{2}$.

Lời giải.

BPT $\Leftrightarrow [2(x^2+x)+1](x^2+x+1) \leq 15$.

Đặt $t = x^2 + x$, BPT có dạng $(2t+1)(t+1) \leq 15 \Leftrightarrow 2t^2 + 3t - 14 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{7}{2} \leq t \leq 2$.

Do đó BPT $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2 \leq 0 \\ 2x^2+2x+7 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2+x-2 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 1$.

Tập nghiệm của BPT đã cho là $[-2; 1]$.

Vậy $T = 1 - (-2) = 3$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 204. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{-x^2 + 2x} \geq 0$.

A. $[-1; 0) \cup [1; 2) \cup [3; +\infty)$.B. $[-1; 0] \cup [1; 2] \cup [3; +\infty)$.C. $(-\infty; -1] \cup [0; 1] \cup [2; 3]$.D. $(-\infty; -1] \cup (0; 1] \cup (2; 3]$.

Lời giải.

$$\text{BPT} \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x^2-2x-3)}{-x^2+2x} \geq 0.$$

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$x-1$		-	-	-	0	+	+
x^2-2x-3	+	0	-	-	-	-	0
$-x^2+2x$	-	-	0	+	+	0	-
$\frac{x^3-3x^2-x+3}{-x^2+2x}$	+	0	-	+	0	-	-

Từ BXD ta có tập nghiệm của BPT là $(-\infty; -1] \cup (0; 1] \cup (2; 3]$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 205. Biết rằng bất phương trình $(x-1)(x+5)(x-3)(x+7) \leq 297$ có tập nghiệm là đoạn $[a; b]$.
Tính $T = a - b$.

A. $T = 12$.

B. $T = 4$.

C. $T = -4$.

D. $T = -12$.

Lời giải.

$$\text{BPT} \Leftrightarrow (x^2+4x-5)(x^2+4x-21) \leq 297.$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + 4x, \text{ BPT có dạng } (t-5)(t-21) \leq 297 \Leftrightarrow t^2 - 26t - 192 \leq 0 \Leftrightarrow -6 \leq t \leq 32.$$

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} x^2 + 4x + 6 \geq 0 \\ x^2 + 4x - 32 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + 4x - 32 \leq 0 \Leftrightarrow -8 \leq x \leq 4. \text{ Vậy } T = -12.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 206. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x-3}{1-x} + \frac{x-4}{x+1} \geq \frac{x^2+4x+17}{x^2-1}$.

A. $(-\infty; -5] \cup [-2; +\infty)$.

B. $[-5; -2]$.

C. $[-5; -2] \cup (-1; 1)$.

D. $(-\infty; -5] \cup [-2; -1) \cup (1; +\infty)$.

Lời giải.

$$\text{BPT} \Leftrightarrow \frac{x^2+7x+10}{1-x^2} \geq 0.$$

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-5	-2	-1	1	$+\infty$
$x^2+7x+10$		+	0	-	0	+
$1-x^2$	-	-	-	0	+	0
$\frac{x^2+7x+10}{1-x^2}$	-	0	+	0	-	-

Từ BXD suy ra tập nghiệm của BPT là $[-5; -2] \cup (-1; 1)$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 207. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x^4-x^2+6x-9}{2x^2+2x-7} \leq 0$.

A. $\left[\frac{-1-\sqrt{15}}{2}; \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{13}}{2}; \frac{-1+\sqrt{15}}{2} \right]$.

- B. $\left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{15}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1-\sqrt{13}}{2}; \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{15}}{2}; +\infty\right)$.
- C. $\left(\frac{-1-\sqrt{15}}{2}; \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{13}}{2}; \frac{-1+\sqrt{15}}{2}\right)$.
- D. $\left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{15}}{2}\right) \cup \left[\frac{-1-\sqrt{13}}{2}; \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left(\frac{-1+\sqrt{15}}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải.

$$\text{BPT} \Leftrightarrow \frac{x^4 - (x-3)^2}{2x^2 + 2x - 7} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2 - x + 3)(x^2 + x - 3)}{2x^2 + 2x - 7} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 3}{2x^2 + 2x - 7} \leq 0.$$

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{15}}{2}$	$\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{15}}{2}$	$+\infty$	
x^2+x-3	+	+	0	-	0	+	
$2x^2+2x-7$	+	0	-	-	-	0	+
$\frac{x^2+x-3}{2x^2+2x-7}$	+	-	0	+	0	-	+

Từ BXD suy ra tập nghiệm của BPT là $\left(\frac{-1-\sqrt{15}}{2}; \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{13}}{2}; \frac{-1+\sqrt{15}}{2}\right)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 208. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 > 0$.

- A. $\left(-\infty; \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)$.
- B. $\left(-\infty; \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$.
- C. $\left(-\infty; \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}; 0\right) \cup (0; +\infty)$.
- D. $\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}; \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right) \cup (0; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $x = 0$ là một nghiệm của BPT đã cho.

Với $x \neq 0$, chia hai vế của BPT cho $x^2 > 0$, BPT được viết lại là

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} - 4 > 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 > 0.$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$, ta được BPT $\Leftrightarrow t^2 + t - 6 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t > 2 \\ t < -3. \end{cases}$

- Với $t > 2$, ta có $x + \frac{1}{x} > 2 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1. \end{cases}$

Suy ra tập nghiệm $T_1 = (0; +\infty) \setminus \{1\}$.

- Với $t < -3$, ta có $x + \frac{1}{x} < -3 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 3x + 1}{x} < 0$ (2)

Suy ra tập nghiệm của (2) là $T_2 = \left(-\infty; \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}; 0\right)$.

Vậy tập nghiệm của BPT đã cho là

$$T = \{0\} \cup T_1 \cup T_2 = \left(-\infty; \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty).$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 209. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $(x+2)^4 + (x+4)^4 > 82$.

A. $(-\infty; -5) \cup (-1; +\infty)$.

B. $(-\infty; -3 - \sqrt{10}) \cup (-3 + \sqrt{10}; +\infty)$.

C. $(-5; -1)$.

D. $(-3 - \sqrt{10}; -3 + \sqrt{10})$.

Lời giải.

Đặt $y = x + 3 \Rightarrow x + 2 = y - 1, x + 4 = y + 1$, thay vào BPT ta được

$$\begin{aligned} (y-1)^4 + (y+1)^4 > 82 &\Leftrightarrow [(y-1)^2 + (y+1)^2]^2 - 2(y^2-1)^2 > 82 \\ &\Leftrightarrow (2y^2+2)^2 - 2(y^2-1)^2 > 82 \\ &\Leftrightarrow y^4 + 6y^2 - 40 > 0. \end{aligned}$$

Đặt $t = y^2, t \geq 0$, ta có BPT $\Leftrightarrow t^2 + 6t - 40 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t > 4 \\ t < -10 \end{cases} \Leftrightarrow t > 4 \Leftrightarrow y^2 > 4 \Leftrightarrow \begin{cases} y > 2 \\ y < -2. \end{cases}$

Thế $y = x + 3$, ta có BPT đã cho tương đương $\begin{cases} x + 3 > 2 \\ x + 3 < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x < -5. \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của BPT là $(-\infty; -5) \cup (-1; +\infty)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 210. Tập nghiệm của bất phương trình $(2x^2 - 3x + 2)(1 - x^2) < 0$ là

A. $S = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

B. $S = (-1; 1)$.

C. $S = \emptyset$.

D. $S = \mathbb{R}$.

Lời giải.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$2x^2 - 3x + 2$	+	+	+	+
$1 - x^2$	-	0	0	-
VT	-	0	0	-

Từ bảng xét dấu suy ra $S = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 211. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 5x + 4} \leq 0$ là

A. $S = [1; 4]$.

B. $S = (1; 4)$.

C. $S = \{-2\}$.

D. $S = (1; 4) \cup \{-2\}$.

Lời giải.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	1	4	$+\infty$
$x^2 + 4x + 4$	+	0	+	+	+
$x^2 - 5x + 4$	+	0	+	0	+
VT	+	0	+	-	+

Từ bảng xét dấu suy ra $S = (1; 4) \cup \{-2\}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 212. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\frac{x^2 + 5x + 4}{2x^2 + 3x + 1}}$.

A. $\left[-4; -\frac{1}{2}\right]$.

B. $(-\infty; -4] \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

C. $(-\infty; -4) \cup \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

D. $\mathbb{R} \setminus \left\{-4; -\frac{1}{2}\right\}$.

Lời giải.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \frac{x^2 + 5x + 4}{2x^2 + 3x + 1} \geq 0$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-4	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$x^2 + 5x + 4$	+	0	-	0	+
$2x^2 + 3x + 1$	+	0	+	0	+
VT	+	0	-	-	+

TXĐ: $(-\infty; -4] \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 213. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{-2x^2 + 7x + 7}{x^2 - 3x - 10} \leq -1$ là S . Hãy chọn câu **đúng**.

A. $S = [1; 3]$.

B. $S \cap \mathbb{R} = (-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$.

C. $\mathbb{R} \setminus S = [-2; 1) \cup (3; 5]$.

D. $S \cap \mathbb{R} = \emptyset$.

Lời giải.

Ta có: $\frac{-2x^2 + 7x + 7}{x^2 - 3x - 10} \leq -1 \Leftrightarrow \frac{-x^2 + 4x - 3}{x^2 - 3x - 10} \leq 0$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	1	3	5	$+\infty$
$-x^2 + 4x - 3$	-	-	0	+	0	-
$x^2 - 3x - 10$	+	0	-	-	0	+
VT	-	0	+	0	+	-

Từ bảng xét dấu suy ra $S = (-\infty; -2) \cup [1; 3] \cup (5; +\infty)$.

$\Rightarrow \mathbb{R} \setminus S = [-2; 1) \cup (3; 5]$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 214. Bất phương trình $\frac{x^2 - 1}{(x^2 - 3)(-3x^2 + 2x + 8)} > 0$ có tập nghiệm là S . Hãy chọn câu **đúng**.

- A. $S \cap \mathbb{R} = \left(-\sqrt{3}; -\frac{4}{3}\right) \cup (-1; 1) \cup \left(\sqrt{3}; 2\right)$.
 B. $S = (-\infty; -\sqrt{3}] \cup \left[-\frac{4}{3}; -1\right] \cup [1; \sqrt{3}]$.
 C. $S = \mathbb{R} \setminus \left\{\pm\sqrt{3}; -\frac{4}{3}; 2\right\}$.
 D. $S = \emptyset$.

Lời giải.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{4}{3}$	-1	1	$\sqrt{3}$	2	$+\infty$
$x^2 - 1$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$x^2 - 3$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$-3x^2 + 2x + 8$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	0
VT	$-$	$+$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$

Từ bảng xét dấu ta suy ra $S \cap \mathbb{R} = \left(-\sqrt{3}; -\frac{4}{3}\right) \cup (-1; 1) \cup \left(\sqrt{3}; 2\right)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 215. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 + 10 \leq \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 8}$ là S . Hãy chọn câu **đúng**.

- A. $S = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\sqrt{2}\}$.
 B. $S \cap \mathbb{R} = [-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]$.
 C. $\mathbb{R} \setminus S = (-\infty; -3) \cup [-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}] \cup (3; +\infty)$.
 D. $S \cap \mathbb{R} = \emptyset$.

Lời giải.

Ta có: $x^2 + 10 \leq \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 8} \Leftrightarrow \frac{81 - x^4}{x^2 - 8} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(9 - x^2)(9 + x^2)}{x^2 - 8} \geq 0$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-3	$-2\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	3	$+\infty$	
$9 - x^2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$9 + x^2$	$+$		$+$	$+$	$+$		$+$
$x^2 - 8$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
VT	$-$	0	$+$	$-$	$+$	0	$-$

Từ bảng xét dấu suy ra $S = [-3; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; 3]$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 216. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 + x - \frac{3}{x^2 + x - 2} \leq 0$ là S . Hãy chọn câu **sai**.

- A. $S \cap \mathbb{R} = S$.
 B. $S \cap \mathbb{R} = \left[\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}; -2\right] \cup \left(1; \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}\right]$.

C. $\mathbb{R} \setminus S = \left[\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}; -2 \right) \cup \left(1; \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \right]$.

D. $S \cup \mathbb{R} = \emptyset$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} x^2 + x - \frac{3}{x^2 + x - 2} \leq 0 &\Leftrightarrow \frac{(x^2 + x)^2 - 2(x^2 + x) - 3}{x^2 + x - 2} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x^2 + x + 1)(x^2 + x - 3)}{x^2 + x - 2} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 3}{x^2 + x - 2} \leq 0. \end{aligned}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$	-2	1	$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$	$+\infty$	
x^2+x-3	+	0	-	-	-	0	+
x^2+x-2	+		+	0	-	0	+
VT		+	0	-		+	

Từ bảng xét dấu suy ra $S = \left[\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}; -2 \right) \cup \left[1; \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \right]$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 217. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta luôn có:

$$-1 \leq \frac{x^2 + 5x + m}{2x^2 - 3x + 2} < 7.$$

A. $m \geq 0$.

B. $m < -\frac{5}{3}$.

C. $m < 1$.

D. $-\frac{5}{3} \leq m < 1$.

Lời giải.

Ta có $2x^2 - 3x + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Suy ra } -1 \leq \frac{x^2 + 5x + m}{2x^2 - 3x + 2} < 7 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2x + m + 2 \geq 0 \\ 13x^2 - 26x + 14 - m > 0. \end{cases}$$

$$\text{Ta có } 3x^2 + 2x + m + 2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta \leq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{5}{3}.$$

$$13x^2 - 26x + 14 - m > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta \leq 0 \Leftrightarrow m < 1.$$

$$\text{Do đó } -\frac{5}{3} \leq m < 1.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 218. Bất phương trình $|ax^2 + bx + c| < ax^2 + bx + c$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$ tương đương với

A. $ax^2 + bx + c \geq 0$.

B. $ax^2 + bx + c < 0$.

C. $ax^2 + bx + c > 0$.

D. $x \in \emptyset$.

Lời giải.

Ta có $|A| \geq A, \forall A \in \mathbb{R}$ nên bất phương trình $|ax^2 + bx + c| < ax^2 + bx + c$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$ vô nghiệm.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 219. Số thực nào sau đây là nghiệm của bất phương trình $|2x^2 - 4x - 7| > 8$?

A. -1.

B. 2.

C. -2.

D. 3.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} |2x^2 - 4x - 7| &> 8 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 4x - 7 > 8 \\ 2x^2 - 4x - 7 < -8 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 4x - 15 > 0 \\ 2x^2 - 4x + 1 < 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{2 + \sqrt{34}}{2} \\ x < \frac{2 - \sqrt{34}}{2} \\ \frac{2 - \sqrt{2}}{2} < x < \frac{2 + \sqrt{2}}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 220. Tập nghiệm của bất phương trình $|x^2 - 4x| < 0$ là

A. $\emptyset$.B. $(-\infty; 0)$.C. $(0; 4)$.D. $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$.

Lời giải.

Do $|x^2 - 4x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên ta có bất phương trình $|x^2 - 4x| < 0$ vô nghiệm.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 221. Bất phương trình $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$ (trong đó x là biến) tương đương với

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g^2(x). \end{cases} & \text{B. } \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g^2(x). \end{cases} & \text{C. } \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g^2(x). \end{cases} & \text{D. } \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) \leq g^2(x). \end{cases} \end{array}$$

Lời giải.

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g^2(x). \end{cases}$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 222. Bất phương trình $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$ (trong đó x là biến) tương đương với

$$\begin{array}{llll} \text{A. } f(x) \geq g^2(x) & \text{B. } \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g^2(x). \end{cases} & \text{C. } \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g^2(x). \end{cases} & \text{D. } \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g^2(x). \end{cases} \end{array}$$

Lời giải.

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g^2(x). \end{cases}$$

Chọn đáp án **(D)** □**Câu 223.** Bất phương trình $|x^2 - 9| > x^2 - 9$ tương đương với

- A. $x^2 - 9 \neq 0$. B. $\begin{cases} x > 3 \\ x < -3. \end{cases}$ C. $x < 3$. D. $-3 < x < 3$.

Lời giải.Bất phương trình $|x^2 - 9| > x^2 - 9 \Leftrightarrow x^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 3$.Chọn đáp án **(D)** □**Câu 224.** Bất phương trình $|x^2 - 16| \leq 16 - x^2$ tương đương với

- A. $x^2 > 16$. B. $x \leq 4$. C. $x^2 \geq 16$. D. $-4 \leq x \leq 4$.

Lời giải.Bất phương trình $|x^2 - 16| \leq 16 - x^2 \Leftrightarrow 16 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4$.Chọn đáp án **(D)** □**Câu 225.** Bất phương trình $|f(x)| \leq g(x)$ (trong đó x là biến) tương đương với

- A. $\begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$ B. $\begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ f(x) \leq -g(x). \end{cases}$ C. $\begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ f(x) \geq -g(x). \end{cases}$ D. $\begin{cases} f(x) \geq -g(x) \\ f(x) \leq g(x). \end{cases}$

Lời giải.Bất phương trình $|f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq -g(x) \\ f(x) \leq g(x). \end{cases}$ Chọn đáp án **(D)** □**Câu 226.** Bất phương trình $|f(x)| > g(x)$ (trong đó x là biến) tương đương với

- A. $f(x) > g(x)$. B. $\begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) > -g(x). \end{cases}$ C. $\begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x). \end{cases}$ D. $\begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) > -g(x). \end{cases}$

Lời giải.Bất phương trình $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x). \end{cases}$ Chọn đáp án **(C)** □**Câu 227.** Giải bất phương trình $|x^2 - x - 12| \geq x^2 - x - 12$.

- A. $-3 < x < 4$. B. $-3 \leq x \leq 4$. C. $x \in \mathbb{R}$. D. $x \in \emptyset$.

Lời giải.Ta có $|A| \geq A, \forall A \in \mathbb{R}$ nên bất phương trình $|x^2 - x - 12| \geq x^2 - x - 12$ luôn đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.Chọn đáp án **(C)** □

Câu 228. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- A. $|A| > |B| \Leftrightarrow (A - B)(A + B) > 0$.
 B. $|A| > |B| \Leftrightarrow A > B$.
 C. $|A| > |B| \Leftrightarrow \begin{cases} A > B \\ A < -B \end{cases}$.
 D. $|A| > |B| \Leftrightarrow A > \pm B$.

Lời giải.

Ta có $|A| > |B| \Leftrightarrow A^2 > B^2 \Leftrightarrow A^2 - B^2 > 0 \Leftrightarrow (A - B)(A + B) > 0$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 229. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $|x^2 - 2x| \geq 0$.

- A. $\mathbb{R}$.
 B. $\emptyset$.
 C. $(0; 2)$.
 D. $[0; 2]$.

Lời giải.

Ta có $|x^2 - 2x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 230. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $|x^2 - x| \leq 0$.

- A. $\{0; 1\}$.
 B. $[0; 1]$.
 C. $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$.
 D. $(0; 1)$.

Lời giải.

Ta có $|x^2 - x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó

$$|x^2 - x| \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1. \end{cases}$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 231. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $|x^2 - 4x + 3| \geq -x^2 + 4x - 3$.

- A. $\mathbb{R}$.
 B. $\emptyset$.
 C. $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$.
 D. $(0; 1)$.

Lời giải.

Ta có

$$|x^2 - 4x + 3| \geq -x^2 + 4x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 < 0 \\ -x^2 + 4x - 3 \geq -x^2 + 4x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 < 0 \\ x^2 - 4x + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 232. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $|x^2 - x| \leq |x^2 - 1|$.

- A. $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.
 B. $\{1\}$.
 C. $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.
 D. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \{1\}$.

Lời giải.

Ta có

$$|x^2 - x| \leq |x^2 - 1| \Leftrightarrow (x^2 - x)^2 \leq (x^2 - 1)^2 \Leftrightarrow (x - 1)(2x^2 - x - 1) \geq 0.$$

Bảng xét dấu $f(x) = (x - 1)(2x^2 - x - 1)$:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	
$x - 1$	$-$	$ $	$-$	0	$+$
$2x^2 - x - 1$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 233. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $|x^2 - 3x + 2| \leq x^2 - 3x + 2$.

A. $\emptyset$.

B. $[2; +\infty)$.

C. $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$.

D. $(-\infty; 1]$.

Lời giải.

Ta có

$$|x^2 - 3x + 2| \leq x^2 - 3x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 < 0 \\ -x^2 + 3x - 2 \leq x^2 - 3x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 < 0 \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 234. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $|x^2 - x - 12| > x + 12 - x^2$.

A. $(-\infty; -3) \cup (4; +\infty)$.

B. $(-4; 3)$.

C. $(-\infty; -4) \cup (3; +\infty)$.

D. $\emptyset$.

Lời giải.

Ta có

$$|x^2 - x - 12| > x + 12 - x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 12 < 0 \\ -x^2 + x + 12 > -x^2 + x + 12 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - x - 12 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -3) \cup (4; +\infty)$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 235. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x thỏa mãn bất phương trình $|x^2 - 1| \leq 3$?

A. 4.

B. 5.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

Ta có

$$|x^2 - 1| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq (x^2 - 1) \leq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq -2 \\ x^2 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2.$$

Vậy có tất cả 5 giá trị nguyên của x thỏa mãn bất phương trình $|x^2 - 1| \leq 3$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 236. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\frac{|x^2 - 8x + 12|}{\sqrt{5-x}} > \frac{x^2 - 8x + 12}{\sqrt{5-x}}$.

A. (2; 6).

B. (2; 5).

C. [2; 5].

D. (5; +∞).

Lời giải.

Điều kiện: $x < 5$. Khi đó ta có

$$\frac{|x^2 - 8x + 12|}{\sqrt{5-x}} > \frac{x^2 - 8x + 12}{\sqrt{5-x}} \Rightarrow |x^2 - 8x + 12| > x^2 - 8x + 12 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 < 0 \Leftrightarrow x \in (2; 6).$$

Kết hợp điều kiện, ta có tập nghiệm của bất phương trình $\frac{|x^2 - 8x + 12|}{\sqrt{5-x}} > \frac{x^2 - 8x + 12}{\sqrt{5-x}}$ là (2; 5).

Chú ý: $|f(x)| > f(x) \Leftrightarrow f(x) < 0$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 237. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $|3x^2 - 2x - 1| < |x^2 - x|$.

A. $(-\infty; -\frac{1}{4})$.B. $(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4})$.C. $[-\frac{1}{2}; \infty)$.D. $[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}]$.

Lời giải.

Ta có

$$|3x^2 - 2x - 1| < |x^2 - x| \Leftrightarrow (3x^2 - 2x - 1)^2 < (x^2 - x)^2 \Leftrightarrow (2x^2 - x - 1)(4x^2 - 3x - 1) < 0.$$

Bảng xét dấu $f(x) = (2x^2 - x - 1)(4x^2 - 3x - 1)$:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1	$+\infty$		
$2x^2 - x - 1$	+	0	-	-	0	+	
$4x^2 - 3x - 1$	+		+	0	-	0	+
$f(x)$	+	0	-	0	+	0	+

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $|3x^2 - 2x - 1| < |x^2 - x|$ là $(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4})$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 238. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $|x^2 - 2x| + x^2 - 4 > 0$.

A. $(-\infty; 2)$.B. $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$.C. $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.D. $(-1; +\infty)$.

Lời giải.

- Trường hợp 1: $x^2 - 2x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$, ta có $|x^2 - 2x| + x^2 - 4 > 0 \Rightarrow 2x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 2$. Kết hợp điều kiện, suy ra trường hợp này bất phương trình vô nghiệm.
- Trường hợp 2: $x^2 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 0 \end{cases}$, ta có $|x^2 - 2x| + x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < -1 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 239. Gọi S là tập nghiệm của bất phương trình $|x - 6| > |x^2 - 5x + 9|$. Hỏi tập S chứa tập nào trong các tập hợp sau?

A. $S_1 = (0; 1)$.

B. $S_2 = [1; 3]$.

C. $S_3 = [2; 3]$.

D. $S_4 = (2; 3)$.

Lời giải.

$$BPT \Leftrightarrow (x-6)^2 > (x^2-5x+9)^2 \Leftrightarrow (x^2-5x+9)^2 - (x-6)^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-6x+15)(x^2-4x+3) < 0$$

Ta có bảng xét dấu của hàm số $f(x) = (x^2-6x+15)(x^2-4x+3)$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x^2-6x+15$		+		+		+	
x^2-4x+3		+	0	-	0	+	
$f(x)$		+	0	-	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu, ta có $f(x) < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3$. Suy ra $S = (1; 3)$.Vậy $S_4 \subset S$ Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 240. Giải bất phương trình $\frac{x^2-9x+18}{\sqrt{x-5}} \leq 0$.

A. $3 \leq x \leq 6$.

B. $5 \leq x \leq 6$.

C. $5 < x \leq 6$.

D. $5 < x < 6$.

Lời giải.Điều kiện xác định: $x > 5$.

Với điều kiện trên, ta có

$$\frac{x^2-9x+18}{\sqrt{x-5}} \leq 0 \Leftrightarrow x^2-9x+18 \leq 0 \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 6.$$

So với điều kiện, suy ra $5 < x \leq 6$.Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 241. Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{x^2-2025} > \sqrt{2025-x^2}$ là

A. $\emptyset$.

B. $[45; +\infty)$.

C. $(-\infty; 45)$.

D. $\{45\}$.

Lời giải.

$$\sqrt{x^2-2025} > \sqrt{2025-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2025-x^2 \geq 0 \\ x^2-2025 > 2025-x^2 \end{cases} \begin{cases} x^2 \leq 2025 \\ x^2 > 2025 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 242. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2-2} \geq \sqrt{7}$.

A. $x \geq 3$.

B. $\begin{cases} x \geq \sqrt{2} \\ x \leq -\sqrt{2} \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq -3 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} \sqrt{2} \leq x \leq 3 \\ -3 \leq x \leq -\sqrt{2} \end{cases}$.

Lời giải.

$$\sqrt{x^2-2} \geq \sqrt{7} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2 \geq 0 \\ x^2 \geq 9 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 \geq 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 243. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $(3 - 2\sqrt{2})x^2 - 2(3\sqrt{2} - 4)x + 6(2\sqrt{2} - 3) \leq 0$.

- A. $[-\sqrt{2}; 3\sqrt{2}]$. B. $(-\infty; 1]$. C. $[-1; +\infty)$. D. $[-1; 3\sqrt{2})$.

Lời giải.

$$(3 - 2\sqrt{2})x^2 - 2(3\sqrt{2} - 4)x + 6(2\sqrt{2} - 3) \leq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq 3\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 244. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $(2 + \sqrt{7})x^2 + 3x - 14 - 4\sqrt{7} \geq 0$.

- A. $\mathbb{R}$. B. $(-\infty; -\sqrt{7}] \cup [2; +\infty)$.
C. $[-2\sqrt{2}; 5]$. D. $(-\infty; -\sqrt{7}] \cup [1; +\infty)$.

Lời giải.

$$(2 + \sqrt{7})x^2 + 3x - 14 - 4\sqrt{7} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\sqrt{7} \\ x \geq 2. \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -\sqrt{7}] \cup [2; +\infty)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 245. Giá trị lớn nhất của x thỏa $x^2 - 4x - 5 \leq 0$ thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(-2; 0)$. B. $(0; 2)$. C. $(2; 4)$. D. $(4; 6)$.

Lời giải.

Ta có $x^2 - 4x - 5 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 5$, do đó giá trị lớn nhất của $x \in (4; 6)$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 246. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $(m - 2)x^2 + 2(2m - 3)x + 5m - 6 = 0$ vô nghiệm.

- A. $\begin{cases} m < 1 \\ m > 3 \end{cases}$. B. $1 < m < 3$. C. $\begin{cases} m < -3 \\ m > -1 \end{cases}$. D. $-3 < m < -1$.

Lời giải.

Với $m = 2$, phương trình tương đương với $2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ có nghiệm. Vậy $m = 2$ không thỏa mãn.

Với $m \neq 2$, ta có phương trình bậc hai $(m - 2)x^2 + 2(2m - 3)x + 5m - 6 = 0$ vô nghiệm khi

$$\begin{aligned} \Delta' &= (2m - 3)^2 - (m - 2)(5m - 6) < 0 \\ &\Leftrightarrow -m^2 + 4m - 3 < 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 247. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $(3 - m)x^2 - 2(m + 3)x + m + 2 = 0$ vô nghiệm.

- A. $1 < m < \frac{3}{2}$. B. $m < -\frac{3}{2}$. C. $m > -1$. D. $-\frac{3}{2} < m < -1$.

Lời giải.

Với $m = 3$, phương trình tương đương với $-12x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{12}$ có nghiệm. Vậy $m = 3$ không thỏa mãn.

Với $m \neq 3$, ta có phương trình bậc hai $(3 - m)x^2 - 2(m + 3)x + m + 2 = 0$ vô nghiệm khi

$$\begin{aligned}\Delta' &= (m + 3)^2 - (m + 2)(3 - m) < 0 \\ &\Leftrightarrow 2m^2 + 5m + 3 < 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{3}{2} < m < -1.\end{aligned}$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 248. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $(m + 2)x^2 - 3x + 2m - 3 = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

A. $m < -2$. B. $-2 < m < \frac{3}{2}$. C. $m > \frac{3}{2}$. D. $\begin{cases} m < -2 \\ m > \frac{3}{2} \end{cases}$.

Lời giải.

Phương trình có hai nghiệm trái dấu khi

$$(m + 2)(2m - 3) < 0 \Leftrightarrow -2 < m < \frac{3}{2}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 249. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $mx^2 - 2mx + 1 = 0$ có nghiệm.

A. $\begin{cases} m < 0 \\ m \geq 1 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m < 0 \\ m \geq 4 \end{cases}$. C. $\begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{cases}$. D. $0 < m \leq 1$.

Lời giải.

Với $m = 0$ phương trình tương đương với $1 = 0$ vô nghiệm.

Với $m \neq 0$, phương trình bậc hai $mx^2 - 2mx + 1 = 0$ có nghiệm khi

$$\begin{aligned}\Delta' &= m^2 - m \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện vậy $\begin{cases} m < 0 \\ m \geq 1. \end{cases}$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 250. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $mx^2 - mx + 2 = 0$ có nghiệm.

A. $\begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 8 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m < 0 \\ m \geq 8 \end{cases}$. C. $0 < m \leq 8$. D. $0 \leq m \leq 8$.

Lời giải.

Với $m = 0$ phương trình tương đương với $2 = 0$ vô nghiệm.

Với $m \neq 0$, phương trình bậc hai $mx^2 - mx + 2 = 0$ có nghiệm khi

$$\Delta = m^2 - 8m \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 8 \\ m \leq 0. \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện vậy $\begin{cases} m < 0 \\ m \geq 8. \end{cases}$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 251. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hai phương trình $x^2 + x + m + 1 = 0$ và $x^2 + (m + 1)x + 1 = 0$ cùng vô nghiệm.

A. $0 < m < 1$. B. $-\frac{3}{4} < m < 1$. C. $\begin{cases} m < -\frac{3}{4} \\ m > 1 \end{cases}$. D. $-\frac{5}{4} < m < 1$.

Lời giải.

Phương trình $x^2 + x + m + 1 = 0$ vô nghiệm khi $\Delta = 1 - 4(m + 1) < 0 \Leftrightarrow m > -\frac{3}{4}$.

Phương trình $x^2 + (m + 1)x + 1 = 0$ vô nghiệm khi $\Delta = (m + 1)^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 1$.

Cả hai phương trình cùng vô nghiệm khi $\begin{cases} m > -\frac{3}{4} \\ -3 < m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{4} < m < 1$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 252. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} x + m \leq 0 \\ x^2 - x + 4 < x^2 - 1 \end{cases}$ có nghiệm.

A. $m < -5$. B. $m > -5$. C. $m > 5$. D. $m < 5$.

Lời giải.

Hệ phương trình $\begin{cases} x + m \leq 0 \\ x^2 - x + 4 < x^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -m \\ x > 5 \end{cases}$ có nghiệm khi $5 < -m \Leftrightarrow m < -5$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 253. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} x(x + 1) \leq 0 \\ x - m < 0 \end{cases}$ có nghiệm.

A. $m \geq -1$. B. $-1 \leq m \leq 0$. C. $m > -1$. D. $m \geq 0$.

Lời giải.

Hệ phương trình $\begin{cases} x(x + 1) \leq 0 \\ x - m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ x < m \end{cases}$ có nghiệm khi $m > -1$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 254. Bất phương trình $|x^2 - 4| > x^2 - 4$ tương đương với

A. $x^2 - 4 = 0$.

B. $x^2 - 4 > 0$.

C. $-2 < x < 2$.

D. $x < 2$.

Lời giải.

Ta có

$$|x^2 - 4| > x^2 - 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ -x^2 + 4 > x^2 - 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x^2 - 4 > x^2 - 4 \end{cases} \quad (\text{vô nghiệm}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 2 \\ 8 > 2x^2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x < 2.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 255. Tìm tất cả các giá trị thực của x thỏa mãn bất phương trình $|2x^2 - 5x| > 3$.

A. $x < -\frac{1}{2}$.

B. $x > 1$.

C. $x > 3$.

D. $x < -\frac{1}{2}, 1 < x < \frac{3}{2}, x > 3$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } |2x^2 - 5x| > 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x > 3 \\ 2x^2 - 5x < -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x - 3 > 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (3; +\infty) \\ x \in \left(1; \frac{3}{2}\right) \end{cases}$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 256. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $|6 - x| \geq 3x^2 + x - 2$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải.

- Trường hợp 1: $x \leq 6$, ta có

$$|6 - x| \geq 3x^2 + x - 2 \Rightarrow 6 - x \geq 3x^2 + x - 2 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 8 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq \frac{4}{3}.$$

Suy ra trường hợp này bất phương trình có 4 nghiệm nguyên.

- Trường hợp 2: $x > 6$, ta có $|6 - x| \geq 3x^2 + x - 2 \Rightarrow x - 6 \geq 3x^2 + x - 2 \Leftrightarrow 3x^2 + 4 \leq 0$. Trường hợp này bất phương trình vô nghiệm.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 257. Giải bất phương trình $|x - 2| \geq x^2 + x - 11$.

A. $-1 - \sqrt{14} \leq x \leq 3$.

B. $-3 \leq x \leq 3$.

C. $\begin{cases} -1 - \sqrt{14} \leq x < 2 \\ 2 < x \leq 3. \end{cases}$

D. Kết quả khác.

Lời giải.

- Trường hợp 1: $x \leq 2$, ta có

$$|x - 2| \geq x^2 + x - 11 \Rightarrow 2 - x \geq x^2 + x - 11 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 13 \leq 0 \Leftrightarrow -1 - \sqrt{14} \leq x \leq -1 + \sqrt{14}.$$

Kết hợp điều kiện, suy ra $-1 - \sqrt{14} \leq x \leq 2$ là nghiệm của bất phương trình.

- Trường hợp 2: $x > 2$, ta có

$$|x - 2| \geq x^2 + x - 11 \Rightarrow x - 2 \geq x^2 + x - 11 \Leftrightarrow x^2 - 9 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3.$$

Kết hợp điều kiện, suy ra $2 < x \leq 3$ là nghiệm của bất phương trình.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $[-1 - \sqrt{14}; 3]$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 258. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $x|x| - 2x - 3 < 0$.

A. $[0; 3)$.

B. $(-1; 3)$.

C. $(-\infty; 3)$.

D. $\emptyset$.

Lời giải.

- Trường hợp 1: $x \geq 0$, ta có $x|x| - 2x - 3 < 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$. Kết hợp điều kiện, suy ra $0 \leq x < 3$ là nghiệm của bất phương trình.
- Trường hợp 2: $x < 0$, ta có $x|x| - 2x - 3 < 0 \Rightarrow -x^2 - 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$. Kết hợp điều kiện, suy ra $x < 0$ là nghiệm của bất phương trình.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(-\infty; 3)$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 259. Giải bất phương trình $|x^2 - 1| \leq x - 1$.

A. $x \in \emptyset$.

B. $x \in \mathbb{R}$.

C. $x \geq 1$.

D. $x = 1$.

Lời giải.

- Trường hợp 1: $x^2 \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \end{cases}$, ta có $|x^2 - 1| \leq x - 1 \Rightarrow x^2 - x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$. Kết hợp điều kiện, suy ra $x = 1$ là nghiệm của bất phương trình.
- Trường hợp 2: $x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$, ta có $|x^2 - 1| \leq x - 1 \Rightarrow x^2 + x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -2 \end{cases}$. Kết hợp điều kiện, trường hợp này bất phương trình vô nghiệm.

Vậy bất phương trình đã cho có 1 nghiệm là $x = 1$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 260. Bất phương trình $x^2 - 3x \geq |x|$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương nhỏ hơn 2020?

A. 2016.

B. 2017.

C. 2019.

D. 2020.

Lời giải.

- Trường hợp 1: $x \geq 0$, ta có $x^2 - 3x \geq |x| \Rightarrow x^2 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x \leq 0 \end{cases}$. Kết hợp điều kiện, suy ra $\begin{cases} x \geq 4 \\ x = 0 \end{cases}$ là nghiệm. Trường hợp này, bất phương trình $x^2 - 3x \geq |x|$ có $2020 - 4 = 2016$ nghiệm nguyên dương nhỏ hơn 2020.
- Trường hợp 2: $x < 0$, ta có $x^2 - 3x \geq |x| \Rightarrow x^2 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 0 \end{cases}$. Kết hợp điều kiện, suy ra $x < 0$ là nghiệm. Trường hợp này, bất phương trình $x^2 - 3x \geq |x|$ không có nghiệm nguyên dương nhỏ hơn 2020.

Bất phương trình đã cho có 2016 nghiệm nguyên dương nhỏ hơn 2020.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 261. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $|x^2 - 3x| < |5x|$.

A. $(-2; 8)$.

B. $(-2; 0)$.

C. $(-2; 8) \setminus \{0\}$.

D. $(0; 8)$.

Lời giải.

Ta có

$$|x^2 - 3x| < |5x| \Leftrightarrow (x^2 - 3x)^2 < (5x)^2 \Leftrightarrow (x^2 - 8x)(x^2 + 2x) < 0.$$

Bảng xét dấu $f(x) = (x^2 - 8x)(x^2 + 2x)$:

x	$-\infty$	-2	0	8	$+\infty$
$x^2 - 8x$	+		+	0	+
$x^2 + 2x$	+	0	-	0	+
$f(x)$	+	0	-	0	+

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $|x^2 - 3x| < |5x|$ là $(-2; 8) \setminus \{0\}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 262. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $|x^2 - 4x + 3| - 8x + 33 < 0$.

- A. $[6; +\infty)$. B. $\{6\}$. C. $[0; 6]$. D. $\emptyset$.

Lời giải.

- Trường hợp 1: $x^2 - 4x + 3 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3$, ta có $|x^2 - 4x + 3| - 8x + 33 < 0 \Rightarrow x^2 + 4x - 30 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 + \sqrt{34} \\ x < -2 - \sqrt{34} \end{cases}$. Kết hợp điều kiện, suy ra trường hợp này bất phương trình vô nghiệm.
- Trường hợp 2: $x^2 - 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 1 \end{cases}$, ta có $|x^2 - 4x + 3| - 8x + 33 < 0 \Rightarrow x^2 - 12x + 36 < 0 \Leftrightarrow (x - 6)^2 < 0$ vô nghiệm.

Vậy bất phương trình $|x^2 - 4x + 3| - 8x + 33 < 0$ vô nghiệm.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 263. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\frac{|x^2 - 1| + 7x - 7}{3x^2 - x + 5} \leq 0$.

- A. $(-8; 1)$. B. $[0; 1]$. C. $[-8; 1]$. D. $(-\infty; 1]$.

Lời giải.

Ta có $3x^2 - x + 5 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

- Trường hợp 1: $x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$, ta có

$$\frac{|x^2 - 1| + 7x - 7}{3x^2 - x + 5} \leq 0 \Rightarrow \frac{-x^2 + 7x - 6}{3x^2 - x + 5} \leq 0 \Leftrightarrow -x^2 + 7x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 6 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện, suy ra $-1 < x < 1$ là nghiệm của bất phương trình.

- Trường hợp 2: $x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \end{cases}$, ta có

$$\frac{|x^2 - 1| + 7x - 7}{3x^2 - x + 5} \leq 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 7x - 8}{3x^2 - x + 5} \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + 7x - 8 \leq 0 \Leftrightarrow -8 \leq x \leq 1.$$

Kết hợp điều kiện, suy ra $\begin{cases} -8 \leq x \leq -1 \\ x = 1 \end{cases}$ là nghiệm của bất phương trình.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $\frac{|x^2 - 1| + 7x - 7}{3x^2 - x + 5} \leq 0$ là $[-8; 1]$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 264. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $|x^2 - x| \geq 2$.

- A. $(-\infty; -1]$. B. $[2; +\infty)$.
C. $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$. D. $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có

$$|x^2 - x| \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x \geq 2 \\ x^2 - x \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0 \\ x^2 - x + 2 \leq 0 \end{cases} \quad (\text{vô nghiệm}) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -1. \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $|x^2 - x| \geq 2$ là $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 265. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $|x^2 - 2x - 3| > 2$.

- A. $(-\infty; 1 - \sqrt{6}]$.
B. $(1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}]$.
C. $(-\infty; 1 - \sqrt{6}) \cup (1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})$.
D. $(-\infty; 1 - \sqrt{6}) \cup (1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{6}; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có

$$|x^2 - 2x - 3| > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 2 \\ x^2 - 2x - 3 < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 5 > 0 \\ x^2 - 2x - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 - \sqrt{6} \\ x > 1 + \sqrt{6} \\ 1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty; 1 - \sqrt{6}) \cup (1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{6}; +\infty)$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 266. Bất phương trình $|-x^2 + 3x - 2| \leq x + 1$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

- A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.

Lời giải.

Điều kiện có nghiệm: $x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$. Ta có

$$\begin{aligned} |-x^2 + 3x - 2| \leq x + 1 &\Leftrightarrow -(x + 1) \leq -x^2 + 3x - 2 \leq x + 1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 1 \leq 0 \\ -x^2 + 2x - 3 \leq 0 \end{cases} \quad (\text{luôn đúng}) \\ &\Leftrightarrow 2 - \sqrt{3} \leq x \leq 2 + \sqrt{3} \quad (\text{thỏa mãn}). \end{aligned}$$

Vậy bất phương trình có 3 nghiệm nguyên là 1, 2, 3.

Chọn đáp án **D** □

Câu 267. Bất phương trình $|-x^2 + x - 1| \leq 2x + 5$ có tập nghiệm $S = [a; b]$. Tính $P = a + b$.

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải.

Điều kiện có nghiệm: $x \geq -\frac{5}{2}$. Ta có

$$\begin{aligned} |-x^2 + x - 1| \leq 2x + 5 &\Leftrightarrow -(2x + 5) \leq -x^2 + x - 1 \leq 2x + 5 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 4 \leq 0 \\ x^2 + x + 6 \geq 0 \end{cases} \quad (\text{luôn đúng}) \\ &\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 4 \quad (\text{thỏa mãn}). \end{aligned}$$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm $S = [-1; 4] \Rightarrow a + b = -1 + 4 = 3$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 268. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3$.

- A. $2 < x < 5$. B. $2 < x < 3$. C. $\begin{cases} x < -3 \\ x > 2 \end{cases}$. D. $0 < x < 5$.

Lời giải.

Ta có

$$|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 \geq 0 \\ x^2 - 2x - 3 < 3x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 3 \\ 0 < x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < 5.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 269. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\frac{9}{|x-5|-3} \geq |x-2|$.

- A. $[-1; 2)$. B. $[8; 5 + 3\sqrt{2})$.
C. $(-\infty; 5 - 3\sqrt{2}] \cup (8; 5 + 3\sqrt{2}]$. D. $[-1; 2) \cup (8; 5 + 3\sqrt{2}]$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $|x-5| \neq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 8 \\ x \neq 2. \end{cases}$

- Trường hợp 1: $x \in (-\infty; 2)$, ta có

$$\frac{9}{|x-5|-3} \geq |x-2| \Rightarrow \frac{9}{5-x-3} \geq 2-x \Leftrightarrow 9 \geq (2-x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 5.$$

Kết hợp với các điều kiện, suy ra $-1 \leq x < 2$ là nghiệm của bất phương trình.

- Trường hợp 2: $x \in (2; 5)$, ta có

$$\frac{9}{|x-5|-3} \geq |x-2| \Rightarrow \frac{9}{5-x-3} \geq x-2 \Leftrightarrow 9 \leq -(2-x)^2 \Leftrightarrow 9 + (2-x)^2 \leq 0 \quad (\text{vô nghiệm}).$$

- Trường hợp 3: $x \in [5; +\infty) \setminus \{8\}$, ta có $\frac{9}{|x-5|-3} \geq |x-2| \Rightarrow \frac{9}{x-8} \geq x-2 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 10x + 7}{x-8} \leq 0$.

Bảng xét dấu $f(x) = \frac{x^2 - 10x + 7}{x-8}$:

x	$-\infty$	$5 - 3\sqrt{2}$	8	$5 + 3\sqrt{2}$	$+\infty$
$x - 8$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x^2 - 10x + 7$	$+$	0	$-$	$-$	0
$f(x)$	$-$	0	$+$	$-$	0

Suy ra $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 5 - 3\sqrt{2}] \cup (8; 5 + 3\sqrt{2}]$. Kết hợp điều kiện, suy ra $x \in (8; 5 + 3\sqrt{2}]$ là nghiệm của bất phương trình.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $[-1; 2) \cup (8; 5 + 3\sqrt{2}]$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 270. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\frac{|x+2|-x}{x} \geq 2$.

A. $(-\infty; 0)$.

B. $[1; +\infty)$.

C. $(0; 1]$.

D. $\emptyset$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x \neq 0$.

• Trường hợp 1: $x \geq -2$, ta có

$$\frac{|x+2|-x}{x} \geq 2 \Rightarrow \frac{2}{x} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2-2x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1 \quad (\text{thỏa mãn}).$$

• Trường hợp 2: $x < -2$, ta có

$$\frac{|x+2|-x}{x} \geq 2 \Rightarrow \frac{-2x-2}{x} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-4x-2}{x} \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x < 0 \quad (\text{không thỏa mãn}).$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(0; 1]$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 271. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\frac{|x-2|}{x^2-5x+6} \geq 3$.

A. $(-\infty; \frac{10}{3})$.

B. $(3; \frac{10}{3}]$.

C. $[\frac{10}{3}; +\infty)$.

D. $[3; \frac{10}{3})$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x \neq 2, x \neq 3$.

• Trường hợp 1: $\begin{cases} x > 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$, ta có

$$\frac{|x-2|}{x^2-5x+6} \geq 3 \Rightarrow \frac{x-2}{x^2-5x+6} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{-3x^2+16x-20}{x^2-5x+6} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{10-3x}{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow 3 < x \leq \frac{10}{3} \quad (\text{thỏa mãn}).$$

• Trường hợp 2: $x < 2$, ta có

$$\frac{|x-2|}{x^2-5x+6} \geq 3 \Rightarrow \frac{2-x}{x^2-5x+6} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{3x^2-14x+16}{x^2-5x+6} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3x-8}{x-3} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{8}{3} \leq x \leq 3 \quad (\text{không thỏa mãn}).$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(3; \frac{10}{3}]$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 272. Biết bất phương trình $\frac{x^2 + x + 2017}{|2x - 1| - x - 2} \geq 0$ có tập nghiệm là $S = (-\infty; a) \cup (b; +\infty)$. Hãy tính $P = a^3 + b^2$.

A. $\frac{244}{9}$. B. $\frac{244}{27}$. C. $-\frac{242}{9}$. D. $\frac{242}{27}$.

Lời giải.

Điều kiện:

$$|2x - 1| - x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow |2x - 1| \neq x + 2.$$

Do $x^2 + x + 2017 > 0$ với mọi số thực x .

Bất phương trình trở thành

$$|2x - 1| - x - 2 > 0 \Leftrightarrow |2x - 1| > x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 > x + 2 \\ 2x - 1 < -x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Suy ra $S = \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup (3; +\infty)$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 273. Biết tập nghiệm của bất phương trình $x^2 \leq \left|1 - \frac{2}{x^2}\right|$ có dạng $S = [a; b] \setminus \{c\}$. Tính $a^2 + b^2 - c$.

A. 2.

B. -2.

C. 3.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Với $x \neq 0$, ta có

$$\begin{aligned} & \left|1 - \frac{2}{x^2}\right| \geq x^2 \\ \Leftrightarrow & |x^2 - 2| \geq x^4 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2 - 2 \geq x^4 \\ x^2 - 2 \leq -x^4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^4 - x^2 + 2 \leq 0 \\ x^4 + x^2 - 2 \leq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & x \in [-1; 1]. \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện $x \neq 0 \Rightarrow S = [-1; 1] \setminus \{0\}$.

Suy ra $a = -1$, $b = 1$ và $c = 0$. Do đó, $a^2 + b^2 - c = 2$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 274. Số dương x thỏa mãn $\sqrt{x} < 3x$ khi và chỉ khi

A. $x > 9$.

B. $x > \frac{1}{3}$.

C. $x < \frac{1}{9}$.

D. $x > \frac{1}{9}$.

Lời giải.

$$\sqrt{x} < 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \begin{cases} x < 0 \\ x > \frac{1}{9} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{9}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 275. Tính tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình $\sqrt{x^2 - 6x + 6} \leq 2x - 1$ trong đoạn $[1; 10]$.

A. 6.

B. 5.

C. 46.

D. 45.

Lời giải.

Ta có

$$\sqrt{x^2 - 6x + 6} \leq 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 6 \geq 0 \\ 2x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 6x - 6 \leq (2x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ \begin{cases} x \leq 3 - \sqrt{3} \\ x \geq 3 + \sqrt{3} \end{cases} \\ 3x^2 + 2x + 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3 + \sqrt{3}.$$

Xét đoạn $[1; 10]$, các nghiệm nguyên của bất phương trình là $\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Tổng các nghiệm nguyên này là 45.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 276. Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{x^2 + 5x + 3} < 2x + 1$ là

A. $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

B. $\left(-\frac{2}{3}; 1\right)$.

C. $(1; +\infty)$.

D. $\left(-\frac{2}{3}; \frac{-1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 5x + 3} < 2x + 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5x + 3 \geq 0 \\ 2x + 1 > 0 \\ x^2 + 5x + 3 < (2x + 1)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \leq \frac{-5 - \sqrt{13}}{2} \\ x \geq \frac{-5 + \sqrt{13}}{2} \end{cases} \\ x > -\frac{1}{2} \\ 3x^2 - x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \leq \frac{-5 - \sqrt{13}}{2} \\ x \geq \frac{-5 + \sqrt{13}}{2} \end{cases} \\ x > -\frac{1}{2} \\ \begin{cases} x < -\frac{2}{3} \\ x > 1 \end{cases} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x > 1. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (1; +\infty)$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 277. Cho các bất phương trình sau:

a) $\sqrt{x - 5} \geq \sqrt{5 - x}$

b) $\sqrt{x + 2} + x^2 < -1$

c) $\sqrt{1 + 4(x - 1)^2} + \sqrt{5 - 4x + x^2} < 2$

Trong các bất phương trình trên có bao nhiêu bất phương trình vô nghiệm?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

Bất phương trình (1): $\sqrt{x-5} \geq \sqrt{5-x}$.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x \geq 5 \\ x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5$.

Thay $x = 5$ vào bất phương trình, suy ra bất phương trình có tập nghiệm là $S = \{5\}$.

Bất phương trình (2): $\sqrt{x+2} + x^2 < -1$.

Với điều kiện $x \geq 2$, ta luôn có $\sqrt{x+2} + x^2 \geq 0$. Do đó, bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Bất phương trình (3): $\sqrt{1+4(x-1)^2} + \sqrt{5-4x+x^2} < 2$.

Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$\sqrt{1+4(x-1)^2} + \sqrt{5-4x+x^2} = \sqrt{1+4(x-1)^2} + \sqrt{1+(x-2)^2} \geq 2.$$

Do đó, bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 278. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{|x^2 - 8x + 12|}{\sqrt{5-x}} > \frac{x^2 - 8x + 12}{\sqrt{5-x}}$ là

A. (2; 6).

B. (2; 5).

C. (-6; -2).

D. (5; 6).

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x < 5$.

Với điều kiện trên, bất phương trình đã cho tương đương với

$$|x^2 - 8x + 12| > x^2 - 8x + 12 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 6.$$

So với điều kiện xác định, ta có $2 < x < 5$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 279. Một bạn học sinh đã giải bất phương trình $\sqrt{x^2 - 4} - \sqrt{x+2} \geq x+2$ (*) theo 3 bước như sau:

- Bước 1:

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+2) \geq 0 \\ (x+2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$$

- Bước 2:

Với điều kiện trên thì (*) có dạng

$$\sqrt{(x-2)(x+2)} - \sqrt{x+2} \geq x+2$$

Chia cả 2 vế cho $\sqrt{x+2} > 0$ ta được

$$\sqrt{x-2} - 1 \geq \sqrt{x+2}$$

- Bước 3:

Với $x \geq 2$ ta có $\sqrt{x-2} < \sqrt{x+2} \Rightarrow \sqrt{x-2} - 1 < \sqrt{x+2}$. Vậy bất phương trình vô nghiệm.

Theo em, bạn học sinh đó giải đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào?

A. Sai từ bước 2.

B. Sai từ bước 3.

C. Sai từ bước 1.

D. Lời giải đúng.

Lời giải.

Sai từ bước 1. Sửa lại:

- Bước 1:

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ x + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+2) \geq 0 \\ (x+2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq 2 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 280. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $|2x + 4| > \sqrt{x^2 - 6x + 9}$.

A. $(-\infty; -7) \cup \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

B. $\left(-7; -\frac{1}{3}\right)$.

C. $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (7; +\infty)$.

D. $\left(\frac{1}{3}; 7\right)$.

Lời giải.

Bất phương trình

$$\begin{aligned} |2x + 4| &> \sqrt{x^2 - 6x + 9} \\ \Leftrightarrow (2x + 4)^2 &> x^2 - 6x + 9 \\ \Leftrightarrow 4x^2 + 16x + 16 &> x^2 - 6x + 9 \\ \Leftrightarrow 3x^2 + 22x + 7 &> 0 \\ \Leftrightarrow x &\in (-\infty; -7) \cup \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right). \end{aligned}$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 281. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\frac{(x-1)(x^3-1)}{x^2+(1+2\sqrt{2})x+2+\sqrt{2}} \leq 0$.

A. $(-1 - \sqrt{2}; -\sqrt{2})$.

B. $(-1 - \sqrt{2}; 1]$.

C. $(-1 - \sqrt{2}; -\sqrt{2}) \cup \{1\}$.

D. $[1; +\infty)$.

Lời giải.Điều kiện $x \neq \{-1 - \sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$. Với điều kiện trên bất phương trình

$$\frac{(x-1)(x^3-1)}{x^2+(1+2\sqrt{2})x+2+\sqrt{2}} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2(x^2+x+1)}{x^2+(1+\sqrt{2})x+2+\sqrt{2}} \leq 0$$

Ta có $x^2 + x + 1 > 0$ với mọi x , nên bất phương trình $\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x^2+(1+\sqrt{2})x+2+\sqrt{2}} \leq 0$ • Nếu $x = 1$, bất phương trình trở thành $0 \leq 0$ (hiển nhiên)• Nếu $x \neq 1$, bất phương trình $\Leftrightarrow x^2 + (1 + \sqrt{2})x + 2 + \sqrt{2} \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-1 - \sqrt{2}; \sqrt{2}]$ Kết hợp với điều kiện ta được tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-1 - \sqrt{2}; -\sqrt{2}) \cup \{1\}$.Chọn đáp án **C**

□

Câu 282. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{(x+4)(6-x)} \leq 2(x+1)$.

A. $[-2; 5]$.

B. $\left[\frac{\sqrt{109}-3}{5}; 6\right]$.

C. $[1; 6]$.

D. $[0; 7]$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{(x+4)(6-x)} \leq 2(x+1) \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} (x+4)(6-x) \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ (x+4)(6-x) \leq 4(x+1)^2 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} -4 \leq x \leq 6 \\ x \geq -1 \\ 5x^2 + 6x - 20 \geq 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} -4 \leq x \leq 6 \\ x \geq -1 \\ \begin{cases} x \leq \frac{-3 - \sqrt{109}}{5} \\ x \geq \frac{-3 + \sqrt{109}}{5} \end{cases} \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \frac{\sqrt{109} - 3}{5} \leq x \leq 6.
 \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left[\frac{\sqrt{109} - 3}{5}; 6 \right]$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 283. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{2(x-2)(x-5)} > x-3$.

A. $[-100; 2]$.	B. $(-\infty; 1]$.
C. $(-\infty; 2] \cup [6; +\infty)$.	D. $(-\infty; 2] \cup (4 + \sqrt{5}; +\infty)$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
& \sqrt{2(x-2)(x-5)} > x-3 \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 < 0 \\ (x-2)(x-5) \geq 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 2(x-2)(x-5) > (x-3)^2 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 5 \end{cases} \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 8x + 11 > 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ \begin{cases} x \geq 3 \\ \begin{cases} x < 4 - \sqrt{5} \\ x > 4 + \sqrt{5} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x > 4 + \sqrt{5}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; 2] \cup (4 + \sqrt{5}; +\infty)$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 284. Số nghiệm nguyên nhỏ hơn 100 của bất phương trình $\sqrt{x} < x - 2$ là

A. 95.

B. 96.

C. 97.

D. 98.

Lời giải.

$$\sqrt{x} < x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 5x + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \begin{cases} x < 1 \\ x > 4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x > 4.$$

Khi đó số nghiệm nguyên nhỏ hơn 100 của bất phương trình là 95.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 285. Số nghiệm tự nhiên của bất phương trình $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2} \geq 1$ là

A. 2.

B. 5.

C. 4.

D. 3.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$, với điều kiện trên bất phương trình tương đương với

$$\begin{aligned}\sqrt{x+1} &\geq 1 + \sqrt{x-2} \\ \Leftrightarrow x+1 &\geq 1 + 2\sqrt{x-2} + x-2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x-2} &\leq 1 \\ \Leftrightarrow (x-2) &\leq 1 \\ \Leftrightarrow x &\leq 3.\end{aligned}$$

Vậy số nghiệm tự nhiên của bất phương trình là 2.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 286. Giải bất phương trình $8 + \sqrt{x^2 + x + 4} \geq x^2 + x$.

- A.** $0 \leq x \leq 3$. **B.** $-4 \leq x \leq 3$. **C.** $-3 \leq x \leq 4$. **D.** $-4 \leq x \leq 4$.

Lời giải.

Bất phương trình $\Leftrightarrow x^2 + x + 4 - \sqrt{x^2 + x + 4} - 12 \leq 0$.

Đặt $\sqrt{x^2 + x + 4} = t \geq 0$, ta được bất phương trình $t^2 - t - 12 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq t \leq 4$.

Kết hợp với điều kiện ta được

$$\sqrt{x^2 + x + 4} \leq 4 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 3.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 287. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2 - 3x - 10} < x - 2$.

- A.** $5 \leq x < 14$. **B.** $5 < x \leq 6$. **C.** $5 \leq x < 10$. **D.** $x < 16$.

Lời giải.

$$\sqrt{x^2 - 3x - 10} < x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 3x - 10 \geq 0 \\ x^2 - 3x - 10 < x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq 5 \end{cases} \\ x < 14 \end{cases} \Leftrightarrow 5 \leq x < 14.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 288. Tìm số nghiệm tự nhiên của bất phương trình $6\sqrt{(x-2)(x-32)} \geq x^2 - 34x + 48$.

- A.** 4. **B.** 6. **C.** 34. **D.** 35.

Lời giải.

Điều kiện $x \in (-\infty; 2] \cup [32; +\infty)$, với điều kiện bất phương trình $\Leftrightarrow 6\sqrt{x^2 - 34x + 64} \geq x^2 - 34x + 48$.

Đặt $\sqrt{x^2 - 34x + 64} = t \geq 0$, ta được bất phương trình

$$t^2 - 6t - 16 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq t \leq 8.$$

Kết hợp với điều kiện $t \geq 0$, ta được $\sqrt{x^2 - 34x + 64} \leq 8 \Leftrightarrow x^2 - 34x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 34$.

Kết hợp với điều kiện ta được $x \in [0; 2] \cup [32; 34]$.

Vậy số nghiệm tự nhiên của bất phương trình là 6.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 289. Giải bất phương trình $\frac{x-2}{\sqrt{2x-3}-1} < 4$.

A. $x \in (2; 18)$.

B. $x \in (6; 26)$.

C. $\left[\frac{3}{2}; 2\right) \cup (2; 26]$.

D. $x \in \left[\frac{3}{2}; 26\right)$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x \neq 2 \end{cases}$, với điều kiện trên bất phương trình tương đương với

$$\frac{x-2}{\sqrt{2x-3}-1} < 4 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}{2x-3-1} < 4 \Leftrightarrow \sqrt{2x-3} < 7 \Leftrightarrow x < 26.$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right) \cup (2; 26]$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 290. Điều kiện xác định của bất phương trình $\frac{\sqrt{x+5}}{1-x} < 1$ là

A. $\begin{cases} -5 \leq x < -1 \\ x > 1. \end{cases}$

B. $-5 \leq x < 1$.

C. $\begin{cases} -5 \leq x < 0 \\ x > 1. \end{cases}$

D. $\begin{cases} x \geq -5 \\ x \neq 1. \end{cases}$

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x \neq 1 \\ x \geq -5. \end{cases}$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 291. Giải bất phương trình $(x^2-3x)\sqrt{2x^2-3x-2} \geq 0$.

A. $x \leq -\frac{1}{2}, x \geq 3$.

B. $x \leq -\frac{1}{2}, x > 3$.

C. $x < -\frac{1}{2}, x \geq 3, x = 2$.

D. $x \leq -\frac{1}{2}, x \geq 3, x = 2$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$, với điều kiện trên bất phương trình

$$\begin{aligned} & (x^2-3x)\sqrt{2x^2-3x-2} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2x^2-3x-2 = 0 \\ \begin{cases} 2x^2-3x-2 \neq 0 \\ x^2-3x \geq 0 \end{cases} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \begin{bmatrix} x=2 \\ x=-\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -\frac{1}{2} \\ \begin{bmatrix} x \leq 0 \\ x \geq 3. \end{bmatrix} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x \leq -\frac{1}{2}, x \geq 3, x = 2$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 292. Tập nào sau đây chứa tất cả các nghiệm của bất phương trình $\sqrt{x^2 + 1} > |x - 3|$?

- A. $(-10; 2)$. B. $(0; +\infty)$. C. $(-3; 1)$. D. $(-2; 5)$.

Lời giải.

$$\text{Xét } \sqrt{x^2 + 1} > |x - 3| \Leftrightarrow x^2 + 1 > x^2 - 6x + 9 \Leftrightarrow x > \frac{4}{3}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 293. Hàm số $y = \sqrt{x^4 - 4x^2}$ **không** xác định tại mọi phần tử của tập nào sau đây?

- A. $(-3; -2)$. B. $[-2; 0)$. C. $[0; 2)$. D. $[2; 3]$.

Lời giải.

$$\text{Hàm số xác định } \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2] \cup \{0\} \cup [2; +\infty).$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 294. Phương trình $x^2 - (m + 1)x + m^2 - 2m + 2 = 0$ (m là tham số) có hai nghiệm x_1, x_2 . Tìm m để $x_1^2 + x_2^2$ lần lượt đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

- A. $m = \frac{7}{3}, m = 1$. B. $m = 1, m = \frac{7}{3}$. C. $m = 3, m = 1$. D. $m = \frac{7}{3}, m = 3$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện có nghiệm } \Delta = -3m^2 + 10m - 7 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq \frac{7}{3}.$$

Áp dụng định lí Vi-ét suy ra $x_1^2 + x_2^2 = -m^2 + 6m - 3 = f(m)$. Đồ thị của $f(m)$ là parabol hướng xuống có hoành độ đỉnh là $x = 3$, suy ra hàm $f(m)$ đồng biến trên $\left[1; \frac{7}{3}\right]$. Do đó, $f(m)$ đạt giá trị lớn

nhất tại $m = \frac{7}{3}$ và giá trị nhỏ nhất tại $m = 1$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 295. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ $\begin{cases} x^2 + 2x - 15 < 0 \\ (m + 1)x \leq 3 \end{cases}$ có nghiệm.

- A. $m > 0$. B. $m < -1$. C. $\forall m \in \mathbb{R}$. D. $-1 < m < 0$.

Lời giải.

$$\text{Hệ tương đương với } \begin{cases} -5 < x < 3 \\ (m + 1)x \leq 3 \end{cases}$$

- Xét $m = -1$ thỏa mãn.

- Xét $m > -1$ hệ tương đương với $\begin{cases} -5 < x < 3 \\ x \leq \frac{3}{m+1} \end{cases}$. Hệ có nghiệm khi $\frac{3}{m+1} > -5$. Kết hợp điều kiện suy ra $m > -1$.

- Xét $m < -1$ hệ tương đương với $\begin{cases} -5 < x < 3 \\ x \geq \frac{3}{m+1} \end{cases}$. Hệ có nghiệm khi $\frac{3}{m+1} < 3$. Suy ra $m < 0$. Kết

hợp điều kiện ta có $m < -1$.

Vậy hệ có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án **(C)** □

- Câu 296.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ $\begin{cases} x^2 - m^2 \leq 0 \\ (m-2)x \geq 10 \end{cases}$ vô nghiệm.
- A. $(1 - \sqrt{11}; 1 + \sqrt{11})$. B. $(2; +\infty)$.
 C. $\left(2; \frac{1 + \sqrt{11}}{2}\right)$. D. $(1 - \sqrt{11}; 2)$.

Lời giải.

$$\begin{cases} x^2 - m^2 \leq 0 \\ (m-2)x \geq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -|m| \leq x \leq |m| \\ (m-2)x \geq 10 \end{cases}$$

Ta có 4 trường hợp sau:

TH1. Xét $m = 2$ thỏa mãn.

TH2. Xét $m > 2$ hệ tương đương với $\begin{cases} -m \leq x \leq m \\ x \geq \frac{10}{m-2} \end{cases}$.

Hệ vô nghiệm khi $\frac{10}{m-2} > m \Leftrightarrow 1 - \sqrt{11} < m < 1 + \sqrt{11}$.

Kết hợp điều kiện suy ra $2 < m < 1 + \sqrt{11}$.

TH3. Xét $0 \leq m < 2$ hệ tương đương với $\begin{cases} -m \leq x \leq m \\ x \leq \frac{10}{m-2} \end{cases}$. Hệ vô nghiệm khi $\frac{10}{m-2} < -m$. Giải ra

được điều này luôn đúng. Suy ra $0 \leq m < 2$ thỏa mãn.

TH4. Xét $m < 0$ hệ tương đương với $\begin{cases} m \leq x \leq -m \\ x \leq \frac{10}{m-2} \end{cases}$. Hệ vô nghiệm khi $\frac{10}{m-2} < m$. Giải và kết hợp

điều kiện, suy ra $1 - \sqrt{11} < m < 0$.

Vậy $m \in (1 - \sqrt{11}; 1 + \sqrt{11})$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 297. Định giá trị của tham số m để phương trình $x^2 + 2(m-3)x + m - 13 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2 - x_1^2 - x_2^2$ đạt giá trị lớn nhất.

- A. $m = 6$. B. $m = \frac{27}{8}$. C. $m = 3$. D. $m = 13$.

Lời giải.

Ta có $\Delta' = m^2 - 7m + 22 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$. Áp dụng định lý Vi-ét suy ra

$$x_1x_2 - x_1^2 - x_2^2 = -(4m^2 - 27m + 75).$$

Đây là parabol hướng xuống nên đạt giá trị lớn nhất khi $m = \frac{27}{8}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 298. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 - 2mx + 5m - 4 = 0$ (m là tham số) có đúng một nghiệm thuộc đoạn $[0; 1]$.

- A. $m = 1$. B. $m = \frac{4}{5}$. C. $\frac{4}{5} \leq m \leq 1$. D. $\begin{cases} m \geq 1 \\ m < \frac{4}{5} \end{cases}$.

Lời giải.

Xét $x = 0; x = 1$ là nghiệm ta tìm được $m = 1, m = \frac{4}{5}$ thỏa mãn.

Xét phương trình có đúng một nghiệm thuộc $(0; 1)$ ta có 3 trường hợp sau

$$\begin{cases} x_1 < 0 < x_2 < 1 & (1) \\ 0 < x_1 < 1 < x_2 & (2) \\ 0 < x_1 = x_2 < 1 & (3) \end{cases}$$

Trường hợp (1) và (2) tương đương với $f(0).f(1) < 0$ suy ra $\frac{4}{5} < m < 1$.

Trường hợp (3) tương đương với $\begin{cases} \Delta' = m^2 - 5m + 4 = 0 \\ 0 < \frac{S}{2} = m < 1 \end{cases}$ suy ra $m \in \emptyset$. Vậy $\frac{4}{5} \leq m \leq 1$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 299. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $12x^2 - 6mx + m^2 - 4 + \frac{12}{m^2} = 0$ (m là tham số).

Xác định m để $x_1^3 + x_2^3$ lần lượt đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

A. $m = 2\sqrt{3}, m = -2\sqrt{3}$.

B. $m = -2\sqrt{3}, m = 2\sqrt{3}$.

C. $m = 2, m = 2\sqrt{3}$.

D. $m = 2, m = -2$.

Lời giải.

Điều kiện để phương trình có nghiệm là $\Delta' \geq 0$ suy ra $-m^2 + 16 - \frac{48}{m^2} \geq 0$.

Do đó, $2 \leq |m| \leq 2\sqrt{3}$ suy ra $m \in [-2\sqrt{3}; -2] \cup [2; 2\sqrt{3}]$. Áp dụng định lý Vi-ét ta có

$$x_1^3 + x_2^3 = \frac{m}{2} - \frac{3}{2m} = f(m).$$

Trên đoạn $[-2\sqrt{3}; -2]$ và $[2; 2\sqrt{3}]$ ta chứng minh $f(m)$ là hàm đồng biến.

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(-2\sqrt{3}) < f(-2) = -\frac{1}{4} \\ f(2) = \frac{1}{4} < f(2\sqrt{3}) \end{cases} \text{ suy ra } f(-2\sqrt{3}) < f(2\sqrt{3}).$$

Vậy $x_1^3 + x_2^3$ đạt giá trị nhỏ nhất ứng với $m = -2\sqrt{3}$ và đạt giá trị lớn nhất ứng với $m = 2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 300. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 + \frac{1}{x^2} + (1-3m)\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3m = 0$ có nghiệm.

A. $m \leq 0$.

B. $m > \frac{4}{3}$.

C. $\begin{cases} m \geq \frac{4}{3} \\ m \leq 0 \end{cases}$.

D. $m \in \emptyset$.

Lời giải.

Đặt $t = x + \frac{1}{x}$ suy ra $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ và $|t| \geq 2$. Phương trình tương đương với $t^2 + (1-3m)t + 3m - 2 = 0$.

Phương trình có nghiệm $t = 1$ (loại) hoặc $t = 3m - 2$.

Để phương trình có nghiệm thì $|3m - 2| \geq 2$ suy ra $\begin{cases} m \geq \frac{4}{3} \\ m \leq 0 \end{cases}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 301. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\frac{(m-1)x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{(m+2)x-2m+1}{\sqrt{4-x^2}}$ luôn có nghiệm.

- A. $\left(-\frac{7}{2}; \frac{3}{2}\right)$. B. $\left(-\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right)$. C. $\left(\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right)$. D. $\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

Lời giải.

Điều kiện của phương trình là $4-x^2 > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$.

Khi đó từ phương trình ta được $-3x = -2m+1 \Leftrightarrow x = \frac{2m-1}{3}$.

Vậy để phương trình có nghiệm thì $-2 < \frac{2m-1}{3} < 2 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} < m < \frac{7}{2}$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 302. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = 2x^2 - (m+2)x + 2m$ luôn nhận giá trị không âm.

- A. $6 - \sqrt{2} < m < 6 + \sqrt{2}$. B. $3 - 4\sqrt{2} \leq m \leq 3 + 4\sqrt{2}$.
C. $6 - 4\sqrt{2} \leq m \leq 6 + 4\sqrt{2}$. D. $-2 < m < 2$.

Lời giải.

Ta có $\Delta = (m+2)^2 - 16m \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - 12m + 4 \leq 0 \Leftrightarrow 6 - 4\sqrt{2} \leq m \leq 6 + 4\sqrt{2}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 303. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $(2m-1)x^2 + 2(m-2)x + m - 4 \leq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

- A. $m > 0$. B. $m \neq \frac{1}{2}$. C. $m \geq 5$. D. $m \leq 0$.

Lời giải.

Gọi $f(x) = (2m-1)x^2 + 2(m-2)x + m - 4$.

+ Nếu $2m-1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$ thì $f(x) = -3x - \frac{7}{2} \leq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{7}{6}$.

Suy ra $m = \frac{1}{2}$ bị loại.

+ Nếu $m \neq \frac{1}{2}$ thì ta có $f(x) \leq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = -m^2 + 5m \leq 0 \\ 2m-1 < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 5 \\ m < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 0.$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 304. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{(m^2+m+2)x^2 - 2(m+4)x + m+8}}$

xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

- A. $\begin{cases} -4 - \sqrt{14} < m < -4 + \sqrt{14} \\ m > 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} -4 - \sqrt{14} < m < -4 + \sqrt{14} \\ m \neq 0 \end{cases}$.
C. $\begin{cases} 4 - \sqrt{7} < m < -4 + \sqrt{7} \\ m > 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} -4 - \sqrt{7} < m < -4 + \sqrt{7} \\ m \neq 0 \end{cases}$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ nếu $g(x) = (m^2 + m + 2)x^2 - 2(m + 4)x + m + 8 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
 Vì $m^2 + m + 2 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ nên $g(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = (m + 4)^2 - (m^2 + m + 2)(m + 8) < 0$.
 $\Leftrightarrow -m^3 - 8m^2 - 2m < 0 \Leftrightarrow m(m^2 + 8m + 2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -4 - \sqrt{14} < m < -4 + \sqrt{14} \\ m > 0. \end{cases}$

Chọn đáp án **A** □

Câu 305. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $(1 - m)x^2 - 2(m - 1)x + 4 \leq 0$ luôn có nghiệm.

- A. $-3 < m < 1$. B. $\begin{cases} m \leq -3 \\ m > 1 \end{cases}$. C. $\begin{cases} m \geq 3 \\ m < -1 \end{cases}$. D. $-1 \leq m \leq 3$.

Lời giải.

Ta giải bài toán ngược: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $(1 - m)x^2 - 2(m - 1)x + 4 \leq 0$ vô nghiệm.

Gọi $f(x) = (1 - m)x^2 - 2(m - 1)x + 4$, ta có $f(x) \leq 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

+ Với $1 - m = 0 \Leftrightarrow m = 1$. Khi đó ta có $f(x) = 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy với $m = 1$ thì bất phương trình $f(x) \leq 0$ vô nghiệm.

+ Với $m \neq 1$, khi đó $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' < 0 \\ 1 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m - 1)^2 - 4(1 - m) < 0 \\ m < 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < 1 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < 1.$$

Vậy bất phương trình $f(x) \leq 0$ vô nghiệm khi $-3 < m \leq 1$.

Vậy bất phương trình $f(x) \leq 0$ có nghiệm khi $\begin{cases} m \leq -3 \\ m > 1. \end{cases}$

Chọn đáp án **B** □

Câu 306. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 - 2(m - 3)x + 2m^2 - 9m + 11}}{3x^2 + x + 2}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

- A. $1 \leq m \leq 2$. B. $\begin{cases} m \leq 1 \\ m \geq 2 \end{cases}$. C. $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 2 \end{cases}$. D. $-2 \leq m \leq 1$.

Lời giải.

Vì phương trình $3x^2 + x + 2 = 0$ vô nghiệm nên hàm số y xác định khi $x^2 - 2(m - 3)x + 2m^2 - 9m + 11 \geq 0$.

Ta có $\Delta' = (m - 3)^2 - (2m^2 - 9m + 11) = -m^2 + 3m - 2$.

Để y xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $\Delta \leq 0$, suy ra $\begin{cases} m \leq 1 \\ m \geq 2. \end{cases}$

Chọn đáp án **B** □

Câu 307. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 + 9x - 10 < 0 \\ (m^2 + 1)x > m + 3 \end{cases}$ vô nghiệm.

- A. $-1 \leq m \leq 2$. B. $-2 \leq m \leq 1$. C. $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 2 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m \leq 1 \\ m \geq 2 \end{cases}$.

Lời giải.

$$\text{Xét } \begin{cases} x^2 + 9x - 10 < 0 & (1) \\ (m^2 - 1)x > m + 3. & (2) \end{cases}$$

Ta có (1) $\Leftrightarrow -10 < x < 1$. Do $m^2 + 1 > 0$ nên (2) $\Leftrightarrow x > \frac{m+3}{m^2+1}$.

Vậy để hệ đã cho vô nghiệm thì $\frac{m+3}{m^2+1} \geq 1 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 2$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 308. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} \frac{x-1}{3-x} \geq 0 \\ x^2 - 2(m+2)x + m^2 + 4m \geq 0 \end{cases}$ có nghiệm.

A. $-1 \leq m < 1$.

B. $-1 < m < 1$.

C. $\begin{cases} m < -1 \\ m \geq 1 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 1 \end{cases}$.

Lời giải.

$$\text{Xét hệ } \begin{cases} \frac{x-1}{3-x} \geq 0 & (1) \\ x^2 - 2(m+2)x + m^2 + 4m \geq 0. & (2) \end{cases}$$

$$\text{Ta có (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ (x-1)(3-x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x < 3.$$

Ta nhận thấy rằng phương trình $x^2 - 2(m+2)x + m^2 + 4m = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = m < x_2 = m + 4. \text{ Suy ra nghiệm của (2) là } \begin{cases} x \leq m \\ x \geq m + 4. \end{cases}$$

Ta có hệ vô nghiệm khi $m < 1 < 3 \leq m + 4 \Leftrightarrow -1 \leq m < 1$.

$$\text{Vậy hệ có nghiệm khi } \begin{cases} m < -1 \\ m \geq 1. \end{cases}$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 309. Biết tập nghiệm của bất phương trình $\left| \frac{3x}{2x-4} \right| > 2 + \left| \frac{2x-4}{x} \right|$ là $S = [a; b] \setminus \{c\}$. Tính $a \cdot b \cdot c$.

A. 6.

B. $\frac{32}{3}$.

C. $-\frac{32}{3}$.

D. 24.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$ và $x \neq 2$. Khi đó bất phương trình trở thành:

$$\left| \frac{3x}{2x-4} \right| > 2 + \left| \frac{2x-4}{x} \right| \Leftrightarrow \frac{3}{2} \left| \frac{x}{x-2} \right| > 2 + 2 \cdot \left| \frac{x-2}{x} \right|.$$

$$\text{Đặt } t = \left| \frac{x-2}{x} \right| > 0.$$

$$\text{Bất phương trình trở thành } \frac{3}{2t} > 2 + 2t \Leftrightarrow 4t^2 + 4t - 3 < 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < t < \frac{1}{2}.$$

Kết hợp với điều kiện ta có

$$0 < \left| \frac{x-2}{x} \right| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow |2x-4| < |x| \Leftrightarrow (x-4)(3x-4) < 0 \Leftrightarrow \frac{4}{3} < x < 4.$$

$$\text{Suy ra tập nghiệm là } S = \left[\frac{4}{3}; 4 \right] \setminus \{2\}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 310. Biết tập nghiệm của bất phương trình $\frac{|x^2 - 2x| - 4|x|}{\sqrt{x^2 - 4x + 8} - 2} \geq 0$ có dạng $S = (-\infty; a] \cup [b; +\infty) \cup \{c\}$. Tính $a^2 + b^2 - c$.

A. 39.

B. 42.

C. 40.

D. 47.

Lời giải.

Do $\sqrt{x^2 - 4x + 8} - 2 = \sqrt{(x-2)^2 + 4} - 2 \geq 0$.

Nên điều kiện bất phương trình có nghĩa là $x \neq 2$.

Khi đó, bất phương trình trở thành

$$|x^2 - 2x| \geq |4x| \Leftrightarrow (x^2 + 2x)(x^2 - 6x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2(x+2)(x-6) \geq 0.$$

ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x) = x^2(x+2)(x-6)$.

x	$-\infty$	-2	0	6	$+\infty$
x^2	+		+	0	+
$x+2$	-	0	+		+
$x-6$	-		-		+
$f(x)$	+	0	-	0	+

Suy ra $S = (-\infty; -2] \cup [6; +\infty) \cup \{0\}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 311. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $x^2 + 4x + |x+2| - m \geq 0$ nghiệm đúng với mọi x .

A. $m \in (-\infty; -4]$.B. $m \in [; +\infty)$.C. $m \in (-4; +\infty)$.D. $m \in \left(-\infty; -\frac{17}{4}\right)$.**Lời giải.**

Bất phương trình đã cho tương đương với $f(x) = (x+2)^2 + |x+2| - 4 \geq m \Leftrightarrow f(x) \geq m$

Đặt $t = |x+2|, t \geq 0$ bất phương trình trở thành $t^2 + t - 4 \geq m, t \geq 0$.

Lập bảng biến thiên của hàm $g(t) = t^2 + t - 4, t \geq 0$.

x	0	$+\infty$
y	-4	$+\infty$

Do đó $g(t) \geq m, \forall t \geq 0 \Leftrightarrow -4 \geq m$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 312. Tìm giá trị nguyên lớn nhất của m để bất phương trình $|x^2 - 3x + 2| \geq 3x^2 + 5x + 3m^2 + 5m$ có nghiệm.

A. -2.

B. 1.

C. -1.

D. 0.

Lời giải.

Bất phương trình tương đương với $f(x) = |x^2 - 3x + 2| - 3x^2 - 5x \geq 3m^2 + 5m$.

Xét hàm số $f(x) = |x^2 - 3x + 2| - 3x^2 - 5x$, lập bảng biến thiên ta được $3m^2 + 5m \leq 10$. Từ đó suy ra giá trị nguyên lớn nhất của m cần tìm là $m = 1$.

Trường hợp 1: Nếu $1 < x < 2$ thì $|x^2 - 3x + 2| = -x^2 + 3x - 2$. Khi đó, hàm số $f(x)$ trở thành $f(x) = -4x^2 - 2x - 2$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$.

x	1	2
y	-8	-22

Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra $-22 < 3m^2 + 5m < -8$. Suy ra không tồn tại m thỏa yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: Nếu $x \leq 1$ hoặc $x \geq 2$ thì $|x^2 - 3x + 2| = x^2 - 3x + 2$. Khi đó, hàm số $f(x)$ đã cho trở thành $f(x) = -2x^2 - 8x + 2$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$.

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
y	$-\infty$	2	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra $3m^2 + 5m \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq \frac{1}{3}$. Suy ra giá trị m nguyên lớn nhất thỏa yêu cầu bài toán là $m = 0$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 313. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho $5x^2 + 2x + 4 \geq |(m-1)x^2 + x + m|$ có nghiệm đúng với mọi x .

A. $\left[-\frac{5}{2}; \frac{10 - \sqrt{5}}{2}\right]$. B. $\left[-4; \frac{10 - \sqrt{5}}{2}\right]$. C. $\left[0; \frac{10 - \sqrt{5}}{2}\right]$. D. $\left[-\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 & |(m-1)x^2 + x + m| \leq 5x^2 + 2x + 4 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} (m-1)x^2 + x + m \leq 5x^2 + 2x + 4 \\ (m-1)x^2 + x + m \geq -5x^2 - 2x - 4 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} (m-6)x^2 - x + m - 4 \leq 0, (1) \\ (m+4)x^2 + 3x + m + 4 \geq 0, (2) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Để thỏa mãn yêu cầu bài toán ta cần có
$$\begin{cases} m - 6 < 0 \\ 1 - 4(m - 6)(m - 4) \leq 0 \\ m + 4 > 0 \\ 9 - 4(m + 4)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leq m \leq \frac{10 - \sqrt{5}}{2}.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 314. Bất phương trình $\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} \geq \frac{x + 3}{2}$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

Điều kiện xác định:

$$\begin{cases} x + 2\sqrt{x - 1} \geq 0 \\ x - 2\sqrt{x - 1} \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x - 1} + 1)^2 \geq 0 \\ (\sqrt{x - 1} - 1)^2 \geq 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Với điều kiện trên, bất phương trình đã cho tương đương với

$$|1 + \sqrt{x - 1}| + |\sqrt{x - 1} - 1| \geq \frac{x + 3}{2}. \quad (1)$$

Trường hợp 1: Nếu $1 \leq x \leq 2$ thì

$$(1) \Leftrightarrow 1 + \sqrt{x - 1} + 1 - \sqrt{x - 1} \geq \frac{x + 3}{2} \Leftrightarrow 4 \geq x + 3 \Leftrightarrow x \leq 1.$$

So với điều kiện, vì x nguyên nên ta có $x = 1$.

Trường hợp 2: Nếu $x \geq 2$ thì

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 1 + \sqrt{x - 1} + \sqrt{x - 1} - 1 \geq \frac{x + 3}{2} \\ &\Leftrightarrow 4\sqrt{x - 1} \geq x + 3 \\ &\Leftrightarrow 16(x - 1) \geq (x + 3)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 5)^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x = 5. \quad (\text{loại}) \end{aligned}$$

So với điều kiện, không tồn tại x nguyên thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy bất phương trình có 2 nghiệm nguyên : $x = 1$ và $x = 5$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 315. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + m}$, trong đó m là tham số nhận giá trị trong tập hợp $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Hỏi có bao nhiêu giá trị của m để tập xác định của hàm số chứa đoạn $[-1; 4]$?

A. 8.

B. 9.

C. 5.

D. 6.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x^2 - 4x + m \geq 0$.

Yêu cầu đề bài tương đương với $x^2 - 4x + m \geq 0 \quad \forall x \in [-1; 4]$.

Dễ thấy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 4x + m$ trên đoạn $[-1; 4]$ là $m - 4$ đạt tại $x = 1$ nên ta có $m - 4 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 4$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 316. Tập nghiệm của bất phương trình $4x^2 - 8x + \sqrt{2x+3} \leq 1$ là $S = [x_1; x_2]$. Khi đó giá trị của tích $(5 - 4x_1)^2(4x_2 - 3)^2$ bằng

A. -357.

B. 357.

C. $\sqrt{357}$.

D. 375.

Lời giải.

Điều kiện $2x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{2}$.

Khi đó bất phương trình tương đương với

$$\sqrt{2x+3} \leq 1 + 8x - 4x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 8x - 4x^2 \geq 0 & (1) \\ 2x + 3 \leq (1 + 8x - 4x^2)^2 & (2) \end{cases}$$

Giải (1) được $x \in \left[1 - \frac{\sqrt{5}}{2}; 1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$.

Giải (2) được $x \in \left(-\infty; \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{17}}{4}\right] \cup \left[\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{21}}{4}; \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}\right] \cup \left[\frac{5}{4} + \frac{\sqrt{21}}{4}; +\infty\right)$. Kết hợp điều kiện xác định, tập nghiệm $S = \left[\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{21}}{4}; \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}\right]$.

Từ đó có $x_1 = \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{21}}{4}$, $x_2 = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4}$ và $(5 - 4x_1)^2(4x_2 - 3)^2 = 357$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 317. Nghiệm lớn nhất của bất phương trình $x^2 - x - 2 \leq \sqrt{x} + \sqrt{3-x}$ có dạng $\frac{a + \sqrt{b}}{c}$, trong đó các số a, b, c nguyên dương và $\frac{a}{c}$ tối giản. Tính giá trị biểu thức $a + 2b + c$.

A. 10.

B. 15.

C. 12.

D. 13.

Lời giải.

Điều kiện xác định $0 \leq x \leq 3$.

Khi đó bất phương trình tương đương với

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2}(\sqrt{x} - 1 - \sqrt{3-x})(x\sqrt{x} + 1 + (x + \sqrt{x} + 1)\sqrt{3-x}) \leq 0 \\
 \Leftrightarrow & \sqrt{x} - 1 - \sqrt{3-x} \leq 0 \\
 \Leftrightarrow & \sqrt{x} \leq 1 + \sqrt{3-x} \\
 \Leftrightarrow & x \leq 1 + 3 - x + 2\sqrt{3-x} \\
 \Leftrightarrow & x - 2 \leq \sqrt{3-x} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x < 2 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 3-x \geq x^2 - 4x + 4 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & 0 \leq x \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}.
 \end{aligned}$$

Do đó nghiệm dương lớn nhất của bất phương trình là $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ nên $a = 3; b = 5, c = 2 \Rightarrow a + 2b + c = 15$.
 Chọn đáp án **(B)** □

Câu 318. Biết rằng bất phương trình $x^2 + 4\sqrt{x+2} \leq x + 2(1 + \sqrt{x^2+3})$ có tập nghiệm là $S = [a; b] \cup \{c\}$, $a, b \in \mathbb{R}, a < b, c \in \mathbb{Z}$. Giá trị của $a + b + c$ bằng

- A. $-1 - 2\sqrt{3}$. B. $-1 + 2\sqrt{3}$. C. $-2\sqrt{3}$. D. 0.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -2$.

Đặt $u = \sqrt{x^2+3}; v = \sqrt{x+2}$ ta được bất phương trình

$$u^2 - 3 + 4v \leq v^2 + 2u \Leftrightarrow (u - v + 1)(u + v - 3) \leq 0$$

Ta có

$$u - v + 1 = \sqrt{x^2+3} - \sqrt{x+2} + 1 = \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x+2}} + 1 > 0$$

nên ta được

$$\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x+2} - 3 \leq 0$$

Giải bất phương trình này được tập nghiệm là $S = [-2; 2 - 2\sqrt{3}] \cup \{-1\}$. Do đó $a + b + c = -1 - 2\sqrt{3}$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 319. Biết rằng bất phương trình $\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{6(x^2+2x+4)}-2(x+2)} \geq \frac{1}{2}$ có tập nghiệm là S . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $S = \emptyset$.
 B. $S \subset (-2; 5)$.
 C. $S \subset (5; 10)$.
 D. $S = [a; b]$ thỏa mãn $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ và $a + b = 2$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -2$.

Ta có

$$\sqrt{6(x^2 + 2x + 4)} - 2(x + 2) = \frac{2(x^2 - 2x + 4)}{\sqrt{6(x^2 + 2x + 4)} + 2(x + 2)} > 0, \forall x \geq -2$$

Do đó, bất phương trình đã cho tương đương với

$$2(\sqrt{x+2} - 2) \geq \sqrt{6(x^2 + 2x + 4)} - 2(x + 2) \Leftrightarrow 2\sqrt{x+2} + 2x \geq \sqrt{6(x^2 + 2x + 4)} \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức $a + b + c \leq \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}$ ta có

$$x + x + 2\sqrt{x+2} \leq \sqrt{3(x^2 + x^2 + 4x + 8)} = \sqrt{6(x^2 + 2x + 4)} \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $x = 2\sqrt{x+2}$. Giải ra được $x = 2 + 2\sqrt{3}$. Thử lại ta thấy bất phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 2 + 2\sqrt{3}$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 320. Tìm m để bất phương trình $\sqrt{(2+x)(4-x)} \leq x^2 - 2x + m$ đúng với mọi $x \in [-2; 4]$.

A. $m \in \mathbb{R}$.

B. $m \geq 0$.

C. $m \geq 4$.

D. $m \geq 2$.

Lời giải.

Xét bất phương trình $\sqrt{(2+x)(4-x)} \leq x^2 - 2x + m$, trên đoạn $[-2; 4]$.

Đặt $\sqrt{8+2x-x^2} = t$, với $x \in [-2; 4]$ thì $t \in [0; 3]$, ta được bất phương trình

$$t \leq 8 - t^2 + m \Leftrightarrow t^2 + t - 8 \leq m$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t - 8$, trên đoạn $[0; 3]$, ta có bảng biến thiên

t	0	3
$f(t)$	-8	4

Dựa vào bảng biến thiên bất phương trình nghiệm đúng khi và chỉ khi $m \geq 4$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 321. Biết rằng tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{3x+2} - \sqrt{4x+1} \geq \frac{x-1}{5}$ là đoạn $[a; b]$. Tính $T = b - a$.

A. $T = 1$.

B. $T = \frac{5}{4}$.

C. $T = 2$.

D. $T = \frac{3}{2}$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{4}$, với điều kiện bất phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{3x+2} - \sqrt{4x+1} \geq \frac{x-1}{5} \\ \Leftrightarrow & \frac{3x+2-4x-1}{\sqrt{3x+2} + \sqrt{4x+1}} \geq \frac{x-1}{5} \\ \Leftrightarrow & \frac{1-x}{\sqrt{3x+2} + \sqrt{4x+1}} + \frac{1-x}{5} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (1-x) \left(\frac{1}{\sqrt{3x+2} + \sqrt{4x+1}} + \frac{1}{5} \right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 1-x \geq 0 \\ \Leftrightarrow & x \leq 1. \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện ta được tập nghiệm $S = \left[-\frac{1}{4}; 1\right]$, từ đó $a = -\frac{1}{4}; b = 1$ do đó $T = b - a = \frac{5}{4}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 322. Tìm số nghiệm của bất phương trình $\sqrt{2x^2 - 6x + 8} - \sqrt{x} \leq x - 2$.

A. 1.

B. 2.

C. Vô số.

D. 3.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$

- Với $x = 0$, bất phương trình trở thành $\sqrt{8} \leq -2$ không phải là nghiệm của bất phương trình.
- Với $x > 0$, chia cả hai vế của bất phương trình cho $\sqrt{x} > 0$ ta được:

$$\sqrt{2x + \frac{8}{x}} - 6 - 1 \leq \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \sqrt{2 \left(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)^2 + 2} \leq \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + 1$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}, \text{ ta được } \sqrt{2t^2 + 2} \leq t + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -1 \\ 2t^2 + 2 \leq t^2 + 2t + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -1 \\ t^2 - 2t + 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1.$$

$$\text{Khi } t = 1, \text{ ta được } \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} = 1 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = -1 \\ \sqrt{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 323. Bất phương trình $\frac{x - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{2(x^2 - x + 1)}} \geq 1$ có nghiệm duy nhất ở dạng $x_0 = \frac{a + b\sqrt{c}}{d}$, với

a, b, c, d là các số nguyên, $a > 0$ và phân số $\frac{a}{d}$ tối giản. Tính tổng $S = a + b + c + d$.

A. $S = 0$.

B. $S = 11$.

C. $S = 6$.

D. $S = 9$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$.

Ta có $x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow 2(x^2 - x + 1) \geq \frac{3}{2}$ hay $1 - \sqrt{2(x^2 - x + 1)} < 0$.

Khi đó bất phương trình tương đương với $x - \sqrt{x} \leq 1 - \sqrt{2(x^2 - x + 1)}$

- Với $x = 0$, bất phương trình trở thành $0 \leq 1 - \sqrt{2}$ nên $x = 0$ không phải là nghiệm.
- Với $x > 0$, chia cả hai vế của bất phương trình cho $\sqrt{x} > 0$, ta được:

$$\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \leq -\sqrt{2 \left(x + \frac{1}{x} - 1 \right)} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) - 1 \leq -\sqrt{2 \left[\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 + 1 \right]}$$

Đặt $t = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$, ta được $\sqrt{2t^2 + 2} \leq 1 - t \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 1 \\ 2t^2 + 2 \leq 1 - 2t + t^2 \end{cases} \Leftrightarrow t = -1$.

Với $t = -1$, ta được $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = -1 \Leftrightarrow x + \sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ (thỏa mãn).

Bất phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ khi đó $a = 3, b = -1, c = 5, d = 2$ nên $S = 9$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 324. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $mx^2 + 2x + m^2 + 2m + 1 = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

A. $m < 0$ và $m \neq -1$. B. $m < 0$. C. $m \neq -1$. D. $m \neq 0$ và $m \neq -1$.

Lời giải.

- Với $m = 0$ thì phương trình đã cho trở thành $2x + 1 = 0$ có nghiệm duy nhất $x = -\frac{1}{2}$. Vậy $m = 0$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.
- Với $m \neq 0$, phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu khi

$$m(m^2 + 2m + 1) < 0 \Leftrightarrow m(m + 1)^2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m < 0. \end{cases}$$

Vậy $m < 0, m \neq -1$ là các giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 325. Cho $f(x), g(x)$ là các hàm số xác định trên $\mathbb{R}$, có bảng xét dấu như sau

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	-	-	0	+	+

Khi đó tập nghiệm của bất phương trình $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ là

A. $[1; 2]$. B. $[1; 2) \cup (3; +\infty)$. C. $[1; 2) \cup [3; +\infty)$. D. $[1; 2] \cup (3; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có bảng xét dấu của $\frac{f(x)}{g(x)}$ như sau

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
$f(x)$	+	0	−	−	0	+
$g(x)$	−	−	0	+	+	+
$\frac{f(x)}{g(x)}$	−	0	+	−	0	+

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ là $S = [1; 2) \cup [3; +\infty)$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 326. Cho bất phương trình $-3x^2 + 10x - 3 \geq 0$ có tập nghiệm là S . Phần bù của S trong $\mathbb{R}$ là

A. $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (3; +\infty)$.

B. $\mathbb{R}$.

C. $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$.

D. $(-\infty; 3) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Ta có

$$-3x^2 + 10x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq x \leq 3.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left[\frac{1}{3}; 3\right]$.

Do đó phần bù của S trong $\mathbb{R}$ là $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (3; +\infty)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 327. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để tam thức $f(x) = -x^2 + 2x + m - 2018 < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A. $m > 2019$.

B. $m < 2019$.

C. $m > 2017$.

D. $m < 2017$.

Lời giải.

Ta có

$$f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < 0 \\ 1^2 - (-1) \cdot (m - 2018) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 + m - 2018 < 0 \Leftrightarrow m < 2017.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 328. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 < 0 \\ x^2 - (2m + 1)x + m(m + 1) \leq 0 \end{cases}$

vô nghiệm.

A. $\frac{1}{2} \leq m \leq 2$.

B. $m \leq -\frac{1}{2}$ hoặc $m \geq 2$.

C. $\frac{1}{2} < m < 1$.

D. $m < -\frac{1}{2}$ hoặc $m > 2$.

Lời giải.

Bất phương trình $2x^2 - 5x + 2 < 0$ có tập nghiệm $S_1 = \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Ta có $f(x) = x^2 - (2m + 1)x + m(m + 1) = (x - m)(x - m - 1)$.

Do đó bất phương trình $f(x) \leq 0$ có tập nghiệm $S_2 = [m; m + 1]$.

Hệ bất phương trình đã cho vô nghiệm khi

$$\begin{cases} m + 1 \leq \frac{1}{2} \\ m \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -\frac{1}{2} \\ m \geq 2 \end{cases}$$

Vậy $m \leq -\frac{1}{2}$ hoặc $m \geq 2$ là các giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 329. Cho hàm số $y = \frac{2mx + 4}{\sqrt{x^2 + 2mx + 2018m + 2019}} + \sqrt{mx^2 + 2mx + 2020}$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m để hàm số xác định trên $\mathbb{R}$. Hỏi tập S có bao nhiêu phần tử?

A. 2018.

B. 2019.

C. 2020.

D. 2021.

Lời giải.

Để hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ thì $\begin{cases} x^2 + 2mx + 2018m + 2019 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ mx^2 + 2mx + 2020 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$.

- Nếu $m = 0$ thì $y = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 2019}} + \sqrt{2020}$ luôn xác định trên $\mathbb{R}$. Vậy $m = 0$ thỏa mãn đề bài.

- Nếu $m \neq 0$ để hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ thì

$$\begin{cases} m^2 - 2018m - 2019 < 0 \\ m > 0 \\ m^2 - 2020m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 2019 \\ m > 0 \\ 0 \leq m \leq 2020 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 2019$$

Kết hợp hai trường hợp trên, ta có $0 \leq m < 2019$. Vậy có 2019 số nguyên m thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 330. Tam thức nào dưới đây luôn dương với mọi giá trị của x ?

A. $x^2 - 10x + 2$.B. $x^2 - 2x - 10$.C. $x^2 - 2x + 10$.D. $-x^2 + 2x + 10$.**Lời giải.**

Tam thức luôn dương với mọi giá trị của x phải có $\begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$ nên chọn $x^2 - 2x + 10$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 331. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$ là tam thức bậc hai.B. $f(x) = 2x - 4$ là tam thức bậc hai.C. $f(x) = 3x^3 + 2x - 1$ là tam thức bậc hai.D. $f(x) = x^4 - x^2 + 1$ là tam thức bậc hai.**Lời giải.**

Theo định nghĩa tam thức bậc hai thì $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$ là tam thức bậc hai.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 332. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$) và $\Delta = b^2 - 4ac$. Cho biết dấu của Δ khi $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A. $\Delta < 0$.B. $\Delta = 0$.C. $\Delta > 0$.D. $\Delta \geq 0$.**Lời giải.**

Theo định lý về dấu của tam thức bậc hai thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi $\Delta < 0$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 333. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 2}$.

A. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$.B. $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.C. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$.D. $[2; +\infty)$.**Lời giải.**

Hàm số xác định khi và chỉ khi $2x^2 - 5x + 2 \geq 0$

Suy ra $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 334. Cho tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 - 4x + 5$. Tìm tất cả giá trị của x để $f(x) \geq 0$.

A. $x \in (-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$.

B. $x \in [-1; 5]$.

C. $x \in [-5; 1]$.

D. $x \in (-5; 1)$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = -5$.

Mà hệ số $a = -1 < 0$ nên: $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-5; 1]$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 335. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $x^2 - 4x + 4 > 0$.

A. $S = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

B. $S = \mathbb{R}$.

C. $S = (2; +\infty)$.

D. $S = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Lời giải.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x^2 - 4x + 4$	+	0	+

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 336. Tập nghiệm của bất phương trình $(x + 2)(5 - x) < 0$ là

A. $[5; +\infty)$.

B. $(-\infty; -2) \cup (5; +\infty)$.

C. $(-2; 5)$.

D. $(-5; -2)$.

Lời giải.

Ta có $(x + 2)(5 - x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x > 5 \end{cases}$.

□

Câu 337. Bất phương trình: $\sqrt{2x+1} < 3 - x$ có nghiệm là

A. $\left[-\frac{1}{2}; 4 - 2\sqrt{2}\right)$.

B. $(4 + 2\sqrt{2}; +\infty)$.

C. $(3; 4 + 2\sqrt{2})$.

D. $(4 - 2\sqrt{2}; 3)$.

Lời giải.

$$\sqrt{2x+1} < 3 - x \Leftrightarrow (\sqrt{2x+1} + 1)^2 < 8 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x < 4 - 2\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 338. Gọi S là tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - 8x + 7 \geq 0$. Trong các tập hợp sau, tập nào không là tập con của S ?

A. $[8; +\infty)$.

B. $(-\infty; -1]$.

C. $(-\infty; 0]$.

D. $[6; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $x^2 - 8x + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 7 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	1	7	$+\infty$	
VT	+	0	-	0	+

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (-\infty; 1] \cup [7; +\infty) \Rightarrow [6; +\infty) \not\subset S$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 339. Cho hàm số $f(x) = -x^2 - 2(m-1)x + 2m - 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $f(x) > 0, \forall x \in (0; 1)$.

- A. $m > 1$. B. $m < \frac{1}{2}$. C. $m \geq 1$. D. $m \geq \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $f(x) > 0, \forall x \in (0; 1) \Leftrightarrow -x^2 - 2(m-1)x + 2m - 1 > 0, \forall x \in (0; 1)$.

$\Leftrightarrow -2m(x-1) > x^2 - 2x + 1, \forall x \in (0; 1) (*)$.

Vì $x \in (0; 1) \Rightarrow x-1 < 0$ nên $(*) \Leftrightarrow -2m < \frac{x^2 - 2x + 1}{x-1} = x-1 = g(x), \forall x \in (0; 1)$.

$\Leftrightarrow -2m \leq g(0) = -1 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 340. Với giá trị nào của m thì bất phương trình $\sqrt{x+2} \geq x+m$ có nghiệm?

- A. $m \geq 2$. B. $m \leq 2$. C. $m \leq \frac{9}{4}$. D. $2 \leq m \leq \frac{9}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{x+2} \geq x+m \Leftrightarrow m \leq -\left(x+2-\sqrt{x+2}+\frac{1}{4}\right) + \frac{9}{4} \Leftrightarrow m \leq -\left(\sqrt{x+2}-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \leq \frac{9}{4}$.

Do đó bất phương trình đã cho có nghiệm khi $m \leq \frac{9}{4}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 341. Cho bất phương trình $x^2 - 8x + 7 \geq 0$. Trong các tập hợp sau đây, tập nào có chứa phần tử không phải là nghiệm của bất phương trình.

- A. $[8; +\infty)$. B. $(-\infty; 1]$. C. $[6; +\infty)$. D. $(-\infty; 0]$.

Lời giải.

Bất phương trình $x^2 - 8x + 7 \geq 0$ có nghiệm là $(-\infty; 1] \cup [7; +\infty)$. Tập $[6; +\infty)$ chứa $[6; 7)$ không nằm trong tập nghiệm.

Chọn đáp án **C**

□

ĐÁP ÁN

1. C	2. A	3. D	4. A	5. C	6. C	7. D	8. C	9. B	10. A
11. C	12. B	13. B	14. C	15. B	16. A	17. B	18. C	19. C	20. C
21. A	22. A	23. D	24. C	25. D	26. C	27. B	28. D	29. D	30. A
31. C	32. B	33. C	34. C	35. D	36. C	37. A	38. D	39. C	40. C
41. A	42. A	43. B	44. C	45. B	46. B	47. A	48. C	49. D	50. C
51. C	52. D	53. A	54. C	55. B	56. B	57. A	58. B	59. C	60. A
61. A	62. B	63. B	64. B	65. B	66. B	67. B	68. B	69. B	70. C
71. A	72. C	73. D	74. B	75. D	76. D	77. D	78. A	79. A	80. B
81. A	82. B	83. B	84. A	85. B	86. A	87. B	88. A	89. C	90. C
91. C	92. D	93. B	94. B	95. C	96. C	97. D	98. A	99. B	100. B
101. B	102. C	103. B	104. A	105. C	106. A	107. B	108. C	109. C	110. A
111. C	112. C	113. D	114. D	115. A	116. C	117. A	118. C	119. B	120. C
121. A	122. D	123. B	124. D	125. B	126. A	127. A	128. D	129. D	130. B
131. C	132. D	133. B	134. A	135. B	136. D	137. B	138. B	139. C	140. C
141. B	142. C	143. B	144. A	145. D	146. D	147. D	148. A	149. B	150. D
151. B	152. D	153. A	154. B	155. A	156. A	157. B	158. A	159. B	160. B
161. D	162. B	163. A	164. D	165. D	166. D	167. A	168. C	169. A	170. C
171. B	172. B	173. A	174. B	175. C	176. A	177. B	178. B	179. D	180. C
181. C	182. C	183. B	184. D	185. D	186. A	187. B	188. A	189. A	190. C
191. C	192. A	193. D	194. A	195. B	196. B	197. B	198. C	199. D	200. C
201. B	202. C	203. C	204. D	205. D	206. C	207. C	208. A	209. A	210. A
211. D	212. B	213. C	214. A	215. C	216. D	217. D	218. D	219. C	220. A
221. C	222. D	223. D	224. D	225. D	226. C	227. C	228. A	229. A	230. A
231. A	232. A	233. C	234. A	235. B	236. B	237. B	238. C	239. D	240. C
241. A	242. C	243. A	244. B	245. D	246. A	247. D	248. B	249. A	250. B
251. B	252. A	253. C	254. C	255. D	256. D	257. A	258. C	259. D	260. A
261. C	262. D	263. C	264. D	265. D	266. D	267. D	268. A	269. D	270. C
271. B	272. D	273. A	274. D	275. D	276. C	277. C	278. B	279. C	280. A
281. C	282. B	283. D	284. A	285. A	286. B	287. A	288. B	289. C	290. D
291. D	292. B	293. C	294. A	295. C	296. A	297. B	298. C	299. A	300. C
301. B	302. C	303. D	304. A	305. B	306. B	307. A	308. C	309. B	310. C
311. A	312. D	313. A	314. C	315. D	316. B	317. B	318. A	319. C	320. C
321. B	322. A	323. D	324. A	325. C	326. A	327. D	328. B	329. B	330. D
331. A	332. A	333. C	334. C	335. A	337. A	338. D	339. D	340. C	341. C

Chương 5: THỐNG KÊ

§1 BẢNG PHÂN BỐ TẦN SỐ VÀ TẦN SUẤT

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 BẢNG PHÂN BỐ TẦN SỐ VÀ TẦN SUẤT

Giả sử dãy n số liệu thống kê đã cho có k giá trị khác nhau ($k \leq n$). Gọi x_i là một giá trị bất kì trong k giá trị đó, ta có:

- Số lần xuất hiện giá trị x_i trong dãy số liệu đã cho được gọi là **tần số** của giá trị đó, kí hiệu là n_i .
- Số $f_i = \frac{n_i}{n}$ được gọi là **tần suất** của giá trị x_i .

2 BẢNG PHÂN BỐ TẦN SỐ VÀ TẦN SUẤT GHEP LỚP

Giả sử dãy n số liệu thống kê đã cho được phân vào k lớp ($k < n$). Xét lớp thứ i ($i = 1, 2, \dots, k$) trong k lớp đó, ta có:

- Số n_i các số liệu thống kê thuộc lớp thứ i được gọi là **tần số của lớp** đó.
- Số $f_i = \frac{n_i}{n}$ được gọi là **tần suất của lớp** thứ i .

! Trong các bảng phân bố tần suất, tần suất được tính ở dạng tỉ số phần trăm.

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Bảng phân bố tần số và tần suất

Bảng phân bố tần số gồm hai dòng (hoặc hai cột). Dòng (cột) đầu ghi các giá trị khác nhau của mẫu số liệu. Dòng (cột) thứ hai ghi tần số (số lần xuất hiện của mỗi giá trị trong các số liệu thống kê) tương ứng. Nếu bổ sung dòng (cột) thứ ba ghi tần suất (tỉ số % giữa tần số và tổng số liệu thống kê) thì ta được bảng phân bố tần số và tần suất.

Để lập bảng phân bố tần số và tần suất từ bảng số liệu thống kê ban đầu, ta thực hiện các bước sau:

- Sắp thứ tự các giá trị trong các số liệu thống kê;

- Tính tần số n_i của các giá trị x_i bằng cách đếm số lần x_i xuất hiện;
- Tính tần suất f_i của x_i theo công thức $f_i = \frac{n_i}{n}$;
- Đặt các số liệu x_i , n_i , f_i vào bảng ta thu được bảng phân bố tần số và tần suất.

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 1 ❖❖❖

Ví dụ 1. Cho số liệu thống kê ghi trong bảng sau

Thời gian hoàn thành một sản phẩm ở một nhóm công nhân (đơn vị: phút)

42	42	42	42	44	44	44	44	44	45
45	45	45	45	45	45	45	45	45	45
45	45	45	45	45	45	45	45	45	54
54	54	50	50	50	50	48	48	48	48
48	48	48	48	48	48	50	50	50	50

- Hãy lập bảng phân bố tần số và tần suất của bảng trên.
- Trong 50 công nhân được khảo sát, những công nhân có thời gian hoàn thành một sản phẩm từ 45 phút đến 50 phút chiếm bao nhiêu phần trăm.

Lời giải.

- Bảng phân bố tần số và tần suất

Thời gian hoàn thành một sản phẩm ở một nhóm công nhân

Thời gian (phút)	42	44	45	48	50	54	Cộng
Tần số	4	5	20	10	8	3	50
Tần suất (%)	8	10	40	20	16	6	100%

- Từ bảng phân bố tần số và tần suất ở trên, suy ra trong 50 công nhân được khảo sát, những công nhân có thời gian hoàn thành một sản phẩm từ 45 phút đến 50 phút chiếm 76%.

□

Ví dụ 2. Khi điều tra về năng suất của một giống lúa mới, điều tra viên ghi lại năng suất (tạ / ha) của giống lúa đó trên 40 thửa ruộng có cùng diện tích 1 ha trong bảng sau:

30	32	32	34	38	36	38	36
40	30	40	40	34	38	36	36
38	40	30	40	32	30	30	30
40	38	38	34	34	32	32	36
34	40	34	30	38	38	32	32

- Hãy lập bảng phân bố tần số và tần suất của bảng trên.
- Trong 40 thửa ruộng được khảo sát, hãy cho biết những thửa ruộng có năng suất cao nhất chiếm bao nhiêu phần trăm.

Lời giải.

- a) Bảng phân bố tần số và tần suất
- Năng suất của giống lúa mới của 40 thửa ruộng*
- | | | | | | | | |
|---------------------|------|------|------|------|------|------|------|
| Năng suất (tạ / ha) | 30 | 32 | 34 | 36 | 38 | 40 | Cộng |
| Tần số | 7 | 7 | 6 | 5 | 8 | 7 | 40 |
| Tần suất (%) | 17,5 | 17,5 | 15,0 | 12,5 | 20,0 | 17,5 | 100% |
- b) Từ bảng phân bố tần số và tần suất ở trên, suy ra trong 40 thửa ruộng được khảo sát, những thửa ruộng có năng suất cao nhất chiếm 17,5%.
-

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Điều tra về tuổi nghề của 30 công nhân được chọn ra từ 150 công nhân của một nhà máy A. Người ta thu được bảng số liệu ban đầu như sau:

7	2	5	9	7	4	3	8	10	4
2	4	4	5	6	7	7	5	4	1
9	4	14	2	8	5	5	7	3	8

Hãy lập bảng phân bố tần số và tần suất của bảng trên.

Lời giải.

Bảng phân bố tần số và tần suất

Tuổi nghề của 30 công nhân của một nhà máy A

Tuổi nghề (năm)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	14	Cộng
Tần số	1	3	2	6	5	1	5	3	2	1	1	30
Tần suất (%)	3,3	10	6,7	20	16,7	3,3	16,7	10	6,7	3,3	3,3	100%

Bài 2. Cho bảng số liệu thống kê năng suất lúa hè thu (tạ / ha) của 30 tỉnh như sau:

25	30	25	30	35	35	40	40	45	25
30	30	40	25	45	45	35	25	35	40
35	35	40	40	30	35	35	35	40	30

- a) Hãy lập bảng phân bố tần số và tần suất của bảng trên.
- b) Nhận xét về xu hướng tập trung của các số liệu thống kê.

Lời giải.

- a) Bảng phân bố tần số và tần suất

Năng suất lúa hè thu của 30 tỉnh

Năng suất (tạ / ha)	Tần số	Tần suất (%)
25	5	16,6
30	6	20
35	9	30
40	7	23,4
45	3	10
Cộng	30	100%

- b) Từ bảng phân bố tần số và tần suất ở trên, ta thấy năng suất 35 tạ / ha có tần suất cao nhất 30% nên ta nói số liệu thống kê có xu hướng tập trung vào 35 tạ / ha.

□

Bài 3. Thống kê số con trong mỗi gia đình của 60 gia đình trong một quận được cho ở bảng sau:

2	1	4	2	3	0	2	3	4	2
2	5	1	2	2	3	3	5	7	2
3	4	4	2	1	2	3	2	2	4
6	5	3	4	4	7	2	1	1	5
6	3	5	2	2	3	4	3	5	4
3	3	5	7	2	1	3	4	6	2

- a) Hãy lập bảng phân bố tần số và tần suất của bảng trên.
b) Nhận xét về xu hướng tập trung của các số liệu thống kê.

Lời giải.

- a) Bảng phân bố tần số và tần suất

Số con trong 60 gia đình của một quận

Số con	Tần số	Tần suất (%)
0	1	1,6
1	6	10
2	17	28,3
3	13	21,7
4	10	16,7
5	7	11,7
6	3	5
7	3	5
Cộng	60	100%

- b) Từ bảng phân bố tần số và tần suất ở trên, ta thấy số con là 2 hoặc 3 có tần suất cao nên ta nói số liệu thống kê có xu hướng tập trung vào 2 hoặc 3 con.

□

Dạng 2. Lập bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp

- Tần số của giá trị x_i (hay một lớp nào đó) là số lần xuất hiện n_i của x_i .
- Tần suất của giá trị x_i (hay một lớp nào đó) là tỉ số $\frac{x_i}{\sum x_i}$.

BÀI TẬP DẠNG 2

Ví dụ 1. Nhiệt độ trung bình (đơn vị: °C) của tháng 10 ở địa phương D từ năm 1971 đến 2000 được cho ở bảng sau

27,1	26,9	28,5	27,4	29,1	27,0	27,1	27,4	28,0	28,6
28,1	27,4	27,4	26,5	27,8	28,2	27,6	28,7	27,3	26,8
26,8	26,7	29,0	28,4	28,3	27,4	27,0	27,0	28,3	25,9

Hãy lập bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp của bảng số liệu đã cho?

Lời giải.

Bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp được tính như trong bảng sau:

Lớp	Tần số	Tần suất (%)
[25; 27)	6	20
[27; 29)	22	73.33
[29; 31]	2	6.67
Cộng	$n = 30$	100

□

Ví dụ 2. Kết quả điểm thi môn Toán của 2 lớp 10A1 và 10A2 được cho bởi bảng số liệu sau

Lớp 10A1							
Điểm thi	5	6	7	8	9	10	Cộng
Tần số	5	4	2	26	4	4	45

Lớp 10A2							
Điểm thi	5	6	7	8	9	10	Cộng
Tần số	7	5	6	15	4	1	47

Hãy lập bảng phân bố tần suất kết quả điểm thi môn Toán của hai lớp 10A1 và 10A2. Tìm lớp có điểm 7 chiếm tỉ lệ hơn 50%.

Lời giải.

Tần suất kết quả điểm thi môn Toán của hai lớp 10A1 và 10A2 được tính theo như bảng dưới đây:

Lớp 10A1							
Điểm thi	5	6	7	8	9	10	Cộng
Tần số	5	4	2	26	4	4	45
Tần suất (%)	11,11	8,89	4,44	57,78	8,89	8,89	100

Lớp 10A2							

Điểm thi	5	6	7	8	9	10	Cộng
Tần số	7	5	6	15	4	1	47
Tần suất (%)	14,89	10,64	12,77	31,91	8,51	2,12	100

Dựa vào bảng phân bố tần suất đã lập ở trên, ta thấy không có lớp nào có điểm 7 chiếm tỉ lệ hơn 50% . □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong một kì thi học sinh giỏi toán (thang điểm là 20), kết quả được cho ở bảng sau:

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2

Lập bảng phân bố tần suất dựa vào số liệu ở bảng trên. Hỏi có bao nhiêu phần trăm thí sinh được chọn vào vòng trong biết rằng điều kiện để vào vòng trong là phải trên 16 điểm?

Lời giải.

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2
Tần suất (%)	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2

Điều kiện để vào vòng trong là phải trên 16 điểm, nên thí sinh có số điểm là 17, 18, 19 sẽ được vào vòng trong. Vậy số phần trăm thí sinh được vào vòng trong là $14 + 10 + 2 = 26\%$ □

Bài 2. Trong sổ theo dõi bán hàng ở một cửa hàng bán xe máy có bảng sau:

Số xe bán trong ngày	0	1	2	3	4	5
Tần số	2	13	15	12	7	3

Biết mỗi chiếc xe bán được cửa hàng có lãi 5 triệu đồng, mỗi ngày cửa hàng mất 2 triệu đồng chi phí thuê nhân viên và cơ sở vật chất. Hỏi trong khoảng thời gian đó cửa hàng lãi (hay lỗ) bao nhiêu?

Lời giải.

Số tiền lãi thu được nhờ bán xe trong khoảng thời gian trên là:

$$5 \cdot (0 \cdot 2 + 1 \cdot 13 + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 12 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 3) = 610$$

Chi phí thuê nhân viên và cơ sở vật chất trong thời gian đó là:

$$2 \cdot (2 + 13 + 15 + 12 + 7 + 3) = 104$$

Vậy trong khoảng thời gian đó cửa hàng có lãi $610 - 104 = 506$ triệu đồng. □

Bài 3. Điều tra về số tiền mua sách (đơn vị: nghìn đồng) trong một năm của 50 sinh viên, người ta thu được bảng số liệu thống kê sau

203	37	141	43	55	303	252	758	321	123
425	27	72	87	215	358	521	863	284	279
608	302	703	68	149	327	127	125	489	234
498	968	350	57	75	503	712	440	185	404
98	552	101	612	333	451	901	875	789	202

Từ bảng số liệu thống kê trên, người ta lập bảng phân bố tần số ghép lớp như sau

Lớp	Tần số
[0; 99]	10
[100; 199]	7
[200; 299]	7
[300; 399]	7
[400; 499]	6
[500; 599]	3
[600; 699]	2
[700; 799]	4
[800; 899]	2
[900; 999]	2
Cộng	$n = 50$

Xét tốp 20% sinh viên dùng nhiều tiền để mua sách nhất. Người mua ít nhất trong nhóm này mua hết bao nhiêu tiền?

Lời giải.

Xét tốp 20% số sinh viên mua nhiều tiền nhất. Nhóm này có $50.20\% = 10$ sinh viên tiêu từ 600 nghìn đồng trở lên. Do bài toán hỏi người mua ít nhất nên ta xét trong nhóm [600; 699]. Nhóm này có hai người mua hết 608 nghìn đồng và 612 nghìn đồng. Do đó, người mua ít nhất là 618 nghìn đồng. $\square$

Bài 4. Một học sinh ghi lại bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp của một mẫu số liệu như sau

Lớp	[1; 9]	[10; 19]	[20; 29]	[30; 39]	[40; 49]	
Tần số						$n =$
Tần suất (%)	12,5	0,0	50,0	25,0	12,5	100

Tuy nhiên, em đó quên ghi kích thước mẫu n . Biết rằng n là số có 3 chữ số và chữ số tận cùng là 8. Tìm giá trị nhỏ nhất của n .

Lời giải.

Hai lớp [1; 9] và [40; 49] có tần số là $n.12,5\% = \frac{n}{8}$.

Lớp [20; 29] có tần số là $n.50\% = \frac{n}{2}$.

Lớp [30; 39] có tần số là $n.25\% = \frac{n}{4}$.

Vì tần số là các số nguyên dương nên n phải chia hết cho 8; 4; 2. Mà n là số có 3 chữ số, chữ số tận cùng là 8 và nhỏ nhất nên $n = 128$. $\square$

Bài 5. Một cảnh sát giao thông ghi tốc độ (đơn vị: km/h) của 30 chiếc xe qua trạm như sau

53	47	59	66	36	69	83	77	42	57	51	60	78	63	46
63	42	55	63	48	75	60	58	80	44	59	60	75	49	63

Hãy lập bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp gồm 6 lớp với độ dài mỗi đoạn của lớp là 7.

Lời giải.

Lớp	Tần số	Tần suất (%)
[36; 43]	10	10
[44; 51]	7	20
[52; 59]	7	20
[60; 67]	7	26,7
[68; 75]	6	10
[76; 83]	3	13,3
Cộng	$n = 30$	100

□

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. Điều tra thời gian hoàn thành một sản phẩm của 20 công nhân, người ta thu được mẫu số liệu sau (thời gian tính bằng phút).

10	12	13	15	11	13	16	18	19	21
23	21	15	17	16	15	20	13	16	11

Kích thước mẫu là bao nhiêu?

Lời giải.

Kích thước mẫu bằng 20

□

Bài 2. Điểm kiểm tra học kì môn Toán của các học sinh lớp 10A cho ở bảng dưới đây.

Điểm	3	4	5	6	7	8	9	10
Tần số	1	2	5	8	6	10	7	2

Hỏi lớp 10A có bao nhiêu học sinh?

Lời giải.

Lớp 10A có 41 học sinh

□

Bài 3. Dưới đây là bảng phân bố tần số - tần suất của đại lượng X . Trong bảng còn hai số chưa biết x và y . Tìm x và y .

Dấu hiệu	9	10	12	15	16
Tần số	1	2	3	x	4
Tần suất (%)	5	10	15	50	y

Lời giải.

Ta có $x = \frac{3.50}{15} = 10; y = \frac{15.4}{3} = 20.$

□

Bài 4.

Cho bảng phân bố tần số ghép lớp của một mẫu số liệu mà các số liệu được sắp xếp từ nhỏ đến lớn như bên. Hãy tính tần suất (%) của lớp chứa số liệu thứ 5 của mẫu số liệu.

Lớp	Tần số
[0; 3]	3
[4; 7]	1
[7; 10]	2
[8; 11]	4

Lời giải.

Số liệu thứ 5 thuộc lớp $[7; 10]$. Do đó, tần suất cần tìm là $\frac{2}{10} = 20\%$ $\square$

Bài 5. Cho bảng số liệu về khối lượng của 30 củ khoai tây thu hoạch từ một thửa ruộng như dưới đây.

Lớp khối lượng (gam)	Tần số
$[70; 80)$	3
$[80; 90)$	6
$[90; 100)$	12
$[100; 110)$	6
$[110; 120]$	3
Cộng	30

Tần suất của lớp $[100; 110)$ là bao nhiêu?

Lời giải.

Tần suất ghép lớp $[100; 110)$ là $\frac{6}{30} \cdot 100\% = 20\%$ $\square$

Bài 6. Kết quả khảo sát ở 43 tỉnh (đơn vị: %) ghi lại số phần trăm những trẻ em mới sinh có trọng lượng dưới 2500 gam được cho ở bảng phân bố tần số ghép lớp bên dưới.

Lớp	$[4, 5; 5, 4]$	$[5, 5; 6, 4]$	$[6, 5; 7, 4]$	$[7, 5; 8, 4]$	$[8, 5; 9, 4]$	Cộng
Tần số	9	6	17	8	3	$n = 43$

Tính tỷ lệ phần trăm số tỉnh có số phần trăm những trẻ em mới sinh có trọng lượng dưới 2500 gam không vượt quá $7,4\%$ (làm tròn một chữ số thập phân).

Lời giải.

Tỷ lệ phần trăm số tỉnh có số phần trăm những trẻ em mới sinh có trọng lượng dưới 2500 gam không vượt quá $7,4\%$ là $\frac{9 + 6 + 17}{35} \approx 74,41\%$ $\square$

Bài 7.

Người ta thống kê số phần trăm trẻ em mới sinh có trọng lượng dưới 2,5 kg của 43 tỉnh thành ở bảng phân bố tần suất ghép lớp sau. Có bao nhiêu tỉnh có tỉ lệ phần trăm trẻ có trọng lượng dưới 2,5 kg dưới $7,5\%$?

Lớp	Tần suất (%)
$[4, 5; 5, 5)$	9
$[5, 5; 6, 5)$	6
$[6, 5; 7, 5)$	17
$[7, 5; 8, 5)$	8
$[8, 5; 9, 5)$	3

Lời giải.

Chưa đủ giả thiết để kết luận $\square$

Bài 8. Một học sinh ghi lại bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp của một mẫu số liệu như sau

Lớp	$[1; 9]$	$[10; 19]$	$[20; 29]$	$[30; 39]$	$[40; 49]$	
Tần số						$n =$
Tần suất (%)	12,5	0,0	50,0	25,0	12,5	100

Tuy nhiên, em đã quên ghi kích thước mẫu n . Tìm giá trị nhỏ nhất của n .

Lời giải.

Lớp $[1; 9]$ có tần số là $n \cdot 12,5\% = \frac{n}{8}$.

Lớp $[20; 29]$ có tần số là $n \cdot 50\% = \frac{n}{2}$.

Lớp $[30; 39]$ có tần số là $n \cdot 25\% = \frac{n}{4}$.

Lớp $[40; 49]$ có tần số là $n \cdot 12,5\% = \frac{n}{8}$.

Vì tần số là các số nguyên dương nên n phải chia hết cho 8; 4; 2. Do đó, số n nhỏ nhất thỏa có giá trị bằng 8. □

§2 BIỂU ĐỒ

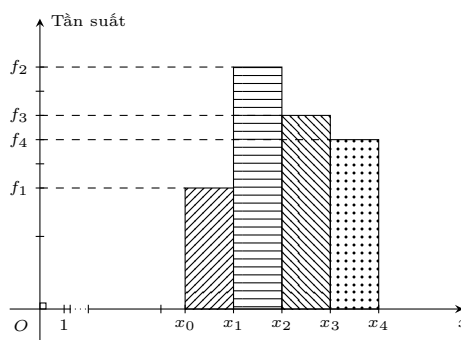
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 BIỂU ĐỒ TẦN SUẤT HÌNH CỘT

Cho bảng phân bố tần suất ghép lớp

Lớp x	$[x_0; x_1)$	$[x_1; x_2)$	$[x_2; x_3)$	$[x_3; x_4]$	Cộng
Tần suất (%)	f_1	f_2	f_3	f_4	100 %

Ta có thể mô tả bảng phân bố tần suất ghép lớp qua biểu đồ tần suất hình cột như hình vẽ sau



! Tương tự, ta cũng có thể vẽ biểu đồ hình cột mô tả cho bảng phân bố tần suất, tần số và tần số ghép lớp.

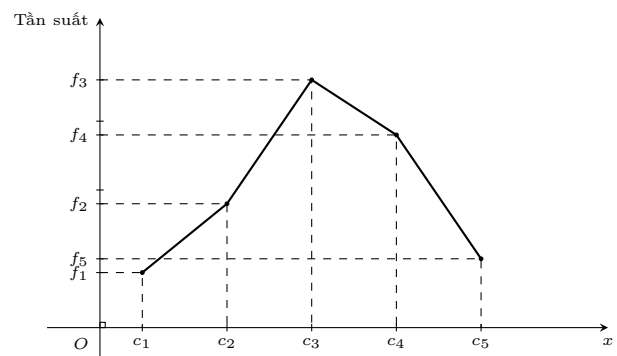
2 ĐƯỜNG GẤP KHÚC TẦN SUẤT

Cho bảng phân bố tần suất ghép lớp

Lớp x	$[x_0; x_1)$	$[x_1; x_2)$	$[x_2; x_3)$	$[x_3; x_4)$	$[x_4; x_5]$	Cộng
Tần suất (%)	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	100 %

Ta cũng có thể mô tả bảng tần suất ghép lớp bằng một đường gấp khúc qua các bước sau:

- Trên mặt phẳng tọa độ ta xác định các điểm $(c_i; f_i)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ trong đó c_i là trung bình cộng của hai đầu nút của lớp i (ta gọi c_i là giá trị đại diện của lớp i).
- Nối các điểm $(c_i; f_i)$ với $(c_{i+1}; f_{i+1})$, $i = 1, 2, 3, 4$, ta thu được đường gấp khúc, gọi là đường gấp khúc tần suất.



! Ta cũng có thể mô tả bảng tần suất, tần số và tần số ghép lớp bằng cách vẽ biểu đồ hình cột hoặc đường gấp khúc. Ở đó ta chỉ cần thay cột tần suất bằng cột tần số.

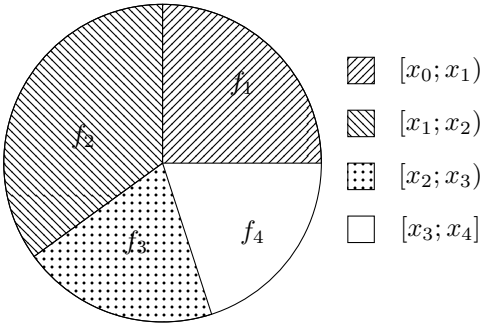
3

BIỂU ĐỒ HÌNH QUẠT

Cho bảng phân bố tần suất ghép lớp

Lớp x	$[x_0; x_1)$	$[x_1; x_2)$	$[x_2; x_3)$	$[x_3; x_4]$	Cộng
Tần suất (%)	f_1	f_2	f_3	f_4	100 %

Ta có thể mô tả bảng phân bố tần suất ghép lớp thông qua biểu đồ hình quạt như sau



! Chúng ta cũng có thể dùng biểu đồ hình quạt để mô tả bảng phân bố tần số, tần số ghép lớp.

B

CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Vẽ biểu đồ tần số và tần suất hình cột

Từ các số liệu trong bảng phân bố tần số và tần suất, ta tọa độ hóa để vẽ biểu đồ trên hệ trục tọa độ.

BÀI TẬP DẠNG 1

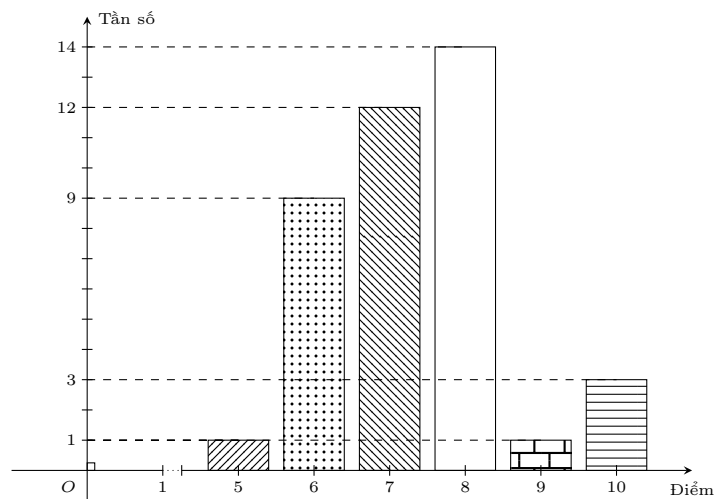
Ví dụ 1. Kết quả điểm thi môn Toán của lớp 10A9 trường THPT Đông Thụy Anh được cho theo bảng dưới đây.

Điểm	5	6	7	8	9	10	Cộng
Tần số	1	9	12	14	1	3	40

Hãy vẽ biểu đồ tần số và tần suất dạng cột để mô tả cho bảng số liệu trên.

Lời giải.

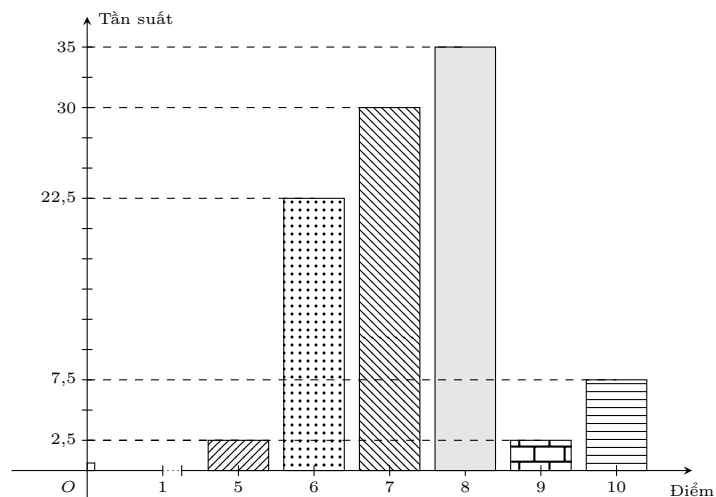
Biểu đồ tần số hình cột mô tả kết quả điểm thi của lớp 10A9



Bảng phân bố tần suất

Điểm	5	6	7	8	9	10	Cộng
Tần suất	2,5	22,5	30	35	2,5	7,5	100 %

Biểu đồ tần số hình cột mô tả kết quả điểm thi của lớp 10A9



Ví dụ 2. Số điện tiêu thụ của 30 hộ ở một khu dân cư trong một tháng được thống kê theo bảng sau:

50	47	30	65	63	70	38	34	48	53
33	39	32	40	50	55	50	61	37	37
43	35	65	60	31	33	41	45	55	59

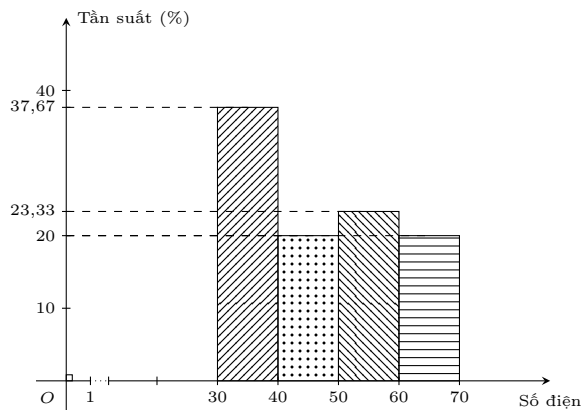
Hãy lập bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp và lập biểu đồ tần suất hình cột mô tả cho bảng phân bố tần suất ghép lớp đó.

Lời giải.

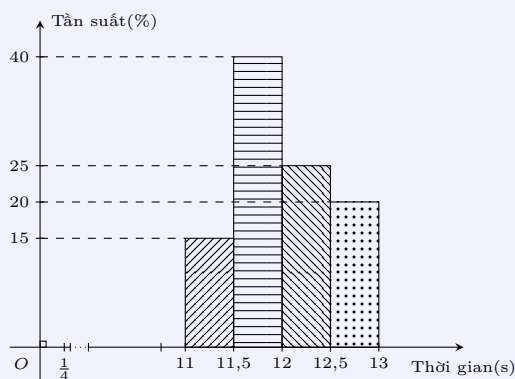
Bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp:

Lớp số điện (kW)	[30; 40)	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70]	Cộng
Tần số	11	6	7	6	30
Tần suất (%)	37,67	20	23,33	20	100 %

Biểu đồ tần suất ghép lớp hình cột mô tả cho bảng số liệu đã cho



Ví dụ 3. Cho biểu đồ tần suất ghép lớp hình cột mô tả thành tích bạn Bình tập chạy trong 20 lần như hình dưới đây. Hãy lập bảng phân bố tần suất ghép lớp mà biểu đồ đã mô tả.



Lời giải.

Bảng phân bố tần suất thể hiện thành tích tập chạy của bạn Bình trong 20 lần:

Lớp thời gian chạy (s)	[11; 11,5)	[11,5; 12)	[12; 12,5)	[12,5; 13]	Cộng
Tần suất (%)	15	40	25	20	100 %

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Một công ty sản xuất bóng đèn kiểm tra định kì bằng cách thắp thử nghiệm 30 bóng đèn để kiểm tra tuổi thọ (tính theo giờ). Kết quả của cuộc thử nghiệm được thống kê theo bảng sau:

1180	1150	1190	1170	1180	1170	1160	1170	1160	1150
1190	1180	1170	1170	1170	1190	1170	1170	1170	1180
1170	1160	1160	1160	1170	1160	1180	1180	1150	1170

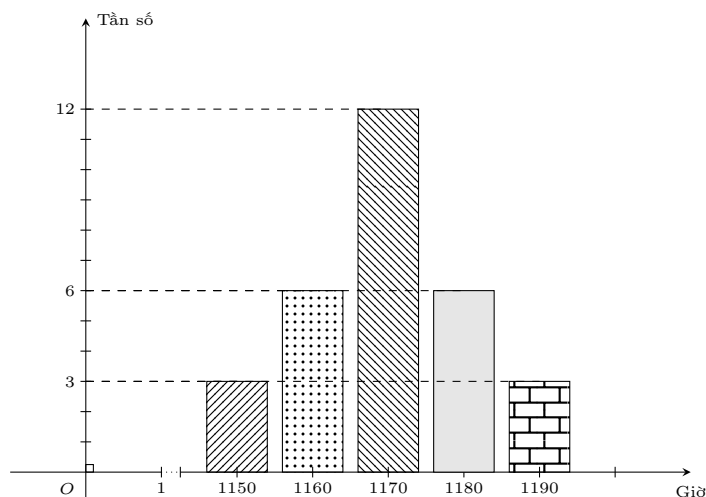
Hãy lập bảng phân bố tần số và vẽ biểu đồ tần số hình cột.

Lời giải.

Bảng phân bố tần số

Giờ	1150	1160	1170	1180	1190	Cộng
Tần số	3	6	12	6	3	30

Mô tả bảng phân bố tần số bằng biểu đồ tần số hình cột



□

Bài 2. Số cuộn phim mà 40 nhà nhiếp ảnh nghiệp dư sử dụng trong một tháng được thống kê bằng bảng số liệu sau:

5	3	3	1	4	3	4	3	6	8
4	2	4	6	8	9	6	2	10	11
15	1	2	5	13	7	7	2	5	4
3	16	10	4	7	2	10	11	8	9

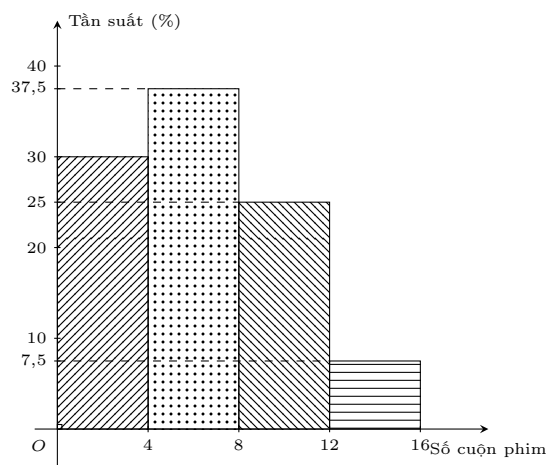
Hãy lập bảng tần số, tần suất ghép lớp và mô tả bảng phân bố tần suất ghép lớp bằng biểu đồ tần suất hình cột.

Lời giải.

Bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp của bảng thống kê số cuộn phim của 40 nhà nhiếp ảnh nghiệp dư sử dụng trong một tháng là

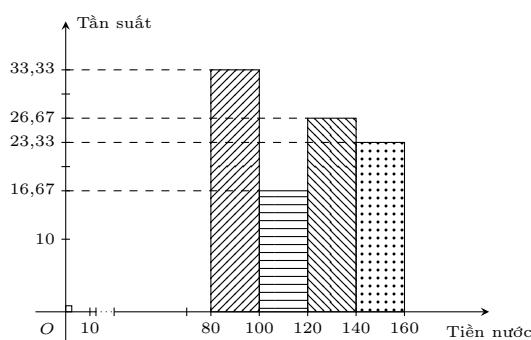
Lớp số cuộn phim	$[0; 4)$	$[4; 8)$	$[8; 12)$	$[12; 16]$	Cộng
Tần số	12	15	10	3	40
Tần suất (%)	30	37,5	25	7,5	100 %

Biểu đồ mô tả cho bảng tần suất ghép lớp



□

Bài 3. Cho biểu đồ tần suất ghép lớp hình cột mô tả thống kê tiền nước (nghìn đồng) phải trả hàng tháng của gia đình anh Huy trong năm 2017 như hình vẽ:



Hãy lập bảng phân bố tần suất ghép lớp về tiền điện hàng tháng phải trong năm 2017 của gia đình anh Huy.

Lời giải.

Bảng phân bố tần suất ghép lớp tiền nước hàng tháng của gia đình anh Huy trong năm 2017 như sau:

Tiền nước(nghìn đồng)	[80; 100)	[100; 120)	[120; 140)	140; 160	Cộng
Tần suất(%)	33,33	16,67	26,67	23,33	100 %

□

📁 Dạng 2. Biểu đồ đường gấp khúc

🔗🔗🔗 BÀI TẬP DẠNG 2 🔗🔗🔗

Ví dụ 1. Cho bảng tần suất ghép lớp:

Điểm thi học kì I môn Toán của 40 học sinh lớp 10D3 của trường THPT A

Lớp điểm thi	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10]	Cộng
Tần suất (%)	7,5	12,5	40	30	10	100%

- a) Hãy vẽ biểu đồ đường gấp khúc tần suất về điểm thi học kì I môn Toán của 40 học sinh lớp 10D3 của trường THPT A.

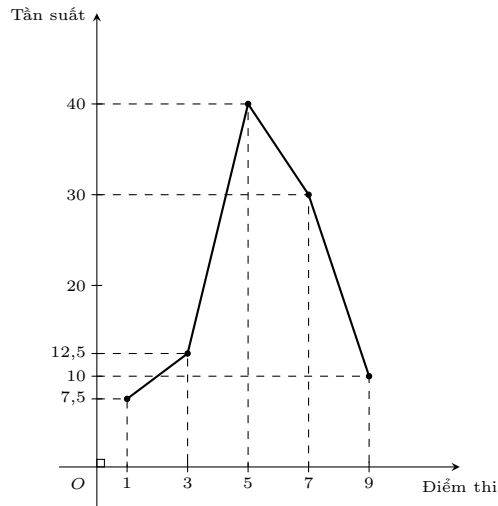
- b) Có bao nhiêu học sinh thuộc lớp điểm chiếm tỉ lệ cao nhất.
 c) Biết điểm giỏi là từ 8 đến 10. Hỏi lớp 10D3 có bao nhiêu học sinh đạt điểm giỏi.

Lời giải.

- a) Bảng giá trị đại diện (GTĐĐ) của các lớp:

Lớp điểm thi	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10]
GTĐĐ	1	3	5	7	9

Biểu đồ đường gấp khúc tần suất về điểm thi học kì I môn Toán của 40 học sinh lớp 10D3 của trường THPT A:



- b) Lớp điểm [4; 6) chiếm tỉ lệ cao nhất bằng 40 %. Suy ra số học sinh thuộc lớp này bằng: $\frac{40 \times 40}{100} = 16$.
 c) Lớp điểm [8; 10] chiếm tỉ lệ 10 % nên số học sinh đạt điểm giỏi là: $\frac{10 \times 40}{100} = 4$.

□

Ví dụ 2. Cho các bảng tần số ghép lớp:

Chiều cao (cm) của 40 học sinh lớp 10A1 của trường THPT B

Lớp chiều cao	[1,5; 1,55)	[1,55; 1,6)	[1,6; 1,65)	[1,65; 1,7)	[1,7; 1,75]	Cộng
Tần số	0	2	15	18	5	40

Chiều cao (cm) của 40 học sinh lớp 10D1 của trường THPT B

Lớp chiều cao	[1,5; 1,55)	[1,55; 1,6)	[1,6; 1,65)	[1,65; 1,7)	[1,7; 1,75]	Cộng
Tần số	1	12	23	4	0	40

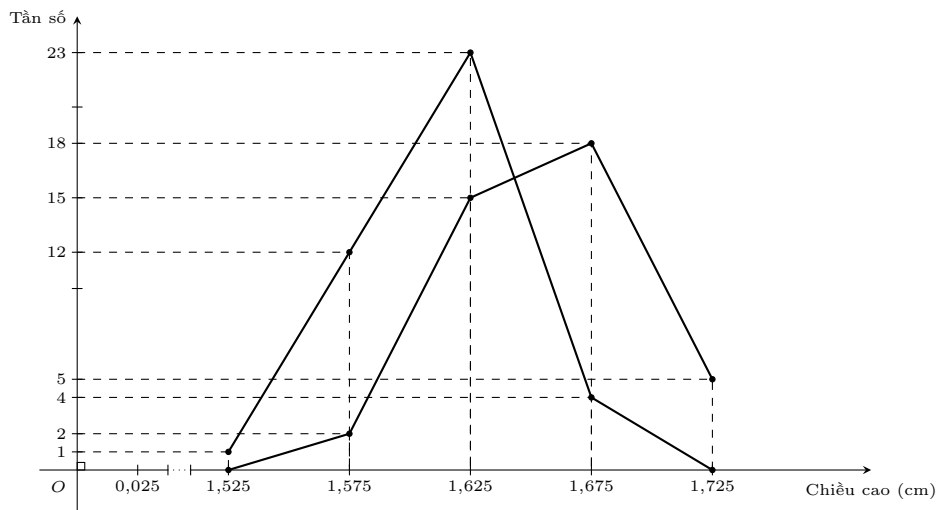
- a) Hãy vẽ đường gấp khúc tần số về chiều cao của 40 học sinh lớp 10A1 và đường gấp khúc tần số về chiều cao của 40 học sinh lớp 10D1 của trường THPT B trên cùng một biểu đồ.
 b) Nhận xét về chiều cao trung bình của học sinh lớp 10A1 so với lớp 10D1.

Lời giải.

- a) Bảng giá trị đại diện (GTĐĐ) của các lớp:

Lớp chiều cao	[1,5; 1,55)	[1,55; 1,6)	[1,6; 1,65)	[1,65; 1,7)	[1,7; 1,75]
GTĐĐ	1,525	1,575	1,625	1,675	1,725

Biểu đồ đường gấp khúc tần số về chiều cao của 40 học sinh lớp 10A1 và đường gấp khúc tần số về chiều cao của 40 học sinh lớp 10D1 của trường THPT B:



- b) Nhận xét: Sĩ số hai lớp bằng nhau. Đường gấp khúc biểu diễn chiều cao từ 1,65 cm trở lên của lớp 10A1 nằm trên lớp 10D1, đường gấp khúc biểu diễn chiều cao dưới 1,65 cm của lớp 10A1 nằm dưới lớp 10D1. Vậy chiều cao trung bình lớp 10A1 lớn hơn lớp 10D1.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho bảng tần suất ghép lớp:

Cân nặng (kg) của 50 học sinh lớp 10A3 của trường THPT C

Lớp cân nặng	[40; 42)	[42; 44)	[44; 46)	[46; 48)	[48; 50)	[50; 52]	Cộng
Tần suất (%)	2	10	24	38	20	6	100 %

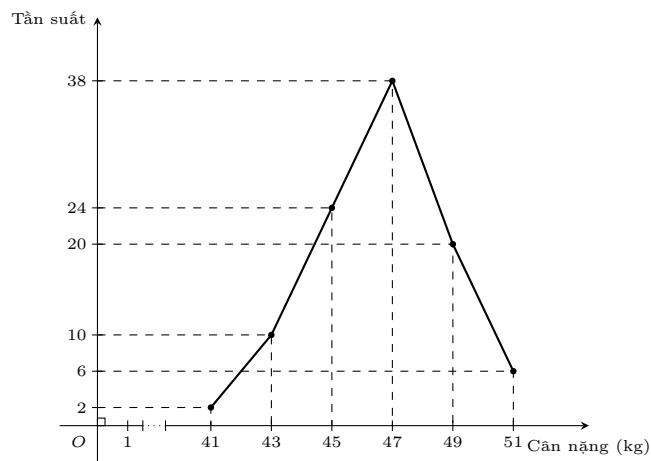
- a) Hãy vẽ biểu đồ đường gấp khúc tần suất về cân nặng của 50 học sinh lớp 10A3 của trường THPT C.
b) Có bao nhiêu học sinh có cân nặng từ 48 kg đến 52 kg.

Lời giải.

1. Bảng giá trị đại diện (GTĐĐ) của các lớp:

Lớp cân nặng	[40; 42)	[42; 44)	[44; 46)	[46; 48)	[48; 50)	[50; 52]
GTĐĐ	41	43	45	47	49	51

Biểu đồ đường gấp khúc tần suất về cân nặng của 50 học sinh lớp 10A3 của trường THPT C:



2. Học sinh có cân nặng từ 48 kg đến 52 kg chiếm tỉ lệ $20\% + 6\% = 26\%$. Suy ra số học sinh có cân nặng từ 48 kg đến 52 kg là $\frac{26 \times 50}{100} = 13$.

□

Bài 2. Cho các bảng tần số ghép lớp:

Điểm phẩy học kì 1 môn Toán của 40 học sinh lớp 10A1 của trường THPT A

Lớp điểm phẩy	[5; 6)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)	[9; 10]	Cộng
Tần số	0	2	25	10	3	40

Điểm phẩy học kì 1 môn Văn của 40 học sinh lớp 10A1 của trường THPT A

Lớp điểm phẩy	[5; 6)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)	[9; 10]	Cộng
Tần số	5	23	11	1	0	40

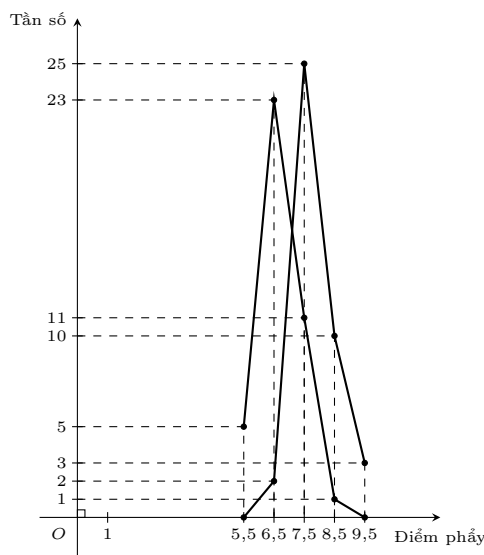
- a) Hãy vẽ đường gấp khúc tần số về điểm phẩy học kì 1 môn Toán và đường gấp khúc tần số về điểm phẩy học kì 1 môn Văn của 40 học sinh lớp 10A1 trên cùng một biểu đồ.
b) Nhận xét về điểm phẩy trung bình môn Toán so với môn Văn của học sinh lớp 10A1.

Lời giải.

1. Bảng giá trị đại diện (GTDD) của các lớp:

Lớp điểm phẩy	[5; 6)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)	[9; 10]
GTDD	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5

Biểu đồ đường gấp khúc tần số về điểm phẩy học kì 1 môn Toán và đường gấp khúc tần số về điểm phẩy học kì 1 môn Văn của 40 học sinh lớp 10A1:



2. Nhận xét: Đường gấp khúc biểu diễn điểm phẩy từ 7,0 trở lên của môn Toán nằm trên môn Văn, đường gấp khúc biểu diễn điểm phẩy dưới 7,0 của môn Toán nằm dưới môn Văn. Vậy điểm phẩy trung bình môn Toán cao hơn môn Văn.

□

Bài 3. Cho bảng tần suất:

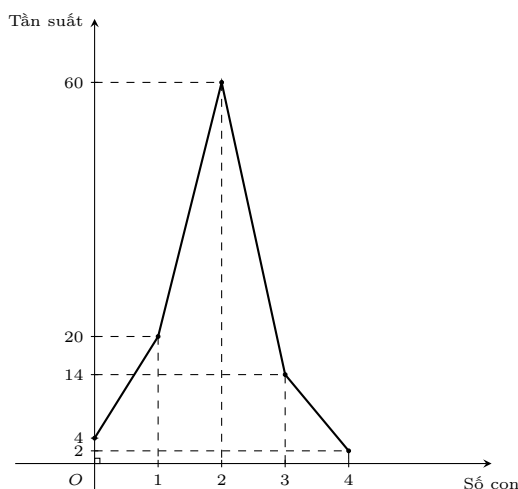
Số con của 50 hộ gia đình ở địa phương A

Số con	0	1	2	3	4	Cộng
Tần suất (%)	4	20	60	14	2	100 %

Hãy vẽ biểu đồ đường gấp khúc tần suất về số con của 50 hộ gia đình ở địa phương A và nhận xét xem có bao nhiêu hộ gia đình chưa thực hiện tốt kế hoạch hóa gia đình (có nhiều hơn 2 con).

Lời giải.

Biểu đồ đường gấp khúc tần suất về số con của 50 hộ gia đình ở địa phương A:



Các gia đình có nhiều hơn 2 con chiếm $14\% + 2\% = 16\%$. Suy ra số gia đình có nhiều hơn 2 con là $\frac{16 \times 50}{100} = 8$. □

Bài 4. Cho bảng tần suất ghép lớp:

Tốc độ (km/h) của 40 chiếc xe máy qua trạm kiểm soát giao thông B

Lớp tốc độ	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)	[70; 80]	Cộng
Tần suất (%)	25	15	40	20	100 %

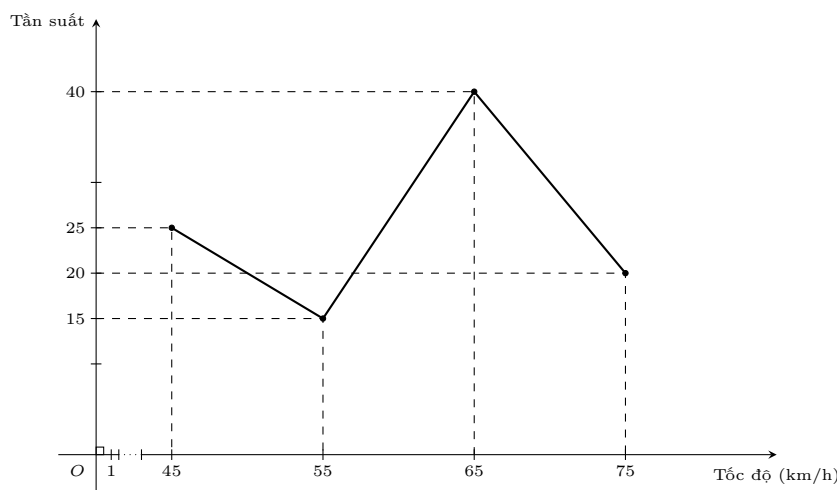
Hãy vẽ biểu đồ đường gấp khúc tần suất về tốc độ (km/h) của 40 chiếc xe máy qua trạm kiểm soát giao thông B và nhận xét xem có bao nhiêu chiếc xe đi với tốc độ không dưới 70 km/h.

Lời giải.

Bảng giá trị đại diện (GTDD) của các lớp:

Lớp tốc độ	[40; 50)	[50; 60)	[60; 70)	[70; 80]
GTDD	45	55	65	75

Biểu đồ đường gấp khúc tần suất về tốc độ (km/h) của 40 chiếc xe máy qua trạm kiểm soát giao thông B:



Các xe đi với vận tốc không dưới 70 km/h chiếm 20 %. Suy ra số xe đi với vận tốc không dưới 70 km/h là $\frac{20 \times 40}{100} = 8$. □

Bài 5. Cho bảng tần suất:

Tiền lương (nghìn đồng) hàng tháng của 50 công nhân ở xưởng may C

Tiền lương	700	800	900	1000	1100	1200	Cộng
Tần suất (%)	16	18	24	20	12	10	100 %

Hãy vẽ biểu đồ đường gấp khúc tần suất và đường gấp khúc tần số về tiền lương (nghìn đồng) hàng tháng của 50 công nhân ở xưởng may C.

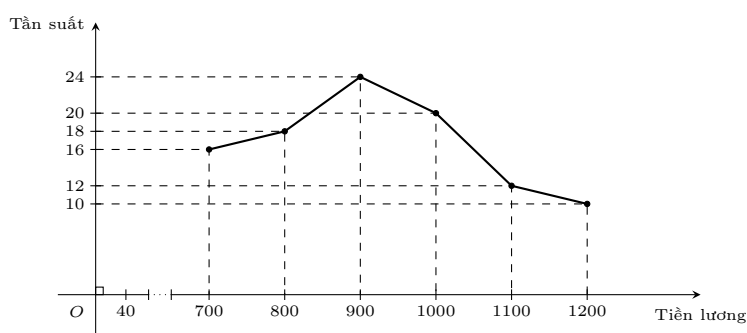
Lời giải.

Bảng phân bố tần số:

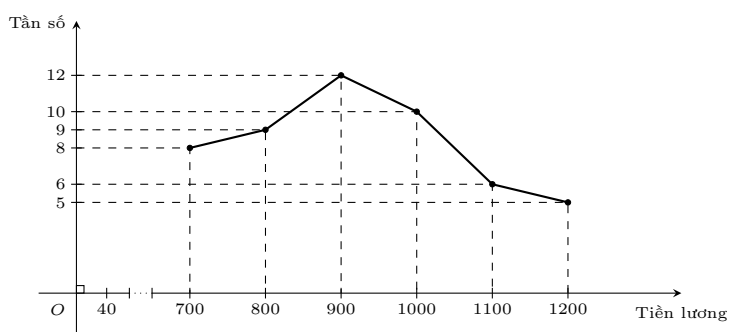
Tiền lương (nghìn đồng) hàng tháng của 50 công nhân ở xưởng may C

Tiền lương	700	800	900	1000	1100	1200	Cộng
Tần số	8	9	12	10	6	5	50

Biểu đồ đường gấp khúc tần suất về tiền lương (nghìn đồng) hàng tháng của 50 công nhân ở xưởng may C:



Biểu đồ đường gấp khúc tần số về tiền lương (nghìn đồng) hàng tháng của 50 công nhân ở xưởng may C:



Dạng 3. Biểu đồ hình quạt

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 3 ❖❖❖

Ví dụ 1. Chiều cao (cm) của 36 học sinh nam ở một lớp 12A1:

Lớp chiều cao (cm)	[160; 164)	[164; 168)	[168; 172)	[172; 176]	Cộng
Tần số	5	12	11	8	36

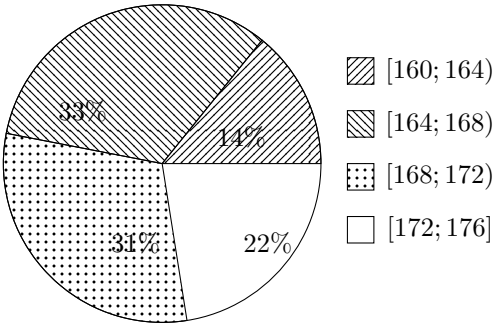
Vẽ biểu đồ tần suất hình quạt cho bảng thống kê trên.

Lời giải.

Ta có bảng phân bố tần suất sau

Lớp chiều cao (cm)	[160; 164)	[164; 168)	[168; 172)	[172; 176]	Cộng
Tần số	5	12	11	8	36
Tần suất (%)	14	33	31	22	100

Từ đó ta có biểu đồ tần suất hình quạt như sau:



□

Ví dụ 2. Tiến hành một cuộc thăm dò về số cân nặng của một nhóm xã. Kết quả thu được biểu diễn qua biểu đồ tần suất hình quạt như sau:

A pie chart representing the frequency distribution of weight intervals. The chart is divided into four segments with the following labels and percentages: [35; 40) (25%), [40; 45) (20%), [45; 50) (20%), and [50; 55] (35%). A legend to the right of the chart identifies each interval with a specific pattern: diagonal lines for [35; 40), cross-hatching for [40; 45), dots for [45; 50), and white for [50; 55].

Hỏi số người trong xã có cân nặng từ 40 kg đến dưới 50 kg là bao nhiêu người, biết rằng xã có 1000 người.

Lời giải.

Dựa vào biểu đồ quạt ta có:

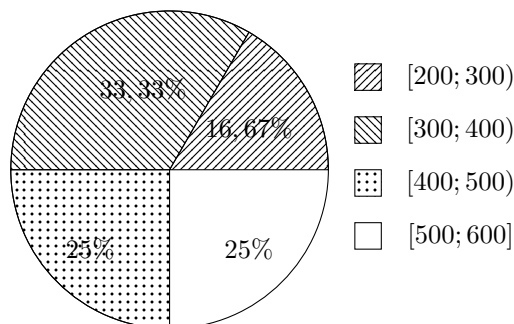
Tỉ lệ người có cân nặng từ 40 kg đến dưới 50 kg là $20 + 20 = 40 \%$.

Số người có cân nặng từ 40 kg đến dưới 50 kg là $\frac{40 \times 1000}{100} = 400$ người.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Số lượng khách đến tham quan tại Đà Nẵng trong 12 tháng được cho bởi biểu đồ như sau:



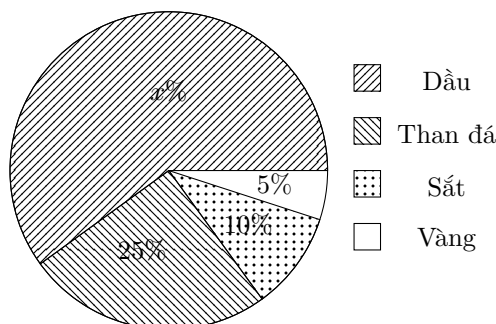
Tính số tháng mà số người tham quan không dưới 400 người.

Lời giải.

Dựa vào biểu đồ, ta có số người tham quan không dưới 400 người chiếm tỉ lệ phần trăm là: $25 + 25 = 50$ %.

Vậy số tháng mà số người thăm quan trên 400 người là $\frac{50 \times 12}{100} = 6$ tháng. □

Bài 2. Biểu đồ hình quạt sau mô tả tỉ lệ về giá trị đạt được của khoáng sản xuất khẩu nước ngoài của nước ta:



Biết rằng giá trị xuất khẩu của nước ta về dầu là 450 triệu USA. Hỏi giá trị xuất khẩu vàng là bao nhiêu triệu USA?

Lời giải.

Tỉ lệ phần trăm của dầu là $100\% - 25\% - 10\% - 5\% = 60\%$.

Suy ra giá trị xuất khẩu của vàng là $\frac{450}{60} \cdot 5 = 37,5$ triệu USA. □

Bài 3. Cho bảng phân bố tần số điểm thi môn Anh Văn của một trung tâm ở Hà Nội:

Điểm thi	6	7	8	9	Cộng
Tần số	40	60	80	20	200

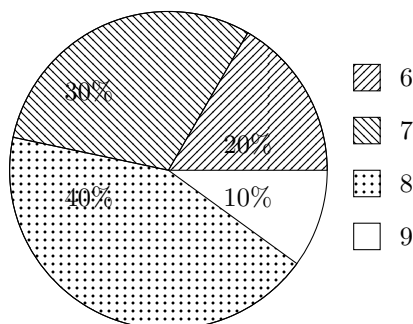
Vẽ biểu đồ hình quạt mô tả bảng dữ liệu thống kê trên.

Lời giải.

Ta có bảng phân bố tần suất sau

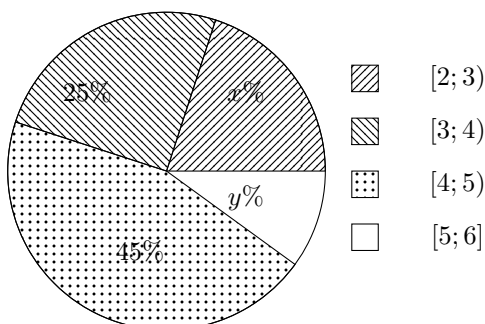
Điểm thi	6	7	8	9	Cộng
Tần số	40	60	80	20	200
Tần suất (%)	20	30	40	10	100

Khi đó ta có biểu đồ tần suất hình quạt:



□

Bài 4. Tuổi thọ (tính theo tháng) của 100 bóng đèn thấp thử được thể hiện qua biểu đồ tần suất hình quạt:



Biết rằng x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 500$. Tìm số bóng đèn có tuổi thọ trong khoảng $[2; 5)$ biết rằng $x > 15$.

Lời giải.

Ta có hệ

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ x^2 + y^2 = 500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 30 - x \\ x^2 + (30 - x)^2 = 500 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 30 - x \\ 2x^2 - 60x + 400 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 30 - x \\ \begin{cases} x = 20 \\ x = 10 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 10 \end{cases}.$$

Tỉ lệ của số bóng đèn có tuổi thọ trong khoảng $[2; 5)$ là $20\% + 25\% + 45\% = 90\%$. Khi đó, số bóng đèn có tuổi thọ trong khoảng $[2; 5)$ là $\frac{90 \times 100}{100} = 90$ bóng. □

§3

SỐ TRUNG BÌNH CỘNG. SỐ TRUNG VỊ. MỐT

A

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1

SỐ TRUNG BÌNH CỘNG

Định nghĩa (Số trung bình cộng). Số trung bình cộng (số trung bình) của một dãy gồm n số liệu $x_1, x_2, \dots, x_n$ kí hiệu là $\bar{x}$ và được tính theo công thức: $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$

- Trường hợp bảng phân bố tần số và tần suất

Giá trị	x_1	x_2	$\dots$	x_m	Cộng
Tần số	n_1	n_2	$\dots$	n_m	N
Tần suất	f_1	f_2	$\dots$	f_m	100%

Số trung bình cộng được tính theo công thức:
 $\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_kx_k}{n} = f_1x_1 + f_2x_2 + \dots + f_kx_k$ trong đó n_i, f_i lần lượt là tần số, tần suất của giá trị x_i ($i = 1, 2, \dots, k$) và n là số các số liệu thống kê ($n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$).

- Trường hợp bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp

Lớp	Giá trị đại diện	Tần số
$[a_1; a_2)$	x_1	n_1
$[a_2; a_3)$	x_2	n_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$
$[a_{m-1}; a_m)$	x_m	n_m
		$N = \sum_{i=1}^m n_i$

Số trung bình cộng được tính theo công thức:
 $\bar{x} = \frac{n_1c_1 + n_2c_2 + \dots + n_kc_k}{n} = f_1c_1 + f_2c_2 + \dots + f_kc_k$ trong đó n_i, c_i, f_i lần lượt là giá trị đại diện, tần số, tần suất của lớp thứ i ($i = 1, 2, \dots, k$) và n là số các số liệu thống kê ($n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$).

2

SỐ TRUNG VỊ

Định nghĩa (Số trung vị). Sắp thứ tự các số liệu thống kê thành dãy không giảm (hoặc không tăng). Số trung vị (của các số liệu thống kê đã cho) kí hiệu M_e là số đứng giữa dãy nếu số phần tử là lẻ và là trung bình cộng của hai số đứng giữa dãy nếu số phần tử là chẵn.

Số trung vị được xác định như sau:

- !
- $M_e = x_{\frac{n+1}{2}}$ nếu n là số lẻ.
 - $M_e = \frac{1}{2} \left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n+1}{2}} \right)$ n là số chẵn.

3

MỐT

Định nghĩa (Mốt). Mốt của một bảng phân bố tần số là giá trị có tần số lớn nhất và được kí hiệu là M_O .

Chú ý:

- Số trung bình của mẫu số liệu được dùng làm đại diện cho các số liệu của mẫu.
- Nếu các số liệu trong mẫu có sự chênh lệch quá lớn thì dùng số trung vị làm đại diện cho các số liệu của mẫu.
- Nếu quan tâm đến giá trị có tần số lớn nhất thì dùng mốt làm đại diện. Một bảng phân bố tần số có thể có hai hay nhiều mốt.

B

CÁC DẠNG TOÁN

 **Dạng 1. Số trung bình**

Áp dụng công thức số trung bình cho bảng số tần số, tần suất và tần số, tần suất ghép lớp.

🔗🔗🔗 **BÀI TẬP DẠNG 1** 🔗🔗🔗

Ví dụ 1. Khối lượng 30 chi tiết máy được cho bởi bảng sau

Khối lượng(gam)	250	300	350	400	450	500	Cộng
Tần số	4	4	5	6	4	7	30

Tính số trung bình $\bar{x}$ (làm tròn đến chữ số thứ hai sau dấu phẩy) của bảng nói trên.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính số trung bình cho bảng tần số ta có

$$\bar{x} = \frac{250.4 + 300.4 + 350.5 + 400.6 + 450.4 + 500.7}{30} \approx 388,33 \text{ (gam)}.$$



Ví dụ 2. Chiều cao của 20 cây giống được cho bởi bảng sau:

Lớp (cm)	Tần số
[40; 44]	2
[45; 49]	5
[50; 54]	3
[55; 59]	4
[60; 64]	3
[65; 69]	3
	$N = 20$

Tính số trung bình $\bar{x}$ (làm tròn đến chữ số thứ hai sau dấu phẩy) của bảng nói trên.

Lời giải.

Bảng tần số ghép lớp của bảng nói trên là

Lớp (cm)	Giá trị đại diện	Tần số
[40; 44]	42	2
[45; 49]	47	5
[50; 54]	52	3
[55; 59]	57	4
[60; 64]	62	3
[65; 69]	67	3
		$N = 20$

Áp dụng công thức tính số trung bình cho bảng tần số ghép lớp ta có

$$\bar{x} \approx \frac{42.2 + 47.5 + 52.3 + 57.4 + 62.3 + 67.3}{20} = 54.5 \text{ (cm).}$$

Dạng 2. Số trung vị

Áp dụng định nghĩa của số trung vị. Lưu ý có hai trường hợp khác nhau là mẫu số liệu có kích thước lẻ và mẫu số liệu có kích thước chẵn.

🔗🔗🔗 **BÀI TẬP DẠNG 2** 🔗🔗🔗

Ví dụ 1. Điều tra số học sinh của 30 lớp học, ta được bảng số liệu như sau:

35	39	39	40	40	41	41	41	41	44	44	45	45	45	46
48	48	48	48	49	49	49	49	49	49	50	50	50	50	51

Tính số trung vị của bảng nói trên.

Lời giải.

Ta có $N = 30$ là số chẵn. Số liệu thứ 15 và 16 lần lượt là 46, 48. Vậy số trung vị là $M_e = \frac{46 + 48}{2} = 47$ (Học sinh). □

Ví dụ 2. Điểm học kì một của một học sinh được cho bởi bảng số liệu sau (Đơn vị: điểm)

5	6	6	7	7	8	8	8,5	9

Tính số trung vị của bảng nói trên.

Lời giải.

Ta có $N = 9$ là số lẻ. Số liệu thứ $\frac{N+1}{2} = 5$ là số trung vị. Do đó số trung vị là $M_e = 7$ (Điểm). □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Bảng số liệu sau đây thống kê thời gian nảy mầm một loại hạt mổi trong các điều kiện khác nhau

Thời gian(phút)	420	440	450	480	500	540
Tần số	8	17	18	16	11	10

Tính giá trị trung bình $\bar{x}$ (làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy) về thời gian nảy mầm loại hạt mới nói trên.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính số trung bình cho bảng tần số ta có

$$\bar{x} = \frac{420.8 + 440.17 + 450.18 + 480.16 + 500.11 + 540.10}{80} = 469 \text{ (Phút).}$$

□

Bài 2. Điều tra số học sinh giỏi khối 10 của 15 trường cấp ba trên địa bản tỉnh A, ta được bảng số liệu như sau:

22	29	29	29	30	31	32	32	33	34	34	35	35	35	36

Tính số trung vị của bảng nói trên.

Lời giải.

Ta có $N = 15$ là số lẻ. Số liệu thứ $\frac{15 + 1}{2} = 8$. Vậy số trung vị là $M_e = 8$ (Học sinh). □

Bài 3. Tốc độ phát triển của một loại Vi-rút trong 10 ngày với các điều kiện khác nhau (đơn vị nghìn con) được thống kê như sau

20	100	30	980	440	20	20	150	60	270

Trong trường hợp này ta chọn số nào dưới đây làm giá trị đại diện là tốt nhất? Tính giá trị đại diện đó.

Lời giải.

Ta chọn số trung vị làm đại diện là tốt nhất vì có sự chênh lệch lớn giữa các số liệu trong mẫu.

Sắp xếp lại số liệu mẫu:

20	100	30	980	440	20	20	150	60	270
20	20	20	30	60	100	150	270	440	980

Kích thước mẫu là $N = 10$. Số liệu thứ 5 và 6 lần lượt là 60, 100. Vậy giá trị đại diện cho bảng số liệu là $M_e = \frac{60 + 100}{2} = 80$ (Nghìn con). □

Bài 4. Một cửa hàng bán 3 loại hoa quả nhập khẩu: Bưởi, Dưa vàng và Lê với số liệu tính toán được cho bởi bảng (trong một quý) sau khi giảm giá mỗi loại lần lượt là x, y, z trên 1 kg

Loại quả	Lê	Dưa vàng	Bưởi
Giá bán (nghìn/1kg)	$200 - x$	$300 - y$	$400 - z$
Số lượng bán (kg)	$200 + x$	$300 + y$	$400 + z$

Biết rằng $x + y + z = 90$ (nghìn). Tính giá trị $x; y; z$ để lợi nhuận bình quân của một 1 kg hoa quả đạt được cao nhất.

Lời giải.

Do khối lượng hoa quả bán được là $200 + x + 300 + y + 400 + z = 990$ là cố định, vì thế bình quân mỗi kg hoa quả có giá cao nhất khi tổng số tiền thu được là cao nhất.

$$\begin{aligned} \text{Tổng số tiền thu được là } P &= (200 - x)(200 + x) + (300 - y)(300 + y) + (400 - z) + (400 + z) \\ &= 290000 - (x^2 + y^2 + z^2) \end{aligned}$$

Ta có bất đẳng thức sau $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}(x + y + z)^2 = 2700$ từ đó $P \leq 287300$. Vậy P lớn nhất khi dấu bằng xảy ra tức là $x = y = z = 30$ (nghìn)

□

Bài 5. Để đảm bảo bảng số liệu được phân bố đồng đều người ta điều chỉnh các giá trị x, y sao cho số trung bình cộng và số trung vị bằng nhau. Khi đó bảng số liệu được cho như sau:

Giá trị	40	50	$60+x$	$90+y$	
Tần số	20	30	$60-x$	$90-y$	200

Biết rằng $x \leq 0$. Tìm x ?

Lời giải.

Số trung bình của bảng số liệu bằng: $\bar{x} = \frac{(60+x)(60-x) + (90-y)(90+y) + 2300}{200}$ và số trung vị là

$$M_e = \frac{30 + 60 - x}{2}.$$

Ta có $20 + 30 + 60 - x + 90 - x = 200 \Leftrightarrow x + y = 0$.

Ta giải phương trình 2 giá trị này bằng nhau rồi lấy số nguyên gần nhất với nghiệm.

$$\frac{(60+x)(60-x) + (90-y)(90+y) + 2300}{200} = \frac{40 + 50 - x}{2}.$$

Do đó $x = 25 - 25\sqrt{5}$ hoặc $x = 25 + 5\sqrt{21}$, vì $x \leq 0$ nên ta lấy nghiệm thứ nhất, số nguyên gần với nó nhất là $25 - 25\sqrt{5}$.

□

Dạng 3. Một

Áp dụng định nghĩa về Một của bảng số liệu thống kê.

🔗🔗🔗 BÀI TẬP DẠNG 3 🔗🔗🔗

Ví dụ 1. Tuổi thọ của 30 bóng đèn được thắp thử (đơn vị: giờ) được cho bởi bảng số liệu thống kê dưới đây

1180	1150	1190	1170	1180	1170	1160	1170	1160	1150
1190	1180	1170	1170	1170	1190	1170	1170	1170	1180
1170	1160	1160	1160	1170	1160	1180	1180	1150	1170

Hãy tính một của bảng số liệu thống kê trên.

Lời giải.

Từ bảng số liệu trên ta suy ra bảng phân bố tần số các giá trị tuổi thọ của 30 bóng đèn như sau

Tuổi thọ (giờ)	1150	1160	1170	1180	1190	Tổng
Tần số	3	6	12	6	3	30

Ta thấy giá trị 1170 có tần số bằng 12 là lớn nhất. Do đó mốt của bảng số liệu là: $M_O = 1170$. $\square$

Ví dụ 2. Kết quả kiểm tra chất lượng đầu năm (thang điểm 30) của 41 học sinh của một lớp được cho bởi bảng số liệu thống kê dưới đây

Điểm	9	11	14	16	17	18	20	21	23	25	Tổng
Tần số	3	7	4	4	6	7	3	3	2	2	41

Hãy tính mốt của bảng số liệu thống kê trên.

Lời giải.

Ta thấy điểm 11 và điểm 18 có tần số bằng 7 là lớn nhất. Do đó bảng số liệu có hai mốt là: $M_O^{(1)} = 11$ và $M_O^{(2)} = 18$. $\square$

Ví dụ 3. Một bác sĩ mắt ghi lại tuổi của 30 bệnh nhân mắc bệnh đau mắt hột. Kết quả thu được mẫu số liệu như sau

21	17	22	18	20	17	15	13	15	20
15	12	18	17	25	17	21	15	12	18
16	23	14	18	19	13	16	19	18	17

Tính mốt M_O của bảng số liệu đã cho.

Lời giải.

Từ bảng số liệu trên ta suy ra bảng phân bố tần số tuổi của 30 bệnh nhân đau mắt hột như sau

Tuổi	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	25	Tổng
Tần số	2	2	1	4	2	5	5	2	2	2	1	1	1	30

Ta thấy tuổi 17 và 18 có tần số bằng 5 là lớn nhất. Do đó bảng số liệu có hai mốt là: $M_O^{(1)} = 17$ và $M_O^{(2)} = 18$. $\square$

Ví dụ 4. Điểm bài kiểm tra một tiết môn toán của 40 học sinh lớp 11A1 được thống kê bằng bảng số liệu dưới đây

Điểm	3	4	5	6	7	8	9	10	Cộng
Số học sinh	2	3	$3n - 8$	$2n + 4$	3	2	4	5	40

Trong đó $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$. Tính mốt của bảng số liệu thống kê đã cho.

Lời giải.

Vì tổng các số liệu thống kê bằng 40 nên ta có: $5n + 15 = 40 \Leftrightarrow n = 5$.

Với $n = 5$ ta có bảng phân bố tần số

Điểm	3	4	5	6	7	8	9	10	Cộng
Số học sinh	2	3	7	14	3	2	4	5	40

Vậy một của bảng số liệu là: $M_O = 6$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho bảng phân bố tần số sau

Giá trị	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Tần số	12	5	n^2	16	$6n - 5$

Tìm tất cả các số tự nhiên n để $M_O = x_3$ là một duy nhất của bảng phân bố tần số đã cho.

Lời giải.

Từ giả thiết $M_O = x_3$ là một duy nhất của bảng số liệu thống kê đã cho nên ta có $\begin{cases} n^2 > 16 \\ n^2 > 6n - 5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \begin{cases} n < -4 \\ n > 4 \end{cases} \\ \begin{cases} n < 1 \\ n > 5 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n < -4 \\ n > 5 \end{cases}.$$

Vì n là số tự nhiên nên các giá trị n thỏa mãn là: $n > 5$. □

Bài 2. Cho bảng phân bố tần số sau

Giá trị	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Tần số	5	2	n	$20 - n$	8

Tìm các số tự nhiên n để $M_O = x_4$ là một duy nhất của bảng số liệu thống kê đã cho.

Lời giải.

Từ giả thiết $M_O = x_4$ là một duy nhất của bảng số liệu thống kê đã cho nên ta có

$$\begin{cases} 20 - n > 8 \\ 20 - n > n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n < 12 \\ n < 10 \end{cases} \Leftrightarrow n < 10.$$

Vì n là số tự nhiên nên các giá trị n thỏa mãn là: $0 \leq n < 10$. □

Bài 3. Cho bảng phân bố tần số sau

Giá trị	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
Tần số	5	$n^2 + 3$	3	$7n - 9$	$n + 1$	7

Gọi S là tập hợp tất cả các số n nguyên dương sao cho $M_O = x_2$ và $M_O = x_4$ là hai một của bảng phân bố tần số đã cho. Tính số phần tử của tập hợp S .

Lời giải.

Từ giả thiết x_2 và x_4 là các một của bảng số liệu thống kê đã cho, ta có

$$\begin{cases} n^2 + 3 = 7n - 9 \\ 7n - 9 > n + 1 \\ 7n - 9 > 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^2 - 7n + 12 = 0 \\ n > \frac{5}{3} \\ n > \frac{16}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 3 \\ n = 4 \end{cases}.$$

Vì n là số nguyên dương nên $n = 3$ và $n = 4$ thỏa mãn. Vậy tập hợp S có 2 phần tử. □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 4. Quan sát 9 con chuột chạy qua một mê hồn trận và ghi lại thời gian (tính bằng phút) của chúng trong bảng sau:

Con chuột	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Thời gian chạy	1	2,5	3	1,5	2	1,25	1	0,9	30

- a) Tính số trung bình, số trung vị và mốt của thời gian chuột ra khỏi mê hồn trận?
 b) Trong trường hợp này nên chọn đại lượng nào để thể hiện xu thế trung bình của mẫu?

Lời giải.

a) Số trung bình: $\bar{x} = \frac{1 + 2,5 + \dots + 30}{9} \approx 4,79$.

Sắp xếp dãy số liệu theo thứ tự không giảm ta được:

$$0,9; 1; 1; 1,25; 1,5; 2; 2,5; 3; 30$$

Số trung vị: $M_e = x_5 = 1,5$.

Mốt: $M_0 = 1$.

- b) Trong trường hợp này ta nên chọn số trung vị để thể hiện xu thế trung bình của mẫu.

□

Bài 5. Trong kỳ thi Tiếng Anh cấp chứng chỉ B1 theo chuẩn Châu Âu của trường Đại học Cần Thơ, điểm thi của 32 thí sinh (thang điểm 100) như sau:

79	65	85	52	81	55	65	49
42	68	66	56	57	65	72	69
60	50	63	74	88	78	95	41
87	61	72	53	47	90	74	68

- a) Lập bảng phân bố tần số ghép lớp của mẫu số liệu trên với các lớp $[40; 50)$, $[50; 60)$, $\dots$, $[90; 100)$.
 b) Tính số trung bình của mẫu số liệu theo bảng phân bố tần số ghép lớp (chính xác đến hàng phần trăm).
 c) Tính số trung vị.

Lời giải.

- a) Bảng phân bố tần số ghép lớp của mẫu số liệu:

Lớp	Giá trị đại diện	Tần số
$[40; 50)$	45	4
$[50; 60)$	55	6
$[60; 70)$	65	10
$[70; 80)$	75	6
$[80; 90)$	85	4
$[90; 100)$	95	2

b) Số trung bình $\bar{x} = \frac{45 \times 4 + 55 \times 6 + \dots + 95 \times 2}{32} \approx 66,88$.

c) Vì có 32 số liệu nên số trung vị là $M_e = \frac{x_{16} + x_{17}}{2}$.

Nhìn vào bảng trên ta thấy x_{16}, x_{17} thuộc lớp $[60; 70)$, từ đó ta có $x_{16} = 65, x_{17} = 66$.

Vậy $M_e = \frac{x_{16} + x_{17}}{2} = \frac{65 + 66}{2} = 65,5$.

□

Bài 6. Điểm kiểm tra của Darell (thang điểm 100) trong giai đoạn đầu tiên được biểu diễn bởi dãy số liệu sau:

$$78, 83, 84, 86, 87, 90, 92, 92$$

Darell có thể miêu tả điểm của mình với bố mẹ như thế nào? Dùng số trung bình, số trung vị hay mốt? Liệu số liệu này có cho phép đưa đến một sự miêu tả đúng hay không?

Lời giải.

Số trung bình: $\bar{x} = \frac{78 + 83 + 84 + 86 + 87 + 90 + 92 + 92}{8} = 86,5$.

Số trung vị: $M_e = 86,5$.

Mốt: $M_0 = 92$.

Do mốt có giá trị lớn nhất nên Darell có thể dùng nó để mô tả cho điểm kiểm tra của anh ấy.

Tuy nhiên, trong trường hợp này mốt không phải là giá trị đại diện tốt cho điểm kiểm tra của anh ấy vì tất cả các điểm còn lại đều nhỏ hơn 92. □

Bài 7. Nói về tiền lương, Amara đang tham gia phỏng vấn tìm việc làm tại một công ty kỹ thuật. Cô ấy nói rằng mức lương trung bình của 37 công nhân tại đây là nhiều hơn 40000 USD. Sử dụng những thông tin có trong bảng cho biết liệu Amara có nên mong đợi mức lương hơn 40000 USD nếu cô làm việc cho công ty này. Hãy giải thích tại sao?

Người lao động	Mức lương (USD)
Giám đốc	375000
Phó giám đốc	325000
Nhân viên bán hàng (15)	35000
Thư ký (10)	16000
Nhân viên trực điện thoại (10)	12000

Lời giải.

Công ty có 37 nhân viên, nhưng chỉ có hai nhân viên có mức lương trên 40000 USD là giám đốc và phó giám đốc. Do đó, Amara không nên mong đợi một mức lương cao hơn 40000 USD khi vào làm việc cho công ty này. Nói cách khác, con số trung bình về mức lương trên 40000 USD là một số không đại diện tốt cho các số liệu trên. □

Bài 8. Cho bảng phân bố tần số

Giá trị	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Tần số	2	$x + y$	$2x - y$	5	6

với x, y là các số tự nhiên. Tìm tất cả các cặp số $(x; y)$ để x_5 là một của bảng số liệu đã cho.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện để } x_5 \text{ là một của bảng số liệu đã cho là: } \begin{cases} 0 \leq x + y \leq 6 & (1) \\ 0 \leq 2x - y \leq 6 & (2) \end{cases}.$$

Từ (1) suy ra $y \leq 6 - x$ và $x \leq 6 - y$.

Từ (2) suy ra $2x - 6 \leq y$ và $\frac{y}{2} \leq x$.

$$\text{Do đó } \begin{cases} 2x - 6 \leq 6 - x \\ \frac{y}{2} \leq 6 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}.$$

Từ đó tìm được 14 cặp số thỏa mãn là:

$(0; 0), (1; 0), (1; 1), (1; 2), (2; 0), (2; 1), (2; 2)$

$(3; 0), (3; 1), (3; 2), (3; 3), (4; 2), (2; 3), (2; 4).$

□

Bài 9. Cho bảng phân bố tần số

Giá trị	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Tần số	6	$3x + y$	$3y - 3x$	$x + y$	4

với x, y là các số tự nhiên. Tìm tất cả các cặp số $(x; y)$ để bảng số liệu thống kê đã cho có một là 3 giá trị khác nhau.

Lời giải.

$$\text{Trường hợp 1: các giá trị } x_1, x_2, x_3 \text{ là một khi } \begin{cases} 3x + y = 6 \\ 3y - 3x = 6 \\ x + y < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ x + y < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}.$$

$$\text{Trường hợp 2: các giá trị } x_1, x_2, x_4 \text{ là một khi } \begin{cases} 3x + y = 6 \\ x + y = 6 \\ 3y - 3x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 6 \\ y - x < 2 \end{cases}.$$

Hệ vô nghiệm vì $\begin{cases} x = 0 \\ y = 6 \end{cases}$ không thỏa mãn bất phương trình $y - x < 2$.

$$\text{Trường hợp 3: các giá trị } x_1, x_3, x_4 \text{ là một khi } \begin{cases} x + y = 6 \\ 3y - 3x = 6 \\ 3x + y < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \\ 3x + y < 6 \end{cases}.$$

Hệ vô nghiệm vì $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$ không thỏa mãn bất phương trình $3x + y < 6$.

$$\text{Trường hợp 4: các giá trị } x_2, x_3, x_4 \text{ là một khi } \begin{cases} 3x + y = 3y - 3x \\ 3x + y = x + y \\ x + y > 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x + y > 6 \end{cases}.$$

Hệ vô nghiệm vì $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ không thỏa mãn bất phương trình $x + y > 6$.

Vậy chỉ có $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

□

§4 PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Để đo độ phân tán (độ chênh lệch) giữa các giá trị của mẫu số liệu so với số trung bình, người ta đưa ra hai số đặc trưng là *phương sai* và *độ lệch chuẩn*.

Định nghĩa. Giả sử ta có một mẫu số liệu kích thước n là $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Phương sai của mẫu số liệu này, kí hiệu là s_x^2 , được tính bởi công thức sau

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

trong đó $\bar{x}$ là số trung bình của mẫu số liệu.

Căn bậc hai của phương sai được gọi là **độ lệch chuẩn**, kí hiệu là s_x .

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Chú ý

- Phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn thì độ phân tán của các số liệu thống kê càng lớn.
- Phương sai s_x^2 và độ lệch chuẩn s_x đều được dùng để đánh giá mức độ phân tán của các số liệu thống kê (so với số trung bình cộng). Nhưng khi cần chú ý đến đơn vị đo thì ta dùng s_x vì s_x có cùng đơn vị đo với dấu hiệu được nghiên cứu.
- Phương sai còn được tính theo các công thức sau đây
 - Trường hợp bảng phân bố tần số, tần suất:

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^k f_i (x_i - \bar{x})^2$$

trong đó n_i, f_i lần lượt là tần số, tần suất của giá trị x_i .

- Trường hợp bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp:

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (c_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^k f_i (c_i - \bar{x})^2$$

trong đó c_i, n_i, f_i lần lượt là giá trị đại diện, tần số, tần suất của giá trị x_i .

- Người ta còn chứng minh được công thức sau:

$$s_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2$$

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính phương sai và độ lệch chuẩn của bảng số liệu KHÔNG ghép lớp

a) Để tính phương sai s^2 của một mẫu số liệu $\{x_1; x_2; \dots; x_N\}$ ta thực hiện một trong các cách sau:

• **Cách 1:**

- + Tính số trung bình: $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$;
- + Tính các độ lệch: $x_i - \bar{x}$, ($i = 1, N$);
- + Tính các phương sai theo công thức: $s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$.

• **Cách 2:**

- + Tính $\sum_{i=1}^N x_i$ và $\sum_{i=1}^N x_i^2$;
- + Tính phương sai theo công thức: $s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2$.

Chú ý: Nếu bảng số liệu được cho bởi bảng phân phối tần số như sau:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_m	
Tần số	n_1	n_2	$\dots$	n_m	N

Thì phương sai được tính theo công thức: $s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i (x_i - \bar{x})^2$.

b) Tính độ lệch chuẩn s : Độ lệch chuẩn s bằng căn bậc hai của phương sai:

$$s = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}.$$

🔗🔗🔗 BÀI TẬP DẠNG 1 🔗🔗🔗

Ví dụ 1. Sản lượng lúa (đơn vị là tạ) của 40 thửa ruộng thí nghiệm có cùng diện tích được trình bày trong bảng tần số dưới đây:

Sản lượng (x)	20	21	22	23	24	
Tần số (n)	5	8	11	10	6	$N = 40$

- a) Tính sản lượng trung bình của 40 thửa ruộng?
- b) Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

Lời giải.

a) Số trung bình của sản lượng của 40 thửa ruộng là:

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 20 + 8 \cdot 21 + 11 \cdot 22 + 10 \cdot 23 + 6 \cdot 24}{40} = 22,1 \text{ tạ}.$$

b) Tính phương sai:

Cách 1: $s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^5 n_i (x_i - \bar{x})^2$, thay số vào ta được:

$$s^2 = \frac{1}{40} [5(20 - 22,1)^2 + 8(21 - 22,1)^2 + 11(22 - 22,1)^2 + 10(23 - 22,1)^2 + 6(24 - 22,1)^2] = \frac{6160}{4000}.$$

Hay $s^2 = 1,54$.

Cách 2: Ta có:

- $\sum_{i=1}^5 n_i x_i = 5 \cdot 20 + 8 \cdot 21 + 11 \cdot 22 + 10 \cdot 23 + 6 \cdot 24 = 884$.
- $\sum_{i=1}^5 n_i x_i^2 = 5 \cdot 20^2 + 8 \cdot 21^2 + 11 \cdot 22^2 + 10 \cdot 23^2 + 6 \cdot 24^2 = 19598$.

$$\text{Do đó } s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i x_i^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N n_i x_i \right)^2 = \frac{1}{40} \cdot 19598 - \frac{1}{40^2} \cdot 884^2 = 1,54.$$

Tính độ lệch chuẩn: $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{1,54} \approx 1,24$. □

Ví dụ 2. 100 học sinh tham gia kì thi học sinh giỏi toán (thang điểm là 20). Kết quả được cho trong bảng sau:

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2	$N = 100$

- Tính sản lượng trung bình.
- Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

Lời giải.

a) Tính số trung bình:

$$\sum_{i=1}^{11} n_i x_i = 1 \cdot 9 + 1 \cdot 10 + \dots + 10 \cdot 18 + 2 \cdot 19 = 1523.$$

Nên số trung bình là $\bar{x} = \frac{1523}{100} = 15,23$.

b) Ta có: $\sum_{i=1}^{11} n_i x_i = 1523$ và $\sum_{i=1}^{11} n_i x_i^2 = 23591$ nên phương sai là:

$$s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i x_i^2 - \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^N n_i x_i \right)^2 = \frac{1}{100} \cdot 23591 - \frac{1}{100^2} \cdot (1523)^2 \approx 3,96$$

Độ lệch chuẩn: $s = \sqrt{s^2} \approx 1,99$. □

Ví dụ 3. Số máy tính bán được trong 7 tháng liên tiếp của một cửa hàng được ghi lại trong bảng sau:

83	79	92	71	69	83	74

Tính số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn.

Lời giải.

Số trung bình là $\bar{x} = \frac{83 + 79 + 92 + 71 + 69 + 83 + 74}{7} \approx 78,71$.

Ta có $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 = 6251,57$, $\frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2 = 6195,94$. Suy ra

$$s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2 = 6251,57 - 6195,94 = 55,63.$$

Vậy $s = \sqrt{55,63} \approx 7,46$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Kết quả thi kết thúc học kì một của bạn Hoa được ghi lại trong bảng sau:

Văn	Địa	Lý	Hóa	Toán	Anh văn
6,0	8,0	7,5	8,5	7,0	7,5

Tìm số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn.

Lời giải.

$\bar{x} = 7,5$; $s^2 \approx 0,42$; $s \approx 0,65$. □

Bài 2. Theo dõi số áo bán ra của 9 loại áo tại một cửa hàng, người ta có dãy số liệu sau (đơn vị: chiếc)

42	52	23	36	48	42	40	48	42

Tìm số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn.

Lời giải.

$\bar{x} = 41,1$; $s^2 \approx 63,4$; $s \approx 8,0$. □

Bài 3. Trong sổ theo dõi bán hàng ở một cửa hàng bán xe máy có bảng sau:

Số xe bán trong ngày	0	1	2	3	4	5
Tần số	2	13	15	12	7	3

Tìm số xe trung bình bán được trong ngày. Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

Lời giải.

Trung bình cộng: 48,35; phương sai $s^2 \approx 194,64$; độ lệch chuẩn 13,95. □

Bài 4. Bảng số liệu sau cho ta lãi (quy tròn) hàng tháng của một cửa hàng A trong năm 2006 (đơn vị là triệu đồng).

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lãi	12	15	18	13	18	16	17	14	18	17	20	17

Tìm số trung bình. Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

Lời giải.

Trung bình cộng: 16,25; phương sai $s^2 \approx 5,02$; độ lệch chuẩn 2,24. □

Bài 5. Theo dõi số bao xi măng bán ra trong 22 ngày tại một cửa hàng bán vật liệu xây dựng ta có bảng sau:

47	54	43	50	61	36	65	54	43	50	62
59	36	45	45	33	53	67	21	45	50	36

Tìm số trung bình. Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

Lời giải.

Trung bình cộng: 47, 95; phương sai $s^2 \approx 123, 13$; độ lệch chuẩn 11, 09. □

Bài 6. Bảng sau đây ghi lại tốc độ (km/h) của 30 chiếc ô tô.

60	65	70	68	62	75	80	83	82	69
73	75	85	72	67	88	90	85	72	63
75	76	85	84	70	61	60	65	73	76

Tìm số trung bình. Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

Lời giải.

Trung bình cộng: 70, 70; phương sai $s^2 \approx 38, 21$; độ lệch chuẩn 6, 18. □

Bài 7. Số liệu sau đây cho ta số lãi mỗi tháng của một cửa hàng năm 2004 (đơn vị: triệu đồng).

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lãi	12	15	18	13	13	16	18	19	15	17	20	17

Tìm số trung bình. Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

Lời giải.

Trung bình cộng: 16; phương sai $s^2 \approx 5, 9$; độ lệch chuẩn 2, 43. □

Dạng 2. Tính phương sai và độ lệch chuẩn của bảng số liệu ghép lớp

Để tính phương sai của bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp ta dùng công thức

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \left[n_1(c_1 - \bar{x})^2 + n_2(c_2 - \bar{x})^2 + \cdots + n_k(c_k - \bar{x})^2 \right]$$

trong đó c_i, n_i, f_i lần lượt là giá trị đại diện, tần số, tần suất của lớp thứ i ; c_i được tính bằng trung bình cộng của 2 giá trị đầu mút của lớp i , n là số các số liệu thống kê ($n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$), $\bar{x}$ là số trung bình cộng của các số trong số liệu thống kê đã cho.

! Người ta còn chứng minh được công thức $s_x^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$.

Độ lệch chuẩn s_x được tính bởi công thức $s_x = \sqrt{s_x^2}$.

BÀI TẬP DẠNG 2

Ví dụ sau sử dụng công thức $s_x^2 = \frac{1}{n} \left[n_1(x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + n_k(x_k - \bar{x})^2 \right]$ để tính phương sai.

Ví dụ 1. Cho bảng phân bố tần số ghép lớp sau

Độ dài của 60 lá dương xỉ trưởng thành

Lớp của độ dài (cm)	Tần số
[10; 20)	8
[20; 30)	18
[30; 40)	24
[40; 50]	10
Cộng	60

Tính phương sai và độ lệch chuẩn của bảng phân bố tần số ghép lớp đã cho.

Lời giải.

Trước hết ta có $\bar{x} = \frac{15 \times 8 + 25 \times 18 + 35 \times 24 + 45 \times 10}{60} = 31$.

Khi đó phương sai $s_x^2 = \frac{8(15 - 31)^2 + 18(25 - 31)^2 + 24(35 - 31)^2 + 10(45 - 31)^2}{60} = 84$.

Độ lệch chuẩn $s_x = \sqrt{84} \approx 9,17$. □

Ví dụ sau sử dụng công thức $s_x^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$ để tính phương sai.

Ví dụ 2. Cho bảng phân bố tần số ghép lớp sau

Khối lượng của 30 củ khoai tây

Lớp của khối lượng (g)	Tần số
[70; 80)	3
[80; 90)	6
[90; 100)	12
[100; 110)	6
[110; 120)	3
Cộng	30

Tính phương sai và độ lệch chuẩn của bảng phân bố tần số ghép lớp đã cho.

Lời giải.

Ta tính các giá trị $n_i c_i$ và $n_i c_i^2$ và bổ sung vào bảng đã cho, ta được bảng sau

Lớp của khối lượng (g)	Tần số	$n_i c_i$	$n_i c_i^2$
[70; 80)	3	225	16875
[80; 90)	6	510	43350
[90; 100)	12	1140	108300
[100; 110)	6	630	66150
[110; 120)	3	345	39675
Cộng	30	2850	274350

Từ đó, ta tính được $\bar{x} = 95$ và $\overline{x^2} = 9145$. Áp dụng công thức $s_x^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$, ta tính được $s_x^2 = 120$ và $s_x = \sqrt{s_x^2} \approx 10,95$. □

Ví dụ sau cho bảng phân bố tần suất ghép lớp. Ta tính $\bar{x}$ và s_x^2 dựa trên tần suất.

Ví dụ 3. Cho bảng phân bố tần suất ghép lớp sau

Chiều cao của 35 cây bạch đàn

Lớp của chiều cao (m)	Tần suất (%)
[6, 5; 7, 0)	5,7
[7, 0; 7, 5)	11,4
[7, 5; 8, 0)	25,7
[8, 0; 8, 5)	31,4
[8, 5; 9, 0)	17,2
[9, 0; 9, 5]	8,6
Cộng	100

Tính phương sai và độ lệch chuẩn của bảng phân bố tần suất ghép lớp đã cho.

Lời giải.

Trước hết ta tính ra các giá trị $f_i c_i$, cuối bảng sẽ có được $\bar{x}$, từ đó tính $f_i(c_i - \bar{x})^2$, cuối bảng sẽ có s_x^2 .

Lớp của chiều cao (m)	Tần suất (%)	$f_i c_i$	$f_i(c_i - \bar{x})^2$
[6, 5; 7, 0)	5,7	0,38475	0,102961
[7, 0; 7, 5)	11,4	0,8265	0,081206
[7, 5; 8, 0)	25,7	1,99175	0,030412
[8, 0; 8, 5)	31,4	2,5905	0,007642
[8, 5; 9, 0)	17,2	1,505	0,074018
[9, 0; 9, 5]	8,6	0,7955	0,114925
Cộng	100	8,094	0,411164

Như vậy ta được phương sai $s_x^2 = 0,411164$, suy ra $s_x \approx 0,641221$. □

Ví dụ sau sử dụng sự hỗ trợ của máy tính $fx - 570ESPLUS$ để tính phương sai và độ lệch chuẩn.

Ví dụ 4. Cho bảng phân bố tần số ghép lớp sau

Khối lượng của nhóm 20 cá mè

Lớp khối lượng (kg)	[0, 6; 0, 8)	[0, 8; 1, 0)	[1, 0; 1, 2)	[1, 2; 1, 4]	Cộng
Tần số	4	6	6	4	20

Tính phương sai và độ lệch chuẩn của bảng trên.

Lời giải.

Trước hết, ta chọn shift mode ▽ 4 1 để dùng chế độ thống kê với 1 đối tượng thống kê.

Sau đó ta vào mode 3 để vào chế độ thống kê và chọn 1 để nhập dữ liệu.

Nhập các giá trị đại diện trong cột X trên màn hình. Sau khi nhập xong, chuyển qua cột FREQ bằng phím ▷ và nhập các tần số tương ứng với các giá trị đại diện.

Nhập xong bấm AC. Để tính độ lệch chuẩn, ta bấm shift 1 4 3 =, kết quả là $s_x = 0,2049390153$, ta tính phương sai bằng cách bình phương giá trị trên, bấm tiếp x^2 =, ta được $s_x^2 = 0,042$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Nhiệt độ trung bình của tháng 2 ở một thành phố đo trong 30 năm được cho trong bảng sau.

Lớp nhiệt độ ($^{\circ}\text{C}$)	Tần số	Tần suất (%)
[12; 14)	1	3,33
[14; 16)	3	10,00
[16; 18)	12	40,00
[18; 20)	9	30,00
[20; 22]	5	16,67
Cộng	30	100

Tính phương sai và độ lệch chuẩn của bảng phân bố đã cho.

Lời giải.

Sử dụng một trong các phương án tính như trong ví dụ, ta được kết quả: $s_x^2 \approx 3,93$; $s_x \approx 1,98$. $\square$

Bài 2. Tính phương sai và độ lệch chuẩn của bảng phân bố sau

Chiều cao của 36 học sinh

Lớp số đo chiều cao (cm)	Tần số
[150; 156)	6
[156; 162)	12
[162; 168)	13
[168; 174]	5
Cộng	36

Lời giải.

Sử dụng một trong các phương án tính như trong ví dụ, ta được kết quả: $s_x^2 \approx 30,97$; $s_x \approx 5,57$. $\square$

Bài 3. Tính phương sai và độ lệch chuẩn của bảng phân bố sau

Tiền lãi của mỗi ngày bán báo được khảo sát trong 30 ngày

Lớp tiền lãi (nghìn đồng)	Tần số
[29,5; 40,5)	3
[40,5; 51,5)	4
[51,5; 62,5)	9
[62,5; 73,5)	5
[73,5; 84,5)	5
[84,5; 95,5]	4
Cộng	30

Lời giải.

Sử dụng một trong các phương án tính như trong ví dụ, ta được kết quả: $s_x^2 = 271,71$; $s_x = 16,48$. $\square$

Bài 4. Trong một trường THPT, cho kiểm tra toán ở 2 lớp 10A và 10B và lập được bảng tần số ghép lớp như sau:

Điểm thi toán của lớp 10A

Lớp điểm kiểm tra	Tần số
[0; 2)	2
[2; 4)	4
[4; 6)	12
[6; 8)	28
[8; 10]	4
Cộng	50

Điểm thi toán của lớp 10B

Lớp điểm kiểm tra	Tần số
[0; 2)	4
[2; 4)	10
[4; 6)	18
[6; 8)	14
[8; 10]	5
Cộng	50

Tính phương sai và độ lệch chuẩn của hai bảng phân bố tần số ghép lớp trên và cho kết luận.

Lời giải.

Sử dụng một trong các phương án tính như trong ví dụ, ta được kết quả

- Lớp 10A: $s_x^2 = 3,23$; $s_x = 1,8$.
- Lớp 10B: $s_x^2 = 4,65$; $s_x = 2,16$.

Từ đó cho thấy độ phân tán của lớp 10B nhiều hơn độ phân tán của lớp 10A so với giá trị trung bình của dữ liệu. $\square$

Bài 5. Một nông dân nuôi cá có 2 ao nuôi cùng một loại cá. Ông ta bắt mỗi ao 24 con cá và cân. Sau đây là bảng phân bố khối lượng 2 nhóm cá.

Nhóm cá thứ nhất

Lớp khối lượng (g)	Tần số
[630; 635)	1
[635; 640)	2
[640; 645)	3
[645; 650)	6
[650; 655]	12
Cộng	

Nhóm cá thứ hai

Lớp khối lượng (g)	Tần số
[630; 635)	0
[635; 640)	0
[640; 645)	8
[645; 650)	7
[650; 655]	9
Cộng	

Tính phương sai và độ lệch chuẩn của hai bảng phân bố tần số ghép lớp trên và cho kết luận.

Lời giải.

Sử dụng một trong các phương án tính như trong ví dụ, ta được kết quả

- Nhóm cá thứ nhất: $s_x^2 = 33,16$; $s_x = 5,76$.
- Nhóm cá thứ hai: $s_x^2 = 17,66$; $s_x = 4,2$.

Từ đó cho thấy độ phân tán của nhóm cá thứ hai ít hơn độ phân tán của nhóm cá thứ nhất so với giá trị trung bình của dữ liệu. $\square$

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 6. Một trang trại trồng hai loại táo A và B . Chủ trang trại phải lựa chọn một loại táo có trọng lượng các quả táo ít bị phân tán để xuất khẩu. Sau vụ thu hoạch, ông đã cân trọng lượng của 100 quả táo. Các số liệu được tóm tắt trong bảng tần số sau:

Trọng lượng các quả táo loại A

Trọng lượng	Tần số
[80; 120)	9
[120; 160)	13
[160; 200)	5
[200; 240)	15
[240; 280)	8
Tổng	50

Trọng lượng các quả táo loại B

Trọng lượng	Tần số
[80; 120)	8
[120; 160)	11
[160; 200)	12
[200; 240)	11
[240; 280)	8
Tổng	50

Em hãy cho biết chủ trang trại sẽ chọn loại táo nào để xuất khẩu?

Lời giải.

Ta có $\overline{x_A} = \overline{x_B} = 180$.

Áp dụng công thức $s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (c_i - \bar{x})^2$ ta được phương sai của mỗi bảng số liệu lần lượt là

$$s_A^2 = 3072$$

$$s_B^2 = 2752$$

Vì $s_B^2 < s_A^2$ nên trọng lượng các quả táo loại B sẽ đồng đều hơn loại A . Do đó chủ trang trại sẽ chọn loại táo B để xuất khẩu. $\square$

Bài 7. Trên hai con đường A và B , trạm kiểm soát đã ghi lại tốc độ (km/h) của 30 chiếc ô tô trên mỗi con đường như sau:

Con đường A :

60	65	70	68	62	75	80	83	82	69	73	75	85	72	67
88	90	85	72	63	75	76	85	84	70	61	60	65	73	76

Con đường B :

76	64	58	82	72	70	68	75	63	67	74	70	79	74	60
80	73	75	71	68	72	73	79	80	63	62	71	70	69	63

- Tính số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn của tốc độ ô tô trên mỗi con đường A, B .
- Theo em thì chạy xe trên con đường nào an toàn hơn?

Lời giải.

- Trên con đường A . Ta có: $\overline{x_A} \approx 73,63$ km/h, $s_A^2 \approx 74,77$, $s_A \approx 8,65$ km/h.

Trên con đường B . Ta có: $\overline{x_B} \approx 70,7$ km/h, $s_B^2 \approx 38,21$, $s_B \approx 6,18$ km/h.

- Nhận xét: Trên con đường B , tốc độ trung bình và độ lệch chuẩn đều nhỏ hơn trên con đường A . Do đó chạy xe trên con đường B sẽ an toàn hơn trên con đường A . $\square$

Chương 6: CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

§1 CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC

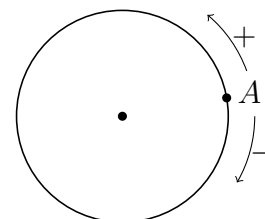
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 KHÁI NIỆM CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC

Định nghĩa.

Đường tròn định hướng là một đường tròn trên đó ta đã chọn một chiều chuyển động gọi là chiều dương, chiều ngược lại gọi là chiều âm.

Quy ước: chiều dương là chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ.



Định nghĩa. Trên đường tròn định hướng, cho hai điểm A và B . Một điểm M di chuyển trên đường tròn luôn theo một chiều (dương hoặc âm) từ A đến B tạo nên một *cung lượng giác* có điểm đầu là A , điểm cuối là B .

! Với hai điểm A, B đã cho trên đường tròn định hướng, ta có vô số cung lượng giác điểm đầu A , điểm cuối B . Mỗi cung như vậy đều được kí hiệu là $\widehat{AB}$.

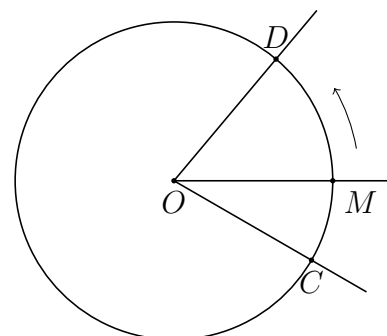
Trên một đường tròn định hướng, lấy hai điểm A và B thì

- Kí hiệu $\widehat{AB}$ chỉ một cung hình học (cung lớn hoặc cung bé) hoàn toàn xác định.
- Kí hiệu $\widehat{AB}$ chỉ một cung lượng giác điểm đầu A , điểm cuối B .

Định nghĩa.

Trên đường tròn định hướng, cho cung lượng giác $\widehat{CD}$. Một điểm M chuyển động trên đường tròn từ C đến D tạo nên cung lượng giác $\widehat{CD}$ nói trên.

Khi đó, tia OM quay xung quanh gốc O từ vị trí OC đến vị trí OD . Ta nói tia OM tạo ra một *góc lượng giác* có tia đầu là OC , tia cuối là OD . Kí hiệu: (OC, OD) .

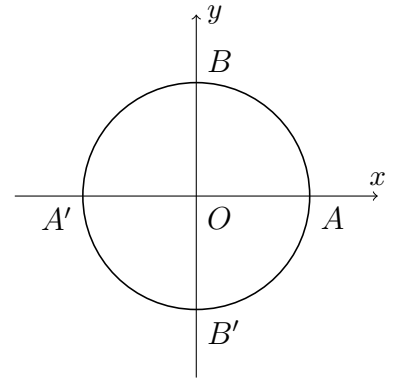


Định nghĩa.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ đường tròn định hướng tâm O bán kính $R = 1$.

Đường tròn này cắt hai trục tọa độ tại bốn điểm $A(1;0)$, $A'(-1;0)$, $B(0;1)$, $B'(0;-1)$. Ta lấy A làm điểm gốc của đường tròn đó.

Đường tròn xác định như trên gọi là *đường tròn lượng giác (gốc A)*.



2 SỐ ĐO CỦA CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC

Định nghĩa. Trên đường tròn tùy ý, cung có độ dài bằng bán kính được gọi là *cung co số đo 1 rad*.

Liên hệ giữa độ và rad: $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$ và $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$.

! Khi viết số đo của một góc (hay cung) theo đơn vị radian, người ta thường không viết chữ rad sau số đo. Chẳng hạn cung $\frac{\pi}{2}$ được hiểu là cung $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$.

Bảng chuyển đổi thông dụng:

Độ	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Radian	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Định nghĩa. Số đo của một cung lượng giác $\widehat{AM}$ ($A \neq M$) là một số thực, âm hay dương.

Kí hiệu số đo của cung là $\widehat{AM}$ là số $\widehat{AM}$.

Ghi nhớ:

$$\text{sđ } \widehat{AM} = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{sđ } \widehat{AM} = a^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

Định nghĩa. Số đo của góc lượng giác (OA, OC) là số đo của cung lượng giác $\widehat{AC}$ tương ứng.

Số đo của một cung lượng giác

Số đo của một cung lượng giác $\widehat{AM}$ ($A \neq M$) là một số thực, âm hay dương. Kí hiệu số đo của cung là $\widehat{AM}$ là số $\widehat{AM}$.

Ghi nhớ

$$\text{sđ } \widehat{AM} = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

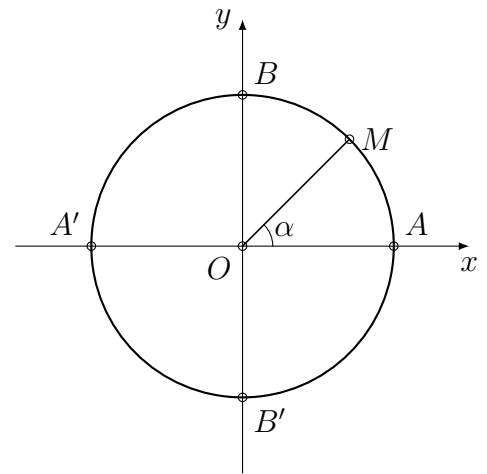
$$\text{sđ } \widehat{AM} = a^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

Số đo của một góc lượng giác

Số đo của góc lượng giác (OA, OC) là số đo của cung lượng giác $\widehat{AC}$ tương ứng.

Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác

Điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho góc lượng giác $(OA, OM) = \alpha$ là điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo α .



B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Liên hệ giữa độ và radian

Sử dụng công thức chuyển đổi giữa số đo độ và số đo radian: $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ rad và $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$.

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 1 ❖❖❖

Ví dụ 1. Đổi số đo của các góc sau ra radian: 72° ; 600° ; $-37^\circ 45' 30''$.

Lời giải.

Vì $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ rad nên

$$72^\circ = 72 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{5};$$

$$600^\circ = 600 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{10\pi}{3};$$

$$-37^\circ 45' 30'' = -37^\circ - \left(\frac{45}{60}\right)^\circ - \left(\frac{30}{60 \cdot 60}\right)^\circ = \left(\frac{4531}{120}\right)^\circ = \frac{4531}{120} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0,6587. \quad \square$$

Ví dụ 2. Đổi số đo của các góc sau ra độ: $\frac{5\pi}{18}$; $\frac{3\pi}{5}$; -4 .

Lời giải.

Vì $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$ nên

$$\frac{5\pi}{18} = \left(\frac{5\pi}{18} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 50^\circ;$$

$$\frac{3\pi}{5} = \left(\frac{3\pi}{5} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 108^\circ;$$

$$-4 = -\left(4 \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx -2260^\circ 48'. \quad \square$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Đổi số đo của các góc sau ra radian: 54° ; $30^\circ 45'$; -60° ; -210° .

Lời giải.

$$54^\circ = 54 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{10};$$

$$30^\circ 45' = 30^\circ + \left(\frac{45}{60}\right)^\circ = \left(\frac{123}{4}\right)^\circ = \frac{123}{4} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{41\pi}{240} \approx 0,5367;$$

$$-60^\circ = -60 \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{3};$$

$$-210^\circ = -210 \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{7\pi}{6}.$$

□

Bài 2. Đổi số đo của các góc sau ra độ: $\frac{\pi}{5}$; $-\frac{5\pi}{6}$; $\frac{4\pi}{3}$; $3,56\pi$.

Lời giải.

$$\frac{\pi}{5} = \left(\frac{\pi}{5} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 36^\circ;$$

$$-\frac{5\pi}{6} = -\left(\frac{5\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 150^\circ;$$

$$\frac{4\pi}{3} = \left(\frac{4\pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 240^\circ;$$

$$3,56\pi = \left(3,56\pi \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 640^\circ 48'.$$

□

Dạng 2. Độ dài cung lượng giác

Cung tròn bán kính R có số đo α ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$), có số đo a° ($0 \leq a \leq 360$) và có độ dài là l thì:

$$l = R\alpha = \frac{\pi a}{180} \cdot R \text{ do đó } \frac{\alpha}{\pi} = \frac{a}{180}$$

Đặc biệt: $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$, $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$.

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 2 ❖❖❖

Ví dụ 1. Một đường tròn có bán kính 36 m. Tìm độ dài của cung trên đường tròn đó có số đo là

- a) $\frac{3\pi}{4}$ b) 51° c) $\frac{1}{3}$

Lời giải.

Theo công thức tính độ dài cung tròn ta có $l = R\alpha = \frac{\pi a}{180} \cdot R$ nên

a) Ta có $l = R\alpha = 36 \cdot \frac{3\pi}{4} = 27\pi \approx 84,8m$

b) Ta có $l = \frac{\pi a}{180} \cdot R = \frac{\pi 51}{180} \cdot 36 = \frac{51\pi}{5} \approx 32,04 \text{ m}$.

c) Ta có $l = R\alpha = 36 \cdot \frac{1}{3} = 12 \text{ m}$.

□

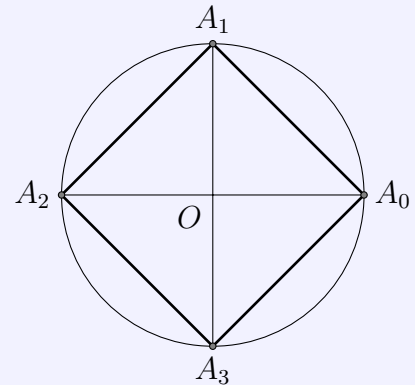
Ví dụ 2. Một hải lí là độ dài cung tròn xích đạo có số đo $\left(\frac{1}{60}\right)^\circ = 1'$. Biết độ dài xích đạo là 40.000 km, hỏi một hải lí dài bao nhiêu km?

Lời giải.

Một hải lí dài $\frac{40000}{360} \cdot \frac{1}{60} \approx 1,852$ km. □

Ví dụ 3.

Cho hình vuông A_0, A_1, A_2, A_3 nội tiếp đường tròn tâm O (các đỉnh được sắp xếp theo chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ). Tính số đo của các cung lượng giác $\widehat{A_0A_i}, \widehat{A_iA_j}$ ($i, j = 0, 1, 2, 3, i \neq j$).



Lời giải.

Ta có $\widehat{A_0OA_0} = 0$ nên $\text{sđ}\widehat{A_0A_0} = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\widehat{A_0OA_1} = \frac{\pi}{2}$ nên $\text{sđ}\widehat{A_0A_1} = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\widehat{A_0OA_2} = \pi$ nên $\text{sđ}\widehat{A_0A_2} = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\widehat{A_0OA_3} = \frac{3\pi}{2}$ nên $\text{sđ}\widehat{A_0A_3} = 2\pi - \frac{\pi}{2} + k2\pi = \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Như vậy $\text{sđ}\widehat{A_0A_i} = \frac{i\pi}{2} + k2\pi, i = 0, 1, 2, 3, k \in \mathbb{Z}$

Theo hệ thức salơ ta có $\text{sđ}\widehat{A_iA_j} = \text{sđ}\widehat{A_0A_j} - \text{sđ}\widehat{A_0A_i} + k2\pi = (j - i) \cdot \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tính độ dài cung tròn trong các trường hợp sau:

- a) Bán kính $R = 5$, có số đo 72° . b) Bán kính $R = 18$, có số đo 150° .

Lời giải.

a) $l = \frac{\pi \cdot 72}{180} \cdot 5 = 2\pi$.

b) $l = \frac{\pi \cdot 150}{180} \cdot 18 = 15\pi$. □

Bài 2. Cho đường tròn có đường kính $R = 20$ cm. Hãy tính độ dài cung tròn có số đo: $\frac{\pi}{15}; 1, 5; 37^\circ$

Lời giải.

- $l = \frac{\pi}{15} \cdot 20 \approx 4,19$ cm.
 - $l = 1,5 \cdot 20 \approx 30$ cm.
 - $l = \frac{37 \cdot \pi}{180} \cdot 20 \approx 12,91$ cm.
-

Bài 3. Bánh xe của người đi xe đạp quay được 11 vòng trong 5 giây.

- a) Tính góc (theo độ và radian) mà bánh xe quay được trong 1 giây.
b) Tính quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút, biết rằng đường kính bánh xe đạp là 680 mm.

Lời giải.

a) Trong 1 giây, bánh xe quay được $\frac{11}{5}$ vòng, tức là quay được một góc $\frac{22\pi}{5}$ (rad) hay 792° .

b) Trong 1 phút, bánh xe lăn được $l = 340 \cdot \frac{22\pi}{5} \cdot 60 \approx 281,990$ (mm) ≈ 282 m. $\square$

Bài 4. Cho lục giác đều $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ nội tiếp đường tròn tâm O (các đỉnh được sắp xếp theo chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ). Tính số đo của các cung lượng giác $\widehat{A_0A_i}$, $\widehat{A_iA_j}$ ($i, j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, i \neq j$).

Lời giải.

$$\text{sđ } \widehat{A_0A_i} = \frac{i\pi}{3} + k2\pi, i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{sđ } \widehat{A_iA_j} = \text{sđ } \widehat{A_0A_j} - \text{sđ } \widehat{A_0A_i} + k2\pi = (j - i) \cdot \frac{\pi}{3} + k2\pi, i, j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, i \neq j, k \in \mathbb{Z}.$$

$\square$

Bài 5. Trên đường tròn lượng giác gốc A . Cho điểm M, N sao cho $\text{sđ } \widehat{AM} = \frac{\pi}{5}$, $\text{sđ } \widehat{AN} = -\frac{\pi}{5}$. Các điểm M', N' lần lượt là các điểm đối xứng của M, N qua tâm đường tròn. Tìm số đo của cung $\widehat{AM'}$, $\widehat{AN'}$ và $\widehat{M'N'}$.

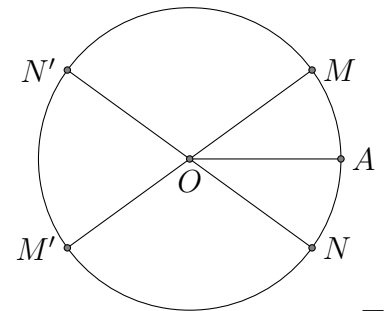
Lời giải.

$$\text{sđ } \widehat{AM'} = \frac{\pi}{5} + \pi + k2\pi = \frac{6\pi}{5} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{sđ } \widehat{AN'} = -\frac{\pi}{5} + \pi + k2\pi = \frac{4\pi}{5} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Theo hệ thức Saclo ta có

$$\text{sđ } \widehat{M'N'} = \text{sđ } \widehat{AN'} - \text{sđ } \widehat{AM'} + k2\pi = -\frac{2\pi}{5} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$



$\square$

Dạng 3. Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác

Để biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác, ta thường sử dụng các kết quả sau:

- Cung có số đo α (a°) và cung có số đo $\alpha + k2\pi$ ($a^\circ + k360^\circ$) có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác.
- Số điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn cung lượng giác có số đo dạng $\alpha + \frac{k2\pi}{m}$ (hay $a^\circ + \frac{k360^\circ}{m}$) (với k là số nguyên và m là số nguyên dương) là m điểm. Từ đó để biểu diễn các cung lượng giác đó, ta cho k chạy từ 0 đến $m - 1$ rồi biểu diễn các cung đó.

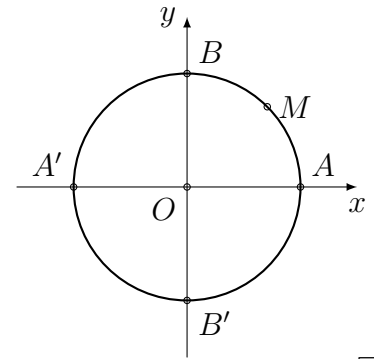
BÀI TẬP DẠNG 3

Ví dụ 1. Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác có số đo $\frac{9\pi}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\frac{9\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2 \cdot 2\pi$. Do đó điểm biểu diễn cung lượng góc $\frac{9\pi}{4}$ trùng với điểm biểu diễn cung lượng góc $\frac{\pi}{4}$.

Vậy điểm cuối của cung $\frac{9\pi}{4}$ là điểm chính giữa M của cung nhỏ $\widehat{AB}$.



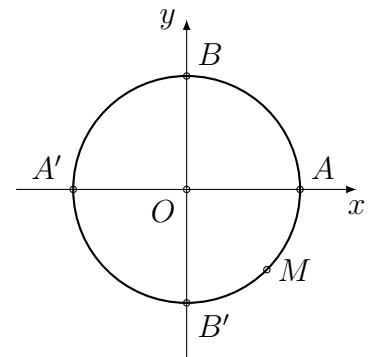
Ví dụ 2. Biểu diễn cung lượng góc trên đường tròn lượng giác có số đo -765° .

Lời giải.

Ta có $-765^\circ = -45^\circ - 2 \cdot 360^\circ$. Do đó điểm biểu diễn cung lượng góc -765° trùng với điểm biểu diễn cung lượng góc -45° . Lại có $\frac{45}{360} = \frac{1}{8}$.

Ta chia đường tròn thành 8 phần bằng nhau.

Khi đó điểm M biểu diễn góc có số đo -765° .

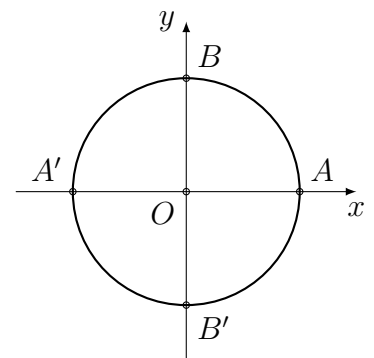


Ví dụ 3. Biểu diễn các cung lượng góc có số đo $x = k\pi$ với k là số nguyên tùy ý.

Lời giải.

Ta có $x = k\pi = \frac{k2\pi}{2}$. Vậy có 2 điểm biểu diễn cung lượng góc có số đo $k\pi$.

- Với $k = 0$, $x = 0$, được biểu diễn bởi điểm A .
- Với $k = 1$, $x = \pi$, được biểu diễn bởi điểm A' .



Ví dụ 4. Cho cung lượng góc có số đo $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ với k là số nguyên tùy ý. Có bao nhiêu giá trị k thỏa mãn $x \in [2\pi; 5\pi]$?

Lời giải.

$$\text{Giải hệ bất phương trình } \begin{cases} \frac{\pi}{4} + k\pi > 2\pi \\ \frac{\pi}{4} + k\pi < 5\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > \frac{7}{4} \\ k < \frac{19}{4} \end{cases}.$$

Từ đó, để $x \in [2\pi; 5\pi]$ thì $\frac{7}{4} < k < \frac{19}{4}$. Vì k là số nguyên nên có 3 giá trị của k , là 2, 3, 4, thỏa mãn

ycbt. □

Ví dụ 5. Cho cung lượng giác có số đo $x = -\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{4}$ với k là số nguyên tùy ý. Có bao nhiêu giá trị của k thỏa mãn $x \in \left(-\frac{3\pi}{5}; 4\pi\right]$?

Lời giải.

Giải hệ bất phương trình
$$\begin{cases} -\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{4} > -\frac{3\pi}{5} \\ -\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{4} \leq 4\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > -\frac{16}{15} \\ k \leq \frac{52}{3} \end{cases}.$$

Từ đó, để $x \in \left(-\frac{3\pi}{5}; 4\pi\right]$ thì $-\frac{16}{15} < k \leq \frac{52}{3}$. Vì k là số nguyên nên có 19 giá trị của k ($-1, 0, \dots, 16, 17$) thỏa ycbt. □

Ví dụ 6. Cho cung lượng giác có số đo $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{6}$ với số k tùy ý. Có bao nhiêu giá trị của k thỏa mãn $x \in \left(-\frac{\pi}{3}; 2\pi\right]$?

Lời giải.

Giải hệ bất phương trình
$$\begin{cases} -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{6} > -\frac{\pi}{3} \\ -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{6} \leq 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > -\frac{1}{2} \\ k \leq \frac{27}{2} \end{cases}.$$

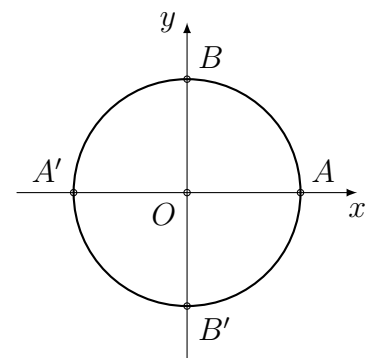
Từ đó, để $x \in \left(-\frac{\pi}{3}; 2\pi\right]$ thì $-\frac{1}{2} < k \leq \frac{27}{2}$. Vì k là số nguyên nên có 14 giá trị của k ($0, 1, \dots, 12, 13$) thỏa ycbt. □

Ví dụ 7. Biểu diễn các cung lượng giác có số đo $x = \frac{k\pi}{2}$ với k là số nguyên tùy ý.

Lời giải.

Ta có $x = \frac{k\pi}{2} = \frac{k2\pi}{4}$. Vậy có 2 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo $k\frac{\pi}{2}$.

- Với $k = 0$, $x_1 = 0$, được biểu diễn bởi điểm A .
- Với $k = 1$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, được biểu diễn bởi điểm B .
- Với $k = 2$, $x_3 = \pi$, được biểu diễn bởi điểm A' .
- Với $k = 3$, $x_4 = \frac{3\pi}{2}$, được biểu diễn bởi điểm B' .



□

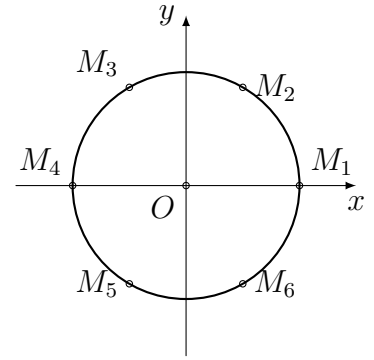
BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Biểu diễn cung lượng giác có số đo $x = \frac{k\pi}{3}$ với k là số nguyên tùy ý.

Lời giải.

Ta có $x = \frac{k\pi}{3} = \frac{k2\pi}{6}$. Vậy có 6 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo $\frac{k\pi}{3}$.

- Với $k = 0$, $x_1 = 0$, được biểu diễn bởi điểm M_1 .
- Với $k = 1$, $x_2 = \frac{\pi}{3}$, được biểu diễn bởi điểm M_2 .
- Với $k = 2$, $x_3 = \frac{2\pi}{3}$, được biểu diễn bởi điểm M_3 .
- Với $k = 3$, $x_4 = \pi$, được biểu diễn bởi điểm M_4 .
- Với $k = 4$, $x_5 = \frac{4\pi}{3}$, được biểu diễn bởi điểm M_5 .
- Với $k = 5$, $x_6 = \frac{5\pi}{3}$, được biểu diễn bởi điểm M_6 .



□

Bài 2. Biểu diễn cung lượng giác có số đo $x = -750^\circ$.

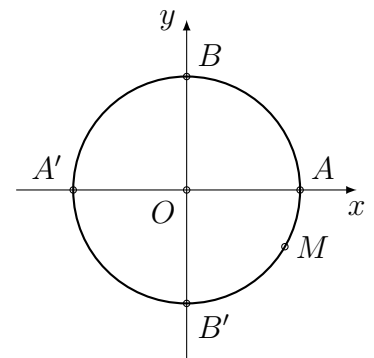
Lời giải.

Ta có $x = -750^\circ = -30 - 2 \cdot 360^\circ$. Vậy điểm diễn góc -750° trùng với điểm biểu diễn cung lượng giác -30° .

Lại có $\frac{30}{360} = \frac{1}{12}$. Ta chia đường tròn thành 12 phần bằng nhau.

Chú ý góc -30° nằm dưới trục Ox .

Khi đó điểm M biểu diễn cung lượng giác -750° .



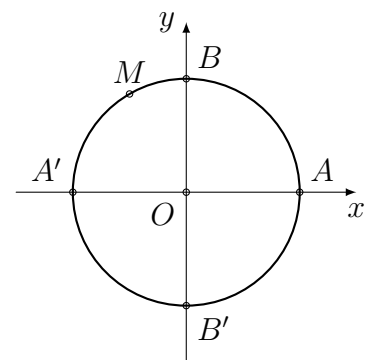
□

Bài 3. Biểu diễn cung lượng giác có số đo $x = -\frac{2\pi}{3}$.

Lời giải.

Ta có: $\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{3}$. Ta chia đường tròn thành 3 phần bằng nhau.

Khi đó điểm M biểu diễn cung lượng giác $x = -\frac{2\pi}{3}$.



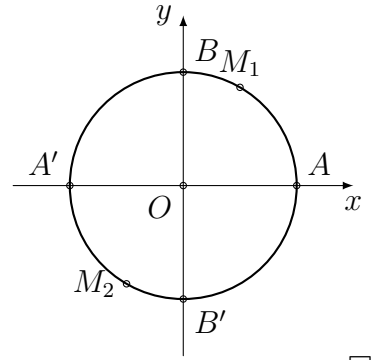
□

Bài 4. Biểu diễn các cung lượng giác có số đo $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ với k là số nguyên tùy ý.

Lời giải.

Ta có $x = \frac{\pi}{3} + k\pi = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{2}$. Vậy có 2 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

- Với $k = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{3}$, được biểu diễn bởi điểm M_1 .
- Với $k = 1$, $x_2 = \frac{4\pi}{3}$, được biểu diễn bởi điểm M_2 .



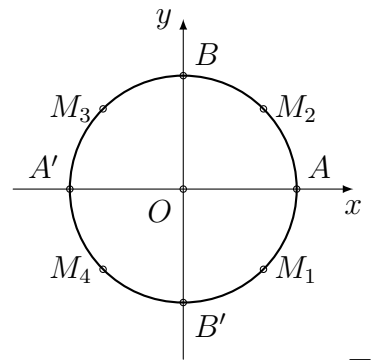
□

Bài 5. Biểu diễn các cung lượng giác có số đo $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ với k là số nguyên tùy ý.

Lời giải.

Ta có $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{4}$. Vậy có 4 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo x .

- Với $k = 0$, $x_1 = -\frac{\pi}{4}$, được biểu diễn bởi điểm M_1 .
- Với $k = 1$, $x_2 = \frac{\pi}{4}$, được biểu diễn bởi điểm M_2 .
- Với $k = 2$, $x_3 = \frac{3\pi}{4}$, được biểu diễn bởi điểm M_3 .
- Với $k = 3$, $x_4 = \frac{5\pi}{4}$, được biểu diễn bởi điểm M_4 .



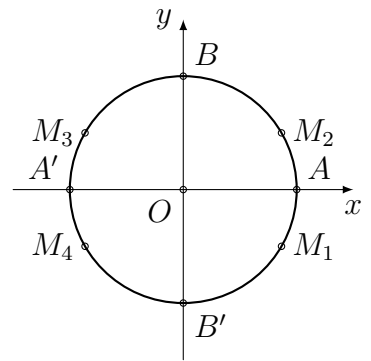
□

Bài 6. Biểu diễn cung lượng giác có số đo $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$ với k là số nguyên tùy ý.

Lời giải.

Ta có $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{6}$. Vậy có 6 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo x .

- Với $k = 0$, $x_1 = -\frac{\pi}{6}$, được biểu diễn bởi điểm M_1 .
- Với $k = 1$, $x_2 = \frac{\pi}{6}$, được biểu diễn bởi điểm M_2 .
- Với $k = 2$, $x_3 = \frac{\pi}{2}$, được biểu diễn bởi điểm B .
- Với $k = 3$, $x_4 = \frac{5\pi}{6}$, được biểu diễn bởi điểm M_3 .
- Với $k = 4$, $x_5 = \frac{7\pi}{6}$, được biểu diễn bởi điểm M_4 .
- Với $k = 5$, $x_6 = \frac{3\pi}{2}$, được biểu diễn bởi điểm B' .



□

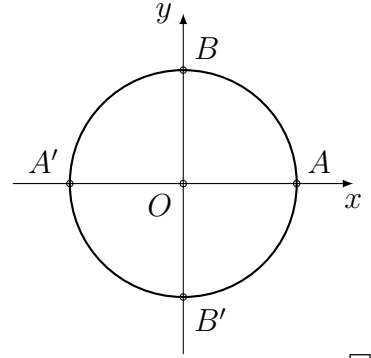
Bài 7. Khi biểu diễn các cung lượng giác có số đo $x = k\pi$ và $y = k2\pi$ lên đường tròn lượng giác, số điểm chung nhận được là bao nhiêu?

Lời giải.

Ta có $x = k\pi = \frac{k2\pi}{2}$. Vậy có 2 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo x .

- Với $k = 0$, $x_1 = 0$, được biểu diễn bởi điểm A .
- Với $k = 1$, $x_2 = \pi$ được biểu diễn bởi điểm A' .

Ta có $y = k2\pi$. Vậy có 1 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo y . Với $k = 0$, $y = 0$, được biểu diễn bởi điểm A . Vậy số điểm chung nhận được là 1 điểm chung.



□

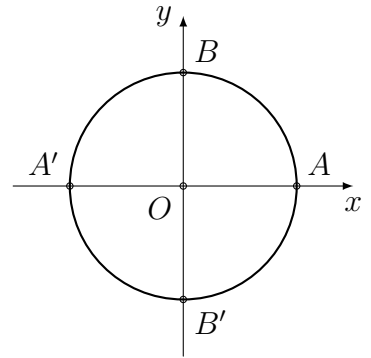
Bài 8. Khi biểu diễn các cung lượng giác có số đo $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $y = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ lên đường tròn lượng giác, số điểm chung nhận được là bao nhiêu?

Lời giải.

Ta có $x = k\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{k2\pi}{2}$. Vậy có 2 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo x .

- Với $k = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$, được biểu diễn bởi điểm B .
- Với $k = 1$, $x_2 = \frac{3\pi}{2}$ được biểu diễn bởi điểm B' .

Ta có $y = \frac{\pi}{2} + k2\pi$. Vậy có 1 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo y . Với $k = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$, được biểu diễn bởi điểm B . Vậy số điểm chung nhận được là 1 điểm chung.



□

Bài 9. Khi biểu diễn các cung lượng giác có số đo $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}$ và $y = \frac{5\pi}{6} + k\pi$ lên đường tròn lượng giác, số điểm chung nhận được là bao nhiêu?

Lời giải.

Ta có $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{4}$. Vậy có 4 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo x .

- Với $k = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{3}$, được biểu diễn bởi điểm M_1 .
- Với $k = 1$, $x_2 = \frac{5\pi}{6}$ được biểu diễn bởi điểm M_2 .
- Với $k = 1$, $x_2 = \frac{4\pi}{3}$ được biểu diễn bởi điểm M_3 .
- Với $k = 1$, $x_2 = \frac{11\pi}{6}$ được biểu diễn bởi điểm M_4 .

Ta có $y = \frac{5\pi}{6} + k\pi = \frac{5\pi}{6} + \frac{k2\pi}{2}$. Vậy có 2 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo y .

Với $k = 0$, $y_1 = \frac{5\pi}{6}$, được biểu diễn bởi điểm N_1 .

Với $k = 1$, $y_2 = \frac{11\pi}{6}$ được biểu diễn bởi điểm N_2 .

Vậy số điểm chung nhận được là 2 điểm chung.

□

Bài 10. Tìm tất cả các điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn cung lượng giác có số đo $x = \frac{k\pi}{4}$ không trùng với điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo $y = k\pi$.

Lời giải.

Ta có $x = \frac{k\pi}{4} = \frac{k2\pi}{8}$. Vậy có 8 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo x , lần lượt biểu diễn các cung lượng giác có số đo $0, \frac{2\pi}{8}, \frac{4\pi}{8}, \frac{6\pi}{8}, \frac{8\pi}{8}, \frac{10\pi}{8}, \frac{12\pi}{8}, \frac{14\pi}{8}$.

Ta có $y = k\pi = \frac{2\pi}{2}$. Vậy có 2 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo y , lần lượt biểu diễn các cung lượng giác có số đo $0, \frac{2\pi}{2}$.

Vậy có 6 điểm thỏa mãn ycbt. □

Bài 11. Tìm tất cả các điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn cung lượng giác có số đo $x = \frac{2\pi}{3} + \frac{k\pi}{3}$ không trùng với điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo $y = \frac{k2\pi}{3}$.

Lời giải.

Ta có $x = \frac{2\pi}{3} + \frac{k\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + \frac{k2\pi}{6}$. Vậy có 6 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo x , lần lượt biểu diễn các cung lượng giác có số đo $\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{6\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}$.

Ta có $y = \frac{k2\pi}{3}$. Vậy có 3 điểm biểu diễn cung lượng giác có số đo y , lần lượt biểu diễn các cung lượng giác có số đo $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$.

Vậy có 4 điểm thỏa mãn ycbt. □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 12. Chứng minh:

- Hai góc lượng giác có cùng tia đầu và có số đo lần lượt là $\frac{10\pi}{3}$ và $\frac{22\pi}{3}$ thì có cùng tia cuối.
- Hai góc lượng giác có cùng tia đầu và có số đo 645° và -435° thì có cùng tia cuối.

Lời giải.

a) Ta có : $\frac{22\pi}{3} = \frac{10\pi}{3} + \frac{12\pi}{3} = \frac{10\pi}{3} + 4\pi$.

Vậy hai góc đã cho có cùng tia cuối.

b) Ta có : $645^\circ = -75^\circ + 2 \cdot 360^\circ$ và $-435^\circ = -75^\circ - 360^\circ$.

Vậy 645° và -435° có cùng tia cuối. □

Bài 13. Coi kim giờ đồng hồ là tia Ou , kim phút đồng hồ là tia Ov . Hãy tìm số đo của góc lượng giác $(Ou; Ov)$ khi đồng hồ chỉ 3 giờ, 4 giờ, 9 giờ, 11 giờ.

Lời giải.

- Khi đồng hồ chỉ 3 giờ, ta có $sđ(Ou, Ov) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$
 - Khi đồng hồ 4 giờ, ta có $sđ(Ou, Ov) = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$
 - Khi đồng hồ 9 giờ, ta có $sđ(Ou, Ov) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$
 - Khi đồng hồ 11 giờ, ta có $sđ(Ou, Ov) = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$
-

Bài 14. Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo α . Tìm số đo góc hình học $\widehat{uOv}$ trong các trường hợp sau:

a) $\alpha = -1955^\circ$

b) $\alpha = \frac{1088\pi}{3}$

Lời giải.

Trước hết ta cần nhớ $0^\circ \leq \widehat{uOv} \leq 180^\circ$ và $(Ou, Ov) = \widehat{uOv} + k360^\circ$.

a) Ta có $\alpha = -1955^\circ = 165^\circ - 6 \cdot 360^\circ$. Nên $\widehat{uOv} = 165^\circ$.

b) $\alpha = \frac{1088\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 181 \cdot 2\pi$. Vậy $\widehat{uOv} = \frac{2\pi}{3}$.

□

Bài 15. Cho đường tròn đường kính 20 cm. Tìm số đo bằng độ và rad các cung có độ dài lần lượt là 9 cm, 37 cm.

Lời giải.

Gọi R là bán kính đường tròn, khi đó suy ra $R = 10$ cm.

- Với cung có độ dài 9 cm, ta có : $l = R \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{l}{R} = \frac{9}{10} \text{ rad} = \frac{\frac{9}{10} \cdot 180}{\pi} = \left(\frac{162}{\pi}\right)^\circ$.
- Với cung có độ dài 37 cm, ta có : $l = R \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{l}{R} = \frac{37}{10} \text{ rad} = \frac{\frac{37}{10} \cdot 180}{\pi} = \left(\frac{296}{\pi}\right)^\circ$.

□

Bài 16. Trên đường tròn lượng giác cho các cung có số đo theo thứ tự là $-60^\circ, -315^\circ, -1130^\circ, -\frac{180\pi}{7}, \frac{11\pi}{3}$. Hỏi trong các cung trên những cung nào có cùng điểm cuối?

Lời giải.

Trước hết ta thấy hai cung có số đo α và β gọi là có chung gốc và chung ngọn khi và chỉ khi $\alpha = \beta + k2\pi \Leftrightarrow \alpha - \beta = k2\pi$. Tức là hai cung lượng giác có chung điểm gốc và điểm ngọn khi và chỉ khi chúng hơn kém nhau bội của 2π (bội của 360°).

Ta có:

$$\begin{aligned} -60^\circ - (-315^\circ) &= 255^\circ \neq k360^\circ, k \in \mathbb{Z} \\ -60^\circ - (1130^\circ) &= -3 \cdot 360^\circ - 110^\circ \neq k360^\circ \\ -60^\circ - \left(-\frac{180\pi}{7}\right) &= -\frac{\pi}{3} + \frac{180\pi}{7} \neq k2\pi \\ -60^\circ - \left(\frac{11\pi}{3}\right) &= -\frac{\pi}{3} - \frac{11\pi}{3} = -4\pi = -2 \cdot 2\pi \\ -315^\circ - 1130^\circ &= -4 \cdot 360^\circ - 45^\circ \neq k360^\circ \\ -1130^\circ - \left(-\frac{180\pi}{7}\right) &= -3 \cdot 2\pi + \frac{5\pi}{18} + 13, 2\pi - \frac{2\pi}{7} \neq k2\pi. \end{aligned}$$

Như vậy bằng cách tính hiệu số của từng cặp ta thấy chỉ có cung -60° và cung $\frac{11\pi}{3}$ là có chung điểm đầu và điểm cuối.

□

Bài 17. Cho góc lượng giác $(OC; OD) = 405^\circ + k360^\circ$. Tìm tất cả các góc có cùng tia đầu và tia cuối với góc đã cho và có số đo với giá trị tuyệt đối không quá 1200° .

Lời giải.

Gọi α là góc cần tìm.

Theo bài ra $\alpha \leq |1200^\circ| \Leftrightarrow -1200^\circ \leq 405^\circ + k360^\circ \leq 1200^\circ \Rightarrow -\frac{107}{24} \leq k \leq \frac{53}{24} \Rightarrow k \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$.

Vậy các góc cần tìm theo thứ tự là : $-1035; -675; -315; 45; 405; 765; 1125$. $\square$

Bài 18. Xác định điểm cuối của cung lượng giác $\widehat{AM}$ nằm trong góc phần tư nào của mặt phẳng tọa độ trong các trường hợp sau:

a) $\text{sđ}\widehat{AM} = 1975^\circ + k360^\circ$

b) $\text{sđ}\widehat{AM} = \frac{2006\pi}{19} + k2\pi$

Lời giải.

a) Ta có $\text{sđ}\widehat{AM} = 1975^\circ + k360^\circ = 175^\circ + 5 \cdot 360^\circ$ và $90^\circ < 175^\circ < 180^\circ$.

Vậy điểm M nằm trong cung phần tư thứ II

b) $\text{sđ}\widehat{AM} = \frac{2006\pi}{19} + k2\pi = \frac{30\pi}{19} + 52 \cdot 2\pi$ và $\frac{3\pi}{2} < \frac{30\pi}{19} < 2\pi$.

Vậy điểm M nằm tại góc phần tư thứ IV. $\square$

Bài 19. Hiện tại đồng hồ chỉ 8 giờ đúng. Nếu đồng hồ chạy bình thường thì sau bao nhiêu lần đầu tiên kim giờ OG và kim phút OP tạo thành góc lượng giác $(OG; OP) = 180^\circ$?

Lời giải.

Một giờ kim phút quét nên góc 360° , kim giờ quét nên góc $\frac{360}{12} = 30^\circ$. Như vậy một giờ kim phút OP vạch một góc lớn hơn kim giờ 330° . Hiện tại 8 giờ đúng tức là $(OG; OP) = 120^\circ$.

Gọi t là thời gian (giờ) để hai kim tạo thành một góc 180° lần đầu tiên. khi đó

$$t = \frac{180 - 120}{330} = \frac{2}{11} \text{ giờ.}$$

$\square$

Bài 20. Kim giờ và kim phút của một đồng hồ lớn có độ dài lần lượt là 165 cm và 225 cm. Hỏi trong 40 phút đầu kim giờ vạch cung tròn có độ dài bao nhiêu mét, đầu kim phút vạch cung tròn có độ dài bao nhiêu mét ?

Lời giải.

Một giờ (60 phút) kim phút quét nên góc 360° , kim giờ quét nên góc $\frac{360}{12} = 30^\circ$.

Như vậy trong 40 phút đầu kim phút vạch một góc $\frac{40 \cdot 360}{60} = 240^\circ = \frac{4\pi}{3}$ rad, kim giờ vạch nên một góc $\frac{40 \cdot 30}{60} = 20^\circ = \frac{\pi}{9}$ rad.

Từ đó suy ra độ dài cung tròn mà kim phút và kim giờ đã vạch trong 40 phút đầu lần lượt là:

$$l_p = 225 \cdot \frac{4\pi}{3} = 300\pi \simeq 942,48 \text{ cm} = 9,4248 \text{ m} \text{ và } l_g = 165 \cdot \frac{\pi}{9} \simeq 57,6 \text{ cm} = 0,576 \text{ m.}$$

$\square$

Bài 21. Một bánh xe có bán kính $R = 2,4$ m quay một góc bằng 30° . Tính độ dài đường đi của một điểm trên vành bánh xe.

Lời giải.

Coi bánh xe là một đường tròn có bán kính $R = 2,4$ m. Độ dài đường đi của một điểm trên vành bánh xe là độ dài của cung tròn có số đo $30^\circ = \frac{\pi}{6}$. Vậy độ dài cần tìm là $l = 2,4 \cdot \frac{\pi}{6} = 0,4\pi$ cm. $\square$

C CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Khẳng định nào sau đây là **đúng** khi nói về “đường tròn định hướng”?

- A. Mỗi đường tròn là một đường tròn định hướng.
- B. Mỗi đường tròn đã chọn một điểm là gốc đều là một đường tròn định hướng.
- C. Mỗi đường tròn đã chọn một chiều chuyển động và một điểm là gốc đều là một đường tròn định hướng.
- D. Mỗi đường tròn trên đó ta đã chọn một chiều chuyển động gọi là chiều dương và chiều ngược lại được gọi là chiều âm là một đường tròn định hướng.

Lời giải.

Theo kiến thức cơ bản SGK trang 134 ở dòng 2.

Chọn đáp án **(D)**



Câu 2. Quy ước chiều dương của một đường tròn định hướng là:

- A. Luôn cùng chiều quay kim đồng hồ.
- B. Luôn ngược chiều quay kim đồng hồ.
- C. Có thể cùng chiều quay kim đồng hồ mà cũng có thể là ngược chiều quay kim đồng hồ.
- D. Không cùng chiều quay kim đồng hồ và cũng không ngược chiều quay kim đồng hồ.

Lời giải.

Theo SGK cơ bản trang 134 ở dòng 6.

Chọn đáp án **(B)**



Câu 3. Trên đường tròn định hướng, mỗi cung lượng giác $\widehat{AB}$ xác định:

- A. Một góc lượng giác tia đầu OA , tia cuối OB .
- B. Hai góc lượng giác tia đầu OA , tia cuối OB .
- C. Bốn góc lượng giác tia đầu OA , tia cuối OB .
- D. Vô số góc lượng giác tia đầu OA , tia cuối OB .

Lời giải.

Theo SGK cơ bản trang 134 ở dòng cuối.

Chọn đáp án **(D)**



Câu 4. Khẳng định nào sau đây là **đúng** khi nói về “góc lượng giác”?

- A. Trên đường tròn tâm O bán kính $R = 1$, góc hình học AOB là góc lượng giác.
- B. Trên đường tròn tâm O bán kính $R = 1$, góc hình học AOB có phân biệt điểm đầu A và điểm cuối B là góc lượng giác.
- C. Trên đường tròn định hướng, góc hình học AOB là góc lượng giác.
- D. Trên đường tròn định hướng, góc hình học AOB có phân biệt điểm đầu A và điểm cuối B là góc lượng giác.

Lời giải.

Theo SGK cơ bản trang 135, mục 2.

Chọn đáp án **(D)**



Câu 5. Khẳng định nào sau đây là **đúng** khi nói về “đường tròn lượng giác”?

- A. Mỗi đường tròn là một đường tròn lượng giác.

- B. Mỗi đường tròn có bán kính $R = 1$ là một đường tròn lượng giác.
 C. Mỗi đường tròn có bán kính $R = 1$, tâm trùng với gốc tọa độ là một đường tròn lượng giác.
 D. Mỗi đường tròn định hướng có bán kính $R = 1$, tâm trùng với gốc tọa độ là một đường tròn lượng giác.

Lời giải.

Theo SGK cơ bản trang 135, mục 3.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 6. Trên đường tròn cung có số đo 1 rad là?

- A. Cung có độ dài bằng 1. B. Cung tương ứng với góc ở tâm 60° .
 C. Cung có độ dài bằng đường kính. D. Cung có độ dài bằng nửa đường kính.

Lời giải.

Cung có độ dài bằng bán kính (nửa đường kính) thì có số đo bằng 1 rad.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 7. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\pi \text{ rad} = 1^\circ$. B. $\pi \text{ rad} = 60^\circ$. C. $\pi \text{ rad} = 180^\circ$. D. $\pi \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$.

Lời giải.

$\pi \text{ rad}$ tương ứng với 180° .

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 8. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $1 \text{ rad} = 1^\circ$. B. $1 \text{ rad} = 60^\circ$. C. $1 \text{ rad} = 180^\circ$. D. $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$.

Lời giải.

Ta có $\pi \text{ rad}$ tương ứng với 180° . Suy ra 1 rad tương ứng với x° . Vậy $x = \frac{180 \cdot 1}{\pi}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 9. Nếu một cung tròn có số đo là a° thì số đo radian của nó là

- A. $180\pi a$. B. $\frac{180\pi}{a}$. C. $\frac{a\pi}{180}$. D. $\frac{\pi}{180a}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\alpha = \frac{a \cdot \pi}{180}$ với α tính bằng radian, a tính bằng độ.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 10. Nếu một cung tròn có số đo là $3a^\circ$ thì số đo radian của nó là

- A. $\frac{a\pi}{60}$. B. $\frac{a\pi}{180}$. C. $\frac{180}{a\pi}$. D. $\frac{60}{a\pi}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\alpha = \frac{a \cdot \pi}{180}$ với α tính bằng radian, a tính bằng độ.

Trong trường hợp này là $3a \rightarrow \alpha = \frac{3a \cdot \pi}{180} = \frac{a\pi}{60}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 11. Đổi số đo của góc 70° sang đơn vị radian.

- A. $\frac{70}{\pi}$. B. $\frac{7}{18}$. C. $\frac{7\pi}{18}$. D. $\frac{7}{18\pi}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\alpha = \frac{a \cdot \pi}{180}$ với α tính bằng radian, a tính bằng độ.

$$\text{Ta có } \alpha = \frac{a \cdot \pi}{180} = \frac{70\pi}{180} = \frac{7\pi}{18}.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 12. Đổi số đo của góc 108° sang đơn vị radian.

A. $\frac{3\pi}{5}$.

B. $\frac{\pi}{10}$.

C. $\frac{3\pi}{2}$.

D. $\frac{\pi}{4}$.

Lời giải.

Tương tự như câu trên.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 13. Đổi số đo của góc $45^\circ 32'$ sang đơn vị radian với độ chính xác đến hàng phần nghìn.

A. 0,7947.

B. 0,7948.

C. 0,795.

D. 0,794.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\alpha = \frac{a \cdot \pi}{180}$ với α tính bằng radian, a tính bằng độ.

$$\text{Trước tiên ta đổi } 45^\circ 32' = \left(45 + \frac{32}{60}\right)^\circ.$$

$$\text{Áp dụng công thức, ta được } \alpha = \frac{\left(45 + \frac{32}{60}\right) \cdot \pi}{180} = 0,7947065861.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 14. Đổi số đo của góc $40^\circ 25'$ sang đơn vị radian với độ chính xác đến hàng phần trăm.

A. 0,705.

B. 0,70.

C. 0,7054.

D. 0,71.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\alpha = \frac{a \cdot \pi}{180}$ với α tính bằng radian, a tính bằng độ.

$$\text{Trước tiên ta đổi } 40^\circ 25' = \left(40 + \frac{25}{60}\right)^\circ.$$

$$\text{Áp dụng công thức, ta được } \alpha = \frac{\left(40 + \frac{25}{60}\right) \cdot \pi}{180} = \frac{97\pi}{432} = 0,705403906.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 15. Đổi số đo của góc $-125^\circ 45'$ sang đơn vị radian.

A. $-\frac{503\pi}{720}$.

B. $\frac{503\pi}{720}$.

C. $\frac{251\pi}{360}$.

D. $-\frac{251\pi}{360}$.

Lời giải.

Tương tự như câu trên.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 16. Đổi số đo của góc $\frac{\pi}{12}$ rad sang đơn vị độ, phút, giây.

A. 15° .

B. 10° .

C. 6° .

D. 5° .

Lời giải.

Từ công thức $\alpha = \frac{a \cdot \pi}{180} \Rightarrow a = \left(\frac{\alpha \cdot 180}{\pi} \right)^\circ$ với α tính bằng radian, a tính bằng độ.

$$\text{Ta có } a = \left(\frac{\alpha \cdot 180}{\pi} \right)^\circ = \left(\frac{\frac{\pi}{12} \cdot 180}{\pi} \right)^\circ = 15^\circ.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 17. Đổi số đo của góc $-\frac{3\pi}{16}$ rad sang đơn vị độ, phút, giây.

- A. $33^\circ 45'$. B. $-29^\circ 30'$. C. $-33^\circ 45'$. D. $-32^\circ 55'$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } a = \left(\frac{\alpha \cdot 180}{\pi} \right)^\circ = \left(\frac{-\frac{3\pi}{16} \cdot 180}{\pi} \right)^\circ = \left(-\frac{135}{4} \right)^\circ = -33^\circ 45'.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 18. Đổi số đo của góc -5 rad sang đơn vị độ, phút, giây.

- A. $-286^\circ 44' 28''$. B. $-286^\circ 28' 44''$. C. -286° . D. $286^\circ 28' 44''$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } a = \left(\frac{\alpha \cdot 180}{\pi} \right)^\circ = \left(\frac{-5 \cdot 180}{\pi} \right)^\circ = -286^\circ 28' 44''.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 19. Đổi số đo của góc $\frac{3}{4}$ rad sang đơn vị độ, phút, giây.

- A. $42^\circ 97' 18''$. B. $42^\circ 58'$. C. $42^\circ 97'$. D. $42^\circ 58' 18''$.

Lời giải.

Tương tự như câu trên.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 20. Đổi số đo của góc -2 rad sang đơn vị độ, phút, giây.

- A. $-114^\circ 59' 15''$. B. $-114^\circ 35'$. C. $-114^\circ 35' 29''$. D. $-114^\circ 59'$.

Lời giải.

Tương tự như câu trên.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 21. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Số đo của cung tròn tỉ lệ với độ dài cung đó.
B. Độ dài của cung tròn tỉ lệ với bán kính của nó.
C. Số đo của cung tròn tỉ lệ với bán kính của nó.
D. Độ dài của cung tròn tỉ lệ nghịch với số đo của cung đó.

Lời giải.

Từ công thức $\ell = R\alpha \Rightarrow \ell$ và α tỷ lệ nhau.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 22. Tính độ dài ℓ của cung trên đường tròn có bán kính bằng 20 cm và số đo $\frac{\pi}{16}$.

- A. $\ell = 3,93$ cm. B. $\ell = 2,94$ cm. C. $\ell = 3,39$ cm. D. $\ell = 1,49$ cm.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\ell = R\alpha = 20 \cdot \frac{\pi}{16} \approx 3,93$ cm.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 23. Tính độ dài của cung trên đường tròn có số đo $1,5$ và bán kính bằng 20 cm.

A. 30 cm.

B. 40 cm.

C. 20 cm.

D. 60 cm.

Lời giải.

Ta có $\ell = \alpha R = 1,5 \cdot 20 = 30$ cm.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 24. Một đường tròn có đường kính bằng 20 cm. Tính độ dài của cung trên đường tròn có số đo 35° (lấy 2 chữ số thập phân).

A. 6,01 cm.

B. 6,11 cm.

C. 6,21 cm.

D. 6,31 cm.

Lời giải.

Cung có số đo 35° thì có số đo radian là $\alpha = \frac{a\pi}{180} = \frac{35\pi}{180} = \frac{7\pi}{36}$. Bán kính đường tròn $R = \frac{20}{2} = 10$ cm. Suy ra $\ell = \alpha R = \frac{7\pi}{36} \cdot 10 \approx 6,11$ cm.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 25. Tính số đo cung có độ dài của cung bằng $\frac{40}{3}$ cm trên đường tròn có bán kính 20 cm.

A. $1,5$ rad.

B. $0,67$ rad.

C. 80° .

D. 88° .

Lời giải.

Ta có $\ell = \alpha R \Leftrightarrow \alpha = \frac{\ell}{R} = \frac{\frac{40}{3}}{20} = \frac{2}{3} \approx 0,67$ rad.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 26. Một cung tròn có độ dài bằng 2 lần bán kính. Số đo *radian* của cung tròn đó là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải.

$\ell = \alpha R \Leftrightarrow \alpha = \frac{\ell}{R} = \frac{2R}{R} = 2$ rad.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 27. Trên đường tròn bán kính R , cung tròn có độ dài bằng $\frac{1}{6}$ độ dài nửa đường tròn thì có số đo (tính bằng radian) là

A. $\pi/2$.

B. $\pi/3$.

C. $\pi/4$.

D. $\pi/6$.

Lời giải.

Ta có $\ell = \alpha R \Leftrightarrow \alpha = \frac{\ell}{R} = \frac{\frac{1}{6}\pi R}{R} = \frac{\pi}{6}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 28. Một cung có độ dài 10 cm, có số đo bằng radian là $2,5$ thì đường tròn của cung đó có bán kính là

A. $2,5$ cm.

B. $3,5$ cm.

C. 4 cm.

D. $4,5$ cm.

Lời giải.

Ta có $l = R\alpha \Leftrightarrow R = \frac{l}{\alpha} = \frac{10}{2,5} = 4$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 29. Bánh xe đạp của người đi xe đạp quay được 2 vòng trong 5 giây. Hỏi trong 2 giây, bánh xe quay được 1 góc bao nhiêu độ.

A. $\frac{8}{5}\pi$.

B. $\frac{5}{8}\pi$.

C. $\frac{3}{5}\pi$.

D. $\frac{5}{3}\pi$.

Lời giải.

Trong 2 giây bánh xe đạp quay được $\frac{2 \cdot 2}{5} = \frac{4}{5}$ vòng tức là quay được cung có độ dài là $l = \frac{4}{5} \cdot 2\pi R = \frac{8}{5}\pi R$.

Ta có $l = R\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{l}{R} = \frac{\frac{8}{5}\pi R}{R} = \frac{8}{5}\pi$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 30. Một bánh xe có 72 răng. Số đo góc mà bánh xe đã quay được khi di chuyển 10 răng là

A. 30° .

B. 40° .

C. 50° .

D. 60° .

Lời giải.

72 răng có chiều dài là $2\pi R$ nên 10 răng có chiều dài $l = \frac{10 \cdot 2\pi R}{72} = \frac{5\pi}{18}R$.

Theo công thức $l = R\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{l}{R} = \frac{\frac{5\pi}{18}R}{R} = \frac{5}{18}\pi$ mà $a = \frac{180\alpha}{\pi} = \frac{180 \cdot \frac{5}{18}\pi}{\pi} = 50^\circ$.

Cách khác. 72 răng tương ứng với 360° nên 10 răng tương ứng với $\frac{10 \cdot 360}{72} = 50^\circ$. □

Câu 31. Cho góc lượng giác $(Ox, Oy) = 22^\circ 30' + k360^\circ$. Với giá trị k bằng bao nhiêu thì góc $(Ox, Oy) = 1822^\circ 30'$?

A. $k \in \emptyset$.

B. $k = 3$.

C. $k = -5$.

D. $k = 5$.

Lời giải.

Theo đề $(Ox, Oy) = 1822^\circ 30' \Rightarrow 22^\circ 30' + k \cdot 360^\circ = 1822^\circ 30' \Rightarrow k = 5$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 32. Cho góc lượng giác $\alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi$. Tìm k để $10\pi < \alpha < 11\pi$.

A. $k = 4$.

B. $k = 5$.

C. $k = 6$.

D. $k = 7$.

Lời giải.

Ta có $10\pi < \alpha < 11\pi \Rightarrow \frac{19\pi}{2} < k2\pi < \frac{21\pi}{2} \Rightarrow k = 5$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 33. Một chiếc đồng hồ, có kim chỉ giờ OG chỉ số 9 và kim phút OP chỉ số 12. Số đo của góc lượng giác (OG, OP) là

A. $\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $-270^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

C. $270^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

D. $\frac{9\pi}{10} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Góc lượng giác (OG, OP) chiếm $\frac{1}{4}$ đường tròn. Số đo là $\frac{1}{4} \cdot 2\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 34. Trên đường tròn lượng giác có điểm gốc là A . Điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác AM có số đo 45° . Gọi N là điểm đối xứng với M qua trục Ox , số đo cung lượng giác AN bằng

- A. -45° . B. 315° .
C. 45° hoặc 315° . D. $-45^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Vì số đo cung AM bằng 45° nên $\widehat{AOM} = 45^\circ$, N là điểm đối xứng với M qua trục Ox nên $\widehat{AON} = 45^\circ$. Do đó số đo cung AN bằng 45° nên số đo cung lượng giác AN có số đo là $-45^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 35. Trên đường tròn với điểm gốc là A . Điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác AM có số đo 60° . Gọi N là điểm đối xứng với điểm M qua trục Oy , số đo cung AN là

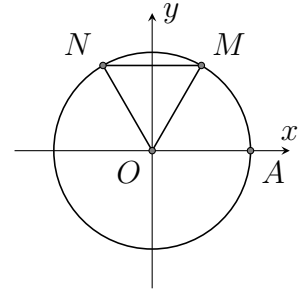
- A. 120° . B. -240° .
C. -120° hoặc 240° . D. $120^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $\widehat{AOM} = 60^\circ$, $\widehat{MON} = 60^\circ$.

Nên $\widehat{AON} = 120^\circ$.

Khi đó số đo cung AN bằng 120° .



Chọn đáp án **(A)** □

Câu 36. Trên đường tròn lượng giác với điểm gốc là A . Điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác AM có số đo 75° . Gọi N là điểm đối xứng với điểm M qua gốc tọa độ O , số đo cung lượng giác AN bằng

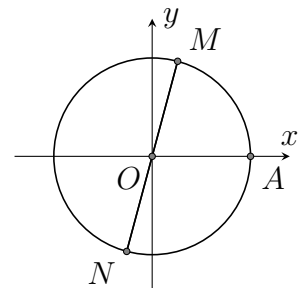
- A. 255° . B. -105° .
C. -105° hoặc 255° . D. $-105^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $\widehat{AOM} = 75^\circ$, $\widehat{MON} = 180^\circ$.

Nên cung lượng giác AN có số đo bằng

$-105^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.



Chọn đáp án **(D)** □

Câu 37. Cho bốn cung (trên một đường tròn định hướng): $\alpha = -\frac{5\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{25\pi}{3}$, $\delta = \frac{19\pi}{6}$. Các cung nào có điểm cuối trùng nhau?

- A. α và β ; γ và δ . B. β và γ ; α và δ . C. α, β, γ . D. β, γ, δ .

Lời giải.

Ta có $\delta - \alpha = 4\pi \Rightarrow$ hai cung α và δ có điểm cuối trùng nhau.

Và $\gamma - \beta = 8\pi \Rightarrow$ hai cung β và γ có điểm cuối trùng nhau.

Cách khác. Gọi A, B, C, D là điểm cuối của các cung $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Biểu diễn các cung trên đường tròn lượng giác ta có $B \equiv C, A \equiv D$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 38. Các cặp góc lượng giác sau ở trên cùng một đường tròn đơn vị, cùng tia đầu và tia cuối. Hãy nêu kết quả **SAI** trong các kết quả sau đây

- A. $\frac{\pi}{3}$ và $-\frac{35\pi}{3}$. B. $\frac{\pi}{10}$ và $\frac{152\pi}{5}$. C. $-\frac{\pi}{3}$ và $\frac{155\pi}{3}$. D. $\frac{\pi}{7}$ và $\frac{281\pi}{7}$.

Lời giải.

Cặp góc lượng giác a và b ở trên cùng một đường tròn đơn vị, cùng tia đầu và tia cuối. Khi đó $a = b + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ hay $k = \frac{a - b}{2\pi}$.

Dễ thấy, ở **đáp án B** vì $k = \frac{\frac{\pi}{10} - \frac{152\pi}{5}}{2\pi} = -\frac{303}{20} \notin \mathbb{Z}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 39. Trên đường tròn lượng giác gốc A , cung lượng giác nào có các điểm biểu diễn tạo thành tam giác đều?

- A. $\frac{k2\pi}{3}$. B. $k\pi$. C. $\frac{k\pi}{2}$. D. $\frac{k\pi}{3}$.

Lời giải.

Tam giác đều có góc ở đỉnh là 60° nên góc ở tâm là 120° tương ứng $\frac{k2\pi}{3}$.

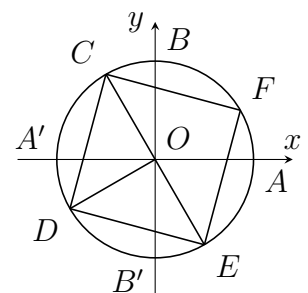
Chọn đáp án **(A)** □

Câu 40. Trên đường tròn lượng giác gốc A , cung lượng giác nào có các điểm biểu diễn tạo thành hình vuông?

- A. $\frac{k\pi}{2}$. B. $k\pi$. C. $\frac{k2\pi}{3}$. D. $\frac{k\pi}{3}$.

Lời giải.

Hình vẽ tham khảo (hình vẽ bên). Hình vuông $CDEF$ có góc $\widehat{DCE}$ là 45° nên góc ở tâm là 90° tương ứng $\frac{k\pi}{2}$.



Chọn đáp án **(A)** □

Câu 41. Công thức nào sau đây **sai**?

- A. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. B. $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$. C. $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$. D. $\tan x + \cot x = 1$.

Lời giải.

Ta có $\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} \neq 1$.

Chọn đáp án **(D)** □

ĐÁP ÁN

1. D	2. B	3. D	4. D	5. D	6. D	7. C	8. D	9. C	10. A
11. C	12. A	13. C	14. D	15. A	16. A	17. C	18. B	19. D	20. C
21. A	22. A	23. A	24. B	25. B	26. B	27. D	28. C	29. A	31. D
32. B	33. A	34. D	35. A	36. D	37. B	38. B	39. A	40. A	41. D

§2 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG

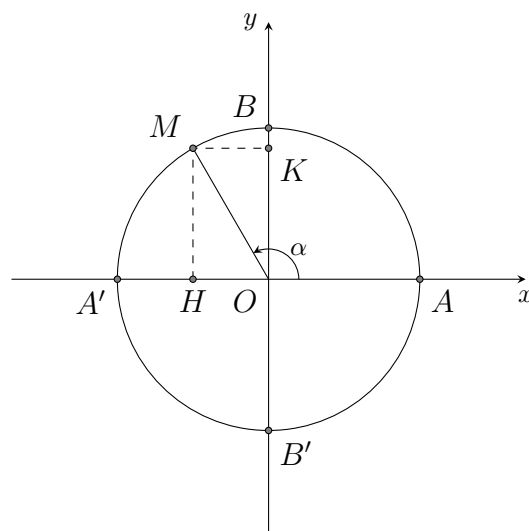
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA

- $\sin \alpha = \overline{OK}$.
- $\cos \alpha = \overline{OH}$.
- $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ nếu $\cos \alpha \neq 0$.
- $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ nếu $\sin \alpha \neq 0$.

Các giá trị $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$ được gọi là các giá trị lượng giác của cung α .

Ta cũng gọi trục tung là **trục sin**, còn trục hoành là **trục cosin**.



Chú ý

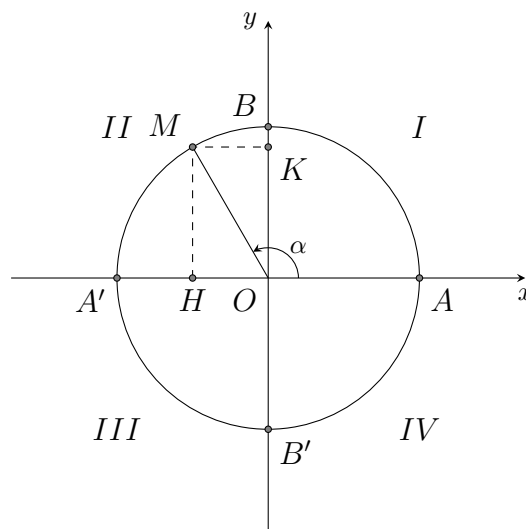
- Các định nghĩa trên cũng áp dụng cho các góc lượng giác.
- Nếu $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ thì các giá trị lượng giác của góc α chính là các giá trị lượng giác của góc đó đã nêu trong SGK Hình học 10.

2 HỆ QUẢ

- $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$ xác định với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, hơn nữa
 - $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha, \forall k \in \mathbb{Z}$.
 - $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha, \forall k \in \mathbb{Z}$.
- $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ và $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$.
- Với mọi $m \in \mathbb{R}$ mà $-1 \leq m \leq 1$ đều tồn tại α, β sao cho $\sin \alpha = m$ và $\cos \beta = m$.
- $\tan \alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $\cot \alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

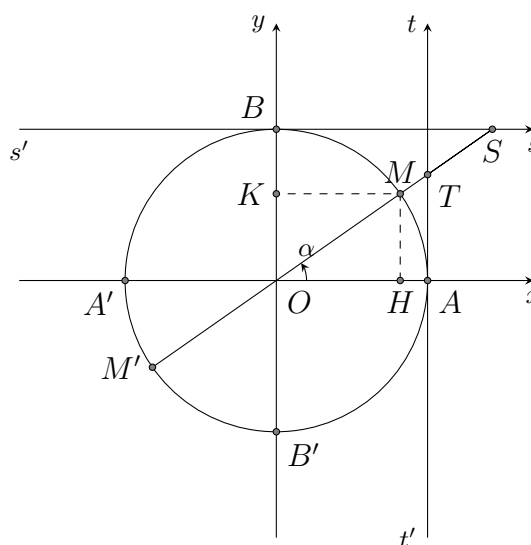
- f) Dấu của các giá trị lượng giác phụ thuộc vào vị trí điểm cuối của cung $\widehat{AM} = \alpha$ trên đường tròn lượng giác.

Giá trị lượng giác	Góc phần tư			
	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-



3 Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA TANG VÀ CÔTANG

- $\tan \alpha$ được biểu diễn bởi độ dài đại số của vectơ $\overrightarrow{AT}$ trên trục $t'At$. Trục $t'At$ được gọi là **trục tang**.
Do đó $\tan \alpha = \overline{AT}$.
- $\cot \alpha$ được biểu diễn bởi độ dài đại số của vectơ $\overrightarrow{BS}$ trên trục $s'Bs$. Trục $s'Bs$ được gọi là **trục côtang**.
Do đó $\cot \alpha = \overline{BS}$.



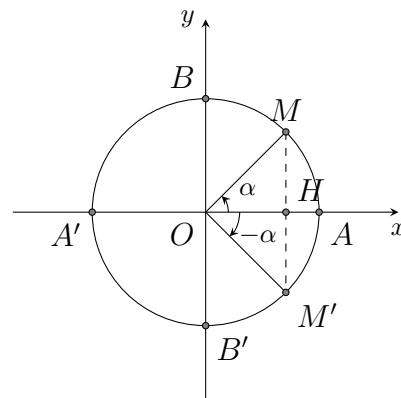
4 CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.
- $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1, \quad \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

5 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC CUNG CÓ LIÊN QUAN ĐẶC BIỆT

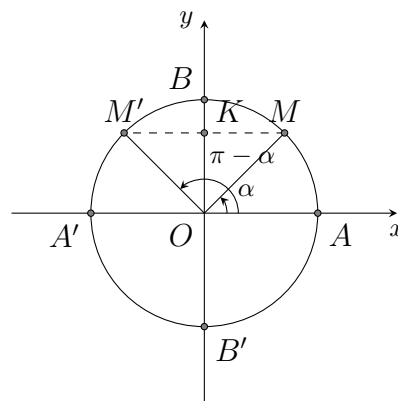
a) Cung đối nhau.

- $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$.
- $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$.
- $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$.
- $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$.



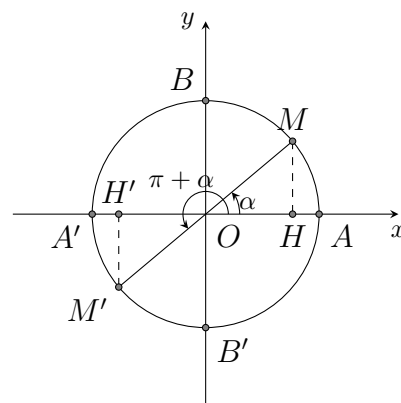
b) Cung bù nhau.

- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$.
- $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$.
- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$.
- $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$.



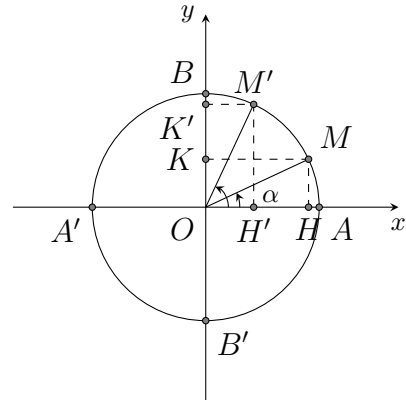
c) Cung hơn kém π .

- $\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$.
- $\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$.
- $\tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha$.
- $\cot(\alpha + \pi) = \cot \alpha$.



d) Cung phụ nhau.

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha.$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha.$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha.$
- $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha.$

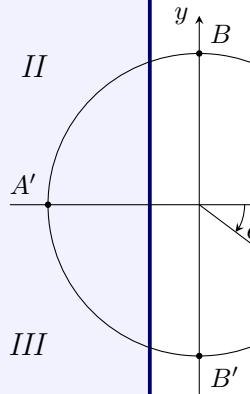


B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Dấu của các giá trị lượng giác

Để xác định dấu của các giá trị lượng giác của một góc α ta xác định vị trí điểm cuối của cung $\widehat{AM} = \alpha$ trên đường tròn lượng giác. Điểm M thuộc góc phần tư nào thì ta áp dụng bảng xác định dấu của các giá trị lượng giác.

Giá trị lượng giác	Góc phần tư			
	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-



❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 1 ❖❖❖

Ví dụ 1. Xác định dấu các biểu thức:

- $A = \sin 50^\circ \cdot \cos(-100^\circ).$
- $B = \sin 195^\circ \cdot \tan \frac{20\pi}{7}.$

Lời giải.

a) $A = \sin 50^\circ \cdot \cos(-100^\circ).$

Ta có: điểm cuối của cung 50° thuộc góc phần tư thứ I nên $\sin 50^\circ > 0.$

Điểm cuối của cung -100° thuộc góc phần tư thứ III nên $\cos(-100^\circ) < 0.$

Do đó, $A < 0.$

b) $B = \sin 195^\circ \cdot \tan \frac{20\pi}{7}.$

Ta có: điểm cuối của cung 195° thuộc góc phần tư thứ III nên $\sin 195^\circ < 0.$

Điểm cuối của cung $\frac{20\pi}{7} = \frac{6\pi}{7} + 2\pi$ thuộc góc phần tư thứ II nên $\tan \frac{20\pi}{7} < 0.$

Do đó, $B > 0.$



Ví dụ 2. Xác định dấu các biểu thức:

a) $A = \cot \frac{2\pi}{5} \cdot \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right).$

b) $B = \cos \frac{4\pi}{5} \cdot \sin \frac{\pi}{3} \cdot \tan \frac{4\pi}{3} \cdot \cot \frac{9\pi}{5}.$

Lời giải.

a) $A = \cot \frac{2\pi}{5} \cdot \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right).$

Ta có: điểm cuối của cung $\frac{2\pi}{5}$ thuộc góc phần tư thứ *I* nên $\cot \frac{2\pi}{5} > 0.$

Điểm cuối của cung $-\frac{2\pi}{3}$ thuộc góc phần tư thứ *III* nên $\sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right) < 0.$

Do đó, $A < 0.$

b) $B = \cos \frac{4\pi}{5} \cdot \sin \frac{\pi}{3} \cdot \tan \frac{4\pi}{3} \cdot \cot \frac{9\pi}{5}.$

Ta có: điểm cuối của cung $\frac{4\pi}{5}$ thuộc góc phần tư thứ *II* nên $\cos \frac{4\pi}{5} < 0.$

Điểm cuối của cung $\frac{\pi}{3}$ thuộc góc phần tư thứ *I* nên $\sin \frac{\pi}{3} > 0.$

Điểm cuối của cung $\frac{4\pi}{3}$ thuộc góc phần tư thứ *III* nên $\tan \frac{4\pi}{3} > 0.$

Điểm cuối của cung $\frac{9\pi}{5} = -\frac{\pi}{5} + 2\pi$ thuộc góc phần tư thứ *IV* nên $\cot \frac{9\pi}{5} < 0.$

Do đó, $B > 0.$



Ví dụ 3. Cho $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Xét dấu các biểu thức sau:

a) $A = \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right).$

b) $B = \tan \left(\frac{2019\pi}{2} - \alpha \right).$

Lời giải.

a) $A = \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha < 0.$

b) $B = \tan \left(\frac{2019\pi}{2} - \alpha \right) = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \alpha + 1009\pi \right) = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cot \alpha > 0.$



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Xác định dấu của $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, biết:

a) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{7\pi}{4}.$

b) $3\pi < \alpha < \frac{10\pi}{3}.$

c) $\frac{5\pi}{2} < \alpha < \frac{11\pi}{4}.$

Lời giải.

a) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{7\pi}{4}$.

Ta có: điểm cuối của cung α thuộc góc phần tư thứ *IV* nên $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha > 0$, $\tan \alpha < 0$.

b) $3\pi < \alpha < \frac{10\pi}{3}$.

Ta có: điểm cuối của cung α thuộc góc phần tư thứ *III* nên $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha < 0$, $\tan \alpha > 0$.

c) $\frac{5\pi}{2} < \alpha < \frac{11\pi}{4}$.

Ta có: điểm cuối của cung α thuộc góc phần tư thứ *II* nên $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$, $\tan \alpha < 0$.

□

Bài 2. Cho $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Xét dấu các biểu thức sau:

a) $A = \cos(\alpha + 90^\circ)$.

b) $B = \sin(\alpha + 80^\circ)$.

Lời giải.

a) $A = \cos(\alpha + 90^\circ) = \cos(90^\circ - (-\alpha)) = \sin(-\alpha) = -\sin \alpha$.

Vì $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ nên $\sin \alpha > 0$.

Do đó $A < 0$.

b) $B = \sin(\alpha + 80^\circ)$.

Vì $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ nên $80^\circ < \alpha + 80^\circ < 170^\circ$.

Do đó, điểm cuối của cung $\alpha + 80^\circ$ thuộc góc phần tư thứ *I* hoặc thứ *II* nên $B > 0$.

□

Bài 3. Cho $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Xét dấu các biểu thức sau:

a) $A = \sin(270^\circ - \alpha)$.

b) $B = \cos(2\alpha + 90^\circ)$.

Lời giải.

a) $A = \sin(270^\circ - \alpha)$.

Vì $-180^\circ < -\alpha < -90^\circ$ nên $90^\circ < 270^\circ - \alpha < 180^\circ$.

Do đó, điểm cuối của cung $270^\circ - \alpha$ thuộc góc phần tư thứ *II* nên $A > 0$.

b) $B = \cos(2\alpha + 90^\circ)$.

Ta có $B = \cos(2\alpha + 90^\circ) = \cos(90^\circ - (-2\alpha)) = \sin(-2\alpha) = -\sin(2\alpha)$.

Vì $180^\circ < 2\alpha < 360^\circ$ nên $\sin(2\alpha) < 0$.

Do đó, $B > 0$.

□

Bài 4. Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Xét dấu các biểu thức sau:

a) $A = \cos(\alpha + \frac{3\pi}{5})$.

b) $B = \cos(\alpha - \frac{\pi}{8})$.

Lời giải.

a) $A = \cos(\alpha + \frac{3\pi}{5})$.

Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\frac{3\pi}{5} < \alpha + \frac{3\pi}{5} < \frac{11\pi}{10}$.

Do đó, điểm cuối của cung $\alpha + \frac{3\pi}{5}$ thuộc góc phần tư thứ II hoặc thứ III.

Vậy $A < 0$.

b) $B = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{8}\right)$.

Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $-\frac{\pi}{8} < \alpha - \frac{\pi}{8} < \frac{3\pi}{8}$.

Do đó, điểm cuối của cung $\alpha - \frac{\pi}{8}$ thuộc góc phần tư thứ IV hoặc thứ I.

Vậy $B > 0$.

□

Bài 5. Cho $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Xét dấu các biểu thức sau:

a) $A = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$.

b) $B = \sin\left(\alpha + \frac{1119\pi}{2}\right)$.

Lời giải.

a) $A = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-\alpha)\right) = \cos(-\alpha) = \cos \alpha < 0$.

b) $B = \sin\left(\alpha + \frac{1119\pi}{2}\right) = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2} + 280 \cdot 2\pi\right)$
 $= \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha > 0$.

□

Bài 6. Cho tam giác ABC . Xét dấu của biểu thức $P = \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$ trong các trường hợp:

a) Tam giác ABC là tam giác nhọn.

b) Tam giác ABC là tam giác tù.

Lời giải.

a) Tam giác ABC là tam giác nhọn.

Vì tam giác ABC nhọn nên $A < 90^\circ$, $B < 90^\circ$, $C < 90^\circ$ hay $\cos A > 0$, $\cos B > 0$, $\cos C > 0$.

Vậy $P = \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C > 0$.

b) Tam giác ABC là tam giác tù.

Vì tam giác ABC là tam giác tù nên $\triangle ABC$ có duy nhất một góc tù. Giả sử góc tù góc $A \Rightarrow \cos A < 0$ và $\cos B > 0$, $\cos C > 0$.

Vậy $P = \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C < 0$.

□

Dạng 2. Tính giá trị lượng giác của một cung

Để tính giá trị lượng giác của 1 cung ta dựa vào các hằng đẳng thức lượng giác:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

Ngoài ra, cần phải xác định dấu của các hàm số lượng giác của cung đó.

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 2 ❖❖❖

Ví dụ 1. Biết $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Tính giá trị của $\cos \alpha$ và $\tan \alpha$.

Lời giải.

$$\text{Do } \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \text{ nên } \cos \alpha < 0. \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ nên } \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), suy ra } \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \tan \alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}}. \quad \square$$

Ví dụ 2. Cho $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$ ở đó $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị của $\sin \alpha$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{3}{5}.$$

$$\text{Do } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ nên } \sin \alpha > 0, \text{ do đó } \sin \alpha = \frac{3}{5}. \quad \square$$

Ví dụ 3. Cho $\tan \alpha = 2$, tính giá trị biểu thức $M = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } M = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}.$$

$$\text{Chia cả tử và mẫu cho } \cos^2 \alpha \text{ ta được } M = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \Rightarrow M = \frac{1 - 4}{1 + 4} = -\frac{3}{5}. \quad \square$$

Ví dụ 4. Cho $\cot \alpha = 3$. Tính giá trị biểu thức $M = \frac{2 \sin \alpha - 3 \cos \alpha}{5 \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} M &= \frac{2 \sin \alpha - 3 \cos \alpha}{5 \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha} \\ &= \frac{2 \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) - 3 \cot \alpha \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} \right)}{5 + \cot^3 \alpha} \\ &= \frac{-3 \cot^3 \alpha + 2 \cot^2 \alpha - 3 \cot \alpha + 2}{5 + \cot^3 \alpha} \\ &= -\frac{35}{16}. \end{aligned} \quad \square$$

Ví dụ 5. Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\cos 2\alpha = -\frac{1}{9}$. Biết $A = \sin 2\alpha + \cos 2\alpha = a + b\sqrt{5}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$ và $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ là phân số tối giản. Tính $M = p - q$.

Lời giải.

Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\pi < 2\alpha < 2\pi \Rightarrow \sin 2\alpha < 0$.

$$\cos 2\alpha = -\frac{1}{9} \Rightarrow \sin^2 2\alpha = 1 - \cos^2 2\alpha = 1 - \frac{1}{81} = \frac{80}{81} \Rightarrow \sin 2\alpha = -\frac{4\sqrt{5}}{9}.$$

$$\text{Suy ra } A = -\frac{1}{9} - \frac{4\sqrt{5}}{9} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{9} \\ b = -\frac{4}{9} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{4} \Rightarrow p = 1, q = 4 \Rightarrow p - q = -3.$$

Vậy $M = -3$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Biết $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{5}{4}$ và $\sin \alpha > \cos \alpha$. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

b) $B = \sin \alpha - \cos \alpha$.

Lời giải.

a) Ta có $\frac{25}{16} = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

Từ đó suy ra $2A = \frac{9}{16} \Rightarrow A = \frac{9}{32}$.

b) Theo giả thiết ta có $B > 0$ và $B^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$.

Từ đó suy ra $B = \frac{\sqrt{7}}{4}$. □

Bài 2. Cho $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\sin \alpha$ và $\tan \alpha$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{5}{13} \\ \sin \alpha = -\frac{5}{13} \end{cases}.$$

Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\sin \alpha > 0$, do đó $\sin \alpha = \frac{5}{13}$.

Từ đó ta có $\tan \alpha = -\frac{5}{12}$. □

Bài 3. Cho $\tan \alpha + \cot \alpha = 2$. Tính giá trị biểu thức $P = \cot^3 \alpha + \tan^3 \alpha$.

Lời giải.

$$\cot^3 \alpha + \tan^3 \alpha = (\cot \alpha + \tan \alpha)^3 - 3 \cot \alpha \cdot \tan \alpha \cdot (\cot \alpha + \tan \alpha) = 2^3 - 3 \cdot 2 = 2. \quad \square$$

Bài 4. Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \cos \left(\frac{9\pi}{2} - \alpha \right) + 2 \tan \left(\alpha + \frac{3\pi}{2} \right).$$

Lời giải.

Ta có $P = \sin \alpha - 2 \cot \alpha$.

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} \text{ với } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5} \Rightarrow \cot \alpha = -\frac{4}{3}.$$

Do đó $P = \frac{49}{15}$. □

Bài 5. Cho $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, tính giá trị của biểu thức $M = \frac{2 \sin^2 \alpha + 3 \sin \alpha \cos \alpha - 4 \cos^2 \alpha}{5 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$.

Lời giải.

Để thấy $\cos \alpha \neq 0$, chia cả tử và mẫu của biểu thức M cho $\cos^2 \alpha$ ta được:

$$M = \frac{2 \tan^2 \alpha + 3 \tan \alpha - 4}{5 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} - 4}{5 - \frac{1}{4}} = -\frac{8}{19}.$$

□

Dạng 3. Sử dụng cung liên kết để tính giá trị lượng giác

Sử dụng công thức các cung có liên quan đặc biệt.

◆◆◆ BÀI TẬP DẠNG 3 ◆◆◆

Ví dụ 1. Tính các giá trị lượng giác của góc $\alpha = \frac{2017\pi}{3}$.

Lời giải.

Ta có: $\frac{2017\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 672\pi$.

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{2017\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + 672\pi\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow \sin \frac{2017\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan \frac{2017\pi}{3} = \sqrt{3} \text{ và } \cot \frac{2017\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

□

Ví dụ 2. Cho $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. Tính $\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(\alpha - 2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha = \frac{1}{3}.$$

□

Ví dụ 3. Rút gọn biểu thức $A = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(2\pi - x) + \cos(3\pi + x)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \\ \cos(2\pi - x) = \cos x \\ \cos(3\pi + x) = -\cos x \end{cases} \Rightarrow A = -\sin x + \cos x - \cos x = -\sin x.$$

□

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC , chứng minh rằng $\sin(A + B + 2C) = -\sin C$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } A + B + C = 180^\circ \Rightarrow A + B + 2C = 180^\circ + C.$$

$$\Rightarrow \sin(A + B + 2C) = \sin(180^\circ + C) = -\sin C.$$

□

Ví dụ 5. Tính giá trị của biểu thức $B = \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \dots + \cos 180^\circ$.

Lời giải.

Ta có $\cos(180^\circ - x) = -\cos x \Rightarrow \cos x + \cos(180^\circ - x) = 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 20^\circ + \cos 160^\circ = 0 \\ \cos 40^\circ + \cos 140^\circ = 0 \\ \cos 60^\circ + \cos 120^\circ = 0 \\ \cos 80^\circ + \cos 100^\circ = 0 \end{cases} \Rightarrow B = \cos 90^\circ + \cos 180^\circ = -1. \quad \square$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho $\tan(\pi + x) = 1 - \sqrt{2}$ với $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $\cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

Lời giải.

Ta có $\tan(\pi + x) = \tan x \Rightarrow \tan x = 1 - \sqrt{2}$.

$$\Rightarrow \cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\tan x = \sqrt{2} - 1. \quad \square$$

Bài 2. Tính giá trị của biểu thức $A = \sin \frac{7\pi}{6} + \cos 9\pi + \tan\left(-\frac{5\pi}{4}\right) + \cot \frac{7\pi}{2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + \cos(\pi + 4.2\pi) - \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{2} + 3\pi\right) \\ &= -\sin \frac{\pi}{6} + \cos \pi - \tan \frac{\pi}{4} + \cot \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2} - 1 - 1 + 0 = -\frac{5}{2}. \end{aligned} \quad \square$$

Bài 3. Rút gọn biểu thức $D = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x)$.

Lời giải.

Ta có $\cos(5\pi - x) = \cos(4\pi + \pi - x) = \cos(\pi - x) = -\cos x$;

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

$$\cot(3\pi - x) = \cot(-x) = -\cot x$$

$$\Rightarrow D = -\cos x - \sin x. \quad \square$$

Bài 4. Rút gọn biểu thức $A = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x)$.

Lời giải.

Ta có $\cos(5\pi - x) = \cos(\pi - x + 2.2\pi) = \cos(\pi - x) = -\cos x$;

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

$$\cot(3\pi - x) = \cot(-x) = -\cot x$$

$$\text{Suy ra } A = -\cos x - (-\cos x) + \cot x + (-\cot x) = 0. \quad \square$$

Bài 5. Với điều kiện có nghĩa, hãy rút gọn biểu thức sau

$$B = \sqrt{2} - \frac{1}{\sin(x + 2013\pi)} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x}} \text{ với } \pi < x < 2\pi.$$

Lời giải.

Ta có $\sin(x + 2013\pi) = \sin(x + \pi + 1006.2\pi) = \sin(x + \pi) = -\sin x$.

Do đó

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{2} + \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos x + 1 + \cos x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}} \\ &= \sqrt{2} + \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{2}{1 - \cos^2 x}} \\ &= \sqrt{2} + \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{2}{\sin^2 x}} \\ &= \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{\sin x |\sin x|} \right). \end{aligned}$$

Vì $\pi < x < 2\pi \Rightarrow \sin x < 0$ nên $B = \sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{\sin^2 x} \right) = -\sqrt{2} \cot^2 x$.

□

Dạng 4. Rút gọn biểu thức và chứng minh đẳng thức

Một số hệ thức hay dùng trong bài toán rút gọn biểu thức hoặc chứng minh đẳng thức:

- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.
- $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1, \quad \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 4 ❖❖❖

Ví dụ 1. Rút gọn biểu thức $A = \sin^2 x + \sin^2 x \tan^2 x$.

Lời giải.

Ta có: $A = \sin^2 x + \sin^2 x \tan^2 x = \sin^2 x (1 + \tan^2 x) = \sin^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x$.

□

Ví dụ 2. Rút gọn biểu thức $B = \frac{2 \sin^2 x - 1}{\sin^2 x - \sin x \cos x}$.

Lời giải.

Ta có:
$$B = \frac{2 \sin^2 x - 1}{\sin^2 x - \sin x \cos x} = \frac{2 \sin^2 x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin x (\sin x - \cos x)} = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x} = 1 + \cot x.$$

□

Ví dụ 3. Rút gọn biểu thức: $A = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha$.

Lời giải.

Ta có $A = \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha = \sin^2 \alpha - \sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha = 1$.

□

Ví dụ 4. Chứng minh rằng: $\frac{2 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = 3 \tan^2 \alpha + 2$.

Lời giải.

Ta có: $\frac{2 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{2 + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{2}{\cos^2 \alpha} + \tan^2 \alpha = 2 + 2 \tan^2 \alpha + \tan^2 \alpha = 3 \tan^2 \alpha + 2.$ □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Rút gọn biểu thức $M = \frac{4 \cos^2 x - 2}{\sin x + \cos x}.$

Lời giải.

Ta có $B = \frac{4 \cos^2 x - 2 (\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin x + \cos x} = 2 \sin x - 2 \cos x.$ □

Bài 2. Rút gọn biểu thức $N = \sqrt{\sin^2 x (4 + \cot x) + \cos^2 x (1 + 3 \tan x)}.$

Lời giải.

Ta có

$$N = \sqrt{4 \sin^2 x + \sin^2 \cot x + \cos^2 x + 3 \cos^2 x \tan x}$$

$$= \sqrt{4 \sin^2 x + \sin^2 x \frac{\cos x}{\sin x} + \cos^2 x + 3 \cos^2 x \frac{\sin x}{\cos x}}$$

$$= \sqrt{4 \sin^2 x + 4 \sin x \cos x + \cos^2 x}$$

$$= \sqrt{(2 \sin x + \cos x)^2}$$

$$= |2 \sin x + \cos x|.$$
 □

Bài 3. Rút gọn biểu thức $C = (\tan x - \cot x)^2 - (\tan x + \cot x)^2.$

Lời giải.

Ta có

$$C = \tan^2 x - 2 \tan x \cot x + \cot^2 x - \tan^2 x - 2 \tan x \cot x - \cot^2 x$$

$$= -4 \tan x \cot x = -4.$$
 □

Bài 4. Rút gọn biểu thức $B = 3 [(\sin^4 x)^2 - (\cos^4 x)^2] + 4 [(\cos^2 x)^3 - 2 (\sin^2 x)^3] + 6 \sin^4 x.$

Lời giải.

Đặt $t = \sin^2 x$ thì ta có $\cos^2 x = 1 - t.$

$$B = 3 (\sin^4 x + \cos^4 x) (\sin^4 x - \cos^4 x) + 4 [(\cos^2 x)^3 - 2 (\sin^2 x)^3] + 6 \sin^4 x$$

$$= 3 [t^2 + (1 - t)^2] [t^2 - (1 - t)^2] + 4 [(1 - t)^3 - 2t^3] + 6t^2 = 1.$$
 □

Bài 5. Chứng minh rằng $\frac{\cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha} \cdot \frac{1 + \tan^2 \alpha}{\tan^2 \alpha} = \frac{\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha}{1 + \tan^4 \alpha}.$

Lời giải.

HƯỚNG DẪN.

Xét hiệu

$$\frac{\cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha} \cdot \frac{1 + \tan^2 \alpha}{\tan^2 \alpha} - \frac{\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha}{1 + \tan^4 \alpha} = \frac{\cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha} \cdot \frac{\cot^2 \alpha + 1}{\cot^2 \alpha \tan^2 \alpha} - \frac{\tan^4 \alpha + 1}{\tan^2 \alpha (1 + \tan^4 \alpha)}$$

$$= \cot^2 \alpha - \cot^2 \alpha = 0. \text{ Suy ra điều phải chứng minh.}$$
 □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. Cho $\sin \alpha + \cos \alpha = m.$ Tính các giá trị của $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha.$

Lời giải.

HƯỚNG DẪN.

$$\text{Có } \sin \alpha + \cos \alpha = m \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{m^2 - 1}{2}.$$

$$\text{Khi đó } \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{4}{(m^2 - 1)^2} - 2. \quad \square$$

Bài 2. Chứng minh rằng biểu thức sau độc lập với $x; y$.

$$B = \frac{\sin^2 x - \cos^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} + \cot^2 x \cot^2 y.$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sin^2 x - \cos^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} + \frac{\cos^2 x \cos^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} \\ &= \frac{\sin^2 x - (1 - \cos^2 x) \cos^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} \\ &= \frac{\sin^2 x - \sin^2 x \cos^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} \\ &= \frac{\sin^2 x (1 - \cos^2 y)}{\sin^2 x \sin^2 y} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Như vậy, giá trị của biểu thức B không phụ thuộc vào giá trị của $x; y$. $\square$

Bài 3. Chứng minh biểu thức sau độc lập với đối với x .

$$P = \frac{\tan^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\cot^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} P &= \frac{\tan^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\cot^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\tan^2 x}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\cot^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \tan^2 x (1 + \cot^2 x) + \cot^2 x (1 + \tan^2 x) - \tan^2 x - \cot^2 x = \tan^2 x + 1 + \cot^2 x + 1 - \tan^2 x - \cot^2 x = 2. \end{aligned}$$

Vậy P không phụ thuộc vào x . $\square$

Bài 4. Cho $\sin a \cos a = -\frac{5}{18}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \pi$. Tính $\sin a$ và $\cos a$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } (\sin a + \cos a)^2 = 1 + 2 \sin a \cos a = 1 + 2 \cdot \left(-\frac{5}{18}\right) = \frac{4}{9}.$$

$$\text{Suy ra, } \sin a + \cos a = \frac{2}{3} \text{ hoặc } \sin a + \cos a = -\frac{2}{3}.$$

Xét hai trường hợp:

$$\text{a) } \sin a + \cos a = \frac{2}{3} \text{ và } \sin a \cos a = -\frac{5}{18}.$$

$$\text{Giá trị } \sin a, \cos a \text{ là nghiệm của phương trình } X^2 - \frac{2}{3}X - \frac{5}{18} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{2 + \sqrt{14}}{6} \\ X = \frac{2 - \sqrt{14}}{6} \end{cases}.$$

$$\text{Vì } \frac{\pi}{2} < a < \pi \text{ nên } \sin a > 0 \text{ và } \cos a < 0. \text{ Vậy } \sin a = \frac{2 + \sqrt{14}}{6} \text{ và } \cos a = \frac{2 - \sqrt{14}}{6}.$$

$$\text{b) } \sin a + \cos a = -\frac{2}{3} \text{ và } \sin a \cos a = -\frac{5}{18}.$$

Giá trị $\sin a$, $\cos a$ là nghiệm của phương trình $X^2 + \frac{2}{3}X - \frac{5}{18} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{-2 + \sqrt{14}}{6} \\ X = \frac{-2 - \sqrt{14}}{6} \end{cases}$.

Vì $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ nên $\sin a > 0$ và $\cos a < 0$. Vậy $\sin a = \frac{-2 + \sqrt{14}}{6}$ và $\cos a = \frac{-2 - \sqrt{14}}{6}$.
 Vậy $\sin a = \frac{2 + \sqrt{14}}{6}$ và $\cos a = \frac{2 - \sqrt{14}}{6}$ hoặc $\sin a = \frac{-2 + \sqrt{14}}{6}$ và $\cos a = \frac{-2 - \sqrt{14}}{6}$. $\square$

Bài 5. Cho $\tan\left(\frac{11\pi}{2} + x\right) = 2$. Tính $\sin\left(x + \frac{7\pi}{2}\right)$ với $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Lời giải.

Ta có $\tan\left(\frac{11\pi}{2} + x\right) = \tan\left(5\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x = 2 \Rightarrow \cot x = -2 \Rightarrow \tan x = -\frac{1}{2}$.

$\sin\left(x + \frac{7\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 4\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$.

Lại có $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \frac{5}{4} \Rightarrow \cos x = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ (do với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thì $\cos x > 0$).

$\sin\left(x + \frac{7\pi}{2}\right) = -\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}$. $\square$

Bài 6. Cho $\cot\left(\frac{2017\pi}{2} + x\right) = \frac{1}{2}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \frac{2\sin^2 x + 3\sin x \cos x - \cos^2 x}{\cos^2 x - 3\sin^2 x}.$$

Lời giải.

Ta có $\cot\left(\frac{2017\pi}{2} + x\right) = \cot\left(1008\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\tan x$

$\Rightarrow \tan x = -\frac{1}{2}$.

$\Rightarrow P = \frac{2\tan^2 x + 3\tan x - 1}{1 - 3\tan^2 x} = -8$. $\square$

Bài 7. Cho $6\cos^2 \alpha + \cos \alpha - 2 = 0$. Biết $A = \frac{2\sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha}{2\cos \alpha - 1} = a + b \tan \alpha$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính giá trị của biểu thức $a + b$.

Lời giải.

Điều kiện $2\cos \alpha - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \cos \alpha \neq \frac{1}{2}$.

Ta có $6\cos^2 \alpha + \cos \alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{2} \\ \cos \alpha = -\frac{2}{3} \end{cases}$.

Do $\cos \alpha \neq \frac{1}{2}$ nên $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$.

Mặt khác $A = \frac{2\sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha}{2\cos \alpha - 1} = \sin \alpha = \cos \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{2}{3} \tan \alpha$.

Từ đó suy ra $\begin{cases} a = 0 \\ b = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow a + b = -\frac{2}{3}$. $\square$

Bài 8. Cho $\tan \alpha = \sqrt[4]{2}$, biết $A = \frac{2 \cos^2 \alpha - 1004}{\sin^2 \alpha} = a + b\sqrt{2}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $\sin \frac{\pi(a-b)}{3}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} \\ \sin^2 \alpha = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \end{cases}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } A = -1004 - 1002\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} a = -1004 \\ b = -1002 \end{cases} \Rightarrow a - b = -2 \Rightarrow \sin \frac{\pi(a-b)}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \square$$

Bài 9. Cho $\sin \alpha + 3 \cos \alpha = 2$, ở đó $0 < \alpha < \pi$. Tính $\tan \alpha$.

Lời giải.

$$\text{Do } 0 < \alpha < \pi \text{ nên } \begin{cases} -1 < \cos \alpha < 1 \\ 0 < \sin \alpha < 1. \end{cases}$$

Từ giả thiết ta có $\sin \alpha = 2 - 3 \cos \alpha$.

Mà $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ nên $(2 - 3 \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1$.

$$\text{Từ đó suy ra } 10 \cos^2 \alpha - 12 \cos \alpha + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{6 + \sqrt{6}}{10} \\ \cos \alpha = \frac{6 - \sqrt{6}}{10} \end{cases}.$$

Nếu $\cos \alpha = \frac{6 + \sqrt{6}}{10}$ thì $\sin \alpha = 2 - 3 \cos \alpha = \frac{2 - 3\sqrt{6}}{10} < 0$ (loại).

Nếu $\cos \alpha = \frac{6 - \sqrt{6}}{10}$ thì $\sin \alpha = 2 - 3 \cos \alpha = \frac{2 + 3\sqrt{6}}{10} \in (0; 1)$ (thỏa mãn).

$$\text{Từ đó suy ra } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3 + 2\sqrt{6}}{3}. \quad \square$$

C CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho α thuộc góc phần tư thứ nhất của đường tròn lượng giác. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau đây.

- A. $\sin \alpha > 0$. B. $\cos \alpha < 0$. C. $\tan \alpha < 0$. D. $\cot \alpha < 0$.

Lời giải.

$$\text{Do } \alpha \text{ thuộc góc phần tư thứ nhất} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha > 0 \\ \tan \alpha > 0 \\ \cot \alpha > 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 2. Cho α thuộc góc phần tư thứ hai của đường tròn lượng giác. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau đây.

- A. $\sin \alpha > 0; \cos \alpha > 0$. B. $\sin \alpha < 0; \cos \alpha < 0$. C. $\sin \alpha > 0; \cos \alpha < 0$. D. $\sin \alpha < 0; \cos \alpha > 0$.

Lời giải.

$$\alpha \text{ thuộc góc phần tư thứ hai} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 3. Cho α thuộc góc phần tư thứ ba của đường tròn lượng giác. Khẳng định nào sau đây là SAI?

- A. $\sin \alpha > 0$. B. $\cos \alpha < 0$. C. $\tan \alpha > 0$. D. $\cot \alpha > 0$.

Lời giải.

$$\alpha \text{ thuộc góc phần tư thứ ba} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha < 0 \\ \cos \alpha < 0 \\ \tan \alpha > 0 \\ \cot \alpha > 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 4. Cho α thuộc góc phần tư thứ tư của đường tròn lượng giác. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\sin \alpha > 0$. B. $\cos \alpha > 0$. C. $\tan \alpha > 0$. D. $\cot \alpha > 0$.

Lời giải.

$$\alpha \text{ thuộc góc phần tư thứ tư} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha < 0 \\ \cos \alpha > 0 \\ \tan \alpha < 0 \\ \cot \alpha < 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 5. Điểm cuối của góc lượng giác α ở góc phần tư thứ mấy nếu $\sin \alpha, \cos \alpha$ cùng dấu?

- A. Thứ II. B. Thứ IV. C. Thứ II hoặc IV. D. Thứ I hoặc III.

Lời giải.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 6. Điểm cuối của góc lượng giác α ở góc phần tư thứ mấy nếu $\sin \alpha, \tan \alpha$ trái dấu?

- A. Thứ I. B. Thứ II hoặc IV. C. Thứ II hoặc III. D. Thứ I hoặc IV.

Lời giải.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 7. Điểm cuối của góc lượng giác α ở góc phần tư thứ mấy nếu $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$.

- A. Thứ II. B. Thứ I hoặc II. C. Thứ II hoặc III. D. Thứ I hoặc IV.

Lời giải.

Ta có $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos \alpha = \sqrt{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos \alpha = |\cos \alpha| \Rightarrow \cos \alpha \geq 0 \Rightarrow$ điểm cuối của góc lượng giác α ở góc phần tư thứ I hoặc IV.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 8. Điểm cuối của góc lượng giác α ở góc phần tư thứ mấy nếu $\sqrt{\sin^2 \alpha} = \sin \alpha$.

- A. Thứ III. B. Thứ I hoặc III. C. Thứ I hoặc II. D. Thứ III hoặc IV.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{\sin^2 \alpha} \Leftrightarrow \sin \alpha \Leftrightarrow |\sin \alpha| = \sin \alpha$. Đẳng thức $|\sin \alpha| = \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha \geq 0 \Rightarrow$ điểm cuối của góc lượng giác α là góc phần tư thứ I hoặc II.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 9. Cho $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\tan \alpha > 0; \cot \alpha > 0$. B. $\tan \alpha < 0; \cot \alpha < 0$.
C. $\tan \alpha > 0; \cot \alpha < 0$. D. $\tan \alpha < 0; \cot \alpha > 0$.

Lời giải.

Ta có $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2} \Rightarrow$ điểm cuối cùng $\alpha - \pi$ thuộc góc phần tư thứ I $\Rightarrow \begin{cases} \tan \alpha > 0 \\ \cot \alpha > 0. \end{cases}$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 10. Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\sin(\alpha - \pi) \geq 0$. B. $\sin(\alpha - \pi) \leq 0$. C. $\sin(\alpha - \pi) < 0$. D. $\sin(\alpha - \pi) > 0$.

Lời giải.

Ta có $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\pi < \alpha - \pi < -\frac{\pi}{2} \Rightarrow$ điểm cuối cùng $\alpha - \pi$ thuộc góc phần tư thứ III $\Rightarrow \sin(\alpha - \pi) < 0$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 11. Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) > 0$. B. $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \geq 0$. C. $\tan(\alpha + \pi) < 0$. D. $\tan(\alpha + \pi) > 0$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \alpha + \frac{\pi}{2} < \pi \Rightarrow \cot\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) < 0 \\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \pi < \alpha + \pi < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \tan(\alpha + \pi) > 0 \end{cases}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 12. Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Giá trị lượng giác nào sau đây luôn dương?

- A. $\sin(\pi + \alpha)$. B. $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$. C. $\cos(-\alpha)$. D. $\tan(\pi + \alpha)$.

Lời giải.

Ta có $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$; $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$; $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$; $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$.

$$\text{Do } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \\ \tan \alpha < 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 13. Cho $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) < 0$. B. $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) > 0$. C. $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \leq 0$. D. $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \geq 0$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow 0 < \frac{3\pi}{2} - \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) > 0 \\ \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) > 0 \end{cases} \Rightarrow \tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) > 0.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 14. Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Xác định dấu của biểu thức $M = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \tan(\pi - \alpha)$.

- A. $M \geq 0$. B. $M > 0$. C. $M \leq 0$. D. $M < 0$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow 0 < -\frac{\pi}{2} + \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) > 0 \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow 0 < \pi - \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan(\pi - \alpha) > 0 \end{cases} \Rightarrow M > 0.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 15. Cho $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Xác định dấu của biểu thức $M = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cot(\pi + \alpha)$.

- A. $M \geq 0$. B. $M > 0$. C. $M \leq 0$. D. $M < 0$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -\frac{3\pi}{2} < -\alpha < -\pi \Rightarrow -\pi < \frac{\pi}{2} - \alpha < -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) < 0 \\ \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow 2\pi < \pi + \alpha < \frac{5\pi}{2} \Rightarrow \cot(\pi + \alpha) > 0 \end{cases} \Rightarrow M < 0.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 16. Tính giá trị của $\sin \frac{47\pi}{6}$.

- A. $\sin \frac{47\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\sin \frac{47\pi}{6} = \frac{1}{2}$. C. $\sin \frac{47\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\sin \frac{47\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \sin \frac{47\pi}{6} = \sin\left(8\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 17. Tính giá trị của $\cot \frac{89\pi}{6}$.

A. $\cot \frac{89\pi}{6} = \sqrt{3}$. B. $\cot \frac{89\pi}{6} = -\sqrt{3}$. C. $\cot \frac{89\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $\cot \frac{89\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\cot \frac{89\pi}{6} = \cot \left(\frac{5\pi}{6} + 14\pi \right) = \cot \frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 18. Tính giá trị của $\cos \left[\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi \right]$.

A. $\cos \left[\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi \right] = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\cos \left[\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi \right] = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
C. $\cos \left[\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi \right] = -\frac{1}{2}$. D. $\cos \left[\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi \right] = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\cos \left[\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi \right] = \cos \left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi \right) = \cos \frac{5\pi}{4} = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 19. Tính giá trị của $\cos \left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi \right]$.

A. $\cos \left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi \right] = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\cos \left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi \right] = \frac{1}{2}$.
C. $\cos \left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi \right] = -\frac{1}{2}$. D. $\cos \left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi \right] = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\cos \left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi \right] = \cos \left(\frac{\pi}{3} + \pi + k2\pi \right) = \cos \left(\frac{\pi}{3} + \pi \right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 20. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{(\cot 44^\circ + \tan 226^\circ) \cos 406^\circ}{\cos 316^\circ} - \cot 72^\circ \cot 18^\circ$.

A. $P = 1$. B. $P = 1$. C. $P = -\frac{1}{2}$. D. $P = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Sử dụng mối quan hệ của các cung có liên quan đặc biệt, ta có

$$P = \frac{(\cot 44^\circ + \tan 46^\circ) \cos 46^\circ}{\cos 44^\circ} - 1 = \frac{2 \tan 46^\circ \cos 46^\circ}{\sin 46^\circ} - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 21. Tính giá trị biểu thức $P = \sin \left(-\frac{14\pi}{3} \right) + \frac{1}{\sin^2 \frac{29\pi}{4}} - \tan^2 \frac{3\pi}{4}$.

A. $P = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $P = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $P = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $P = 3 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $P = \sin \left(-4\pi - \frac{2\pi}{3} \right) + \frac{1}{\sin^2 \left(6\pi + \pi + \frac{\pi}{4} \right)} - \tan^2 \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right) + \frac{1}{\sin^2 \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right)} - \tan^2 \left(-\frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2} - (-1)^2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 22. Tính giá trị biểu thức $P = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$.

A. $P = -1$. B. $P = 0$. C. $P = 1$. D. $P = 2$.

Lời giải.

Ta có $\tan(2017\pi + \alpha) \Rightarrow P = 2 \left(\cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} \right)$.

Vì $\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{8} = \sin \frac{3\pi}{8} \Rightarrow \cos^2 \frac{\pi}{8} = \sin^2 \frac{3\pi}{8}$.

Do đó $P = 2 \left(\sin^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} \right) = 2 \cdot 1 = 2$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 23. Tính giá trị biểu thức $P = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \dots + \sin^2 80^\circ$.

A. $P = 0$. B. $P = 2$. C. $P = 4$. D. $P = 8$.

Lời giải.

Do $10^\circ + 80^\circ = 20^\circ + 70^\circ = 30^\circ + 60^\circ = 40^\circ + 50^\circ = 90^\circ$ nên các cung lượng giác tương ứng đôi một phụ nhau. Áp dụng công thức $\sin(90^\circ - x) = \cos x$, ta được

$P = (\sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ) + (\sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ) + (\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ) + (\sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 24. Tính giá trị biểu thức $P = \tan 10^\circ \cdot \tan 20^\circ \cdot \tan 30^\circ \dots \tan 80^\circ$.

A. $P = 0$. B. $P = 1$. C. $P = 4$. D. $P = 8$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\tan x \cdot \tan(90^\circ - x) = \tan x \cdot \cot x = 1$. Do đó $P = 1$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 25. Tính giá trị biểu thức $P = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \dots \tan 89^\circ$.

A. $P = 0$. B. $P = 1$. C. $P = 2$. D. $P = 3$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\tan x \cdot \tan(90^\circ - x) = \tan x \cdot \cot x = 1$. Do đó $P = 1$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 26. Với góc α bất kì. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\sin \alpha + \cos \alpha = 1$. B. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. C. $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha = 1$. D. $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 27. Với góc α bất kì. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\sin 2\alpha^2 + \cos^2 2\alpha = 1$. B. $\sin(\alpha^2) + \cos(\alpha^2) = 1$.
C. $\sin^2 \alpha + \cos^2(180^\circ - \alpha) = 1$. D. $\sin^2 \alpha - \cos^2(180^\circ - \alpha) = 1$.

Lời giải.

Ta có $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \Rightarrow \cos^2(180^\circ - \alpha) = \cos^2 \alpha$.

Do đó $\sin^2 \alpha + \cos^2(180^\circ - \alpha) = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 28. Mệnh đề nào sau đây là **SAI**?

A. $-1 \leq \sin \alpha \leq 1; -1 \leq \cos \alpha \leq 1$.

B. $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (\cos \alpha \neq 0)$.

C. $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} (\sin \alpha \neq 0)$.

D. $\sin^2(2018\alpha) + \cos^2(2018\alpha) = 2018$.

Lời giải.

Vì $\sin^2(2018\alpha) + \cos^2(2018\alpha) = 1$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 29. Mệnh đề nào sau đây là **SAI**?

A. $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$. B. $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$. C. $\tan \alpha + \cot \alpha = 2$. D. $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 30. Để $\tan x$ có nghĩa khi

A. $x = \pm \frac{\pi}{2}$. B. $x = 0$. C. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. D. $x \neq k\pi$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 31. Điều kiện trong đẳng thức $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$ là

A. $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. B. $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1$.

Đẳng thức xác định khi $\begin{cases} \cos \alpha \neq 0 \\ \sin \alpha \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \alpha \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \alpha \neq k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 32. Điều kiện để biểu thức $P = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + \cot\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$ xác định là

A. $\alpha \neq \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $\alpha \neq \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $\alpha \neq \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $\alpha \neq -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Biểu thức xác định khi $\begin{cases} \alpha + \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \alpha - \frac{\pi}{6} \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 33. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\sin 60^\circ < \sin 150^\circ$. B. $\cos 30^\circ < \cos 60^\circ$. C. $\tan 45^\circ < \tan 60^\circ$. D. $\cot 60^\circ > \cot 240^\circ$.

Lời giải.

Dùng MTCT kiểm tra từng đáp án.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 34. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan 45^\circ > \tan 46^\circ$. B. $\cos 142^\circ > \cos 143^\circ$.

C. $\sin 90^\circ 13' < \sin 90^\circ 14'$.

D. $\cot 128^\circ > \cot 126^\circ$.

Lời giải.

Trong khoảng giá trị từ 90° đến 180° , khi giá trị góc tăng thì giá trị cos của góc tương ứng giảm

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 35. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$.

B. $\sin(\pi + \alpha) = \sin \alpha$.

C. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha$.

D. $\tan(\pi + 2\alpha) = \cot(2\alpha)$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 36. Với mọi số thực α , ta có $\sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right)$ bằng

A. $-\sin \alpha$.

B. $\cos \alpha$.

C. $\sin \alpha$.

D. $-\cos \alpha$.

Lời giải.

Ta có $\sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 37. Cho $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. Khi đó $\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$ bằng

A. $-\frac{2}{3}$.

B. $-\frac{1}{3}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2} - 2\pi\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha = \frac{1}{3}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 38. Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ thì $\tan(2017\pi + \alpha)$ bằng

A. $-\tan \alpha$.

B. $\cot \alpha$.

C. $\tan \alpha$.

D. $-\cot \alpha$.

Lời giải.

Ta có $\tan(2017\pi + \alpha) = \tan \alpha$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 39. Đơn giản biểu thức $A = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\alpha - \pi)$, ta được

A. $A = \cos \alpha + \sin \alpha$.

B. $A = 2 \sin \alpha$.

C. $A = \sin \alpha \cos \alpha$.

D. $A = 0$.

Lời giải.

Ta có $A = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\alpha - \pi) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha - \sin \alpha = 0$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 40. Rút gọn biểu thức $S = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin(\pi - x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos(\pi - x)$ ta được

A. $S = 0$.

B. $S = \sin^2 x - \cos^2 x$.

C. $S = 2 \sin x \cos x$.

D. $S = 1$.

Lời giải.

Ta có $S = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \sin(\pi - x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos(\pi - x) = \sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot (-\cos x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 41. Cho $P = \sin(\pi + \alpha) \cdot \cos(\pi - \alpha)$ và $Q = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. $P + Q = 0$. B. $P + Q = -1$. C. $P + Q = 1$. D. $P + Q = 2$.

Lời giải.

Ta có $P = \sin(\pi + \alpha) \cdot \cos(\pi - \alpha) = -\sin \alpha \cdot (-\cos \alpha) = \sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

Và $Q = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha \cdot (-\sin \alpha) = -\sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

Khi đó $P + Q = \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 42. Biểu thức lượng giác $\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(10\pi + x)\right]^2 + \left[\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos(8\pi - x)\right]^2$ có giá trị bằng?

- A. 1. B. 2. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$; $\sin(10\pi + x) = \sin x$.

Và $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$; $\cos(8\pi - x) = \cos x$.

Khi đó $\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(10\pi + x)\right]^2 + \left[\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos(8\pi - x)\right]^2$
 $= (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = \cos^2 x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x = 2$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 43. Giá trị biểu thức $P = \left[\tan \frac{17\pi}{4} + \tan\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)\right]^2 + \left[\cot \frac{13\pi}{4} + \cot(7\pi - x)\right]^2$ bằng

- A. $\frac{1}{\sin^2 x}$. B. $\frac{1}{\cos^2 x}$. C. $\frac{2}{\sin^2 x}$. D. $\frac{2}{\cos^2 x}$.

Lời giải.

Ta có $\tan \frac{17\pi}{4} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + 4\pi\right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$ và $\tan\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) = \cot x$.

Và $\cot \frac{13\pi}{4} = \cot\left(\frac{\pi}{4} + 3\pi\right) = \cot \frac{\pi}{4} = 1$; $\cot(7\pi - x) = -\cot x$.

Suy ra $P = (1 + \cot x)^2 + (1 - \cot x)^2 = 2 + 2 \cot^2 x = \frac{2}{\sin^2 x}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 44. Biết rằng $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin \frac{13\pi}{2} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ thì giá trị đúng của $\cos x$ là

- A. 1. B. -1. C. $\frac{1}{2}$. D. $-\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x$ và $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$.

Kết hợp với giá trị $\sin \frac{13\pi}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 6\pi\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$.

Suy ra $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin \frac{13\pi}{2} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow -\cos x + 1 = \cos x \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 45. Nếu $\cot 1,25 \cdot \tan(4\pi + 1,25) - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(6\pi - x) = 0$ thì $\tan x$ bằng

- A. 1. B. -1. C. 0. D. Một giá trị khác.

Lời giải.

Ta có $\tan(4\pi + 1,25) = \tan 1,25$ suy ra $\cot 1,25 \cdot \tan 1,25 = 1$.

Và $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$; $\cos(6\pi - x) = \cos(x - 6\pi) = \cos x$.

Khi đó $\cot 1,25 \cdot \tan(4\pi + 1,25) - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(6\pi - x) = 1 - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$.

Mặt khác $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \tan x = 0$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 46. Biết A, B, C là các góc của tam giác ABC , mệnh đề nào sau đây đúng:

A. $\sin(A + C) = -\sin B$.

B. $\cos(A + C) = -\cos B$.

C. $\tan(A + C) = \tan B$.

D. $\cot(A + C) = \cot B$.

Lời giải.

Vì A, B, C là ba góc của một tam giác suy ra $A + C = \pi - B$.

Khi đó $\sin(A + C) = \sin(\pi - B) = \sin B$; $\cos(A + C) = \cos(\pi - B) = -\cos B$.

$\tan(A + C) = \tan(\pi - B) = -\tan B$; $\cot(A + C) = \cot(\pi - B) = -\cot B$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 47. Biết A, B, C là các góc của tam giác ABC , khi đó

A. $\sin C = -\sin(A + B)$.

B. $\cos C = \cos(A + B)$.

C. $\tan C = \tan(A + B)$.

D. $\cot C = -\cot(A + B)$.

Lời giải.

Vì A, B, C là các góc của tam giác ABC nên $C = 180^\circ - (A + B)$.

Do đó C và $A + B$ là 2 góc bù nhau $\Rightarrow \sin C = \sin(A + B)$; $\cos C = -\cos(A + B)$.

Và $\tan C = -\tan(A + B)$; $\cot C = \cot(A + B)$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 48. Cho tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây là **SAI**?

A. $\sin \frac{A + C}{2} = \cos \frac{B}{2}$.

B. $\cos \frac{A + C}{2} = \sin \frac{B}{2}$.

C. $\sin(A + B) = \sin C$.

D. $\cos(A + B) = \cos C$.

Lời giải.

Ta có $A + B + C = \pi \Leftrightarrow A + B = \pi - C$

Do đó $\cos(A + B) = \cos(\pi - C) = -\cos C$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 49. A, B, C là ba góc của một tam giác. Hãy tìm hệ thức **SAI**:

A. $\sin A = -\sin(2A + B + C)$.

B. $\sin A = -\cos \frac{3A + B + C}{2}$.

C. $\cos C = \sin \frac{A + B + 3C}{2}$.

D. $\sin C = \sin(A + B + 2C)$.

Lời giải.

A, B, C là ba góc của một tam giác $\Rightarrow A + B + C = 180^\circ \Leftrightarrow A + B = 180^\circ - C$.

Ta có $\sin(A + B + 2C) = \sin(180^\circ - C + 2C) = \sin(180^\circ + C) = -\sin C$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 50. Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\cos \alpha$.

A. $\cos \alpha = \frac{1}{13}$. B. $\cos \alpha = \frac{5}{13}$. C. $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$. D. $\cos \alpha = -\frac{1}{13}$.

Lời giải.

Ta có
$$\begin{cases} \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{5}{13} \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \end{cases} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{5}{13}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 51. Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\tan \alpha$.

A. $\tan \alpha = -\frac{3}{\sqrt{5}}$. B. $\tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. C. $\tan \alpha = -\frac{4}{\sqrt{5}}$. D. $\tan \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Lời giải.

Ta có
$$\begin{cases} \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{2}{3} \\ \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = -\frac{2}{3} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 52. Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$ và $\frac{2017\pi}{2} < \alpha < \frac{2019\pi}{2}$. Tính $\sin \alpha$.

A. $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$. B. $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. C. $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$. D. $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

Lời giải.

Ta có
$$\begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ \frac{2017\pi}{2} < \alpha < \frac{2019\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ \frac{\pi}{2} + 504 \cdot 2\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} + 504 \cdot 2\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5}. \text{ Mà } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{4}{3} = \frac{\sin \alpha}{-\frac{3}{5}} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 53. Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\tan \alpha$.

A. $\tan \alpha = -\frac{12}{5}$. B. $\tan \alpha = \frac{5}{12}$. C. $\tan \alpha = -\frac{5}{12}$. D. $\tan \alpha = \frac{12}{5}$.

Lời giải.

Ta có
$$\begin{cases} \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{5}{13} \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{5}{13} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{5}{12}.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 54. Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = 2$ và $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Tính $P = \cos \alpha + \sin \alpha$.

A. $P = -\frac{3\sqrt{5}}{5}$. B. $P = 1 - \sqrt{5}$. C. $P = \frac{3\sqrt{5}}{2}$. D. $P = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

Lời giải.

Ta có
$$\begin{cases} \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 180^\circ < \alpha < 270^\circ \end{cases} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Do đó, $\sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{3}{\sqrt{5}} = -\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 55. Cho góc α thỏa $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\cot \alpha = -\frac{4}{5}$. B. $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. C. $\tan \alpha = \frac{5}{4}$. D. $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

Lời giải.

Ta có
$$\begin{cases} \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{4}{5} \\ 90^\circ < \alpha < 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 56. Cho góc α thỏa $\cot \alpha = \frac{3}{4}$ và $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$. B. $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. C. $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. D. $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$.

Lời giải.

Ta có
$$\begin{cases} \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} \\ 0^\circ < \alpha < 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 57. Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $P = \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$.

A. $P = -3$. B. $P = \frac{3}{7}$. C. $P = \frac{12}{25}$. D. $P = -\frac{12}{25}$.

Lời giải.

Ta có
$$\begin{cases} \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{4}{5} \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \end{cases} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5} \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{3}{4}.$$

Thay $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$ vào P , ta được $P = -\frac{12}{25}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 58. Cho góc α thỏa $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Tính $P = \frac{2 \tan \alpha + 3 \cot \alpha + 1}{\tan \alpha + \cot \alpha}$.

A. $P = \frac{19 + 2\sqrt{2}}{9}$. B. $P = \frac{19 - 2\sqrt{2}}{9}$. C. $P = \frac{26 - 2\sqrt{2}}{9}$. D. $P = \frac{26 + 2\sqrt{2}}{9}$.

Lời giải.

Ta có
$$\begin{cases} \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 90^\circ < \alpha < 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \begin{cases} \tan \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \cot \alpha = -2\sqrt{2} \end{cases}$$

Thay
$$\begin{cases} \tan \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \cot \alpha = -2\sqrt{2} \end{cases}$$
 vào P , ta được $P = \frac{26 - 2\sqrt{2}}{9}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 59. Cho góc α thỏa mãn $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $P = \tan\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right)$.

A. $P = 2\sqrt{2}$. B. $P = -2\sqrt{2}$. C. $P = \frac{\sqrt{2}}{4}$. D. $P = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } P = \tan\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\left(3\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

$$\text{Theo giả thiết: } \sin(\pi + \alpha) = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow -\sin \alpha = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \end{cases} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow P = -2\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 60. Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ và $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Tính $P = \sqrt{5 + 3 \tan \alpha} + \sqrt{6 - 4 \cot \alpha}$.

A. $P = 4$.

B. $P = -4$.

C. $P = 6$.

D. $P = -6$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{4}{5} \\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 \end{cases} \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{4}{5} \Rightarrow \begin{cases} \tan \alpha = -\frac{4}{3} \\ \cot \alpha = -\frac{3}{4} \end{cases}.$$

$$\text{Thay } \begin{cases} \tan \alpha = -\frac{4}{3} \\ \cot \alpha = -\frac{3}{4} \end{cases} \text{ vào } P, \text{ ta được } P = 4.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 61. Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $P = \sqrt{\tan^2 \alpha - 2 \tan \alpha + 1}$.

A. $P = -\frac{1}{3}$.

B. $P = \frac{1}{3}$.

C. $P = \frac{7}{3}$.

D. $P = -\frac{7}{3}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } P = \sqrt{(\tan \alpha - 1)^2} = |\tan \alpha - 1|. \text{ Vì } \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan \alpha > 1 \Rightarrow P = \tan \alpha - 1.$$

$$\text{Theo giả thiết } \begin{cases} \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{4}{5} \\ \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow P = \frac{1}{3}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 62. Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ và $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 1$. Tính $P = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \sin \alpha$.

A. $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $P = \frac{\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{4}$.

C. $P = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $P = \frac{\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi \Leftrightarrow \frac{3\pi}{4} < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{9\pi}{4} \\ \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \alpha = \pi.$$

$$\text{Thay } \alpha = \pi \text{ vào } P, \text{ ta được } P = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 63. Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ và $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + \cos \alpha.$$

A. $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $P = 1$.

C. $P = -1$.

D. $P = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi \Leftrightarrow \frac{5\pi}{6} < \alpha + \frac{\pi}{3} < \frac{7\pi}{3} \\ \cot\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \alpha + \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{6} \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{2}.$$

$$\text{Thay } \alpha = \frac{3\pi}{2} \text{ vào } P, \text{ ta được } P = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

□

Câu 64. Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $P = \frac{\sin^2 \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos^2 \alpha}$.

A. $P = \frac{30}{11}$. B. $P = \frac{31}{11}$. C. $P = \frac{32}{11}$. D. $P = \frac{34}{11}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{3}{5} \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \end{cases} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5} \Rightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Thay } \sin \alpha = \frac{4}{5} \text{ và } \cos \alpha = -\frac{3}{5} \text{ vào } P, \text{ ta được } P = \frac{31}{11}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 65. Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = 2$. Tính $P = \frac{3 \sin \alpha - 2 \cos \alpha}{5 \cos \alpha + 7 \sin \alpha}$.

A. $P = -\frac{4}{9}$. B. $P = \frac{4}{9}$. C. $P = -\frac{4}{19}$. D. $P = \frac{4}{19}$.

Lời giải.

$$\text{Chia cả tử và mẫu của } P \text{ cho } \cos \alpha \text{ ta được } P = \frac{3 \tan \alpha - 2}{5 + 7 \tan \alpha} = \frac{3 \cdot 2 - 2}{5 + 7 \cdot 2} = \frac{4}{19}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 66. Cho góc α thỏa mãn $\cot \alpha = \frac{1}{3}$. Tính $P = \frac{3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha}{2 \sin \alpha - 5 \cos \alpha}$.

A. $P = -\frac{15}{13}$. B. $P = \frac{15}{13}$. C. $P = -13$. D. $P = 13$.

Lời giải.

$$\text{Chia cả tử và mẫu của } P \text{ cho } \sin \alpha \text{ ta được } P = \frac{3 + 4 \cot \alpha}{2 - 5 \cot \alpha} = \frac{3 + 4 \cdot \frac{1}{3}}{2 - 5 \cdot \frac{1}{3}} = 13.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 67. Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = 2$. Tính $P = \frac{2 \sin^2 \alpha + 3 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 4 \cos^2 \alpha}{5 \sin^2 \alpha + 6 \cos^2 \alpha}$.

A. $P = \frac{9}{13}$. B. $P = \frac{9}{65}$. C. $P = -\frac{9}{65}$. D. $P = \frac{24}{29}$.

Lời giải.

$$\text{Chia cả tử và mẫu của } P \text{ cho } \cos^2 \alpha \text{ ta được } P = \frac{2 \tan^2 \alpha + 3 \tan \alpha + 4}{5 \tan^2 \alpha + 6} = \frac{2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 4}{5 \cdot 2^2 + 6} = \frac{9}{13}.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 68. Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $P = \frac{2 \sin^2 \alpha + 3 \sin \alpha \cdot \cos \alpha - 4 \cos^2 \alpha}{5 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$.

A. $P = -\frac{8}{13}$. B. $P = \frac{2}{19}$. C. $P = -\frac{2}{19}$. D. $P = -\frac{8}{19}$.

Lời giải.

Chia cả tử và mẫu của P cho $\cos^2 \alpha$ ta được

$$P = \frac{2\tan^2 \alpha + 3\tan \alpha - 4}{5 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{2} - 4}{5 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{8}{19}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 69. Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = 5$. Tính $P = \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$.

A. $P = \frac{9}{13}$. B. $P = \frac{10}{13}$. C. $P = \frac{11}{13}$. D. $P = \frac{12}{13}$.

Lời giải.

Ta có $P = (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \cdot (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \cdot (*)$

Chia hai vế của $(*)$ cho $\cos^2 \alpha$ ta được $\frac{P}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - 1$

$$\Leftrightarrow P(1 + \tan^2 \alpha) = \tan^2 \alpha - 1 \Leftrightarrow P = \frac{\tan^2 \alpha - 1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{5^2 - 1}{1 + 5^2} = \frac{12}{13}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 70. Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{5}{4}$. Tính $P = \sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

A. $P = \frac{9}{16}$. B. $P = \frac{9}{32}$. C. $P = \frac{9}{8}$. D. $P = \frac{1}{8}$.

Lời giải.

Từ giả thiết, ta có $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{25}{16} \Leftrightarrow 1 + 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{25}{16} \Rightarrow P = \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{9}{32}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 71. Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{12}{25}$ và $\sin \alpha + \cos \alpha > 0$. Tính $P = \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$.

A. $P = \frac{91}{125}$. B. $P = \frac{49}{25}$. C. $P = \frac{7}{5}$. D. $P = \frac{1}{9}$.

Lời giải.

Áp dụng $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$, ta có

$$P = \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^3 - 3\sin \alpha \cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha).$$

$$\text{Ta có } (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 + \frac{24}{25} = \frac{49}{25}.$$

Vì $\sin \alpha + \cos \alpha > 0$ nên ta chọn $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5}$.

$$\text{Thay } \begin{cases} \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5} \\ \sin \alpha \cos \alpha = \frac{12}{25} \end{cases} \text{ vào } P, \text{ ta được } P = \left(\frac{7}{5}\right)^3 - 3 \cdot \frac{12}{25} \cdot \frac{7}{5} = \frac{91}{125}.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 72. Cho góc α thỏa mãn $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ và $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Tính $P = \sin \alpha - \cos \alpha$.

A. $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $P = \frac{1}{2}$. C. $P = -\frac{1}{2}$. D. $P = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 2$.

Suy ra $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2 - (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$.

Do $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ suy ra $\sin \alpha < \cos \alpha$ nên $\sin \alpha - \cos \alpha < 0$. Vậy $P = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 73. Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha + \cos \alpha = m$. Tính $P = |\sin \alpha - \cos \alpha|$.

- A. $P = 2 - m$. B. $P = 2 - m^2$. C. $P = m^2 - 2$. D. $P = \sqrt{2 - m^2}$.

Lời giải.

Ta có $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 2$.

Suy ra $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2 - (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 2 - m^2 \Rightarrow P = |\sin \alpha - \cos \alpha| = \sqrt{2 - m^2}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 74. Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha + \cot \alpha = 2$. Tính $P = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$.

- A. $P = 1$. B. $P = 2$. C. $P = 3$. D. $P = 4$.

Lời giải.

Ta có $P = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - 2 \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 2^2 - 2 \cdot 1 = 2$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 75. Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha + \cot \alpha = 5$. Tính $P = \tan^3 \alpha + \cot^3 \alpha$.

- A. $P = 100$. B. $P = 110$. C. $P = 112$. D. $P = 115$.

Lời giải.

Ta có $P = \tan^3 \alpha + \cot^3 \alpha = (\tan \alpha + \cot \alpha)^3 - 3 \tan \alpha \cot \alpha (\tan \alpha + \cot \alpha) = 5^3 - 3 \cdot 5 = 110$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 76. Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Tính $P = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$.

- A. $P = 12$. B. $P = 14$. C. $P = 16$. D. $P = 18$.

Lời giải.

Ta có $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{1}{4}$.

Khi đó $P = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}$
 $= \frac{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} = \frac{1 - 2(\sin \alpha \cos \alpha)^2}{(\sin \alpha \cos \alpha)^2} = 14$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 77. Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\tan \alpha - \cot \alpha = 1$. Tính $P = \tan \alpha + \cot \alpha$.

- A. $P = 1$. B. $P = -1$. C. $P = -\sqrt{5}$. D. $P = \sqrt{5}$.

Lời giải.

Ta có $\tan \alpha - \cot \alpha = 1 \Leftrightarrow \tan \alpha - \frac{1}{\tan \alpha} = 1$

$\Leftrightarrow \tan^2 \alpha - \tan \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ suy ra $\tan \alpha < 0$ nên $\tan \alpha = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{2}{1 - \sqrt{5}}$.

Thay $\tan \alpha = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ và $\cot \alpha = \frac{2}{1 - \sqrt{5}}$ vào P , ta được $P = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + \frac{2}{1 - \sqrt{5}} = -\sqrt{5}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 78. Cho góc α thỏa mãn $3 \cos \alpha + 2 \sin \alpha = 2$ và $\sin \alpha < 0$. Tính $\sin \alpha$.

- A. $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$. B. $\sin \alpha = -\frac{7}{13}$. C. $\sin \alpha = -\frac{9}{13}$. D. $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } 3 \cos \alpha + 2 \sin \alpha = 2 \Leftrightarrow (3 \cos \alpha + 2 \sin \alpha)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow 9 \cos^2 \alpha + 12 \cos \alpha \cdot \sin \alpha + 4 \sin^2 \alpha = 4 \Leftrightarrow 5 \cos^2 \alpha + 12 \cos \alpha \cdot \sin \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha (5 \cos \alpha + 12 \sin \alpha) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0 \\ 5 \cos \alpha + 12 \sin \alpha = 0. \end{cases}$$

- $\cos \alpha = 0 \Rightarrow \sin \alpha = 1$: loại (vì $\sin \alpha < 0$).

- $5 \cos \alpha + 12 \sin \alpha = 0$, ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 5 \cos \alpha + 12 \sin \alpha = 0 \\ 3 \cos \alpha + 2 \sin \alpha = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = -\frac{5}{13} \\ \cos \alpha = \frac{12}{13}. \end{cases}$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 79. Cho góc α thỏa mãn $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ và $\sin \alpha - 2 \cos \alpha = 1$. Tính $P = 2 \tan \alpha - \cot \alpha$.

- A. $P = \frac{1}{2}$. B. $P = \frac{1}{4}$. C. $P = \frac{1}{6}$. D. $P = \frac{1}{8}$.

Lời giải.

$$\text{Với } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \text{ suy ra } \begin{cases} \sin \alpha < 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \sin \alpha - 2 \cos \alpha = 1 \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow (1 + 2 \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow 5 \cos^2 \alpha + 4 \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0 \text{ (loại)} \\ \cos \alpha = -\frac{4}{5}. \end{cases}$$

$$\text{Từ hệ thức } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \text{ suy ra } \sin \alpha = -\frac{3}{5} \text{ (do } \sin \alpha < 0)$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{4} \text{ và } \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Thay } \tan \alpha = \frac{3}{4} \text{ và } \cot \alpha = \frac{4}{3} \text{ vào } P, \text{ ta được } P = \frac{1}{6}.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 80. Rút gọn biểu thức $M = (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$.

- A. $M = 1$. B. $M = 2$. C. $M = 4$. D. $M = 4 \sin x \cdot \cos x$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x = 1 + 2 \sin x \cdot \cos x \\ (\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cdot \cos x = 1 - 2 \sin x \cdot \cos x \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } M = 2.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 81. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 4x$. B. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x$.
C. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$. D. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4x$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin^4 x + \cos^4 x &= (\sin^2 x)^2 + 2 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x + (\cos^2 x)^2 - 2 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \frac{1}{2} (2 \cdot \sin x \cdot \cos x)^2 = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 82. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2 \cos^2 x$.

B. $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$.

C. $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x$.

D. $\sin^4 x - \cos^4 x = 2 \cos^2 x - 1$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin^4 x - \cos^4 x &= (\sin^2 x)^2 - (\cos^2 x)^2 = (\sin^2 x - \cos^2 x) (\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &= \sin^2 x - \cos^2 x = (1 - \cos^2 x) - \cos^2 x = 1 - 2 \cos^2 x. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 83. Rút gọn biểu thức $M = \sin^6 x + \cos^6 x$.

A. $M = 1 + 3 \sin^2 x \cos^2 x$.

B. $M = 1 - 3 \sin^2 x$.

C. $M = 1 - \frac{3}{2} \sin^2 2x$.

D. $M = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } M = \sin^6 x + \cos^6 x &= (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &= 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 84. Rút gọn biểu thức $M = 2 (\sin^4 x + \cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x)^2 - (\sin^8 x + \cos^8 x)$.

A. $M = 1$.

B. $M = -1$.

C. $M = 2$.

D. $M = -2$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin^4 x + \cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \cos^2 x \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \sin^2 x. \\ \text{Suy ra } M &= 2 (1 - \sin^2 x \cos^2 x)^2 - (\sin^8 x + \cos^8 x) = 2 (1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x \cos^4 x) - (\sin^8 x + \cos^8 x) \\ &= 2 - 4 \sin^2 x \cos^2 x + 2 \sin^4 x \cos^4 x - (\sin^8 x + \cos^8 x) \\ &= 2 - 4 \sin^2 x \cos^2 x - (\sin^4 x - \cos^4 x)^2 = 2 - 4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x - (\sin^2 x - \cos^2 x)^2 \\ &= 2 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x - \sin^4 x - \cos^4 x = 2 - (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 2 - 1 = 1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 85. Rút gọn biểu thức $M = \tan^2 x - \sin^2 x$.

A. $M = \tan^2 x$.

B. $M = \sin^2 x$.

C. $M = \tan^2 x \cdot \sin^2 x$.

D. $M = 1$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } M = \tan^2 x - \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x = \sin^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) = \sin^2 x \cdot \tan^2 x.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 86. Rút gọn biểu thức $M = \cot^2 x - \cos^2 x$.

A. $M = \cot^2 x$.

B. $M = \cos^2 x$.

C. $M = 1$.

D. $M = \cot^2 x \cdot \cos^2 x$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } M = \cot^2 x - \cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \cos^2 x = \cos^2 x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) = \cos^2 x \cdot \cot^2 x.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 87. Rút gọn biểu thức $M = (1 - \sin^2 x) \cot^2 x + (1 - \cot^2 x)$.

- A. $M = \sin^2 x$. B. $M = \cos^2 x$. C. $M = \sin^2 x$. D. $M = \cos^2 x$.

Lời giải.

Ta biến đổi $M = (\cot^2 x - \cos^2 x) + (1 - \cot^2 x) = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 88. Rút gọn biểu thức $M = \sin^2 \alpha \tan^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha - \tan^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha$.

- A. $M = 1 + \sin^2 \alpha$. B. $M = \sin \alpha$. C. $M = 2 \sin \alpha$. D. $M = 3$.

Lời giải.

Ta có $M = \tan^2 \alpha (\sin^2 \alpha - 1) + 4 \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha$
 $= \tan^2 \alpha (-\cos^2 \alpha) + 4 \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha$
 $= -\sin^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha = 3 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 3$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 89. Rút gọn biểu thức $M = (\sin^4 x + \cos^4 x - 1) (\tan^2 x + \cot^2 x + 2)$.

- A. $M = -4$. B. $M = -2$. C. $M = 2$. D. $M = 4$.

Lời giải.

Ta có $M = (1 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x - 1) \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + 2 \right)$
 $= (-2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x) \left(\frac{\sin^4 x + \cos^4 x + 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \right) = (-2) \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = -2$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 90. Đơn giản biểu thức $P = \sqrt{\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$.

- A. $P = |\sin \alpha|$. B. $P = \sin \alpha$. C. $P = \cos \alpha$. D. $P = |\cos \alpha|$.

Lời giải.

Ta có $P = \sqrt{\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \sqrt{\sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)} = \sqrt{\sin^2 \alpha} = |\sin \alpha|$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 91. Đơn giản biểu thức $P = \frac{1 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$.

- A. $P = 1 + 2 \tan^2 \alpha$. B. $P = 1 - 2 \tan^2 \alpha$. C. $P = -1 + 2 \tan^2 \alpha$. D. $P = -1 - 2 \tan^2 \alpha$.

Lời giải.

Ta có $P = \frac{1 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1 + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \tan^2 \alpha = 1 + 2 \tan^2 \alpha$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 92. Đơn giản biểu thức $P = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha}$.

- A. $P = -\frac{2 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$. B. $P = \frac{2}{\sin^2 \alpha}$. C. $P = \frac{2}{1 + \cos \alpha}$. D. $P = 0$.

Lời giải.

Ta có $P = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha}$
 $= \frac{1 - \cos \alpha}{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)} - \frac{1}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{1 + \cos \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha} = 0$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 93. Đơn giản biểu thức $P = \frac{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \cos^2 \alpha$.

- A. $P = \tan^2 \alpha$. B. $P = 1$. C. $P = -\cos^2 \alpha$. D. $P = \cot^2 \alpha$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \frac{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} \\ &= \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 94. Đơn giản biểu thức $P = \frac{2\cos^2 x - 1}{\sin x + \cos x}$.

- A. $P = \cos x + \sin x$. B. $P = \cos x - \sin x$.
C. $P = \cos 2x - \sin 2x$. D. $P = \cos 2x + \sin 2x$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } P = \frac{2\cos^2 x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin x + \cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x} = \cos x - \sin x.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 95. Đơn giản biểu thức $P = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\cot \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}$.

- A. $P = 2 \tan^2 \alpha$. B. $P = \frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha}$. C. $P = 2 \cot^2 \alpha$. D. $P = \frac{2}{\cos^2 \alpha}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\cot \alpha - \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha - 1}{\cos \alpha \cdot \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right)} \\ &= \frac{1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha - 1}{\cos \alpha \cdot \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\frac{\cos^3 \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{2 \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 2 \tan^2 \alpha. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 96. Đơn giản biểu thức $P = \left(\frac{\sin \alpha + \tan \alpha}{\cos \alpha + 1} \right)^2 + 1$.

- A. $P = 2$. B. $P = 1 + \tan \alpha$. C. $P = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$. D. $P = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{\sin \alpha + \tan \alpha}{\cos \alpha + 1} &= \frac{\sin \alpha \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha} \right)}{\cos \alpha + 1} = \frac{\sin \alpha \left(\frac{\cos \alpha + 1}{\cos \alpha} \right)}{\cos \alpha + 1} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha. \\ \text{Suy ra } P &= \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 97. Đơn giản biểu thức $P = \tan \alpha \left(\frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right)$.

- A. $P = 2$. B. $P = 2 \cos \alpha$. C. $P = 2 \tan \alpha$. D. $P = 2 \sin \alpha$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \tan \alpha \left(\frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right) = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right) \\ &= \frac{1}{\cos \alpha} + \cos \alpha - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{(1 - \sin^2 \alpha) + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2 \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = 2 \cos \alpha. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 98. Đơn giản biểu thức $P = \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cos x}{\cot x}$.

A. $P = 1$.

B. $P = -1$.

C. $P = \frac{1}{2}$.

D. $P = -\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} = 1 - \frac{\cos^2 x}{\cot^2 x} = 1 - \cos^2 x \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 - \sin^2 x$.

Và $\frac{\sin x \cdot \cos x}{\cot x} = \sin x \cdot \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \sin^2 x$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 99. Hệ thức nào sau đây là **SAI**?

A. $\frac{\sin^2 \alpha + 1}{2(1 - \sin^2 \alpha)} + \frac{1 + \cos^2 \alpha}{2(1 - \cos^2 \alpha)} + 1 = (\tan \alpha + \cot \alpha)^2$.

B. $\frac{1 - 4\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{4\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{1 + \tan^4 x - 2\tan^2 x}{4\tan^2 x}$.

C. $\frac{\sin x + \tan x}{\tan x} = 1 + \sin x + \cot x$.

D. $\tan x + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1}{\cos x}$.

Lời giải.

Ta có $\frac{\sin x + \tan x}{\tan x} = \frac{\sin x}{\tan x} + 1 = \sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} + 1 = 1 + \cos x \neq 1 + \sin x + \cot x$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 100. Cho A, B, C là ba góc của tam giác ABC . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $\sin(B + C) = \sin A$.

B. $\cos(B + C) = -\cos A$.

C. $\tan(B + C) = \tan A$.

D. $\cot(B + C) = -\cot A$.

Lời giải.

Ta có $B + C = 180^\circ - A$. Suy ra $\tan(B + C) = \tan(180^\circ - A) = -\tan A$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 101. Cho $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < 0$.

B. $\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) > 0$.

C. $\cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) > 0$.

D. Các khẳng định trên đều sai.

Lời giải.

Ta có $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{3\pi}{8} < x - \frac{3\pi}{8} < \frac{\pi}{8}$. Do đó $\cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) > 0$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 102. Cho $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Khi đó $\cos \alpha$ có giá trị là

A. $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$.

B. $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

C. $\cos \alpha = \frac{8}{9}$.

D. $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$. Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos \alpha < 0$. Do đó $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 103. Cho số thực x thỏa mãn điều kiện $\sin x \cos x = \frac{1}{2}$. Tính $\tan x$.

- A. $\tan x = \frac{1}{2}$. B. $\tan x = 2$. C. $\tan x = \sqrt{3}$. D. $\tan x = 1$.

Lời giải.

Ta có $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (\sin x - \cos x)^2 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \cos x \Leftrightarrow \tan x = 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 104. Cho $\sin x = \frac{1}{3}$ với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Tính giá trị của $\tan x$.

- A. $\frac{-1}{2\sqrt{2}}$. B. $\frac{3}{8}$. C. $2\sqrt{2}$. D. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Ta có $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \tan^2 x = \frac{1}{1 - \sin^2 x} - 1 = \frac{1}{8}$, do $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, suy ra $\tan x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 105. Cho $\sin x = \frac{1}{3}$, $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Tính giá trị của $\tan x$.

- A. $\frac{-1}{2\sqrt{2}}$. B. $\frac{3}{8}$. C. $2\sqrt{2}$. D. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Lời giải.

Ta có $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Vì $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos x > 0 \Rightarrow \cos x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Vậy $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 106. Cho cung lượng giác có số đo x thỏa mãn $\tan x = 2$. Giá trị của biểu thức $M = \frac{\sin x - 3 \cos^2 x}{5 \sin^3 x - 2 \cos x}$ bằng

- A. $\frac{7}{30}$. B. $\frac{7}{33}$. C. $\frac{7}{32}$. D. $\frac{7}{31}$.

Lời giải.

Do $\tan x = 2 \Rightarrow \cos x \neq 0$.

Ta có $M = \frac{\sin x - 3 \cos^3 x}{5 \sin^3 x - 2 \cos x} = \frac{\tan x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - 3}{5 \tan^3 x - \frac{2}{\cos^2 x}} = \frac{\tan x (1 + \tan^2 x) - 3}{5 \tan^3 x - 2(1 + \tan^2 x)} = \frac{7}{30}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 107. Cho $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ với $0^\circ < x < 180^\circ$. Tính giá trị biểu thức $S = \sin^3 x + \cos^3 x$.

- A. $\frac{11}{16}$. B. $\frac{11}{13}$. C. $\frac{9}{16}$. D. $\frac{13}{16}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin^3 x + \cos^3 x &= (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x) \\ &= \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)(2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x - 2 \sin x \cos x) \\ &= \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) [3(\sin^2 x + \cos^2 x) - (\sin x + \cos x)^2] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left[3 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right] = \frac{11}{16}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **A** ☐

Câu 108. Cho $\cot \alpha = -2$. Giá trị của biểu thức $A = \frac{4 \sin \alpha - 5 \cos \alpha}{\sin \alpha + 3 \cos \alpha}$ là

- A. $\frac{14}{5}$. B. $\frac{6}{5}$. C. $-\frac{14}{5}$. D. $-\frac{6}{5}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } A = \frac{4 - 5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{1 + 3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{4 - 5 \cot \alpha}{1 + 3 \cot \alpha} = \frac{4 - 5 \cdot (-2)}{1 + 3 \cdot (-2)} = -\frac{14}{5}.$$

Chọn đáp án **C** ☐

Câu 109. Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau.

- A. $\sin 170^\circ = -\sin 10^\circ$. B. $\cos 5^\circ = -\cos 175^\circ$.
C. $\tan 150^\circ = -\tan 30^\circ$. D. $\cot 40^\circ = -\cot 140^\circ$.

Lời giải.

Áp dụng công thức lượng giác cơ bản ta suy ra

$$\sin 170^\circ = \sin 10^\circ, \cos 5^\circ = -\cos 175^\circ, \tan 150^\circ = -\tan 30^\circ, \cot 40^\circ = -\cot 140^\circ.$$

Chọn đáp án **A** ☐

Câu 110. Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Tính $\cos \alpha$.

- A. $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$. B. $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. C. $\cos \alpha = \frac{5}{4}$. D. $\cos \alpha = -\frac{5}{4}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5} \right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow |\cos \alpha| = \frac{4}{5}.$$

Mà $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ nên $\cos \alpha < 0$.

$$\text{Do đó } \cos \alpha = -\frac{4}{5}.$$

Chọn đáp án **A** ☐

Câu 111. Giả sử $3 \sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$ thì $\sin^4 x + 3 \cos^4 x$ có giá trị bằng

- A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

Lời giải.

$$\text{Từ giả thiết } 3 \sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 6 \sin^4 x - 2 \cos^4 x = 1 \Leftrightarrow 6 \sin^4 x - 2(1 - \sin^2 \alpha)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 4 \sin^4 x - 4 \sin^2 \alpha - 3 = 0 \Leftrightarrow (2 \sin^2 \alpha + 3)(2 \sin^2 \alpha - 1) = 0 \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ta có } \sin^4 x + 3 \cos^4 x = \sin^4 \alpha + 3(1 - \sin^2 \alpha)^2 = \frac{1}{4} + 3 \left(1 - \frac{1}{2} \right)^2 = 1.$$

Chọn đáp án **B** ☐

Câu 112. Khi biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác, khẳng định nào dưới đây **sai**?

- A. Điểm biểu diễn cung α và cung $\pi - \alpha$ đối xứng nhau qua trục tung.
 B. Điểm biểu diễn cung α và cung $-\alpha$ đối xứng nhau qua gốc tọa độ.
 C. Mỗi cung lượng giác được biểu diễn bởi một điểm duy nhất.
 D. Cung α và cung $\alpha + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) có cùng điểm biểu diễn.

Lời giải.

Khẳng định A đúng.

Khẳng định B sai vì điểm biểu diễn cung α và cung $-\alpha$ đối xứng nhau qua trục hoành.

Khẳng định C, D đúng.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 113. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 0$, với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$.
 B. $\tan \alpha = -\cot \alpha$, với mọi $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $1 + \cot^2 \alpha = -\frac{1}{\sin^2 \alpha}$, với mọi $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, với mọi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải.

Ta có

- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.
- $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$.
- $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$.
- $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 114. Giả sử $3 \sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$ thì $\sin^4 x + 3 \cos^4 x$ có giá trị bằng

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải.

Ta có $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

Vậy $3 \sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3 \sin^4 x - (1 - \sin^2 x)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

Vậy $\sin^4 x + 3 \cos^4 x = \sin^4 x + 3(1 - \sin^2 x)^2 = \frac{1}{4} + 3\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 115. Nếu $\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2}$ với $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ thì α bằng

- A. $\frac{\pi}{6}$. B. $\frac{\pi}{3}$. C. $\frac{\pi}{4}$. D. $\frac{\pi}{8}$.

Lời giải.

$\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin 2\alpha = 1 \Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 116. Giá trị của $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$ bằng bao nhiêu khi $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ với $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$.

A. $\frac{48 + 25\sqrt{3}}{11}$.

B. $\frac{8 - 5\sqrt{3}}{11}$.

C. $\frac{8 - \sqrt{3}}{11}$.

D. $\frac{48 - 25\sqrt{3}}{11}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{3}}{1 - \tan \alpha \tan \frac{\pi}{3}} = \frac{\tan \alpha + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} \tan \alpha}.$$

$$\text{Mà } \sin \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \pm \frac{4}{5}.$$

$$\text{Vì } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ nên } \cos \alpha = -\frac{4}{5} \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{3}{4}$$

$$\text{Suy ra } \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\tan \alpha + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} \tan \alpha} = \frac{-\frac{3}{4} + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3} \frac{3}{4}} = \frac{-3 + 4\sqrt{3}}{4 + 3\sqrt{3}} = \frac{48 - 25\sqrt{3}}{11}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 117. Cho $\tan\left(\frac{9\pi}{2} + x\right) = 2$. Tính $\cos\left(x - \frac{7\pi}{2}\right)$ với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

B. $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

C. $-\frac{1}{\sqrt{5}}$.

D. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } 2 = \tan\left(\frac{9\pi}{2} + x\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x \Rightarrow \cot x = -2.$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{1 + \cot^2 x} = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Vì } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ nên } \sin x > 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\cos\left(x - \frac{7\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} - 4\pi\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 118. Cho $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \sqrt{2}$. Tính $M = \tan\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$. Biết $x \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right)$.

A. $M = -1$.

B. $M = 0$.

C. $M = 1$.

D. $M = 2$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } x \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right) \text{ nên } \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) > 0 \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{1 - \sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1.$$

$$\text{Từ đó } \tan\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 119. Cho $\tan \alpha + \cot \alpha = m$. Tính giá trị biểu thức $\cot^3 \alpha + \tan^3 \alpha$.

A. $m^3 - 3m$.

B. $m^3 - 3m$.

C. $3m^3 + m$.

D. $3m^3 - m$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \tan \alpha + \cot \alpha = m \Rightarrow \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = m^2 - 2.$$

$$\cot^3 \alpha + \tan^3 \alpha = (\cot \alpha + \tan \alpha)(\tan^2 \alpha - \tan \alpha \cot \alpha + \cot^2 \alpha) = m^3 - 3m.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 120. Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \cos \left(\alpha - \frac{5\pi}{2} \right) + 2 \tan \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right).$$

A. $\frac{49}{15}$.

B. $-\frac{31}{45}$.

C. $\frac{23}{10}$.

D. $-\frac{7}{10}$.

Lời giải.

Rút gọn $P = \sin \alpha - 2 \cot \alpha$.

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} \text{ với } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5} \Rightarrow \cot \alpha = -\frac{4}{3}.$$

$$\text{Do đó } P = \frac{49}{15}.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 121. Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\cot \alpha = -4$, $\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{17}}$, $\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{17}}$. Tính $A = a^2 + 2ab - b^2$.

A. -7 .

B. 23 .

C. -23 .

D. 7 .

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \cot \alpha = -4 \text{ với } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}; \cos \alpha = -\frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases} \Rightarrow A = -23.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 122. Cho $P(\alpha) = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} + \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$. Trong các đáp án sau, đáp án nào đúng?

A. $P(\alpha) = \sin \alpha - \frac{1}{\cos \alpha}; P(\pi) = 1$.

B. $P(\alpha) = \sin \alpha - \frac{1}{\cos \alpha}; P\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - 2$.

C. $P(\alpha) = \sin \alpha + \frac{1}{\cos \alpha}; P\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $P(\alpha) = \sin \alpha + \frac{1}{\cos \alpha}; P(\pi) = -1$.

Lời giải.

$$\text{Với } \frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi \text{ ta rút gọn được } P(\alpha) = \sin \alpha - \frac{1}{\cos \alpha}.$$

$$\text{Thay giá trị } \alpha = \pi; \alpha = \frac{2\pi}{3} \text{ ta được } P(\pi) = 1; P\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 123. Biết $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $P = 3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha$.

A. $\frac{5 + \sqrt{7}}{4}$ hoặc $\frac{5 - \sqrt{7}}{4}$.

B. $\frac{2 + \sqrt{3}}{5}$ hoặc $\frac{2 - \sqrt{3}}{5}$.

C. $\frac{5 + \sqrt{5}}{7}$ hoặc $\frac{5 - \sqrt{5}}{7}$.

D. $\frac{3 + \sqrt{2}}{5}$ hoặc $\frac{3 - \sqrt{2}}{5}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \\ \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{-3}{8} \\ \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{1 + \sqrt{7}}{4}; \cos \alpha = \frac{1 - \sqrt{7}}{4} \\ \sin \alpha = \frac{1 - \sqrt{7}}{4}; \cos \alpha = \frac{1 + \sqrt{7}}{4} \end{cases}$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 124. Cho α thỏa mãn $\sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha = 0$. Tính $\tan \alpha$.

- A. $\tan \alpha = \sqrt{3}$. B. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\tan \alpha = -\sqrt{3}$. D. $\tan \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Ta chứng minh $\cos \alpha \neq 0$. Thật vậy, giả sử $\cos \alpha = 0$. Khi đó từ đẳng thức $\sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha = 0$ suy ra $\sin \alpha = 0$. Mâu thuẫn. Do đó $\cos \alpha \neq 0$.

Với điều kiện $\cos \alpha \neq 0$, ta có

$$\sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \tan \alpha + \sqrt{3} = 0.$$

Chọn đáp án **C**

□

Vậy $\tan \alpha = -\sqrt{3}$.

Câu 125. Cho α thỏa mãn $3 \tan \alpha + \sqrt{3} \cot \alpha = 3 + \sqrt{3}$ và $\tan \alpha \neq 1$. Tìm giá trị của $\tan \alpha$.

- A. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\tan \alpha = \sqrt{3}$. C. $\tan \alpha = -1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $\tan \alpha = -1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 3 \tan \alpha + \sqrt{3} \cot \alpha = 3 + \sqrt{3} &\Leftrightarrow 3 \tan \alpha + \frac{\sqrt{3}}{\tan \alpha} - 3 - \sqrt{3} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3 \tan^2 \alpha - (3 + \sqrt{3}) \tan \alpha + \sqrt{3}}{\tan \alpha} = 0 \quad (1). \end{aligned}$$

- Nếu $\tan \alpha = 0$, từ giả thiết suy ra $\cot \alpha = \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$. Mâu thuẫn vì $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$.

Vậy $\tan \alpha \neq 0$.

- Nếu $\tan \alpha \neq 0$, ta có (1) $\Leftrightarrow 3 \tan^2 \alpha - (3 + \sqrt{3}) \tan \alpha + \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan \alpha = 1 \text{ (loại)} \\ \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$

Do đó $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ là cần tìm.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 126. Cho $\sin \alpha + \cos \alpha = m$. Tính giá trị biểu thức $Q = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$ theo m .

- A. $Q = \frac{1 + m^4 - 2m^2}{2}$. B. $Q = \frac{1 - m^4 - 2m^2}{2}$.
C. $Q = \frac{1 - m^4 + 2m^2}{2}$. D. $Q = \frac{1 + m^4 + 2m^2}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$Q = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2 \left(\frac{m^2 - 1}{2} \right)^2 = \frac{1 - m^4 + 2m^2}{2}.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 127. Nếu $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ thì $P = 3 \sin x + 2 \cos x$ bằng

- A. $\frac{5 - \sqrt{7}}{4}$ hoặc $\frac{5 + \sqrt{7}}{4}$. B. $\frac{5 - \sqrt{5}}{4}$ hoặc $\frac{5 + \sqrt{5}}{5}$.
C. $\frac{2 - \sqrt{3}}{5}$ hoặc $\frac{2 + \sqrt{3}}{5}$. D. $\frac{3 - \sqrt{2}}{5}$ hoặc $\frac{3 + \sqrt{2}}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\sin x + \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} - \sin x$ mà $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\Rightarrow \sin^2 x + \left(\frac{1}{2} - \sin x\right)^2 = 1 \Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x - \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1 + \sqrt{7}}{4} \text{ hoặc } \sin x = \frac{1 - \sqrt{7}}{4}$$

Ta có $3\sin x + 2\cos x = 2(\sin x + \cos x) + \sin x = 1 + \sin x$ nên $P = \frac{5 + \sqrt{7}}{4}$ hoặc $P = \frac{5 - \sqrt{7}}{4}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 128. Với mọi góc α , biểu thức $\cos \alpha + \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{5}\right) + \cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{5}\right) + \dots + \cos \left(\alpha + \frac{9\pi}{5}\right)$ nhận giá trị bằng

A. 10.

B. -10.

C. 1.

D. 0.

Lời giải.

Ta có $\cos \alpha = -\cos \left(\alpha + \frac{5\pi}{5}\right)$; $\cos \left(\alpha + \frac{\pi}{5}\right) = -\cos \left(\alpha + \frac{6\pi}{5}\right)$; $\cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{5}\right) = -\cos \left(\alpha + \frac{7\pi}{5}\right)$;

$$\cos \left(\alpha + \frac{3\pi}{5}\right) = -\cos \left(\alpha + \frac{8\pi}{5}\right); \cos \left(\alpha + \frac{4\pi}{5}\right) = -\cos \left(\alpha + \frac{9\pi}{5}\right).$$

$$\text{Do đó } \cos \alpha + \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{5}\right) + \cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{5}\right) + \dots + \cos \left(\alpha + \frac{9\pi}{5}\right) = 0.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 129. Tính $P = \cot 1^\circ \cdot \cot 2^\circ \cdot \cot 3^\circ \dots \cot 89^\circ$.

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải.

Ta có:

$$\cot 89^\circ = \tan 1^\circ \Rightarrow \cot 1^\circ \cot 89^\circ = \cot 1^\circ \tan 1^\circ = 1.$$

$$\cot 88^\circ = \tan 2^\circ \Rightarrow \cot 2^\circ \cot 82^\circ = \cot 2^\circ \tan 2^\circ = 1.$$

...

$$\cot 46^\circ = \tan 44^\circ \Rightarrow \cot 44^\circ \cot 46^\circ = \cot 44^\circ \tan 44^\circ = 1.$$

$$\text{Vậy } P = \cot 1^\circ \cot 2^\circ \cot 3^\circ \dots \cot 89^\circ = \cot 45^\circ = 1.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 130. Giá trị biểu thức $\tan 30^\circ + \tan 40^\circ + \tan 50^\circ + \tan 60^\circ$ là

A. $4\left(\pi + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

B. $\frac{8\sqrt{3}}{3} \cos 20^\circ$.

C. 2.

D. $\frac{4\sqrt{3}}{3} \sin 70^\circ$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} A &= \tan 30^\circ + \tan 40^\circ + \tan 50^\circ + \tan 60^\circ \\ &= \frac{\sin 90^\circ}{\cos 30^\circ \cdot \cos 60^\circ} + \frac{\sin 90^\circ}{\cos 40^\circ \cdot \cos 50^\circ} \\ &= \frac{2}{\cos 90^\circ + \cos 30^\circ} + \frac{2}{\cos 90^\circ + \cos 10^\circ} \\ &= \frac{2}{\cos 30^\circ} + \frac{2}{\cos 10^\circ} \\ &= \frac{2(\cos 30^\circ + \cos 10^\circ)}{\cos 30^\circ \cdot \cos 10^\circ} \\ &= \frac{4 \cos 20^\circ \cdot \cos 10^\circ}{\cos 30^\circ \cdot \cos 10^\circ} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cos 20^\circ \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 131. Tính giá trị của biểu thức $A = \cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \dots + \cos^2 89^\circ$.

- A. $A = 44$. B. $A = \frac{89}{2}$. C. $A = 45$. D. $A = \frac{88 + \sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\cos 89^\circ = \sin 1^\circ$ nên $\cos^2 89^\circ = \sin^2 1^\circ$.

Tương tự ta có $A = \sin^2 89^\circ + \sin^2 88^\circ + \dots + \sin^2 1^\circ$.

Do đó $2A = 89$ nên $A = \frac{89}{2}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 132. Bất đẳng thức nào sau đây đúng với mọi x (giả sử tất cả biểu thức đều có nghĩa)?

- A. $(\tan x - \cot x)^2 \geq 4$. B. $(\tan x + \cot x)^2 \geq 4$.
C. $(\tan x + \cot x)^2 \leq 2$. D. $(\tan x + \cot x)^2 \leq 4$.

Lời giải.

Ta có $(\tan x + \cot x)^2 = \left(\tan x + \frac{1}{\tan x} \right)^2 = \tan^2 x + \frac{1}{\tan^2 x} + 2 \geq 2 + 2 = 4$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 133. Tìm giá trị nhỏ nhất $F_{\min}$ của biểu thức $F = \cos^2 a + 2 \sin a + 2$.

- A. $F_{\min} = 3$. B. $F_{\min} = 1$. C. $F_{\min} = \frac{3}{4}$. D. $F_{\min} = 0$.

Lời giải.

Ta có $F = \cos^2 a + 2 \sin a + 2 = -\sin^2 a + 2 \sin a + 3 = 4 - (1 - \sin a)^2$.

Do $0 \leq 1 - \sin a \leq 2 \Rightarrow 0 \leq (1 - \sin a)^2 \leq 4$. Dẫn đến $F_{\min} = 0$ khi $\sin a = 1$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 134. Giả sử α là cung thoả $\tan \alpha = \cot \alpha$. Khi đó điểm ngọn M của cung α trên đường tròn lượng giác thuộc đường thẳng nào sau đây?

- A. Trục tung.
B. Trục hoành.
C. Hai đường thẳng có phương trình $y = x$ và $y = -x$.
D. Đường thẳng có phương trình $y = x$.

Lời giải.

Giả sử $M(x; y)$. Ta có

$$\tan \alpha = \cot \alpha \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow y^2 = x^2 \Leftrightarrow y = \pm x.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 135. Có bao nhiêu phương trình trong các phương trình sau luôn có nghiệm với mọi m ?

- $|\sin x| = \frac{m}{m^2 + 1}$ (1)
- $\tan x = \frac{2m}{m^2 + 1}$ (3)
- $\sin x = \frac{2m}{m^2 + 1}$ (2)
- $\sin x = \frac{|m|}{m^2 + 1}$ (4)

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải.

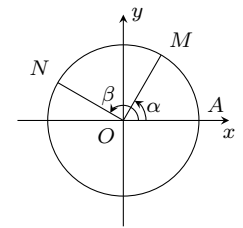
- Với $m < 0$ thì phương trình (1) vô nghiệm.
- Vì với mọi giá trị thực của m ta có $m^2 - 2|m| + 1 \geq 0$ nên $m^2 + 1 \geq 2|m| \geq |m|$. Từ đó suy ra $-1 \leq \frac{2m}{m^2 + 1} \leq 1$ và $0 \leq \frac{|m|}{m^2 + 1} \leq 1$. Vậy phương trình (2) và (4) luôn có nghiệm.
- Phương trình (3) luôn có nghiệm với mọi giá trị thực của m .

Chọn đáp án **C**

□

Câu 136.

Cho M và N lần lượt là điểm biểu diễn cho cung α và β trên đường tròn lượng giác. Đẳng thức nào sau đây đúng?



- A. $\cos \widehat{MON} = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$.
 B. $\cos \widehat{MON} = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$.
 C. $\cos \widehat{MON} = \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta$.
 D. $\cos \widehat{MON} = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{OM} = (\cos \alpha; \sin \alpha)$, $\overrightarrow{ON} = (\cos \beta; \sin \beta)$.

$$\cos \widehat{MON} = \cos(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}}{OM \cdot ON} = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}{1 \cdot 1} = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 137. Cho hai góc α, β thỏa mãn $0^\circ \leq \alpha, \beta \leq 180^\circ$. Xét 3 mệnh đề sau:

P : “ $\tan \alpha = \tan \beta$ ”

Q : “ $\alpha = \beta$ ”

R : “ $\sin \alpha = \sin \beta$ ”

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $P \Rightarrow Q$.
 B. $Q \Rightarrow R$.
 C. $R \Rightarrow P$.
 D. Cả B và C đều đúng.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} 0^\circ \leq \alpha, \beta \leq 180^\circ \\ \alpha = \beta \end{cases} \Rightarrow \sin \alpha = \sin \beta.$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 138. Cho góc lượng giác $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ và $P = \sin \alpha \cdot \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$, $Q = \cos \alpha \cdot \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $P > 0$ và $Q < 0$.
 B. $P < 0$ và $Q < 0$.
 C. $P > 0$ và $Q > 0$.
 D. $P < 0$ và $Q > 0$.

Lời giải.

Vì $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ nên $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha < 0$.

Mặt khác $\alpha + \frac{\pi}{2} \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ và $\alpha - \frac{\pi}{2} \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ nên $\cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) > 0$, $\sin \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) > 0$
 $\Rightarrow P < 0, Q < 0$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 139. Cho góc lượng giác $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}\right)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\cos \alpha + \sin \alpha < 0$ và $\sin 2\alpha < 0$.
B. $\cos \alpha + \sin \alpha > 0$ và $\cos 2\alpha < 0$.
C. $\cos \alpha - \sin \alpha > 0$ và $\sin 2\alpha < 0$.
D. $\cos \alpha - \sin \alpha > 0$ và $\cos 2\alpha < 0$.

Lời giải.

Vì $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}\right)$ nên $\sin \alpha \in \left(-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\cos \alpha \in \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ và $\cos \alpha + \sin \alpha < 0$,
 $\cos \alpha - \sin \alpha > 0$.
Mặt khác $2\alpha \in \left(3\pi; \frac{7\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin 2\alpha < 0, \cos 2\alpha < 0$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 140. Xét góc lượng giác $(OA; OM) = \alpha$ trong đó M không thuộc trục Ox, Oy . Khi đó M thuộc góc phần tư nào để $\tan \alpha$ và $\cos \alpha$ cùng dấu?

- A. I và III .
B. I và II .
C. I và IV .
D. II và IV .

Lời giải.

Ta có $\tan \alpha$ và $\cos \alpha$ cùng dấu khi $\tan \alpha \cdot \cos \alpha > 0 \Rightarrow \sin \alpha > 0$ hay điểm M thuộc góc phần tư thứ I và II.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 141. Xét góc lượng giác $(OA; OM) = \alpha$ trong đó M không thuộc trục Ox, Oy . Khi đó M thuộc góc phần tư nào để $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$ cùng dấu?

- A. I và III .
B. I và II .
C. I và IV .
D. II và III .

Lời giải.

Ta có $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$ cùng dấu khi $\sin \alpha, \cos \alpha$ cùng dương hoặc cùng âm hay điểm M thuộc góc phần tư thứ I và III.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 142. Cho góc lượng giác $(Ou; Ov)$ có số đo là $-\frac{137\pi}{5}$. Gọi $(Ou; Ov) = \alpha$ là góc có số đo dương nhỏ nhất. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\cos \alpha < 0$.
B. $\sin \alpha < 0$.
C. $\tan \alpha > 0$.
D. $\cot \alpha > 0$.

Lời giải.

Ta có $-\frac{137\pi}{5} = -28\pi + \frac{3\pi}{5} \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{5} \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow \sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0$.

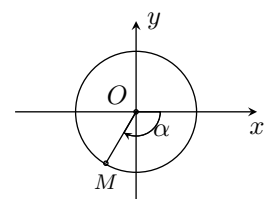
Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 143.

Cho góc lượng giác α có điểm biểu diễn là điểm M trên đường tròn lượng giác ở hình bên. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) < 0$.
B. $\cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) < 0$.
C. $\tan \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) < 0$.
D. $\cot \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) < 0$.



Lời giải.

Từ hình vẽ biểu diễn điểm M suy ra M thuộc góc phần tư thứ III. Khi đó $\alpha + \frac{\pi}{2}$ có điểm biểu diễn thuộc góc phần tư thứ IV. Do đó

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) < 0, \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) > 0, \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) < 0, \cot\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) < 0.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 144. Cho $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. Xác định dấu của các giá trị lượng giác $\alpha = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ và $\beta = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

- A. $\alpha < 0, \beta < 0$. B. $\alpha < 0, \beta > 0$. C. $\alpha > 0, \beta < 0$. D. $\alpha > 0, \beta > 0$.

Lời giải.

Với $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ suy ra $\cos x < 0$ và $\sin x > 0$.

$$\text{Ta có } \alpha = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \sin\frac{3\pi}{2}\cos x - \cos\frac{3\pi}{2}\sin x = -\cos x > 0.$$

$$\beta = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \cos\frac{\pi}{2} - \sin x \sin\frac{\pi}{2} = -\sin x < 0.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 145. Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $\cos(\alpha + \pi) > 0$. B. $\sin \alpha > 0$. C. $\tan(\alpha - \pi) > 0$. D. $\cot(\pi - \alpha) < 0$.

Lời giải.

Với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên α thuộc góc phần tư thứ III. Vậy $\cos(\alpha + \pi) < 0$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 146. Bất đẳng thức nào dưới đây là đúng?

- A. $\cos 90^\circ 30' > \cos 100^\circ$. B. $\sin 90^\circ < \sin 150^\circ$.
C. $\sin 90^\circ 15' < \sin 90^\circ 30'$. D. $\sin 90^\circ 15' \leq \sin 90^\circ 30'$.

Lời giải.

Ta có: $x_1, x_2 \in [90^\circ; 180^\circ)$ nên $x_1 < x_2 \Rightarrow \sin x_1 > \sin x_2$ và $\cos x_1 > \cos x_2$.

Vậy $\cos 90^\circ 30' > \cos 100^\circ$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 147. Phương trình nào sau đây có nghiệm với mọi m ?

- A. $\sin x = m$. B. $\cos(x + m) = m$. C. $\tan(x + m) = m$. D. $m \cot x = 1$.

Lời giải.

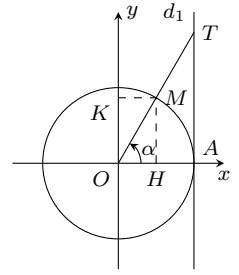
- Phương trình $\sin x = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $-1 \leq m \leq 1$.
- Phương trình $\cos(x + m) = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $-1 \leq m \leq 1$.
- Phương trình $\tan(x + m) = m$ luôn có nghiệm với mọi giá trị thực của m .
- Phương trình $m \cot x = 1$ có nghiệm khi và chỉ khi $m \neq 0$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 148.

Gọi M là điểm ngọn của cung α trên đường tròn lượng giác, với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên các trục Ox, Oy của hệ toạ độ Oxy . Gọi d_1 là đường thẳng qua $A(1, 0)$ và song song với trục Oy . Gọi T là giao điểm của OM và d_1 . Hãy chọn mệnh đề đúng.



- A. $AT = \frac{MK}{MH}$. B. $AT = \frac{MH}{MK}$. C. $\cot \alpha = AT$. D. $\sin \alpha = AT$.

Lời giải.

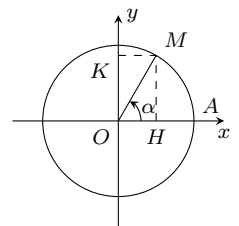
Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $AT = \overline{AT} = \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\overline{MH}}{\overline{MK}} = \frac{MH}{MK}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 149.

Gọi M là điểm ngọn của cung α trên đường tròn lượng giác. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên các trục Ox, Oy của hệ toạ độ Oxy . Mệnh đề nào sau đây **sai**?



- A. $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = OH^2 + OK^2$. B. $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = OM^2$.
C. $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$. D. $\cos \alpha + \sin \alpha = OH + OK$.

Lời giải.

$\cos \alpha + \sin \alpha = \overline{OH} + \overline{OK}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 150. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. $\sin(x + k2\pi) = \sin x$. B. $\sin(x + k\pi) = \sin x$.
C. $\sin(x + k\pi) = -\sin x$. D. $\cos(x + k\pi) = -\cos x$.

Lời giải.

Ta có khẳng định đúng là $\sin(x + k2\pi) = \sin x$.

Chọn đáp án **(A)**

□

ĐÁP ÁN

1. A	2. C	3. A	4. B	5. D	6. C	7. D	8. C	9. A	10. D
11. D	12. B	13. B	14. B	15. D	16. D	17. B	18. B	19. C	20. B
21. B	22. D	23. C	24. B	25. B	26. B	27. C	28. D	29. C	30. C
31. A	32. C	33. C	34. B	35. A	36. B	37. C	38. C	39. D	40. D
41. A	42. B	43. C	44. C	45. C	46. B	47. B	48. D	49. D	50. D
51. B	52. D	53. C	54. A	55. D	56. C	57. D	58. C	59. B	60. A
61. B	62. C	64. B	65. D	66. D	67. A	68. D	69. D	70. B	71. A
72. D	73. D	74. B	75. B	76. B	77. C	78. A	79. C	80. B	81. C
82. A	83. D	84. A	85. C	86. D	87. A	88. D	89. D	90. A	91. A
92. D	93. A	94. B	95. A	96. C	97. B	98. A	99. C	100. C	101. C
102. D	103. D	104. D	105. D	106. A	107. A	108. C	109. A	110. A	111. B
112. B	113. D	114. A	115. C	116. D	117. C	118. C	119. B	120. A	121. C
122. A	123. A	124. C	125. A	126. C	127. A	128. B	129. B	130. B	131. B
132. B	133. D	134. C	135. C	136. A	137. B	138. B	139. B	140. B	141. A
142. A	143. A	144. C	145. A	146. A	147. C	148. B	149. D	150. A	

§3 CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A CÔNG THỨC CỘNG

Dạng 1. Công thức cộng

Để giải các bài toán liên quan đến các công thức cộng, ta thường sử dụng các công thức sau:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin(a \pm b) &= \sin a \cos b \pm \sin b \cos a. & \text{c) } \tan(a \pm b) &= \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}. \\ \text{b) } \cos(a \pm b) &= \cos a \cos b \mp \sin a \sin b. \end{aligned}$$

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 1 ❖❖❖

Ví dụ 1. Tính giá trị của biểu thức $P = \cos 10^\circ + \cos 11^\circ \cos 21^\circ + \cos 69^\circ \cos 79^\circ$.

Lời giải.

Ta có $P = \cos 10^\circ + \cos 11^\circ \cos 21^\circ + \sin 11^\circ \cos 21^\circ = \cos 10^\circ + \cos (11^\circ - 21^\circ) = 2 \cos 10^\circ$. □

Ví dụ 2. Rút gọn các biểu thức:

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{\sqrt{2} \cos a - 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} + a \right)}{-\sqrt{2} \sin a + 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + a \right)}. \\ \text{b) } B &= (\tan a - \tan b) \cot(a - b) - \tan a \tan b. \end{aligned}$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } A &= \frac{\sqrt{2} \cos a - 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos a - \sin \frac{\pi}{4} \sin a \right)}{-\sqrt{2} \sin a + 2 \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos a + \cos \frac{\pi}{4} \sin a \right)} = \frac{\sqrt{2} \sin a}{\sqrt{2} \cos a} = \tan a. \\ \text{b) Ta có } B &= \tan(a - b) (1 + \tan a \tan b) \cot(a - b) - \tan a \tan b = 1. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 3. Chứng minh các đẳng thức sau:

$$\begin{aligned} \text{a) } \cos a + \sin a &= \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - a \right) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + a \right). \\ \text{b) } \cos a - \sin a &= \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + a \right) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - a \right). \end{aligned}$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } \cos a + \sin a &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos a + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin a \right) = \sqrt{2} \left(\cos a \cos \frac{\pi}{4} + \sin a \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - a \right). \\ \text{Mặt khác ta cũng có } \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos a + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin a \right) &= \sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos a + \cos \frac{\pi}{4} \sin a \right) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + a \right). \end{aligned}$$

□

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC , chứng minh rằng $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
 \tan A + \tan B + \tan C &= \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B} + \frac{\sin C}{\cos C} \\
 &= \frac{\sin A \cos B + \sin B \cos A}{\cos A \cos B} + \frac{\sin C}{\cos C} \\
 &= \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B} + \frac{\sin C}{\cos C} \\
 &= \frac{\sin C}{\cos A \cos B} + \frac{\sin C}{\cos C} \\
 &= \sin C \left(\frac{1}{\cos A \cos B} + \frac{1}{\cos C} \right) \\
 &= \sin C \cdot \frac{\cos A \cos B + \cos C}{\cos A \cos B \cos C} \\
 &= \tan C \cdot \frac{\cos A \cos B - \cos(A+B)}{\cos A \cos B} \\
 &= \tan C \cdot \frac{\cos A \cos B - \cos A \cos B + \sin A \sin B}{\cos A \cos B \cos C} \\
 &= \tan A \tan B \tan C.
 \end{aligned}$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Không sử dụng MTCT, hãy tính giá trị $\sin 15^\circ$, $\cos 15^\circ$, $\sin 75^\circ$ và $\cos 75^\circ$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 \sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}. \\
 \cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}. \\
 \sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}. \\
 \cos 75^\circ &= \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.
 \end{aligned}$$

□

Bài 2. Rút gọn biểu thức $P = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right)}$.

Lời giải.

$$P = \frac{\sin \frac{\pi}{4} \cos a - \cos \frac{\pi}{4} \sin a + \cos \frac{\pi}{4} \cos a + \sin \frac{\pi}{4} \sin a}{\sin \frac{\pi}{4} \cos a - \cos \frac{\pi}{4} \sin a - \cos \frac{\pi}{4} \cos a - \sin \frac{\pi}{4} \sin a} = \frac{\sqrt{2} \cos a}{-\sqrt{2} \sin a} = -\cot a.$$

□

Bài 3. Tính $\alpha + \beta$ biết $\tan \alpha = \frac{2}{5}$, $\tan \beta = \frac{3}{7}$ với $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = 1$.

Do $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ nên $0 < \alpha + \beta < \pi$. Vậy $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$.

□

Bài 4. Tính

- a) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$, biết $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.
 b) $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, biết $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.
 c) $\cos(a + b)$, $\sin(a - b)$, biết $\sin a = \frac{4}{5}$, $0^\circ < a < 90^\circ$ và $\sin b = \frac{2}{3}$, $90^\circ < b < 180^\circ$.

Lời giải.

- a) Do $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos \alpha > 0$. Do đó $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.
 Ta có $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \alpha \cos \frac{\pi}{3} - \sin \alpha \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-3 + \sqrt{6}}{6}$.
 b) Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\sin \alpha > 0$. Do đó $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Suy ra $\tan \alpha = -2\sqrt{2}$.
 Ta có $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\tan \alpha - 1}{\tan \alpha + 1} = \frac{-2\sqrt{2} - 1}{-2\sqrt{2} + 1} = \frac{9 + 4\sqrt{2}}{7}$.
 c) Có $0^\circ < a < 90^\circ$ nên $\cos a = \frac{3}{5}$, $90^\circ < b < 180^\circ$ nên $\cos b = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.
 $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b = \frac{3}{5} \cdot \frac{-\sqrt{5}}{3} - \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{8 + 3\sqrt{5}}{15}$.
 $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a = \frac{4}{5} \cdot \frac{-\sqrt{5}}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = -\frac{6 + 4\sqrt{5}}{15}$.

□

Bài 5. Chứng minh rằng

- a) $\frac{\sin(a + b)}{\sin(a - b)} = \frac{\tan a + \tan b}{\tan a - \tan b}$.
 b) $\frac{\cos(a - b)}{\cos(a + b)} = \frac{\cot a \cot b + 1}{\cot a \cot b - 1}$.

Lời giải.

- a) $\frac{\sin(a + b)}{\sin(a - b)} = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\sin a \cos b - \sin b \cos a} = \frac{\frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b}}{\frac{\sin a \cos b - \sin b \cos a}{\cos a \cos b}} = \frac{\tan a + \tan b}{\tan a - \tan b}$.
 b) $\frac{\cos(a - b)}{\cos(a + b)} = \frac{\cos a \cos b + \sin a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} = \frac{\frac{\cos a \cos b + \sin a \sin b}{\sin a \sin b}}{\frac{\cos a \cos b - \sin a \sin b}{\sin a \sin b}} = \frac{\cot a \cot b + 1}{\cot a \cot b - 1}$.

□

Bài 6. Rút gọn các biểu thức

- a) $A = \sin(a + b) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin(-b)$.
 b) $B = \cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right) + \frac{1}{2} \sin^2 a$.
 c) $C = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right) - \sin(a - b)$.

Lời giải.

- a) $A = \sin a \cos b + \sin b \cos a - \cos a \sin b = \sin a \cos b$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} B &= \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos a - \sin \frac{\pi}{4} \sin a \right) \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos a + \sin \frac{\pi}{4} \sin a \right) + \frac{1}{2} \sin^2 a \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos a - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin a \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos a + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin a \right) + \frac{1}{2} \sin^2 a \\ &= \frac{1}{2} (\cos a - \sin a) (\cos a + \sin a) + \frac{1}{2} \sin^2 a \\ &= \frac{1}{2} (\cos^2 a - \sin^2 a) + \frac{1}{2} \sin^2 a = \frac{1}{2} \cos^2 a. \end{aligned}$$

c) Ta có

$$\begin{aligned} C &= \left(\cos \frac{\pi}{2} \cos a + \sin \frac{\pi}{2} \sin a \right) \left(\sin \frac{\pi}{2} \cos b - \sin b \cos \frac{\pi}{2} \right) - (\sin a \cos b - \sin b \cos a) \\ &= \sin a \cos b - \sin a \cos b + \sin b \cos a = \sin b \cos a. \end{aligned}$$

□

Bài 7. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\sin(a+b) \sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a.$

b) $\cos(a+b) \cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \sin^2 a.$

Lời giải.

a) $\sin(a+b) \sin(a-b) = (\sin a \cos b + \sin b \cos a) (\sin a \cos b - \sin b \cos a)$

$$= \sin^2 a \cos^2 b - \sin^2 b \cos^2 a = \sin^2 a (1 - \sin^2 b) - \sin^2 b (1 - \sin^2 a) = \sin^2 a - \sin^2 b.$$

Tương tự: $\sin^2 a \cos^2 b - \sin^2 b \cos^2 a = (1 - \cos^2 a) \cos^2 b - (1 - \cos^2 b) \cos^2 a = \cos^2 b - \cos^2 a.$

b) $\cos(a+b) \cos(a-b) = (\cos a \cos b - \sin a \sin b) (\cos a \cos b + \sin a \sin b)$

$$= \cos^2 a \cos^2 b - \sin^2 a \sin^2 b = \cos^2 a (1 - \sin^2 b) - (1 - \cos^2 a) \sin^2 b = \cos^2 a - \sin^2 b.$$

Tương tự: $\cos^2 a \cos^2 b - \sin^2 a \sin^2 b = (1 - \sin^2 a) \cos^2 b - \sin^2 a (1 - \cos^2 b) = \cos^2 b - \sin^2 a.$

□

Bài 8. Cho $a - b = \frac{\pi}{4}$, chứng minh rằng $\frac{1 + \tan b}{1 - \tan b} = \tan a.$

Lời giải.

Ta có $a - b = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow a = \frac{\pi}{4} + b.$

Do đó $\tan a = \tan \left(\frac{\pi}{4} + b \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan b}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan b} = \frac{1 + \tan b}{1 - \tan b}.$

□

Bài 9. Cho $a + b = \frac{\pi}{4}$, chứng minh rằng $(1 + \tan a)(1 + \tan b) = 2.$

Lời giải.

Ta có $(1 + \tan a)(1 + \tan b) = (1 + \tan a) \left(1 + \tan \left(\frac{\pi}{4} - a \right) \right) = (1 + \tan a) \left(1 + \frac{1 - \tan a}{1 + \tan a} \right)$

$$= (1 + \tan a) \frac{2}{1 + \tan a} = 2.$$

□

Bài 10. Cho tam giác ABC , chứng minh rằng $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1.$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} &= \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} \right) \\ &= \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} \right) \left(1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \right) \\ &= \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \cot \frac{C}{2} \left(1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \right) \\ &= \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + 1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} = 1.\end{aligned}$$

□

B CÔNG THỨC NHÂN ĐÔI

Định lý 1. Với mọi giá trị của góc lượng giác α cho trước, ta có

- $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$.
- $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$.
- $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}, \begin{cases} \alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

Hệ quả 1. Với mọi giá trị của góc lượng giác α cho trước, ta có

- $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$.
- $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$.
- $\tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Hệ quả 2. Với mọi giá trị của góc lượng giác α cho trước, ta có

- $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha.$
- $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$

(Chứng minh lại khi sử dụng trong bài tập tự luận)

(Công thức nhân ba)

Lời giải.

- $\sin 3\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin \alpha \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cos \alpha = \sin \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha) + 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha$
 $= \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha + 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha.$
- $\cos 3\alpha = \cos(\alpha + 2\alpha) = \cos \alpha \cos 2\alpha - \sin \alpha \sin 2\alpha = \cos \alpha (2 \cos^2 \alpha - 1) - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha$
 $= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2(1 - \cos^2 \alpha) \cos \alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$

□

C CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 2. Tính các giá trị lượng giác của các góc cho trước

Sử dụng công thức nhân đôi hoặc hạ bậc để tính giá trị lượng giác theo yêu cầu.

BÀI TẬP DẠNG 2

Ví dụ 1. Tính các giá trị lượng giác của góc $\alpha = 22^\circ 30'$.

Lời giải.

$$\text{Có } \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \Leftrightarrow 2\cos^2 \alpha - 1 = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \text{ vì } 0^\circ < \alpha < 90^\circ.$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2\cos \alpha} = \frac{\sin 45^\circ}{2\cos \alpha} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = 1 + \sqrt{2}, \cot 2\alpha = \frac{1}{\tan 2\alpha} = \sqrt{2} - 1. \quad \square$$

Ví dụ 2. Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, với $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Tính giá trị của $\sin 2\alpha$ và $\tan 2\alpha$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{16}{25}$$

$$\text{Do } \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \text{ nên } \cos \alpha < 0 \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5}.$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}.$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{24}{7}. \quad \square$$

Dạng 3. Rút gọn biểu thức cho trước

Sử dụng công thức nhân đôi hoặc hạ bậc kết hợp việc đánh giá quan hệ bội chặn giữa các cung và các bậc.

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 3 ❖❖❖

Ví dụ 1. Rút gọn các biểu thức sau

a) $A = \sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ.$

b) $B = \cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \Rightarrow A \cdot \cos 10^\circ = \sin 10^\circ \cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \\ &= \frac{1}{2} \sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ = \frac{1}{4} \sin 40^\circ \cos 40^\circ = \frac{1}{8} \sin 80^\circ = \frac{1}{8} \cos 10^\circ \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{1}{8}.$$

$$\text{b) } B = \cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x = \cos x \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x. \quad \square$$

Dạng 4. Chứng minh đẳng thức lượng giác

Sử dụng công thức nhân đôi hoặc hạ bậc kết hợp việc đánh giá quan hệ bội chặn giữa các cung và các bậc.

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 4 ❖❖❖

Ví dụ 1. Chứng minh các đẳng thức sau trong điều kiện có nghĩa của biểu thức

- a) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha$
 b) $\frac{1 - \cos \alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin \alpha} = \cot \alpha$
 c) $\frac{\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha}{2(1 - \cos \alpha)} = \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$

Lời giải.

- a) VT = $(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$
 $= 1 - \frac{1 - \cos 4\alpha}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha =$ VP.
 b) VT = $\frac{1 - \cos \alpha + 2\cos^2 \alpha - 1}{2\sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha(2\cos \alpha - 1)}{\sin \alpha(2\cos \alpha - 1)} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \alpha =$ VP.
 c) VT = $\frac{\sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha(1 - \cos^2 \alpha)}{2(1 - \cos \alpha)} = \frac{\sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha}{2(1 - \cos \alpha)} = \frac{\sin^2 \alpha(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{2(1 - \cos \alpha)}$
 $= \frac{1 - \cos^2 \alpha}{2(1 - \cos \alpha)} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} = \frac{2\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} =$ VP.

□

Ví dụ 2. Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến x

$$P = \frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x} \cdot \cot x.$$

Lời giải.

$$P = \frac{2\sin^2 x + 2\sin x \cos x}{2\cos^2 x + 2\sin x \cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{2\sin x(\sin x + \cos x)}{2\cos x(\sin x + \cos x)} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 1.$$

Vậy giá trị của biểu thức P không phụ thuộc vào giá trị của biến x .

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho biết $\tan \frac{a}{2} = 2$. Hãy tính giá trị biểu thức: $P = \frac{\tan a + \cot a}{2\tan a - 4\cot a}.$

Lời giải.

$$\text{Ta có } \tan a = \frac{2\tan \frac{a}{2}}{1 - \tan^2 \frac{a}{2}} = -\frac{4}{3}, \cot a = \frac{1}{\tan a} = -\frac{3}{4}.$$

$$P = \frac{-\frac{4}{3} - \frac{3}{4}}{2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - 4 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)} = -\frac{25}{4}.$$

□

Bài 2. Cho $\tan x = \frac{\sqrt{1+y} + \sqrt{1-y}}{\sqrt{1+y} - \sqrt{1-y}}$. Chứng minh rằng $y = \sin 2x$.

Lời giải.

$$\tan x = \frac{\sqrt{1+y} + \sqrt{1-y}}{\sqrt{1+y} - \sqrt{1-y}} = \frac{(\sqrt{1+y} + \sqrt{1-y})^2}{1+y-1-y} = \frac{2+2\sqrt{1-y^2}}{2y} = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$$

$$y = \sin 2x = 2\sin x \cos x \Leftrightarrow \frac{y}{\cos^2 x} = \frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x} \Leftrightarrow y(1 + \tan^2 x) = 2\tan x$$

$\Leftrightarrow y \left(1 + \frac{(1 + \sqrt{1 - y^2})^2}{y^2} \right) = 2 \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y} \Leftrightarrow y^2 + 2 - y^2 + 2\sqrt{1 - y^2} = 2 + 2\sqrt{1 - y^2}$ (đúng). Vậy ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài 3. Rút gọn $A = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$.

Lời giải.

$$A = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{4}}}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{8}}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{16}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cos \frac{\pi}{32} = \cos \frac{\pi}{32} \quad \square$$

Bài 4. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \sin 6^\circ \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ.$

b) $B = \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} \cos \frac{8\pi}{9}.$

Lời giải.

a) $A \cdot \cos 6^\circ = \sin 6^\circ \cos 6^\circ \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ = \frac{1}{2} \sin 12^\circ \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ$
 $= \frac{1}{4} \sin 24^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ = \frac{1}{8} \sin 48^\circ \cos 48^\circ = \frac{1}{16} \sin 96^\circ = \frac{1}{16} \cos 6^\circ$
 $\Rightarrow A = \frac{1}{16}.$

b) $B \cdot \sin \frac{2\pi}{9} = \sin \frac{2\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} \cos \frac{8\pi}{9} = \frac{1}{2} \sin \frac{4\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} \cos \frac{8\pi}{9} = \frac{1}{4} \sin \frac{8\pi}{9} \cos \frac{8\pi}{9} = \frac{1}{8} \sin \frac{16\pi}{9} =$
 $\frac{1}{8} \sin \left(2\pi - \frac{2\pi}{9} \right) = -\frac{1}{8} \sin \frac{2\pi}{9}$
 $\Rightarrow B = -\frac{1}{8}$

Bài 5. Tính giá trị của $\sin 18^\circ$ và $\cos 18^\circ$.

Lời giải.

Đặt $x = 18^\circ$, có $5x = 90^\circ \Leftrightarrow 3x = 90^\circ - 2x \Rightarrow \cos 2x = \sin 3x$

$$\Leftrightarrow 1 - 2 \sin^2 x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x \Leftrightarrow 4 \sin^3 x - 2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - 1)(4 \sin^2 x + 2 \sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 & (\text{loại}) \\ \sin x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} & (\text{nhận}). \\ \sin x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} & (\text{loại}) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \sin 18^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \text{ và } \cos 18^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}. \quad \square$$

Bài 6. Chứng minh các đẳng thức sau đây (trong điều kiện có nghĩa của biểu thức):

a) $\tan x = \frac{\sin x + \sin 2x}{1 + \cos x + \cos 2x}.$

b) $\tan^2 x = \frac{2 \sin 2x - \sin 4x}{2 \sin 2x + \sin 4x}.$

c) $\sin^4 x + \cos^4 x - 6 \sin^2 x \cos^2 x = \cos 4x.$

Lời giải.

a) VP = $\frac{\sin x + 2 \sin x \cos x}{1 + \cos x + 2 \cos^2 x - 1} = \frac{\sin x(1 + 2 \cos x)}{\cos x(1 + 2 \cos x)} = \tan x = \text{VT}$

b) VP = $\frac{2 \sin 2x - 2 \sin 2x \cos 2x}{2 \sin 2x + 2 \sin 2x \cos 2x} = \frac{2 \sin 2x(1 - \cos 2x)}{2 \sin 2x(1 + \cos 2x)} = \frac{2 \sin^2 x}{2 \cos^2 x} = \tan^2 x = \text{VT}$

$$\begin{aligned} \text{c) } VT &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x - 6 \sin^2 x \cos^2 x \\ &= 1 - 8 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = \cos 4x = VP \end{aligned}$$

□

Bài 7. Cho góc α thỏa $\cos 4\alpha = \frac{2}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \sin^6 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^6 \alpha$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} P &= \sin^6 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^6 \alpha = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) \\ &= \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha) = \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha\right). \end{aligned}$$

$$\text{Mà } \cos 4\alpha = 1 - 2 \sin^2 2\alpha = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \sin^2 2\alpha = \frac{1}{6}.$$

$$\text{Vậy nên } P = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}\right) = \frac{11}{288}.$$

□

Bài 8. Rút gọn biểu thức $A = \sin^5 \alpha \cos \alpha - \cos^5 \alpha \sin \alpha$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} A &= \sin \alpha \cos \alpha (\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha) = \frac{1}{2} \sin 2\alpha (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \\ &= \frac{1}{2} \sin 2\alpha (-\cos 2\alpha) = -\frac{1}{4} \sin 4\alpha \end{aligned}$$

□

Bài 9. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào biến số x .

$$\text{a) } A = 8 \sin^4 x + 4 \cos 2x - \cos 4x - 3.$$

$$\text{b) } B = \frac{\tan 2x}{\tan x} - \frac{1}{\cos 2x}.$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= 8(\sin^2 x)^2 + 4 \cos 2x - \cos 4x - 3 = 8 \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 + 4 \cos 2x - \cos 4x - 3 \\ &= 2(1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) + 4 \cos 2x - \cos 4x - 3 = 2 \cos^2 2x - \cos 4x - 1 = \cos 4x - \cos 4x = 0. \end{aligned}$$

Vậy A không phụ thuộc vào giá trị của x .

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= \frac{\sin 2x \cos x}{\cos 2x \sin x} - \frac{1}{\cos 2x} = \frac{\sin 2x \cos x - \sin x}{\sin x \cos 2x} = \frac{2 \sin x \cos^2 x - \sin x}{\sin x \cos 2x} \\ &= \frac{\sin x (2 \cos^2 x - 1)}{\sin x \cos 2x} = \frac{\sin x \cos 2x}{\sin x \cos 2x} = 1. \end{aligned}$$

Vậy B không phụ thuộc vào giá trị của x .

□

D CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI

Dạng 5. Biến đổi một biểu thức thành một tổng hoặc thành một tích

Đây là dạng toán cơ bản chủ yếu để tập cho học sinh áp dụng được đối với các công thức biến đổi (tổng thành tích, tích thành tổng) đã học. Dưới đây là các công thức biến đổi đó.

1. Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\begin{aligned} \bullet \cos a \cos b &= \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)] & \bullet \sin a \cos b &= \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)] \\ \bullet \sin a \sin b &= \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)] & \bullet \cos a \sin b &= \frac{1}{2} [\sin(a + b) - \sin(a - b)] \end{aligned}$$

2. Công thức biến đổi tổng thành tích

$$\begin{aligned} \bullet \sin a + \sin b &= 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} & \bullet \cos a - \cos b &= -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} \\ \bullet \sin a - \sin b &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} & \bullet \tan a + \tan b &= \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b} \\ \bullet \cos a + \cos b &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} & \bullet \tan a - \tan b &= \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b} \end{aligned}$$

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 5 ❖❖❖

Ví dụ 1. Biến đổi mỗi biểu thức sau đây thành một tổng:

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= 2 \sin(a+b) \sin(a-b) & \text{c) } C &= 8 \cos x \sin 2x \sin 3x \\ \text{b) } B &= \sin x \sin 2x \sin 3x & \text{d) } D &= \cos x \cos(x+60^\circ) \cos(x-60^\circ) \end{aligned}$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= 2 \sin(a+b) \sin(a-b) = 2 \cdot \frac{1}{2} [\cos(a+b-a+b) - \cos(a+b+a-b)] = \cos 2b - \cos 2a. \\ \text{Vậy } A &= 2 \sin(a+b) \sin(a-b) = \cos 2b - \cos 2a. \\ \text{b) } B &= \sin x \sin 2x \sin 3x = \sin 3x (\sin 2x \sin x) = \frac{1}{2} \sin 3x [\cos x - \cos 3x] \\ &= \frac{1}{2} \sin 3x \cos x - \frac{1}{2} \sin 3x \cos 3x = \frac{1}{4} [\sin 2x + \sin 4x] - \frac{1}{4} \sin 6x. \\ \text{Vậy } B &= \sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 6x. \\ \text{c) } C &= 8 \cos x \sin 2x \sin 3x = 8 \sin 3x \sin 2x \cos x = 4 [\cos x - \cos 5x] \cos x \\ &= 4 \cos^2 x - 4 \cos 5x \cos x = 2(1 + \cos 2x) - 2(\cos 4x + \cos 6x) \\ \text{Vậy } C &= 8 \cos x \sin 2x \sin 3x = 2 + 2 \cos 2x - 2 \cos 4x - 2 \cos 6x \\ \text{d) } D &= \cos x \cos(x+60^\circ) \cos(x-60^\circ) = \cos x \cdot \frac{1}{2} [\cos 120^\circ + \cos 2x] \\ &= \frac{1}{2} \cos x \left[-\frac{1}{2} + \cos 2x \right] = -\frac{1}{4} \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x \cos x = -\frac{1}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos 4x. \\ \text{Vậy } D &= \cos x \cos(x+60^\circ) \cos(x-60^\circ) = -\frac{1}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos 4x. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 2. Biến đổi các biểu thức sau đây thành một tích:

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \sin a + \sin 3a + \sin 5a & \text{b) } B &= 1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x \end{aligned}$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin a + \sin 3a + \sin 5a &= \sin 5a + \sin a + \sin 3a = 2 \sin 3a \cos 2a + \sin 3a = \sin 3a(2 \cos 2a + 1). \\ \text{Vậy } A &= \sin a + \sin 3a + \sin 5a = \sin 3a(2 \cos 2a + 1). \\ \text{b) } B &= 1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = (\cos 3x + \cos x) + (\cos 2x + 1) \\ &= 2 \cos 2x \cos x + 2 \cos^2 x - 1 + 1 = 2 \cos x (\cos 2x + \cos x) = 2 \cos x \cdot 2 \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} \\ \text{Vậy } B &= 1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 4 \cos x \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} \end{aligned}$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Biến đổi các biểu thức sau đây thành một tổng:

a) $\cos 5a \sin 3a$	e) $\sin(a - b) \cos(b - a)$
b) $\cos(a + b) \cos a$	f) $\cos a \cos b \cos c$
c) $2 \cos(a + b) \cos(a - b)$	g) $4 \sin 2a \sin 4a \sin 6a$
d) $4 \cos x \cos 2x \cos 3x$	h) $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cos 2x$

Lời giải.

- a) Ta có $\cos 5a \sin 3a = \sin 3a \cos 5a = \frac{1}{2} [\sin(3a - 5a) + \sin(3a + 5a)] = \frac{1}{2} [\sin(-2a) + \sin 8a]$
 Vậy $\cos 5a \sin 3a = \frac{1}{2} \sin 8a - \frac{1}{2} \sin 2a$.
- b) Ta có $\cos(a + b) \cos a = \frac{1}{2} [\cos b + \cos(2a + b)] = \frac{1}{2} \cos b + \frac{1}{2} \cos(2a + b)$.
- c) $2 \cos(a + b) \cos(a - b) = 2 \cdot \frac{1}{2} [\cos(a + b - a + b) + \cos(a + b + a - b)] = \cos 2b + \cos 2a$.
- d) Ta có $4 \cos x \cos 2x \cos 3x = 4 (\cos 4x \cos 2x) \cos x = 4 \cdot \frac{1}{2} [\cos 2x + \cos 6x] \cos x$
 $= 2 \cos 2x \cos x + 2 \cos 6x \cos x = \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x$.
- e) Ta có $\sin(a - b) \cos(b - a) = \frac{1}{2} [\sin(a - b - b + a) + \sin(a - b + b - a)] = \frac{1}{2} \sin(2a - 2b)$.
- f) $\cos a \cos b \cos c = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)] \cos c$
 $= \frac{1}{2} \cos(a - b) \cos c + \frac{1}{2} \cos(a + b) \cos c$
 $= \frac{1}{4} \cos(a - b - c) + \frac{1}{4} \cos(a - b + c) + \frac{1}{4} \cos(a + b - c) + \frac{1}{4} \cos(a + b + c)$.
- g) Ta có $4 \sin 2a \sin 4a \sin 6a = \sin 4a + \sin 8a - \sin 12a$.
- h) Ta có $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cos 2x = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{\pi}{3} - \cos 2x\right] \cos 2x$
 $= \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cos^2 2x = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \cos 4x}{2} = -\frac{\cos 4x}{4}$.

□

Bài 2. Biến đổi mỗi biểu thức dưới đây thành một tích:

a) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x$	h) $\cos a + \cos b + \cos(a + b) + 1$
b) $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x$	i) $\sin^2 a - \sin^2 b$
c) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x$	j) $1 + \sin a + \cos a$
d) $\frac{\cos x + \cos y}{\cos x - \cos y}$	k) $1 - \cos a + \sin a$
e) $\frac{\sin 7x + \sin 5x}{\sin 7x - \sin 5x}$	l) $1 - 2 \cos x + \cos 2x$
f) $\sin x \cos 3x + \sin 4x \cos 2x$	m) $1 + \sin x - \cos 2x$
g) $\sin a + \sin b + \sin(a + b)$	n) $\sin^2 x - \sin^2 2x + \sin^2 3x$
	o) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x - 1$

Lời giải.

- a) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = (\sin 3x + \sin x) + \sin 2x$
 $= 2 \sin 2x \cos x + \sin 2x = \sin 2x (2 \cos x + 1)$.

$$\begin{aligned} \text{b) } \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x &= (\sin 7x + \sin x) + (\sin 5x + \sin 3x) \\ &= 2 \sin 4x \cos 3x + 2 \sin 4x \cos x = 2 \sin 4x (\cos 3x + \cos x) \\ &= 4 \sin 4x \cos 2x \cos x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x &= (\cos 4x + \cos x) + (\cos 3x + \cos 2x) \\ &= 2 \cos \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2} + 2 \cos \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \cos \frac{5x}{2} \left(\cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) \\ &= 4 \cos \frac{5x}{2} \cos x \cos \frac{x}{2} = 4 \cos x \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{d) } \frac{\cos x + \cos y}{\cos x - \cos y} = \frac{2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}}{-2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}} = -\cot \frac{x+y}{2} \cot \frac{x-y}{2}.$$

$$\text{e) } \frac{\sin 7x + \sin 5x}{\sin 7x - \sin 5x} = \frac{2 \sin 6x \cos x}{2 \cos 6x \sin x} = \tan 6x \cot x.$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \sin x \cos 3x + \sin 4x \cos 2x &= \frac{1}{2} [\sin(-2x) + \sin 4x] + \frac{1}{2} [\sin 2x + \sin 6x] \\ &= \frac{1}{2} [\sin 6x + \sin 4x] = \sin 5x \cos x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } \sin a + \sin b + \sin(a+b) &= 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} + 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a+b}{2} \\ &= 2 \sin \frac{a+b}{2} \left(\cos \frac{a-b}{2} + \cos \frac{a+b}{2} \right) = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot 2 \cos \frac{a}{2} \cos \left(-\frac{b}{2} \right) \\ &= 4 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } \cos a + \cos b + \cos(a+b) + 1 &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} + 2 \cos^2 \frac{a+b}{2} \\ &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \left(\cos \frac{a-b}{2} + \cos \frac{a+b}{2} \right) = 4 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i) } \sin^2 a - \sin^2 b &= \frac{1 - \cos 2a}{2} - \frac{1 - \cos 2b}{2} = \frac{1}{2} (\cos 2b - \cos 2a) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (-2) \sin(b+a) \sin(b-a) = \sin(a+b) \sin(a-b). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{j) } 1 + \sin a + \cos a &= 1 + \sin \left(2 \cdot \frac{a}{2} \right) + \cos \left(2 \cdot \frac{a}{2} \right) = 1 + 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} + 2 \cos^2 \frac{a}{2} - 1 \\ &= 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} + 2 \cos^2 \frac{a}{2} = 2 \cos \frac{a}{2} \left(\sin \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{k) } 1 - \cos a + \sin a &= 1 - \cos \left(2 \cdot \frac{a}{2} \right) + \sin \left(2 \cdot \frac{a}{2} \right) \\ &= 2 \sin^2 \frac{a}{2} + 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} = 2 \sin \frac{a}{2} \left(\sin \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2} \right). \end{aligned}$$

$$\text{l) } 1 - 2 \cos x + \cos 2x = 1 - 2 \cos x + 2 \cos^2 x - 1 = 2 \cos x (\cos x - 1).$$

$$\text{m) } 1 + \sin x - \cos 2x = 1 + \sin x - (1 - 2 \sin^2 x) = \sin x (1 + 2 \sin x).$$

$$\begin{aligned} \text{n) } \sin^2 x - \sin^2 2x + \sin^2 3x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} - \sin^2 2x + \frac{1 - \cos 6x}{2} \\ &= 1 - \sin^2 2x - \frac{1}{2} (\cos 6x + \cos 2x) = \cos^2 2x - \cos 4x \cos 2x \\ &= \cos 2x (\cos 2x - \cos 4x) = 2 \cos 2x \sin x \sin 3x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{o) } \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x - 1 &= \frac{1 + \cos 2x}{2} + \cos^2 2x + \frac{1 + \cos 6x}{2} - 1 \\ &= \frac{1}{2} (\cos 6x + \cos 2x) + \cos^2 2x = \cos 4x \cos 2x + \cos^2 2x \\ &= \cos 2x (\cos 4x + \cos 2x) = 2 \cos 2x \cos 3x \cos x. \end{aligned}$$

□

Dạng 6. Chứng minh một đẳng thức lượng giác có sử dụng nhóm công thức biến đổi

- Với dạng toán này chúng ta thường xuất phát từ một vế của đẳng thức cần chứng minh, áp dụng các công thức, kết hợp rút gọn, nhóm số hạng,... một cách hợp lý biến đổi biểu thức đó đồng nhất được với biểu thức ở vế kia.
- Tuỳ vào bài toán cụ thể, đôi khi phương pháp biến đổi tương đương, hoặc chứng minh cả hai vế của đẳng thức cùng bằng với biểu thức trung gian,... cũng có thể được sử dụng.

BÀI TẬP DẠNG 6

Ví dụ 1. Chứng minh rằng $4 \cos x \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + x \right) = \cos 3x$, với mọi $x \in \mathbb{R}$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 4 \cos x \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + x \right) &= 4 \cos x \cdot \frac{1}{2} \left[\cos(-2x) + \cos \frac{2\pi}{3} \right] \\ &= 2 \cos x \cos 2x - \cos x = \cos 3x + \cos(-x) - \cos x = \cos 3x, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } 4 \cos x \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + x \right) = \cos 3x, \text{ với mọi } x \in \mathbb{R} \quad \square$$

Ví dụ 2. Chứng minh rằng $\cos^3 a \cos 3a - \sin^3 a \sin 3a = \frac{3}{4} \cos 4a + \frac{1}{4}$, với mọi $x \in \mathbb{R}$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \cos^3 a \cos 3a - \sin^3 a \sin 3a &= (\cos 3a \cos a) \cos^2 a - (\sin 3a \sin a) \sin^2 a \\ &= \frac{1}{2} [\cos 2a + \cos 4a] \cos^2 a - \frac{1}{2} [\cos 2a - \cos 4a] \sin^2 a \\ &= \frac{1}{2} \cos 2a \cos^2 a + \frac{1}{2} \cos 4a \cos^2 a - \frac{1}{2} \cos 2a \sin^2 a + \frac{1}{2} \cos 4a \sin^2 a \\ &= \frac{1}{2} \cos 2a (\cos^2 a - \sin^2 a) + \frac{1}{2} \cos 4a (\cos^2 a + \sin^2 a) \\ &= \frac{1}{2} \cos 2a \cos 2a + \frac{1}{2} \cos 4a = \frac{1}{4} (\cos 4a + \cos 0) + \frac{1}{2} \cos 4a = \frac{3}{4} \cos 4a + \frac{1}{4}, \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \cos^3 a \cos 3a - \sin^3 a \sin 3a = \frac{3}{4} \cos 4a + \frac{1}{4}, \text{ với mọi } x \in \mathbb{R} \quad \square$$

Ví dụ 3. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức say đây không phụ thuộc vào biến số x :

$$S = \cos^2 x + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} + x \right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - x \right)$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } S &= \cos^2 x + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} + x \right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - x \right) \\ &= \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos \left(\frac{4\pi}{3} + 2x \right)}{2} + \frac{1 + \cos \left(\frac{4\pi}{3} - 2x \right)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{4\pi}{3} + 2x \right) + \cos \left(\frac{4\pi}{3} - 2x \right) \right] \\
 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \cdot 2 \cos \frac{4\pi}{3} \cos 2x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cos 2x = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

Vậy $S = \frac{3}{2}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (không phụ thuộc vào biến số x). □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Chứng minh các đẳng thức sau đây:

a) $\cos 5x \cos 3x + \sin 7x \sin x = \cos 2x \cos 4x$ b) $\sin 5x - 2 \sin x (\cos 2x + \cos 4x) = \sin x$ c) $\cos 5x \cos x + \sin 3x \sin x = \cos 2x \cos 4x$ d) $2(\sin a \cos 2a - \sin 2a \cos 3a) + \sin 5a = \sin 3a$ e) $\sin 2\alpha - \sin 4\alpha + \sin 6\alpha = 4 \sin \alpha \cos 2\alpha \cos 3\alpha$ f) $1 + \sin a + \cos a = 2\sqrt{2} \cos \frac{a}{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2} \right)$ g) $\frac{\sin a + \sin 3a}{\cos a + \cos 3a} = \tan 2a$ h) $\frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1} = 2 \cos \alpha$ i) $\frac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = 2 \sin 2\alpha$ j) $\frac{2 \sin 2a + \sin 4a}{2(\cos a + \cos 3a)} = \tan 2a \cos a$	k) $\frac{\sin 2a - \sin 3a + \sin 4a}{\cos 2a - \cos 3a + \cos 4a} = \tan 3a$ l) $\frac{\cos 5a - \cos a}{\sin 4a + \sin 2a} = -2 \sin a$ m) $\frac{1 + \sin 2a + \cos 2a}{1 + \sin 2a - \cos 2a} = \cot a$ n) $\cos 3x \sin^3 x + \sin 3x \cos^3 x = \frac{3}{4} \sin 4x$ o) $\frac{\sin a + \sin b}{\cos a + \cos b} = \tan \frac{a+b}{2}$ p) $\sin^2 x + \sin^2 \left(\frac{\pi}{3} - x \right) + \sin x \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = \frac{3}{4}$ q) $4 \sin x \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \sin \left(\frac{\pi}{3} + x \right) = \sin 3x$ r) $\tan a + \cot a + \tan 3a + \cot 3a = \frac{8 \cos^2 2a}{\sin 6a}$ s) $\sin(a-b) \sin(a+b) = \sin^2 a - \sin^2 b$ t) $\cos(a+b) \cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b$

Lời giải.

- a) Chứng minh $\cos 5x \cos 3x + \sin 7x \sin x = \cos 2x \cos 4x$.
Ta có $\cos 5x \cos 3x + \sin 7x \sin x = \frac{1}{2} (\cos 2x + \cos 8x) + \frac{1}{2} (\cos 6x - \cos 8x)$
 $= \frac{1}{2} (\cos 6x + \cos 2x) = \cos 4x \cos 2x$.
- b) Chứng minh $\sin 5x - 2 \sin x (\cos 2x + \cos 4x) = \sin x$.
Ta có $\sin 5x - 2 \sin x (\cos 2x + \cos 4x) = \sin 5x - 2 \sin x \cos 2x - 2 \sin x \cos 4x$
 $= \sin 5x - [\sin(-x) + \sin 3x] - [\sin(-3x) + \sin 5x] = \sin x$.
- c) Chứng minh $\cos 5x \cos x + \sin 3x \sin x = \cos 2x \cos 4x$.
Ta có $\cos 5x \cos x + \sin 3x \sin x = \frac{1}{2} [\cos 4x + \cos 6x] + \frac{1}{2} [\cos 2x - \cos 4x]$
 $= \frac{1}{2} [\cos 6x + \cos 2x] = \cos 2x \cos 4x$.
- d) Chứng minh $2(\sin a \cos 2a - \sin 2a \cos 3a) + \sin 5a = \sin 3a$.
Ta có $2(\sin a \cos 2a - \sin 2a \cos 3a) + \sin 5a = 2 \sin a \cos 2a - 2 \sin 2a \cos 3a + \sin 5a$
 $= \sin(-a) + \sin 3a - [\sin(-a) + \sin 5a] + \sin 5a = \sin 3a$.
- e) Chứng minh $\sin 2\alpha - \sin 4\alpha + \sin 6\alpha = 4 \sin \alpha \cos 2\alpha \cos 3\alpha$.
Ta có $\sin 2\alpha - \sin 4\alpha + \sin 6\alpha = \sin 6\alpha + \sin 2\alpha - \sin 2(2\alpha)$
 $= 2 \sin 4\alpha \cos 2\alpha - 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha = 2 \cos 2\alpha (\sin 4\alpha - \sin 2\alpha)$
 $= 2 \cos 2\alpha (2 \cos 3\alpha \sin \alpha) = 4 \sin \alpha \cos 2\alpha \cos 3\alpha$.

f) Chứng minh $1 + \sin a + \cos a = 2\sqrt{2} \cos \frac{a}{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2} \right)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 2\sqrt{2} \cos \frac{a}{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2} \right) &= 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \left[\cos \left(a - \frac{\pi}{4} \right) + \cos \frac{\pi}{4} \right] = \sqrt{2} \cos \left(a - \frac{\pi}{4} \right) + 1 \\ &= \sqrt{2} \left(\cos a \cos \frac{\pi}{4} + \sin a \sin \frac{\pi}{4} \right) + 1 = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos a + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin a \right) + 1 = \cos a + \sin a + 1. \end{aligned}$$

g) Chứng minh $\frac{\sin a + \sin 3a}{\cos a + \cos 3a} = \tan 2a$.

$$\text{Ta có } \frac{\sin a + \sin 3a}{\cos a + \cos 3a} = \frac{\sin 3a + \sin a}{\cos 3a + \cos a} = \frac{2 \sin 2a \cos a}{2 \cos 2a \cos a} = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \tan 2a$$

h) Chứng minh $\frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1} = 2 \cos \alpha$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1} &= \frac{(\cos 3\alpha + \cos \alpha) + (\cos 2\alpha + 1)}{(2 \cos^2 \alpha - 1) + \cos \alpha} \\ &= \frac{2 \cos 2\alpha \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha}{\cos 2\alpha + \cos \alpha} = \frac{2 \cos \alpha (\cos 2\alpha + \cos \alpha)}{\cos 2\alpha + \cos \alpha} = 2 \cos \alpha \end{aligned}$$

i) Chứng minh $\frac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = 2 \sin 2\alpha$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha} &= \frac{(\sin 6\alpha + \sin 2\alpha) + \sin 4\alpha}{(1 + \cos 4\alpha) + \cos 2\alpha} \\ &= \frac{2 \sin 4\alpha \cos 2\alpha + \sin 4\alpha}{2 \cos^2 2\alpha + \cos 2\alpha} = \frac{\sin 4\alpha (2 \cos 2\alpha + 1)}{\cos 2\alpha (2 \cos 2\alpha + 1)} = 2 \sin 2\alpha \end{aligned}$$

j) Chứng minh $\frac{2 \sin 2a + \sin 4a}{2(\cos a + \cos 3a)} = \tan 2a \cos a$.

$$\text{Ta có } \frac{2 \sin 2a + \sin 4a}{2(\cos a + \cos 3a)} = \frac{2 \sin 2a + 2 \sin 2a \cos 2a}{4 \cos 2a \cos a}$$

k) Chứng minh $\frac{\sin 2a - \sin 3a + \sin 4a}{\cos 2a - \cos 3a + \cos 4a} = \tan 3a$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{\sin 2a - \sin 3a + \sin 4a}{\cos 2a - \cos 3a + \cos 4a} &= \frac{\sin 4a + \sin 2a - \sin 3a}{\cos 4a + \cos 2a - \cos 3a} = \frac{2 \sin 3a \cos a - \sin 3a}{2 \cos 3a \cos a - \cos 3a} \\ &= \frac{\sin 3a (2 \cos a - 1)}{\cos 3a (2 \cos a - 1)} = \frac{\sin 3a}{\cos 3a} = \tan 3a \end{aligned}$$

l) Chứng minh $\frac{\cos 5a - \cos a}{\sin 4a + \sin 2a} = -2 \sin a$.

$$\text{Ta có } \frac{\cos 5a - \cos a}{\sin 4a + \sin 2a} = \frac{-2 \sin 3a \sin 2a}{2 \sin 3a \cos a} = \frac{-\sin 2a}{\cos a} = \frac{-2 \sin a \cos a}{\cos a} = -2 \sin a.$$

m) Chứng minh $\frac{1 + \sin 2a + \cos 2a}{1 + \sin 2a - \cos 2a} = \cot a$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{1 + \sin 2a + \cos 2a}{1 + \sin 2a - \cos 2a} &= \frac{1 + 2 \sin a \cos a + 2 \cos^2 a - 1}{1 + 2 \sin a \cos a - (1 - 2 \sin^2 a)} = \frac{2 \sin a \cos a + 2 \cos^2 a}{2 \sin a \cos a + 2 \sin^2 a} \\ &= \frac{2 \cos a (\sin a + \cos a)}{2 \sin a (\cos a + \sin a)} = \frac{\cos a}{\sin a} = \cot a \end{aligned}$$

n) Chứng minh $\cos 3x \sin^3 x + \sin 3x \cos^3 x = \frac{3}{4} \sin 4x$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \cos 3x \sin^3 x + \sin 3x \cos^3 x &= (\cos 3x \sin x) \sin^2 x + (\sin 3x \cos x) \cos^2 x \\ &= \frac{1}{2} (\sin 4x - \sin 2x) \sin^2 x + \frac{1}{2} (\sin 4x + \sin 2x) \cos^2 x \\ &= \frac{1}{2} \sin 4x \sin^2 x - \frac{1}{2} \sin 2x \sin^2 x + \frac{1}{2} \sin 4x \cos^2 x + \frac{1}{2} \sin 2x \cos^2 x \\ &= \frac{1}{2} \sin 4x (\sin^2 x + \cos^2 x) + \frac{1}{2} \sin 2x (\cos^2 x - \sin^2 x) \\ &= \frac{1}{2} \sin 4x + \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{2} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 4x = \frac{3}{4} \sin 4x. \end{aligned}$$

o) Chứng minh $\frac{\sin a + \sin b}{\cos a + \cos b} = \tan \frac{a+b}{2}$.

$$\text{Ta có } \frac{\sin a + \sin b}{\cos a + \cos b} = \frac{2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}}{2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}} = \frac{\sin \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}} = \tan \frac{a+b}{2}.$$

p) Chứng minh $\sin^2 x + \sin^2 \left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \sin x \sin \left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{3}{4}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } & \sin^2 x + \sin^2 \left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \sin x \sin \left(\frac{\pi}{3} - x\right) \\ &= \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos \left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right)}{2} + \sin x \sin \left(\frac{\pi}{3} - x\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left[\cos 2x + \cos \left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right) \right] + \frac{1}{2} \left[\cos \left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \cos \frac{\pi}{3} \right] \\ &= 1 - \cos \left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \cos \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \cos \left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

q) Chứng minh $4 \sin x \sin \left(\frac{\pi}{3} - x\right) \sin \left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \sin 3x$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } & 4 \sin x \sin \left(\frac{\pi}{3} - x\right) \sin \left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 4 \sin x \cdot \frac{1}{2} \left[\cos(-2x) - \cos \frac{2\pi}{3} \right] \\ &= 2 \sin x \cos 2x + \sin x = \sin 3x + \sin(-x) + \sin x = \sin 3x. \end{aligned}$$

r) Chứng minh $\tan a + \cot a + \tan 3a + \cot 3a = \frac{8 \cos^2 2a}{\sin 6a}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } & \tan a + \cot a + \tan 3a + \cot 3a = \frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\cos a}{\sin a} + \frac{\sin 3a}{\cos 3a} + \frac{\cos 3a}{\sin 3a} \\ &= \frac{\sin^2 a + \cos^2 a}{\sin a \cos a} + \frac{\sin^2 3a + \cos^2 3a}{\sin 3a \cos 3a} = \frac{1}{\sin a \cos a} + \frac{1}{\sin 3a \cos 3a} = \frac{2}{\sin 2a} + \frac{2}{\sin 6a} \\ &= \frac{2(\sin 6a + \sin 2a)}{\sin 2a \sin 6a} = \frac{4 \sin 4a \cos 2a}{\sin 2a \sin 6a} = \frac{4 \cdot 2 \sin 2a \cos 2a \cos 2a}{\sin 2a \sin 6a} = \frac{8 \cos^2 2a}{\sin 6a}. \end{aligned}$$

s) Chứng minh $\sin(a-b) \sin(a+b) = \sin^2 a - \sin^2 b$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } & \sin(a-b) \sin(a+b) = \frac{1}{2} [\cos(-2b) - \cos 2a] = \frac{1}{2} [\cos 2b - \cos 2a] \\ &= \frac{1}{2} [(1 - 2 \sin^2 b) - (1 - 2 \sin^2 a)] = \frac{1}{2} [2 \sin^2 a - 2 \sin^2 b] = \sin^2 a - \sin^2 b. \end{aligned}$$

t) Chứng minh $\cos(a+b) \cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } & \cos(a+b) \cos(a-b) = \frac{1}{2} [\cos 2b + \cos 2a] = \frac{1}{2} [2 \cos^2 b - 1 + 1 - 2 \sin^2 a] \\ &= \frac{1}{2} [2 \cos^2 b - 2 \sin^2 a] = \cos^2 a - \sin^2 b. \end{aligned}$$

□

Bài 2. Chứng minh các đẳng thức sau đây:

a) $\cos a + \cos b + \sin(a+b) = 4 \cos \frac{a+b}{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right) \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{b}{2}\right)$

b) $\sin^2 a + \sin^2 b + 2 \sin a \sin b \cos(a+b) = \sin^2(a+b)$

c) $\sin \left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \cos \left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \cos \left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \cos \left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = \cos x$

Lời giải.

a) Chứng minh $\cos a + \cos b + \sin(a+b) = 4 \cos \frac{a+b}{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right) \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{b}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } & \cos a + \cos b + \sin(a+b) = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} + 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a+b}{2} \\ &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \left(\cos \frac{a-b}{2} + \sin \frac{a+b}{2} \right) = 2 \cos \frac{a+b}{2} \left(\sin \frac{\pi - a + b}{2} + \sin \frac{a+b}{2} \right) \end{aligned}$$

$$= 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{b}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2} \right).$$

b) Chứng minh $\sin^2 a + \sin^2 b + 2 \sin a \sin b \cos(a+b) = \sin^2(a+b)$.

$$\begin{aligned} & \text{Ta có } \sin^2 a + \sin^2 b + 2 \sin a \sin b \cos(a+b) \\ &= \left[\frac{1 - \cos 2a}{2} + \frac{1 - \cos 2b}{2} \right] + 2 \sin a \sin b \cos(a+b) \\ &= \left[1 - \frac{1}{2} (\cos 2a + \cos 2b) \right] + [\cos(a-b) - \cos(a+b)] \cos(a+b) \\ &= [1 - \cos(a+b) \cos(a-b)] + [\cos(a-b) \cos(a+b) - \cos^2(a+b)] \\ &= 1 - \cos^2(a+b) = \sin^2(a+b). \end{aligned}$$

c) Chứng minh $\sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) - \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{3} - x \right) = \cos x$.

$$\begin{aligned} & \text{Ta có } \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) - \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{3} - x \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\sin \left(3x + \frac{\pi}{6} \right) + \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right] - \frac{1}{2} \left[\cos \left(x + \pi \right) + \cos \left(3x - \frac{\pi}{3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sin \left(3x + \frac{\pi}{6} \right) - \cos \left(3x - \frac{\pi}{3} \right) + \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) - \cos \left(x + \pi \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sin \left(3x + \frac{\pi}{6} \right) - \cos \left(\frac{\pi}{3} - 3x \right) + \cos x - (-\cos x) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sin \left(3x + \frac{\pi}{6} \right) - \sin \left(3x + \frac{\pi}{6} \right) + 2 \cos x \right] = \cos x. \end{aligned}$$

□

Bài 3. Chứng minh giá trị của biểu thức $A = \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} + x \right) + \cos \left(\frac{\pi}{6} + x \right) \cos \left(\frac{3\pi}{4} + x \right)$ không phụ thuộc vào biến số x :

Lời giải.

$$\begin{aligned} A &= \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} + x \right) + \cos \left(\frac{\pi}{6} + x \right) \cos \left(\frac{3\pi}{4} + x \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{12} - 2x \right) + \cos \frac{7\pi}{12} \right] + \frac{1}{2} \left[\cos \left(-\frac{7\pi}{12} \right) + \cos \left(\frac{11\pi}{12} + 2x \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{11\pi}{12} + 2x \right) + \cos \left(\frac{\pi}{12} - 2x \right) + \cos \frac{7\pi}{12} + \cos \left(-\frac{7\pi}{12} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[0 + 2 \cos \frac{7\pi}{12} \right] = \cos \frac{7\pi}{12} \quad \left(\text{do } \frac{11\pi}{12} + 2x + \frac{\pi}{12} - 2x = \pi \right) \end{aligned}$$

Vậy $A = \cos \frac{7\pi}{12}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (không phụ thuộc vào biến số x).

□

Bài 4. Chứng minh rằng các biểu thức dưới đây không phụ thuộc vào giá trị của biến số x .

a) $A = \sin^2 x + \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + x \right)$

b) $B = \frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x} \cdot \cot x$

Lời giải.

a) $A = \sin^2 x + \cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} + x \right) = \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1}{2} \left[\cos 2x + \cos \frac{2\pi}{3} \right]$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \cos 2x + \cos 2x - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} \quad (\text{không phụ thuộc vào } x).$$

b) $B = \frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x} \cdot \cot x = \frac{2 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x} \cdot \cot x$

$$= \frac{2 \sin x (\sin x + \cos x)}{2 \cos x (\cos x + \sin x)} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 1 \quad (\text{không phụ thuộc vào } x).$$

□

Dạng 7. Dùng công thức biến đổi để tính giá trị (rút gọn) của một biểu thức lượng giác

BÀI TẬP DẠNG 7

Ví dụ 1. Rút gọn biểu thức $A = 2 \sin x (\cos x + \cos 3x + \cos 5x)$.

Từ đó tính giá trị biểu thức $T = \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7}$

Lời giải.

Ta có $A = 2 \sin x (\cos x + \cos 3x + \cos 5x) = 2 \sin x \cos x + 2 \sin x \cos 3x + 2 \sin x \cos 5x$
 $= \sin 2x + \sin 4x + \sin(-2x) + \sin 6x + \sin(-4x) = \sin 2x + \sin 4x - \sin 2x + \sin 6x - \sin 4x$
 Như vậy, $A = 2 \sin x (\cos x + \cos 3x + \cos 5x) = \sin 6x$.

Áp dụng kết quả trên, ta có

$$T = \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} \Rightarrow T \cdot 2 \sin \frac{\pi}{7} = 2 \sin \frac{\pi}{7} \left(\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} \right) = \sin \frac{6\pi}{7}$$

$$\text{Do } \sin \frac{6\pi}{7} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{7} \right) = \sin \frac{\pi}{7} \text{ nên } T \cdot 2 \sin \frac{\pi}{7} = \sin \frac{\pi}{7} \Rightarrow T = \frac{1}{2}.$$

□

Ví dụ 2. Tính giá trị biểu thức $A = \sin^2 10^\circ + \cos 70^\circ \cos 50^\circ$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= \sin^2 10^\circ + \cos 70^\circ \cos 50^\circ = \frac{1 - \cos 20^\circ}{2} + \frac{1}{2} [\cos 120^\circ + \cos 20^\circ] \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 20^\circ + \frac{1}{2} \cos 120^\circ + \frac{1}{2} \cos 20^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 120^\circ = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } A = \sin^2 10^\circ + \cos 70^\circ \cos 50^\circ = \frac{1}{4}.$$

□

Ví dụ 3. Rút gọn các biểu thức sau đây:

$$\text{a) } A = \frac{\cos 4a - \cos 2a}{\sin 4a - \sin 2a}$$

$$\text{b) } B = \frac{\sin a - 2 \sin 2a + \sin 3a}{\cos a - 2 \cos 2a + \cos 3a}$$

Lời giải.

$$\text{a) Ta có } A = \frac{\cos 4a - \cos 2a}{\sin 4a - \sin 2a} = \frac{-2 \sin 3a \sin a}{2 \cos 3a \sin a} = -\frac{\sin 3a}{\cos 3a} = -\tan 3a.$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có } B &= \frac{\sin a - 2 \sin 2a + \sin 3a}{\cos a - 2 \cos 2a + \cos 3a} = \frac{(\sin 3a + \sin a) - 2 \sin 2a}{(\cos 3a + \cos a) - 2 \cos 2a} \\ &= \frac{2 \sin 2a \cos a - 2 \sin 2a}{2 \cos 2a (\cos a - 1)} = \frac{2 \sin 2a (\cos a - 1)}{2 \cos 2a (\cos a - 1)} = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \tan 2a. \end{aligned}$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tính giá trị các biểu thức sau đây:

$$\text{a) } A = \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12}$$

$$\text{b) } B = \cos \frac{11\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12}$$

- c) $C = \cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5}$
d) $D = \cos 35^\circ + \cos 85^\circ - \cos 25^\circ$
e) $E = \cos 130^\circ + \cos 110^\circ + \sin 100^\circ$
f) $F = \tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ$
g) $G = \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9}$
h) $H = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$
i) $I = \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7}$
j) $J = \cos 36^\circ \cos 72^\circ$
k) $K = \cos 36^\circ - \sin 18^\circ$
l) $L = \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5}$
m) $M = \frac{1}{\sin 10^\circ} - 4 \sin 70^\circ$

Lời giải.

- a) $A = \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} \left[\cos \left(-\frac{4\pi}{12} \right) - \cos \frac{6\pi}{12} \right] = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{2} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{1}{4}.$
b) $B = \cos \frac{11\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{6\pi}{12} + \cos \frac{16\pi}{12} \right) = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{4\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \left(0 - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{4}.$
c) $C = \cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} \Rightarrow 2 \sin \frac{\pi}{5} \cdot C = 2 \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} - 2 \sin \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{2\pi}{5}$
 $\Rightarrow 2 \sin \frac{\pi}{5} \cdot C = \sin \frac{2\pi}{5} - \left[\sin \frac{3\pi}{5} + \sin \left(-\frac{\pi}{5} \right) \right] = \sin \frac{2\pi}{5} - \sin \frac{3\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5}$
 $\Rightarrow 2 \sin \frac{\pi}{5} \cdot C = \sin \frac{\pi}{5} \Rightarrow C = \frac{1}{2} \left(\text{do } \frac{2\pi}{5} + \frac{3\pi}{5} = \pi \Rightarrow \sin \frac{2\pi}{5} = \sin \frac{3\pi}{5} \right)$
d) $D = \cos 35^\circ + \cos 85^\circ - \cos 25^\circ = 2 \cos 60^\circ \cos (-25^\circ) - \cos 25^\circ = \cos 25^\circ - \cos 25^\circ = 0$
e) $E = \cos 130^\circ + \cos 110^\circ + \sin 100^\circ = 2 \cos 120^\circ \cos 10^\circ + \cos 10^\circ = -\cos 10^\circ + \cos 10^\circ = 0$
f) $F = \tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ = \tan 9^\circ + \tan 81^\circ - (\tan 27^\circ + \tan 63^\circ)$
 $= \frac{\sin 9^\circ}{\cos 9^\circ} + \frac{\sin 81^\circ}{\cos 81^\circ} - \left(\frac{\sin 27^\circ}{\cos 27^\circ} + \frac{\sin 63^\circ}{\cos 63^\circ} \right)$
 $= \frac{\sin 9^\circ \cos 81^\circ + \cos 9^\circ \sin 81^\circ}{\sin 9^\circ \cos 81^\circ + \cos 9^\circ \sin 81^\circ} - \frac{\sin 27^\circ \cos 63^\circ + \cos 27^\circ \sin 63^\circ}{\sin 27^\circ \cos 63^\circ + \cos 27^\circ \sin 63^\circ}$
 $= \frac{\sin 90^\circ}{\sin 90^\circ} - \frac{\sin 90^\circ}{\sin 90^\circ} = \frac{2}{2} - \frac{2}{2} = \frac{2(\sin 54^\circ - \sin 18^\circ)}{\sin 54^\circ \sin 18^\circ}$
 $= \frac{\cos 9^\circ \cos 81^\circ}{\cos 27^\circ \sin 27^\circ} = \frac{2}{\sin 18^\circ} - \frac{2}{\sin 54^\circ} = \frac{2(\sin 54^\circ - \sin 18^\circ)}{\sin 54^\circ \sin 18^\circ}$
 $= \frac{\sin 90^\circ}{\sin 90^\circ} = 4 \text{ (do } \cos 36^\circ = \sin 54^\circ \text{)}.$
g) $G = \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9} = \cos \frac{\pi}{9} + 2 \cos \frac{6\pi}{9} \cos \frac{\pi}{9} = \cos \frac{\pi}{9} + 2 \left(-\frac{1}{2} \right) \cos \frac{\pi}{9} = 0$
h) $H = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$
 $\Rightarrow H \cdot \sin \frac{\pi}{7} = \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7}$
 $= \frac{1}{2} \left[\sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{5\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{7} + \sin \frac{7\pi}{7} - \sin \frac{5\pi}{7} \right]$
 $= \frac{1}{2} \left(-\sin \frac{\pi}{7} \right) = -\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{7}$
 $\Rightarrow H = -\frac{1}{2}$
i) $I = \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = -\cos \frac{6\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} - \cos \frac{4\pi}{7}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow I \cdot \left(-\sin \frac{\pi}{7}\right) &= \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} + \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \\ &= \frac{1}{2} \left[\sin \frac{7\pi}{7} - \sin \frac{5\pi}{7} + \sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{5\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{7} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(-\sin \frac{\pi}{7}\right)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}$$

j) Ta có $J = \cos 36^\circ \cos 72^\circ \Rightarrow J \cdot \sin 36^\circ = \sin 36^\circ \cos 36^\circ \cos 72^\circ$

$$\Rightarrow J \cdot \sin 36^\circ = \frac{1}{2} \sin 72^\circ \cos 72^\circ = \frac{1}{4} \sin 144^\circ = \frac{1}{4} \sin 36^\circ$$

Vậy $J = \frac{1}{4}$

k) $K = \cos 36^\circ - \sin 18^\circ = -\cos 144^\circ - \cos 72^\circ$

$$\begin{aligned}\Rightarrow K \cdot (-\sin 36^\circ) &= \sin 36^\circ \cos 144^\circ + \sin 36^\circ \cos 72^\circ \\ &= \frac{1}{2} [\sin 180^\circ - \sin 108^\circ + \sin 108^\circ - \sin 36^\circ] = \frac{1}{2} (-\sin 36^\circ)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2}$$

l) $L = \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow L \cdot \sin \frac{\pi}{5} &= \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{4\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{6\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{8\pi}{5} \\ \Rightarrow L \cdot \sin \frac{\pi}{5} &= \frac{1}{2} \left[\sin \frac{3\pi}{5} - \sin \frac{\pi}{5} + \sin \frac{5\pi}{5} - \sin \frac{3\pi}{5} + \sin \frac{7\pi}{5} - \sin \frac{5\pi}{5} + \sin \frac{9\pi}{5} - \sin \frac{7\pi}{5} \right] \\ \Rightarrow L \cdot \sin \frac{\pi}{5} &= \frac{1}{2} \left[\sin \frac{9\pi}{5} - \sin \frac{\pi}{5} \right] = \frac{1}{2} \left[-\sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{\pi}{5} \right] = -\sin \frac{\pi}{5} \\ \Rightarrow L &= -1\end{aligned}$$

m) $M = \frac{1}{\sin 10^\circ} - 4 \sin 70^\circ \Rightarrow M \cdot \sin 10^\circ = 1 - 4 \sin 70^\circ \sin 10^\circ$
 $\Rightarrow M \cdot \sin 10^\circ = 1 - 2(\cos 60^\circ - \cos 80^\circ) = 1 - 1 + \sin 10^\circ = \sin 10^\circ$
 $\Rightarrow M = 1$

□

Bài 2. Cho $a = \frac{\pi}{11}$. Hãy tính giá trị của các biểu thức sau đây

a) $A = \sin a + \sin 2a + \sin 3a + \sin 4a + \sin 5a$

b) $B = \cos 2a + \cos 4a + \cos 6a + \cos 8a + \cos 10a$

c) $C = \cos a + \cos \left(a + \frac{2\pi}{5}\right) + \cos \left(a + \frac{4\pi}{5}\right) + \cos \left(a + \frac{6\pi}{5}\right) + \cos \left(a + \frac{8\pi}{5}\right)$

Lời giải.

a) Ta có $A = \sin a + \sin 2a + \sin 3a + \sin 4a + \sin 5a$

$$\begin{aligned}\Rightarrow 2 \sin \frac{a}{2} \cdot A &= 2 \sin a \sin \frac{a}{2} + 2 \sin 2a \sin \frac{a}{2} + 2 \sin 3a \sin \frac{a}{2} + 2 \sin 4a \sin \frac{a}{2} + 2 \sin 5a \sin \frac{a}{2} \\ \Rightarrow 2 \sin \frac{a}{2} \cdot A &= \cos \frac{a}{2} - \cos \frac{3a}{2} + \cos \frac{3a}{2} - \cos \frac{5a}{2} + \dots - \cos \frac{9a}{2} + \cos \frac{9a}{2} - \cos \frac{11a}{2} \\ \Rightarrow 2 \sin \frac{a}{2} \cdot A &= \cos \frac{a}{2} - \cos \frac{11a}{2}.\end{aligned}$$

Với $a = \frac{\pi}{11}$ ta có $2 \sin \frac{\pi}{22} \cdot A = \cos \frac{\pi}{22} - \cos \frac{\pi}{2} = \cos \frac{\pi}{22} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cot \frac{\pi}{22}$.

b) Ta có $B = \cos 2a + \cos 4a + \cos 6a + \cos 8a + \cos 10a$

$$\Rightarrow 2B \cdot \sin a = 2 \sin a \cos 2a + 2 \sin a \cos 4a + 2 \sin a \cos 6a + 2 \sin a \cos 8a + 2 \sin a \cos 10a$$

$$\Rightarrow 2B \cdot \sin a = -\sin a + \sin 3a - \sin 3a + \sin 5a + \dots - \sin 9a + \sin 11a$$

$$\Rightarrow 2B \cdot \sin a = -\sin a + \sin 11a.$$

$$\text{Với } a = \frac{\pi}{11} \text{ ta có } 2 \sin \frac{\pi}{11} \cdot B = -\sin \frac{\pi}{11} + \sin \pi \Rightarrow B = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{c) Ta có } C = \cos a + \cos \left(a + \frac{2\pi}{5}\right) + \cos \left(a + \frac{4\pi}{5}\right) + \cos \left(a + \frac{6\pi}{5}\right) + \cos \left(a + \frac{8\pi}{5}\right)$$

$$\Rightarrow 2C \cdot \sin \frac{\pi}{5} = 2 \sin \frac{\pi}{5} \cos a + 2 \sin \frac{\pi}{5} \cos \left(a + \frac{2\pi}{5}\right) + 2 \sin \frac{\pi}{5} \cos \left(a + \frac{4\pi}{5}\right) + 2 \sin \frac{\pi}{5} \cos \left(a + \frac{6\pi}{5}\right) + 2 \sin \frac{\pi}{5} \cos \left(a + \frac{8\pi}{5}\right)$$

$$= -\sin \left(a - \frac{\pi}{5}\right) + \sin \left(a + \frac{\pi}{5}\right) - \sin \left(a + \frac{\pi}{5}\right) + \sin \left(a + \frac{3\pi}{5}\right) - \sin \left(a + \frac{3\pi}{5}\right) + \sin \left(a + \frac{5\pi}{5}\right) - \sin \left(a + \frac{5\pi}{5}\right) + \sin \left(a + \frac{7\pi}{5}\right) - \sin \left(a + \frac{7\pi}{5}\right) + \sin \left(a + \frac{9\pi}{5}\right)$$

$$\Rightarrow 2C \cdot \sin \frac{\pi}{5} = \sin \left(a + \frac{9\pi}{5}\right) - \sin \left(a - \frac{\pi}{5}\right) = 2 \cos \left(a + \frac{4\pi}{5}\right) \sin \pi = 0 \Rightarrow C = 0.$$

□

Bài 3. Rút gọn các biểu thức dưới đây:

$$\text{a) } A = 4 \sin \frac{x}{3} \sin \frac{x+\pi}{3} \sin \frac{x-\pi}{3}$$

$$\text{b) } B = 4 \cos \frac{x}{3} \cos \frac{x+\pi}{3} \cos \frac{x-\pi}{3}$$

$$\text{c) } C = \sin^2 \left(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{2}\right) - \sin^2 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2}\right)$$

$$\text{d) } D = \frac{\sin x + \sin 4x + \sin 7x}{\cos x + \cos 4x + \cos 7x}$$

$$\text{e) } E = \frac{\cos x - \cos 2x + \cos 3x}{\sin x - \sin 2x + \sin 3x}$$

$$\text{f) } F = \frac{\sin^2 4x - \sin^2 2x}{\cos^2 x - \cos^2 2x}$$

$$\text{g) } G = \frac{\sin(a+b) \sin(a-b)}{\cos a + \cos b}$$

$$\text{h) } H = \frac{\cos^2 a - \cos^2 b}{\sin(a-b)}$$

$$\text{i) } I = \sin x (1 + 2 \cos 2x + 2 \cos 4x + 2 \cos 6x)$$

Lời giải.

$$\text{a) } A = 4 \sin \frac{x}{3} \sin \frac{x+\pi}{3} \sin \frac{x-\pi}{3} = 4 \sin \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{2} \left[\cos \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{2x}{3} \right] = -\sin \frac{x}{3} + 2 \sin \frac{x}{3} \cos \frac{2x}{3} \Rightarrow A = -\sin \frac{x}{3} + \sin x - \sin \frac{x}{3} \Rightarrow A = \sin x$$

$$\text{b) } B = 4 \cos \frac{x}{3} \cos \frac{x+\pi}{3} \cos \frac{x-\pi}{3} = 4 \cos \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{2} \left[\cos \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{2x}{3} \right] = -\cos \frac{x}{3} + 2 \cos \frac{x}{3} \cos \frac{2x}{3} \Rightarrow B = -\cos \frac{x}{3} + \cos x + \cos \frac{x}{3} \Rightarrow B = \cos x$$

$$\text{c) } C = \sin^2 \left(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{2}\right) - \sin^2 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos \left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{2} - \frac{1 - \cos \left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{2}$$

$$\Rightarrow C = 1 - \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos \left(\frac{\pi}{4} - x\right) \right] = 1 - \cos \frac{\pi}{4} \cos x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x$$

$$\text{d) } D = \frac{\sin x + \sin 4x + \sin 7x}{\cos x + \cos 4x + \cos 7x} = \frac{\sin 7x + \sin x + \sin 4x}{\cos 7x + \cos x + \cos 4x} = \frac{2 \sin 4x \cos 3x + \sin 4x}{2 \cos 4x \cos 3x + \cos 4x}$$

$$\Rightarrow D = \frac{\sin 4x (2 \cos 3x + 1)}{\cos 4x (2 \cos 3x + 1)} = \frac{\sin 4x}{\cos 4x} = \tan 4x$$

$$\text{e) } E = \frac{\cos x - \cos 2x + \cos 3x}{\sin x - \sin 2x + \sin 3x} = \frac{\cos 3x + \cos x - \cos 2x}{\sin 3x + \sin x - \sin 2x} = \frac{2 \cos 2x \cos x - \cos 2x}{2 \sin 2x \cos x - \sin 2x}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\cos 2x (2 \cos x - 1)}{\sin 2x (2 \cos x - 1)} = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \cot 2x$$

$$\begin{aligned} \text{f) } F &= \frac{\sin^2 4x - \sin^2 2x}{\cos^2 x - \cos^2 2x} = \frac{2 \sin^2 4x - 2 \sin^2 2x}{2 \cos^2 x - 2 \cos^2 2x} = \frac{(1 - \cos 8x) - (1 - \cos 4x)}{(1 + \cos 2x) - (1 + \cos 4x)} = \frac{\cos 4x - \cos 8x}{\cos 2x - \cos 4x} \\ &\Rightarrow F = \frac{-2 \sin 6x \sin(-x)}{-2 \sin 3x \sin(-x)} = \frac{\sin 6x}{\sin 3x} = \frac{2 \sin 3x \cos 3x}{\sin 3x} = 2 \cos 3x \\ \text{g) } G &= \frac{\sin(a+b) \sin(a-b)}{\cos a + \cos b} = \frac{2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a+b}{2} \cdot 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a-b}{2}}{2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}} \\ &\Rightarrow G = 2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} = \cos b - \cos a \\ \text{h) } H &= \frac{\cos^2 a - \cos^2 b}{\sin(a-b)} = \frac{(1 + \cos 2a) - (1 + \cos 2b)}{2 \sin(a-b)} = \frac{\cos 2a - \cos 2b}{2 \sin(a-b)} \\ &= \frac{-2 \sin(a+b) \sin(a-b)}{2 \sin(a-b)} = -\sin(a+b) \\ \text{i) } I &= \sin x (1 + 2 \cos 2x + 2 \cos 4x + 2 \cos 6x) \\ &= \sin x + 2 \sin x \cos 2x + 2 \sin x \cos 4x + 2 \sin x \cos 6x \\ &= \sin x - \sin x + \sin 3x - \sin 3x + \sin 5x - \sin 5x + \sin 7x = \sin 7x \end{aligned}$$

□

Dạng 8. Nhận dạng tam giác. Một số hệ thức trong tam giác

- Biến đổi, dẫn đến $\sin A = 1$ hoặc $\cos A = 0$ sẽ có $A = 90^\circ$.
- Nếu $a^2 + b^2 = c^2$ thì $C = 90^\circ$.
- Nếu $\sin(A - B) = 0$ hoặc $\cos(A - B) = 1$ thì $A = B$, suy ra tam giác cân.
- Tam giác cân mà có một góc bằng 60° là tam giác đều.

Một số lưu ý khi giả thiết cho A, B, C là ba góc của một tam giác

- $A + B + C = 180^\circ \Rightarrow (A + B)$ và C bù nhau, tương tự với $(B + C)$ và $A, \dots$
- $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90^\circ \Rightarrow \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)$ và $\frac{C}{2}$ phụ nhau, tương tự với $\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right)$ và $\frac{A}{2}, \dots$
- Các góc A, B, C đều có số đo trong khoảng $(0^\circ; 180^\circ)$
- Các góc $\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2}$ đều là các góc nhọn nên có các giá trị lượng giác đều dương.

BÀI TẬP DẠNG 8

Ví dụ 1. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ vuông khi $\sin A \sin C = \cos A \cos C$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \sin A \sin C &= \cos A \cos C \Leftrightarrow \cos A \cos C - \sin A \sin C = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos(A + C) = 0 \Leftrightarrow -\cos B = 0 \Leftrightarrow \cos B = 0 \Leftrightarrow B = 90^\circ \end{aligned}$$

Vậy tam giác ABC vuông tại B .

□

Ví dụ 2. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ cân khi $2 \sin A \sin B = 1 + \cos C$. (1)

Lời giải.

Ta có (1) tương đương với

$$\begin{aligned}\cos(A - B) - \cos(A + B) &= 1 + \cos C \\ \Leftrightarrow \cos(A - B) + \cos C &= 1 + \cos C \\ \Leftrightarrow \cos(A - B) &= 1 \Leftrightarrow A - B = 0 \Leftrightarrow A = B.\end{aligned}$$

Vậy tam giác ABC cân tại C . □

Ví dụ 3. Cho $\triangle ABC$ với diện tích S và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Chứng minh rằng:

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = \frac{2S}{R^2}.$$

Lời giải.

Đặt $Q = \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$. Khi đó

$$\begin{aligned}Q &= 2 \sin(A + B) \cos(A - B) + 2 \sin C \cos C \\ &= 2 \sin C \cos(A - B) + 2 \sin C \cos C \\ &= 2 \sin C [\cos(A - B) + \cos C] \\ &= 2 \sin C [\cos(A - B) - \cos(A + B)] = 4 \sin A \sin B \sin C \\ &= 4 \frac{a}{2R} \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R} \cdot \frac{2}{R^2} = \frac{2S}{R^2}.\end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh. □

Ví dụ 4. Cho $\triangle ABC$. Chứng minh rằng

$$a \sin(B - C) + b \sin(C - A) + c \sin(A - B) = 0.$$

Lời giải.

Đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$2R[\sin A \sin(B - C) + \sin B \sin(C - A) + \sin C \sin(A - B)] = 0.$$

Mà ta có

$$\begin{aligned}\sin A \sin(B - C) &= \sin(B + C) \sin(B - C) = -(\cos 2B - \cos 2C) \\ \sin B \sin(C - A) &= \sin(C + A) \sin(C - A) = -(\cos 2C - \cos 2A) \\ \sin C \sin(A - B) &= \sin(A + B) \sin(A - B) = -(\cos 2A - \cos 2B).\end{aligned}$$

Cộng lại ta được:

$$\sin A \sin(B - C) + \sin B \sin(C - A) + \sin C \sin(A - B) = 0.$$

Từ đây ta có điều phải chứng minh. □

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b}{a-b} \cdot \tan \frac{A-B}{2} = \tan \frac{A+B}{2}.$$

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{a-b} \cdot \tan \frac{A-B}{2} &= \frac{2R(\sin A + \sin B)}{2R(\sin A - \sin B)} \cdot \tan \frac{A-B}{2} \\ &= \frac{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}}{2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{A-B}{2}} = \tan \frac{A+B}{2}. \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh. □

Ví dụ 6. Cho A, B, C và a, b, c là các góc và các cạnh của $\triangle ABC$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2 \sin(A-B)}{\sin C} = \frac{a^2 - b^2}{c^2}.$$

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a^2 - b^2}{c^2} &= \frac{4R^2 (\sin^2 A - \sin^2 B)}{4R^2 \sin^2 C} = \frac{1 - \cos 2A - (1 - \cos 2B)}{\sin^2 C} \\ &= \frac{\cos 2B - \cos 2A}{\sin^2 C} = \frac{-2 \sin(B+A) \sin(B-A)}{\sin^2 C} \\ &= \frac{2 \sin C \sin(A-B)}{\sin^2 C} = \frac{2 \sin(A-B)}{\sin C}. \end{aligned}$$

Từ đây ta có điều phải chứng minh. □

Ví dụ 7. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có

$$\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin A + \sin B - \sin C &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} - \sin \left(2 \cdot \frac{C}{2} \right) \\ \text{Vì } \frac{A+B}{2} + \frac{C}{2} &= 90^\circ \text{ nên } \sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2} \text{ và } \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A+B}{2}. \\ \text{Từ đó } \sin A + \sin B - \sin C &= 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} - 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A+B}{2} \\ &= 2 \cos \frac{C}{2} \left[\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right] \end{aligned}$$

$$= 2 \cos \frac{C}{2} \cdot (-2) \sin \frac{A}{2} \sin \left(-\frac{B}{2} \right) = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$\text{Vậy } \sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

□

Ví dụ 8. Chứng minh rằng với mọi tam giác nhọn ABC ta luôn có

$$\frac{\sin A + \sin B - \sin C}{\cos A + \cos B - \cos C + 1} = \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{\sin A + \sin B - \sin C}{\cos A + \cos B - \cos C + 1} &= \frac{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} - \sin \left(2 \cdot \frac{C}{2} \right)}{2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 1 - \cos \left(2 \cdot \frac{C}{2} \right)} \\ &= \frac{2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} - 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}{2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin^2 \frac{C}{2}} = \frac{2 \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right)}{2 \sin \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right)} \\ &= \cot \frac{C}{2} \frac{-2 \sin \frac{A}{2} \sin \left(-\frac{B}{2} \right)}{2 \cos \frac{A}{2} \cos \left(-\frac{B}{2} \right)} = \cot \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} = \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \frac{\sin A + \sin B - \sin C}{\cos A + \cos B - \cos C + 1} = \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}.$$

□

Ví dụ 9. Tam giác ABC là tam giác gì nếu $\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$?

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} &\Leftrightarrow \sin A = \frac{2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}}{2 \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}} \Leftrightarrow \sin A = \tan \frac{B+C}{2} \\ &\Leftrightarrow \sin \left(2 \cdot \frac{A}{2} \right) = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \right) \Leftrightarrow 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = \cot \frac{A}{2} \Leftrightarrow 2 \sin^2 \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = \cos \frac{A}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Do } 0^\circ < \frac{A}{2} < 90^\circ \text{ nên } \cos \frac{A}{2} \neq 0 \text{ và } \sin \frac{A}{2} > 0.$$

$$\text{Từ đó } 2 \sin^2 \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = \cos \frac{A}{2} \Leftrightarrow 2 \sin^2 \frac{A}{2} = 1 \Leftrightarrow \sin \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{A}{2} = 45^\circ \Leftrightarrow A = 90^\circ$$

Vậy ABC là tam giác vuông tại A .

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho A, B, C là 3 đỉnh của một tam giác. Chứng minh rằng

- $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$
- $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$
- $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$

- d) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 1 = -4 \cos A \cos B \cos C$
 e) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C$
 f) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C$
 g) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$
 h) $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1$

Lời giải.

- a) Chứng minh rằng $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$.
 Ta có $\sin A + \sin B + \sin C = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \sin \left(2 \cdot \frac{C}{2} \right)$
 $= 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} \left(\text{do } \frac{A+B}{2} + \frac{C}{2} = 90^\circ \right)$
 $= 2 \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right) \left(\text{do } \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A+B}{2} \right)$
 $= 2 \cos \frac{C}{2} \cdot 2 \cos \frac{A}{2} \cos \left(-\frac{B}{2} \right) = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$.
- b) Chứng minh rằng $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$
 Ta có $\cos A + \cos B + \cos C = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \cos \left(2 \cdot \frac{C}{2} \right)$
 $= 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2} \left(\text{do } \frac{A+B}{2} + \frac{C}{2} = 90^\circ \right)$
 $= 1 + 2 \sin \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right) \left(\text{do } \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A+B}{2} \right)$
 $= 1 + 2 \sin \frac{C}{2} (-2) \sin \frac{A}{2} \sin \left(-\frac{B}{2} \right) = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$.
- c) Chứng minh rằng $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$
 Ta có $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 2 \sin(A+B) \cos(A-B) + 2 \sin C \cos C$
 $= 2 \sin C \cos(A-B) - 2 \sin C \cos(A+B) \left(\text{do } A+B+C = 180^\circ \right)$
 $= 2 \sin C [\cos(A-B) - \cos(A+B)]$
 $= 2 \sin C \cdot (-2) \sin A \sin(-B) = 4 \sin A \sin B \sin C$.
- d) Chứng minh rằng $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 1 = -4 \cos A \cos B \cos C$.
 Ta có $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 1 = 2 \cos(A+B) \cos(A-B) + 2 \cos^2 C - 1 + 1$
 $= -2 \cos C \cos(A-B) - 2 \cos C \cos(A+B) \left(\text{do } A+B+C = 180^\circ \right)$
 $= -2 \cos C [\cos(A-B) + \cos(A+B)]$
 $= -2 \cos C \cdot 2 \cos A \cos(-B) = -4 \cos A \cos B \cos C$.
- e) Chứng minh rằng $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C$
 Ta có $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} + \frac{1 - \cos 2C}{2}$
 $= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} (\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} [2 \cos(A+B) \cos(A-B) + 2 \cos^2 C - 1]$
 $= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} [-2 \cos C \cos(A-B) - 2 \cos C \cos(A+B) - 1]$
 $= 2 + \cos C [\cos(A-B) + \cos(A+B)]$
 $= 2 + \cos C \cdot 2 \cos A \cos(-B) = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C$
- f) Chứng minh rằng $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C$
 Ta có $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \frac{1 + \cos 2A}{2} + \frac{1 + \cos 2B}{2} + \cos^2 C$

$$\begin{aligned}
 &= 1 + \frac{1}{2} (\cos 2A + \cos 2B) + \cos^2 C = 1 + \cos(A+B) \cos(A-B) + \cos^2 C \\
 &= 1 - \cos C \cos(A-B) - \cos C \cos(A+B) \quad (\text{do } A+B+C=180^\circ) \\
 &= 1 - \cos C [\cos(A-B) + \cos(A+B)] \\
 &= 1 - \cos C \cdot 2 \cos A \cos(-B) = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C
 \end{aligned}$$

g) Chứng minh rằng $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

$$\begin{aligned}
 &\text{Ta có Ta có } A+B+C=180^\circ \Rightarrow A+B=180^\circ-C \Rightarrow \tan(A+B) = \tan(180^\circ-C) \\
 &\Rightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C \Rightarrow \tan A + \tan B = -\tan C (1 - \tan A \tan B) \\
 &\Rightarrow \tan A + \tan B = -\tan C + \tan A \tan B \tan C \\
 &\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C.
 \end{aligned}$$

h) Chứng minh rằng $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1$

$$\begin{aligned}
 &\text{Ta có } A+B+C=180^\circ \Rightarrow \frac{A}{2} + \frac{B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2} \Rightarrow \tan\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \tan\left(90^\circ - \frac{C}{2}\right) \\
 &\Rightarrow \frac{\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2}}{1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}} = \cot \frac{C}{2} = \frac{1}{\tan \frac{C}{2}} \Rightarrow \tan \frac{C}{2} \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} \right) = 1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \\
 &\Rightarrow \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{B}{2} = 1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \\
 &\Rightarrow \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1.
 \end{aligned}$$

□

Bài 2. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng

$$\sin \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{a} \cdot \cos \frac{A}{2}.$$

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}
 \frac{b-c}{a} \cdot \cos \frac{A}{2} &= \frac{\sin B - \sin C}{\sin A} \cdot \cos \frac{A}{2} \\
 &= \frac{2 \cos \frac{B+C}{2} \sin \frac{B-C}{2}}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} \cdot \cos \frac{A}{2} = \sin \frac{B-C}{2}.
 \end{aligned}$$

Điều phải chứng minh. □

Bài 3. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ vuông khi

$$\frac{b}{\cos B} + \frac{c}{\cos C} = \frac{a}{\sin B \sin C}. \quad (1)$$

(ĐH Đà Nẵng 1997)

Lời giải.

Ta có

$$(1) \Leftrightarrow \frac{2R \sin B}{\cos B} + \frac{2R \sin C}{\cos C} = \frac{2R \sin A}{\sin B \sin C}$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \frac{\sin B}{\cos B} + \frac{\sin C}{\cos C} = \frac{\sin A}{\sin B \sin C} \\
 &\Leftrightarrow \frac{\sin B \cos C + \cos B \sin C}{\cos B \cos C} = \frac{\sin A}{\sin B \sin C} \\
 &\Leftrightarrow \frac{\sin(B+C)}{\cos B \cos C} = \frac{\sin A}{\sin B \sin C} \Leftrightarrow \frac{\sin A}{\cos B \cos C} = \frac{\sin A}{\sin B \sin C} \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{\cos B \cos C} = \frac{1}{\sin B \sin C} \Leftrightarrow \sin B \sin C = \cos B \cos C \\
 &\Leftrightarrow \cos B \cos C - \sin B \sin C = 0 \Leftrightarrow \cos(B+C) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \cos(\pi - A) = 0 \Leftrightarrow -\cos A = 0 \Leftrightarrow \cos A = 0 \Leftrightarrow A = 90^\circ.
 \end{aligned}$$

Vậy tam giác ABC vuông tại A . □

Bài 4. Cho a, b, A, B khác không và $aB + bA \neq 0$ sao cho

$$\frac{\sin(x-\alpha)}{\sin(x-\beta)} = \frac{a}{b}, \quad \frac{\cos(x-\alpha)}{\cos(x-\beta)} = \frac{A}{B}.$$

Chứng minh rằng: $\cos(\alpha - \beta) = \frac{aA + bB}{aB + bA}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}
 \frac{aA + bB}{aB + bA} &= \frac{aB \left(\frac{A}{B} + \frac{b}{a} \right)}{aB \left(1 + \frac{b}{a} \cdot \frac{A}{B} \right)} = \frac{\frac{\cos(x-\alpha)}{\cos(x-\beta)} + \frac{\sin(x-\beta)}{\sin(x-\alpha)}}{1 + \frac{\sin(x-\beta)}{\sin(x-\alpha)} \cdot \frac{\cos(x-\alpha)}{\cos(x-\beta)}} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} [\sin(2x-2\alpha) + \sin(2x-2\beta)]}{\sin(x-\alpha) \cos(x-\beta) + \cos(x-\alpha) \sin(x-\beta)} \\
 &= \frac{\sin(2x-\alpha-\beta) \cos(\alpha-\beta)}{\sin(x-\alpha+x-\beta)} = \cos(\alpha-\beta).
 \end{aligned}$$

Như vậy: $\cos(\alpha - \beta) = \frac{aA + bB}{aB + bA}$, điều phải chứng minh. □

Bài 5. Cho $\triangle ABC$ không tù, thỏa mãn điều kiện

$$\cos 2A + 2\sqrt{2} \cos B + 2\sqrt{2} \cos C = 3.$$

Tính ba góc của tam giác ABC .

(ĐH-2004A)

Lời giải.

Gọi $M = \cos 2A + 2\sqrt{2} \cos B + 2\sqrt{2} \cos C - 3$. Khi đó

$$\begin{aligned}
 M &= 2 \cos^2 A - 1 + 4\sqrt{2} \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} - 3 \\
 &= 2 \cos^2 A + 4\sqrt{2} \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} - 4.
 \end{aligned}$$

Do $\sin \frac{A}{2} > 0$, $0 < \cos \frac{B-C}{2} \leq 1$ nên

$$M \leq 2 \cos^2 A + 4\sqrt{2} \sin \frac{A}{2} - 4.$$

Mặt khác, do tam giác ABC không tù nên $\cos A \geq 0$, $\cos^2 A \leq \cos A$. Suy ra

$$\begin{aligned} M &\leq 2 \cos A + 4\sqrt{2} \sin \frac{A}{2} - 4 = 2 \left(1 - 2 \sin^2 \frac{A}{2} \right) + 4\sqrt{2} \sin \frac{A}{2} - 4 \\ &= -4 \sin^2 \frac{A}{2} + 4\sqrt{2} \sin \frac{A}{2} - 2 = -2 \left(\sqrt{2} \sin \frac{A}{2} - 1 \right)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Vậy $M \geq 0$, hay $\cos 2A + 2\sqrt{2} \cos B + 2\sqrt{2} \cos C \leq 3$. Theo giả thiết

$$M = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 A = \cos A \\ \cos \frac{B-C}{2} = 1 \\ \sin \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 90^\circ \\ B = C = 45^\circ. \end{cases}$$

□

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 6. Chứng minh $\frac{\sin^4 a + \cos^4 a - 1}{\sin^6 a + \cos^6 a - 1} = \frac{2}{3}$

Lời giải.

Ta có:

$$\sin^4 a + \cos^4 a - 1 = (\sin^2 a + \cos^2)^2 - 2 \sin^2 a \cos^2 a - 1 = -2 \sin^2 a \cos^2 a$$

$$\sin^6 a + \cos^6 a - 1$$

$$= (\sin^2 a + \cos^2 a)(\sin^4 a + \cos^4 a - \sin^2 a \cos^2 a) - 1$$

$$= (1 - 2 \sin^2 a \cos^2 a) - \sin^2 a \cos^2 a - 1$$

$$= -3 \sin^2 a \cos^2 a$$

$$\text{Do đó: } \frac{\sin^4 a + \cos^4 a - 1}{\sin^6 a + \cos^6 a - 1} = \frac{-2 \sin^2 a \cos^2 a}{-3 \sin^2 a \cos^2 a} = \frac{2}{3}$$

□

Bài 7. Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 + \cos x}{\sin x} \left[1 + \frac{(1 - \cos x)^2}{\sin^2 x} \right]$.

Tính giá trị A nếu $\cos x = -\frac{1}{2}$ và $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

Lời giải.

Ta có:

$$A = \frac{1 + \cos x}{\sin x} \left(\frac{\sin^2 x + 1 - 2 \cos x + \cos^2 x}{\sin^2 x} \right)$$

$$= \frac{1 + \cos x}{\sin x} \cdot \frac{2(1 - \cos x)}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\sin x}{2(1 - \cos^2 x)} \cdot \frac{\sin^2 x}{\sin^3 x} = \frac{2}{\sin x}$$

$$\text{Ta có: } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Do: } \frac{\pi}{2} < x < \pi \text{ nên } \sin x > 0$$

$$\text{Vậy } \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Do đó: } A = \frac{2}{\sin x} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

□

Bài 8. Chứng minh các biểu thức sau đây không phụ thuộc x :

a) $A = 2 \cos^4 x - \sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + 3 \sin^2 x$

b) $B = \frac{2}{\tan x - 1} + \frac{\cot x + 1}{\cot x - 1}$

Lời giải.

a) Ta có:

$$\begin{aligned} A &= 2 \cos^4 x - (1 - \cos^2 x)^2 + (1 - \cos^2 x) \cos^2 x + 3(1 - \cos^2 x) \\ &= 2 \cos^4 x - (1 - 2 \cos^2 x + \cos^4 x) + \cos^2 x - \cos^4 x + 3 - 3 \cos^2 x \\ &= 2 \text{ (không phụ thuộc } x). \end{aligned}$$

b) Điều kiện $\sin x \cdot \cos x \neq 0, \tan x \neq 1$

$$\begin{aligned} B &= \frac{2}{\tan x - 1} + \frac{\frac{1}{\tan x} + 1}{\frac{1}{\tan x} - 1} \\ &= \frac{2}{\tan x - 1} + \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} \\ &= \frac{2 - (1 + \tan x)}{\tan x - 1} = \frac{1 - \tan x}{\tan x - 1} = -1. \end{aligned}$$

□

Bài 9. Chứng minh $A = \sin^4 \frac{\pi}{16} + \sin^4 \frac{3\pi}{16} + \sin^4 \frac{5\pi}{16} + \sin^4 \frac{7\pi}{16} = \frac{3}{2}$

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} \sin \frac{7\pi}{16} &= \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{16} \right) = \cos \frac{\pi}{16} \\ \sin \frac{5\pi}{16} &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{16} \right) = \cos \frac{3\pi}{16} \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác: } \sin^4 a + \cos^4 a = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2a.$$

Do đó:

$$\begin{aligned} A &= \sin^4 \frac{\pi}{16} + \sin^4 \frac{7\pi}{16} + \sin^4 \frac{3\pi}{16} + \sin^4 \frac{5\pi}{16} \\ &= \left(\sin^4 \frac{\pi}{16} + \cos^4 \frac{\pi}{16} \right) + \left(\sin^4 \frac{3\pi}{16} + \cos^4 \frac{3\pi}{16} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{8} \right) + \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{3\pi}{8} \right) \\ &= 2 - \frac{1}{2} \left(\sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} \right) \\ &= 2 - \frac{1}{2} \left(\sin^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8} \right) \left(\sin \frac{3\pi}{8} = \cos \frac{\pi}{8} \right) \\ &= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

□

Bài 10. Chứng minh: $16 \sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = 1$

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\cos 10^\circ} (16 \sin 10^\circ \cos 10^\circ) \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ \\ &= \frac{1}{\cos 10^\circ} (8 \sin 20^\circ) \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 20^\circ \\ &= \frac{1}{\cos 10^\circ} (4 \sin 20^\circ \cos 20^\circ) \cdot \cos 40^\circ \\ &= \frac{1}{\cos 10^\circ} \cdot 2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ \\ &= \frac{1}{\cos 10^\circ} \sin 80^\circ = \frac{\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ} = 1 \end{aligned}$$

□

Bài 11. Chứng minh: $\cos^2 x + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} + x\right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = \frac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} &\cos^2 x + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} + x\right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - x\right) \\ &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) + \frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(2x + \frac{4\pi}{3}\right)\right] + \frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right)\right] \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left[\cos 2x + \cos \left(2x + \frac{4\pi}{3}\right) + \cos \left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right)\right] \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left(\cos 2x + 2 \cos 2x \cdot \cos \frac{4\pi}{3}\right) \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} (\cos 2x - \cos 2x) \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

□

Bài 12. Chứng minh: $\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \frac{1}{\sin 8x} + \frac{1}{\sin 16x} = \cot x - \cot 16x$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \cot a - \cot b = \frac{\cos a}{\sin a} - \frac{\cos b}{\sin b} = \frac{\sin b \cos a - \sin a \cos b}{\sin a \sin b} = \frac{\sin(b-a)}{\sin a \sin b}$$

$$\text{Do đó: } \cot x - \cot 2x = \frac{\sin(2x-x)}{\sin x \sin 2x} = \frac{1}{\sin 2x}$$

Tương tự:

$$\cot 2x - \cot 4x = \frac{1}{\sin 4x}$$

$$\cot 4x - \cot 8x = \frac{1}{\sin 8x}$$

$$\cot 8x - \cot 16x = \frac{1}{\sin 16x}$$

Cộng vế theo vế các đẳng thức trên ta được:

$$\cot x - \cot 16x = \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \frac{1}{\sin 8x} + \frac{1}{\sin 16x}.$$

□

Bài 13. Chứng minh: $8 \sin^3 18^\circ + 8 \sin^2 18^\circ = 1$

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \sin 18^\circ = \cos 72^\circ$$

$$\Leftrightarrow \sin 18^\circ = 2 \cos^2 36^\circ - 1$$

$$\Leftrightarrow \sin 18^\circ = 2(1 - 2 \sin^2 18^\circ)^2 - 1$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \sin 18^\circ &= 2(1 - 4\sin^2 18^\circ + 4\sin^4 18^\circ) - 1 \\ \Leftrightarrow 8\sin^4 18^\circ - 8\sin^2 18^\circ - \sin 18^\circ + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\sin 18^\circ - 1)(8\sin^3 18^\circ + 8\sin^2 18^\circ - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 8\sin^3 18^\circ + 8\sin^2 18^\circ - 1 &= 0 \text{ (do } 0 < \sin 18^\circ < 1\text{).}\end{aligned}$$

□

Bài 14. Chứng minh: $\sin 3x \cdot \sin^3 x + \cos 3x \cdot \cos^3 x = \cos^3 2x$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}&\sin 3x \cdot \sin^3 x + \cos 3x \cdot \cos^3 x \\ &= \sin 3x \left(\frac{3\sin x - \sin 3x}{4} \right) + \cos 3x \left(\frac{3\cos x + \cos 3x}{4} \right) \\ &= \frac{3}{4}(\sin 3x \sin x + \cos 3x \cos x) + \frac{1}{4}(\cos^2 3x - \sin^2 3x) \\ &= \frac{3}{4}\cos(3x - x) + \frac{1}{4}\cos 6x \\ &= \frac{1}{4}(3\cos 2x + \cos(3 \cdot 2x)) \\ &= \frac{1}{4}(3\cos 2x + 4\cos^3 2x - 3\cos 2x) \\ &= \cos^3 2x.\end{aligned}$$

□

Bài 15. Tính $P = \sin^2 50^\circ + \sin^2 70^\circ - \cos 50^\circ \cos 70^\circ$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}P &= \frac{1}{2}(1 - \cos 100^\circ) + \frac{1}{2}(1 - \cos 140^\circ) - \frac{1}{2}(\cos 120^\circ + \cos 20^\circ) \\ &= 1 - \frac{1}{2}(\cos 100^\circ + \cos 140^\circ) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \cos 20^\circ\right) \\ &= 1 - (\cos 120^\circ \cos 20^\circ) + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 20^\circ \\ &= \frac{5}{4} + \frac{1}{2}\cos 20^\circ - \frac{1}{2}\cos 20^\circ = \frac{5}{4}.\end{aligned}$$

□

Bài 16. Tính: $P = \cos 12^\circ + \cos 18^\circ - 4\cos 15^\circ \cdot \cos 21^\circ \cdot \cos 24^\circ$

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}&\cos 12^\circ + \cos 18^\circ - 4\cos 15^\circ(\cos 21^\circ \cos 24^\circ) \\ &= 2\cos 15^\circ \cos 3^\circ - 2\cos 15^\circ(\cos 45^\circ + \cos 3^\circ) \\ &= 2\cos 15^\circ \cos 3^\circ - 2\cos 15^\circ \cos 45^\circ - 2\cos 15^\circ \cos 3^\circ \\ &= -2\cos 15^\circ \cos 45^\circ \\ &= -(\cos 60^\circ + \cos 30^\circ) \\ &= -\frac{\sqrt{3} + 1}{2}\end{aligned}$$

□

Bài 17. Cho $\triangle ABC$ tùy ý với ba góc đều là nhọn. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$.

Lời giải.

Ta có: $A + B = \pi - C$

Nên: $\tan(A + B) = -\tan C$

$$\Leftrightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B} = -\tan C$$

$$\Leftrightarrow \tan A + \tan B = -\tan C + \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$$

Vậy $P = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C = \tan A + \tan B + \tan C$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương $\tan A, \tan B, \tan C$ ta được:

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt[3]{\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C}$$

$$\Leftrightarrow P \geq 3\sqrt[3]{P}$$

$$\Leftrightarrow P \geq 3\sqrt{3}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow A = B = C = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Do đó: } \min P = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow A = B = C = \frac{\pi}{3}.$$

□

Bài 18. Chứng minh: $8 + 4 \tan \frac{\pi}{8} + 2 \tan \frac{\pi}{16} + \tan \frac{\pi}{32} = \cot \frac{\pi}{32}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\cot a - \tan a = \frac{\cos a}{\sin a} - \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\cos^2 a - \sin^2 a}{\sin a \cos a} = \frac{\cos 2a}{\frac{1}{2} \sin 2a} = 2 \cot 2a.$$

Do đó:

$$\begin{aligned} & \cot \frac{\pi}{32} - \tan \frac{\pi}{32} - 2 \tan \frac{\pi}{16} - 4 \tan \frac{\pi}{8} \\ &= 2 \cot \frac{\pi}{16} - 2 \tan \frac{\pi}{16} - 4 \tan \frac{\pi}{8} \\ &= 4 \cot \frac{\pi}{8} - 4 \tan \frac{\pi}{8} \\ &= 8 \cot \frac{\pi}{4} = 8 \Rightarrow \text{đpcm.} \end{aligned}$$

□

Bài 19. Cho $\cos x = \frac{3}{4}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$; $\sin y = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < y < \pi$. Hãy tính

$$\cos 2x, \sin 2x, \sin 2y, \cos 2y, \cos(x + y), \sin(x - y).$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 0 < x < \frac{\pi}{2} &\Rightarrow \sin x > 0 \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{7}}{4} \\ \frac{\pi}{2} < y < \pi &\Rightarrow \cos y < 0 \Rightarrow \cos y = -\frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{aligned} \cos 2x &= 2 \cos^2 x - 1 = 2 \cdot \frac{9}{16} - 1 = \frac{1}{8} \\ \sin 2x &= 2 \sin x \cos x = 2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{8} \\ \cos 2y &= 2 \cos^2 y - 1 = 2 \cdot \frac{16}{25} - 1 = \frac{7}{25} \end{aligned}$$

$$\sin 2y = 2 \sin y \cos y = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) - \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{3}{5} = -\frac{12 + 3\sqrt{7}}{20}$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y = \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) - \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = -\frac{4\sqrt{7} + 9}{20}.$$

□

Bài 20. Chứng minh rằng

$$a) \quad \sin 3x = \sin x (4 \cos^2 x - 1); \quad b) \quad \sin 4x = \sin x (8 \cos^3 x - 4 \cos x).$$

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} \sin 3x &= \sin(2x + x) = \sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x \\ &= \sin x (2 \cos^2 x - 1) + 2 \sin x \cos^2 x = \sin x (4 \cos^2 x - 1). \end{aligned}$$

b) Ta có

$$\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x = \sin x \cdot 4 \cos x (2 \cos^2 x - 1) = \sin x (8 \cos^3 x - 4 \cos x).$$

□

Bài 21. Cho α là góc lượng giác tùy ý, $\alpha \neq \frac{3k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Chứng minh

$$\left(\cot \frac{\alpha}{3} - \tan \frac{\alpha}{3}\right) \tan \frac{2\alpha}{3} = 2.$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \left(\cot \frac{\alpha}{3} - \tan \frac{\alpha}{3}\right) \tan \frac{2\alpha}{3} &= \left(\frac{\cos \frac{\alpha}{3}}{\sin \frac{\alpha}{3}} - \frac{\sin \frac{\alpha}{3}}{\cos \frac{\alpha}{3}}\right) \cdot \tan \frac{2\alpha}{3} \\ &= \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{3} - \sin^2 \frac{\alpha}{3}}{\sin \frac{\alpha}{3} \cos \frac{\alpha}{3}} \tan \frac{2\alpha}{3} = \frac{\cos \frac{2\alpha}{3}}{\frac{1}{2} \sin \frac{2\alpha}{3}} \tan \frac{2\alpha}{3} = 2 \cot \frac{2\alpha}{3} \tan \frac{2\alpha}{3} = 2. \end{aligned}$$

□

Bài 22. Chứng minh rằng $\frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x - 1} = \frac{2}{3}$.

(ĐHQG Hà Nội-1996)

Lời giải.

Ta có

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x, \quad \sin^6 x + \cos^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x.$$

Do đó

$$\frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x - 1} = \frac{-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x}{-\frac{3}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x} = \frac{\frac{1}{4}(-1 + \cos 4x)}{\frac{3}{8}(-1 + \cos 4x)} = \frac{2}{3}.$$

□

Bài 23. Chứng minh rằng với mọi x, y, z ta có

$$\cos^2 x + \cos^2 y - \cos^2 z - \cos^2(x + y + z) = 2 \cos(x + y) \sin(y + z) \sin(z + x).$$

Lời giải.

Kí hiệu Q là vế trái. Ta có

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 2y}{2} - \frac{1 + \cos 2z}{2} - \frac{1 + \cos 2(x + y + z)}{2} \\ &= \frac{1}{2} (\cos 2x + \cos 2y) - \frac{1}{2} [\cos 2(x + y + z) + \cos 2z] \\ &= \cos(x + y) \cos(x - y) - \cos(x + y + 2z) \cos(x + y) \\ &= -\cos(x + y) [\cos(x + y + 2z) - \cos(x - y)] \\ &= 2 \cos(x + y) \sin(x + z) \sin(y + z) = \text{Vế phải.} \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.

□

Bài 24. Chứng minh rằng

$$\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

(ĐH Đà Nẵng-1998)

Lời giải.

Kí hiệu T là vế trái. Nhân vế trái với $2 \sin \frac{\pi}{7} \neq 0$ ta được

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{\pi}{7} \cdot T &= 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} - 2 \cos \frac{2\pi}{7} \sin \frac{\pi}{7} + 2 \cos \frac{3\pi}{7} \sin \frac{\pi}{7} \\ &= \sin \frac{2\pi}{7} - \left(\sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} \right) + \left(\sin \frac{4\pi}{7} - \sin \frac{2\pi}{7} \right) \\ &= \sin \frac{\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} = \sin \frac{\pi}{7}. \end{aligned}$$

Như thế $2 \sin \frac{\pi}{7} \cdot T = \sin \frac{\pi}{7} \Rightarrow T = \frac{1}{2}$.

□

Bài 25. Chứng minh rằng:

$$\tan 30^\circ + \tan 40^\circ + \tan 50^\circ + \tan 60^\circ = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cos 20^\circ.$$

(ĐHQG Hà Nội-1995)

Lời giải.

Kí hiệu T là vế trái của đẳng thức cần chứng minh. Ta có:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} + \tan 40^\circ + \tan 50^\circ = \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ} + \frac{\sin 50^\circ}{\cos 50^\circ} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{\sin 40^\circ \cos 50^\circ + \cos 40^\circ \sin 50^\circ}{\cos 40^\circ \cos 50^\circ} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{\sin(40^\circ + 50^\circ)}{\cos 40^\circ \cos 50^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{\cos 40^\circ \cos 50^\circ} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{\cos 40^\circ \sin 40^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{2}{\sin 80^\circ} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{2}{\cos 10^\circ} = \frac{4\sqrt{3} \cos 10^\circ + 6}{3 \cos 10^\circ} = \frac{4\sqrt{3} \left(\cos 10^\circ + \frac{6}{4\sqrt{3}} \right)}{3 \cos 10^\circ} \\ &= \frac{4\sqrt{3} \left(\cos 10^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{3 \cos 10^\circ} = \frac{4\sqrt{3} (\cos 10^\circ + \cos 30^\circ)}{3 \cos 10^\circ} \\ &= \frac{4\sqrt{3} \cdot 2 \cos 20^\circ \cos 10^\circ}{3 \cos 10^\circ} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cos 20^\circ. \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh. □

E CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Rút gọn biểu thức $M = \cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ$.

- A. $M = 1$. B. $M = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $M = \frac{1}{4}$. D. $M = 0$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } M &= \cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ = (\cos^2 15^\circ)^2 - (\sin^2 15^\circ)^2 = (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ)(\cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ) \\ &= \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \cos(2 \cdot 15^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **B** □

Câu 2. Tính giá trị của biểu thức $M = \cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ + \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$.

- A. $M = \sqrt{3}$. B. $M = \frac{1}{2}$. C. $M = \frac{1}{4}$. D. $M = 0$.

Lời giải.

Áp dụng công thức nhân đôi $\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a$.

Ta có

$$\begin{aligned} M &= (\cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ) + (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ) \\ &= (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ)(\cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ) + (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ) \\ &= (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ) + (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ) \\ &= \cos 30^\circ + \cos 30^\circ = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 3. Tính giá trị của biểu thức $M = \cos^6 15^\circ - \sin^6 15^\circ$.

- A. $M = 1$. B. $M = \frac{1}{2}$. C. $M = \frac{1}{4}$. D. $M = \frac{15\sqrt{3}}{32}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \cos^6 \alpha - \sin^6 \alpha &= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha) \\ &= \cos 2\alpha \cdot [(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^2 - \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha] \\ &= \cos 2\alpha \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha\right). \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } M = \cos 30^\circ \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \sin^2 30^\circ\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}\right) = \frac{15\sqrt{3}}{32}.$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 4. Giá trị của biểu thức $\cos \frac{\pi}{30} \cos \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{30} \sin \frac{\pi}{5}$ là

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \cos \frac{\pi}{30} \cos \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{30} \sin \frac{\pi}{5} = \cos \left(\frac{\pi}{30} - \frac{\pi}{5}\right) = \cos \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 5. Giá trị của biểu thức $P = \frac{\sin \frac{5\pi}{18} \cos \frac{\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{9} \cos \frac{5\pi}{18}}{\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{12}}$ là

A. 1. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\begin{cases} \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b = \sin(a - b) \\ \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b = \cos(a + b) \end{cases}$

Khi đó $\sin \frac{5\pi}{18} \cos \frac{\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{9} \cos \frac{5\pi}{18} = \sin \left(\frac{5\pi}{18} - \frac{\pi}{9} \right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Và $\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} \right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Vậy $P = \frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 1$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 6. Giá trị đúng của biểu thức $\frac{\tan 225^\circ - \cot 81^\circ \cdot \cot 69^\circ}{\cot 261^\circ + \tan 201^\circ}$ bằng

A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. B. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. C. $\sqrt{3}$. D. $-\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $\frac{\tan 225^\circ - \cot 81^\circ \cdot \cot 69^\circ}{\cot 261^\circ + \tan 201^\circ} = \frac{\tan(180^\circ + 45^\circ) - \tan 9^\circ \cdot \cot 69^\circ}{\cot(180^\circ + 81^\circ) + \tan(180^\circ + 21^\circ)} = \frac{1 - \tan 9^\circ \cdot \tan 21^\circ}{\tan 9^\circ + \tan 21^\circ}$
 $= \frac{1}{\tan(9^\circ + 21^\circ)} = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 7. Giá trị của biểu thức $M = \sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24} \sin \frac{7\pi}{24} \sin \frac{11\pi}{24}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{8}$. D. $\frac{1}{16}$.

Lời giải.

Ta có $\sin \frac{7\pi}{24} = \cos \frac{5\pi}{24}$ và $\sin \frac{11\pi}{24} = \cos \frac{\pi}{24}$.

Do đó $M = \sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24} \cos \frac{5\pi}{24} \cos \frac{\pi}{24} = \frac{1}{4} \cdot \left(2 \sin \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \right) \cdot \left(2 \sin \frac{5\pi}{24} \cdot \cos \frac{5\pi}{24} \right)$
 $= \frac{1}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \left(\cos \frac{6\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{8} \cdot \left(0 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{16}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 8. Giá trị của biểu thức $M = \sin \frac{\pi}{48} \cos \frac{\pi}{48} \cos \frac{\pi}{24} \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{6}$ là

A. $\frac{1}{32}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{8}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{16}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{32}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$, ta có

$A = \sin \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6}$
 $= \frac{1}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{8} \cdot \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{16} \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{32}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 9. Tính giá trị của biểu thức $M = \cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$.

A. $M = \frac{1}{16} \cos 10^\circ$. B. $M = \frac{1}{2} \cos 10^\circ$. C. $M = \frac{1}{4} \cos 10^\circ$. D. $M = \frac{1}{8} \cos 10^\circ$.

Lời giải.

Vì $\sin 10^\circ \neq 0$ nên suy ra

$$M = \frac{16 \sin 10^\circ \cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{16 \sin 10^\circ} = \frac{8 \sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{16 \sin 10^\circ}$$

$$\Rightarrow M = \frac{4 \sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{16 \sin 10^\circ} = \frac{2 \sin 80^\circ \cos 80^\circ}{16 \sin 10^\circ} = \frac{\sin 160^\circ}{16 \sin 10^\circ}.$$

$$\Rightarrow M = \frac{\sin 20^\circ}{16 \sin 10^\circ} = \frac{2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ}{16 \sin 10^\circ} = \frac{1}{8} \cos 10^\circ.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 10. Tính giá trị của biểu thức $M = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$.

- A. $M = 0$. B. $M = -\frac{1}{2}$. C. $M = 1$. D. $M = 2$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\sin a - \sin b = 2 \cdot \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$.

$$\text{Ta có } 2 \sin \frac{\pi}{7} \cdot M = 2 \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{7} + 2 \cdot \cos \frac{4\pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{7} + 2 \cdot \cos \frac{6\pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{7}$$

$$= \sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{5\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{7} + \sin \frac{7\pi}{7} - \sin \frac{5\pi}{7} = -\sin \frac{\pi}{7} + \sin \pi = -\sin \frac{\pi}{7}.$$

Vậy giá trị biểu thức $M = -\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 11. Công thức nào sau đây sai?

- A. $\cos(a-b) = \sin a \sin b + \cos a \cos b$. B. $\cos(a+b) = \sin a \sin b - \cos a \cos b$.
C. $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$. D. $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Lời giải.

Ta có $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 12. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\sin(2018a) = 2018 \sin a \cdot \cos a$. B. $\sin(2018a) = 2018 \sin(1009a) \cdot \cos(1009a)$.
C. $\sin(2018a) = 2 \sin a \cos a$. D. $\sin(2018a) = 2 \sin(1009a) \cdot \cos(1009a)$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ ta được $\sin(2018a) = 2 \sin(1009a) \cdot \cos(1009a)$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 13. Khẳng định nào sai trong các khẳng định sau?

- A. $\cos 6a = \cos^2 3a - \sin^2 3a$. B. $\cos 6a = 1 - 2 \sin^2 3a$.
C. $\cos 6a = 1 - 6 \sin^2 a$. D. $\cos 6a = 2 \cos^2 3a - 1$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$, ta được
 $\cos 6a = \cos^2 3a - \sin^2 3a = 2 \cos^2 3a - 1 = 1 - 2 \sin^2 3a$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 14. Khẳng định nào sai trong các khẳng định sau?

- A. $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$. B. $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.
C. $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$. D. $\cos 3x = \cos^3 x - \sin^3 x$.

Lời giải.

Ta có $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 15. Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau?

- A. $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin \left(a - \frac{\pi}{4} \right).$ B. $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin \left(a + \frac{\pi}{4} \right).$
C. $\sin a + \cos a = -\sqrt{2} \sin \left(a - \frac{\pi}{4} \right).$ D. $\sin a + \cos a = -\sqrt{2} \sin \left(a + \frac{\pi}{4} \right).$

Lời giải.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 16. Có bao nhiêu đẳng thức dưới đây là đồng nhất thức?

- 1) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right).$
2) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right).$
3) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right).$
4) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right).$
A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải.

Ta có $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos \left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right] = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right).$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 17. Công thức nào sau đây đúng?

- A. $\cos 3a = 3 \cos a - 4 \cos^3 a.$ B. $\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a.$
C. $\cos 3a = 3 \cos^3 a - 4 \cos a.$ D. $\cos 3a = 4 \cos a - 3 \cos^3 a.$

Lời giải.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 18. Công thức nào sau đây đúng?

- A. $\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a.$ B. $\sin 3a = 4 \sin^3 a - 3 \sin a.$
C. $\sin 3a = 3 \sin^3 a - 4 \sin a.$ D. $\sin 3a = 4 \sin a - 3 \sin^3 a.$

Lời giải.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 19. Nếu $\cos(a + b) = 0$ thì khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $|\sin(a + 2b)| = |\sin a|.$ B. $|\sin(a + 2b)| = |\sin b|.$
C. $|\sin(a + 2b)| = |\cos a|.$ D. $|\sin(a + 2b)| = |\cos b|.$

Lời giải.

Ta có $\cos(a + b) = 0 \Leftrightarrow a + b = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow -b + \frac{\pi}{2} + k\pi.$

$\Rightarrow |\sin(a + 2b)| = \left| \sin \left(-b + 2b + \frac{\pi}{2} + k\pi \right) \right| = |\cos(b + k\pi)| = |\cos b|.$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 20. Nếu $\sin(a + b) = 0$ thì khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $|\cos(a + 2b)| = |\sin a|.$ B. $|\cos(a + 2b)| = |\sin b|.$

C. $|\cos(a + 2b)| = |\cos a|$.

D. $|\cos(a + 2b)| = |\cos b|$.

Lời giải.

Ta có $\sin(a + b) = 0 \Leftrightarrow a + b = k\pi \Rightarrow a = -b + k\pi \Rightarrow |\cos(a + 2b)| = |\cos(-b + 2b + k\pi)| = |\cos(b + k\pi)| = |\cos b|$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 21. Rút gọn $M = \sin(x - y) \cos y + \cos(x - y) \sin y$.

A. $M = \cos x$.

B. $M = \sin x$.

C. $M = \sin x \cos 2y$.

D. $M = \cos x \cos 2y$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$, ta được

$$M = \sin(x - y) \cos y + \cos(x - y) \sin y = \sin[(x - y) + y] = \sin x.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 22. Rút gọn $M = \cos(a + b) \cos(a - b) - \sin(a + b) \sin(a - b)$.

A. $M = 1 - 2 \cos^2 a$.

B. $M = 1 - 2 \sin^2 a$.

C. $M = \cos 4a$.

D. $M = \sin 4a$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\cos x \cos y - \sin x \sin y = \cos(x + y)$, ta được

$$M = \cos(a + b) \cos(a - b) - \sin(a + b) \sin(a - b) = \cos(a + b + a - b) = \cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 23. Rút gọn $M = \cos(a + b) \cos(a - b) + \sin(a + b) \sin(a - b)$.

A. $M = 1 - 2 \sin^2 b$.

B. $M = 1 + 2 \sin^2 b$.

C. $M = \cos 4b$.

D. $M = \sin 4b$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x - y)$, ta được

$$M = \cos(a + b) \cos(a - b) + \sin(a + b) \sin(a - b) = \cos(a + b - (a - b)) = \cos 2b = 1 - 2 \sin^2 b.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 24. Giá trị nào sau đây của x thỏa mãn $\sin 2x \cdot \sin 3x = \cos 2x \cdot \cos 3x$?

A. 18° .

B. 30° .

C. 36° .

D. 45° .

Lời giải.

Áp dụng công thức $\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b = \cos(a + b)$, ta được

$$\begin{aligned} \sin 2x \cdot \sin 3x &= \cos 2x \cdot \cos 3x \Leftrightarrow \cos 2x \cdot \cos 3x - \sin 2x \cdot \sin 3x = 0 \\ \Leftrightarrow \cos 5x &= 0 \Leftrightarrow 5x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 25. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\cot a + \cot b = \frac{\sin(b - a)}{\sin a \cdot \sin b}$.

B. $\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a)$.

C. $\sin(a + b) = \frac{1}{2} \sin 2(a + b)$.

D. $\tan(a + b) = \frac{\sin(a + b)}{\cos a \cdot \cos b}$.

Lời giải.

Xét các đáp án sau

- Ta có $\cot a + \cot b = \frac{\cos a}{\sin a} + \frac{\cos b}{\sin b} = \frac{\cos a \cdot \sin b + \sin a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b} = \frac{\sin(a + b)}{\sin a \cdot \sin b}$.

- Ta có $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \Leftrightarrow \cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 26. Chọn công thức đúng trong các công thức sau:

- A. $\sin a \cdot \sin b = -\frac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$. B. $\sin a - \sin b = 2\sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$.
C. $\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan a}$. D. $\cos 2a = \sin^2 a - \cos^2 a$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 27. Tam giác ABC có $\cos A = \frac{4}{5}$ và $\cos B = \frac{5}{13}$. Khi đó $\cos C$ bằng

- A. $\frac{56}{65}$. B. $-\frac{56}{65}$. C. $\frac{16}{65}$. D. $\frac{33}{65}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \cos A = \frac{4}{5} \\ \cos B = \frac{5}{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin A = \frac{3}{5} \\ \sin B = \frac{12}{13} \end{cases}$$

$$\text{Mà } A + B + C = 180^\circ, \text{ do đó } \cos C = \cos[180^\circ - (A + B)] = -\cos(A + B) \\ = -(\cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B) = -\left(\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} - \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13}\right) = \frac{16}{65}.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 28. Cho A, B, C là ba góc nhọn thỏa mãn $\tan A = \frac{1}{2}, \tan B = \frac{1}{5}, \tan C = \frac{1}{8}$. Tổng $A + B + C$ bằng

- A. $\frac{\pi}{6}$. B. $\frac{\pi}{5}$. C. $\frac{\pi}{4}$. D. $\frac{\pi}{3}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{7}{9} \\ \Rightarrow \tan(A + B + C) = \frac{\tan(A + B) + \tan C}{1 - \tan(A + B) \cdot \tan C} = \frac{\frac{7}{9} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{8}} = 1 \Rightarrow A + B + C = \frac{\pi}{4}.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 29. Cho A, B, C là các góc của tam giác ABC . Khi đó $P = \sin A + \sin B + \sin C$ tương đương với

- A. $P = 4\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$. B. $P = 4\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$.
C. $P = 2\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$. D. $P = 2\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Do } \begin{cases} \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \\ \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2} \\ \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A+B}{2} \end{cases}$$

Áp dụng, ta được

$$\begin{aligned} P &= (\sin A + \sin B) + \sin C = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} \\ &= 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{C}{2} \\ &= 2 \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right) = 4 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 30. Cho A, B, C là các góc của tam giác ABC . Khi đó $P = \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$ tương đương với:

- A. $P = 4 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$.
B. $P = 4 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$.
C. $P = -4 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$.
D. $P = -4 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$.

Lời giải.

Do $A + B = \pi - C \Rightarrow \sin(A + B) = \sin C$. Áp dụng, ta được

$$\begin{aligned} P &= (\sin 2A + \sin 2B) + \sin 2C = 2 \sin(A + B) \cdot \cos(A - B) + 2 \sin C \cdot \cos C \\ &= 2 \sin C \cdot \cos(A - B) + 2 \sin C \cdot \cos C = 2 \sin C [\cos(A - B) + \cos C] \\ &= 4 \sin C \cdot \cos \frac{A - B + C}{2} \cdot \cos \frac{A - B - C}{2} \\ &= 4 \sin C \cdot \cos \frac{(A + B + C) - 2B}{2} \cdot \cos \frac{(-A - B - C) + 2A}{2} = 4 \sin C \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} - B \right) \cdot \cos \left(-\frac{\pi}{2} + A \right) \\ &= 4 \sin C \cdot \sin B \cdot \sin A = 4 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 31. Cho A, B, C là các góc của tam giác ABC (không phải tam giác vuông). Khi đó $P = \tan A + \tan B + \tan C$ tương đương với

- A. $P = \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2}$.
B. $P = -\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2}$.
C. $P = -\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$.
D. $P = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } P = \tan A + \tan B + \tan C = (\tan A + \tan B) + \tan C = \frac{\sin(A + B)}{\cos A \cdot \cos B} + \frac{\sin C}{\cos C}.$$

$$\text{Mà } A + B = \pi - C \Rightarrow \begin{cases} \sin(A + B) = \sin C \\ -\cos(A + B) = \cos C. \end{cases}$$

Khi đó, ta được

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sin C}{\cos A \cdot \cos B} + \frac{\sin C}{\cos C} = \sin C \left(\frac{\cos C + \cos A \cdot \cos B}{\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C} \right) = \sin C \cdot \left(\frac{-\cos(A + B) + \cos A \cdot \cos B}{\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C} \right) \\ &= \sin C \cdot \frac{-\cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B + \cos A \cdot \cos B}{\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C} = \frac{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}{\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C} = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 32. Cho A, B, C là các góc của tam giác ABC . Khi đó $P = \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2}$ tương đương với

- A. $P = 1$.
B. $P = -1$.
C. $P = \left(\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} \right)^2$.
D. Đáp án khác.

Lời giải.

$$\text{Do } A + B + C = \pi \Rightarrow \frac{C + B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \Rightarrow \tan \left(\frac{C + B}{2} \right) = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \right).$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{\tan \frac{C}{2} + \tan \frac{B}{2}}{1 - \tan \frac{C}{2} \tan \frac{B}{2}} = \cot \frac{A}{2} = \frac{1}{\tan \frac{A}{2}} \\ &\Rightarrow \tan \frac{A}{2} \left(\tan \frac{C}{2} + \tan \frac{B}{2} \right) + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} = 1 \\ &\Rightarrow \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2} = 1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 33. Trong $\triangle ABC$, nếu $\frac{\sin B}{\sin C} = 2 \cos A$ thì $\triangle ABC$ là tam giác có tính chất nào sau đây?

- A. Cân tại B. B. Cân tại A. C. Cân tại C. D. Vuông tại B.

Lời giải.

Ta có $\frac{\sin B}{\sin C} = 2 \cos A \Rightarrow \sin B = 2 \sin C \cdot \cos A = \sin (C + A) + \sin (C - A)$.

Mặt khác $A + B + C = \pi \Rightarrow B = \pi - (A + C) \Rightarrow \sin B = \sin (A + C)$.

Do đó, ta được $\sin (C - A) = 0 \Rightarrow A = C$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 34. Trong $\triangle ABC$, nếu $\frac{\tan A}{\tan C} = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 C}$ thì $\triangle ABC$ là tam giác gì?

- A. Tam giác vuông. B. Tam giác cân.
C. Tam giác đều. D. Tam giác vuông hoặc cân.

Lời giải.

Ta có $\frac{\tan A}{\tan C} = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 C} \Leftrightarrow \frac{\sin A \cos C}{\cos A \sin C} = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 C} \Leftrightarrow \sin 2C = \sin 2A \Rightarrow \begin{cases} 2C = 2A \\ 2C = \pi - 2A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = A \\ A + C = \frac{\pi}{2} \end{cases}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 35. Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. Tính $P = \sin 2(\alpha + \pi)$.

- A. $P = -\frac{24}{25}$. B. $P = \frac{24}{25}$. C. $P = -\frac{12}{25}$. D. $P = \frac{12}{25}$.

Lời giải.

Ta có $P = \sin 2(\alpha + \pi) = \sin (2\alpha + 2\pi) = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$.

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{3}{5}$.

Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên ta chọn $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$.

Thay $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ và $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ vào P , ta được $P = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 36. Cho góc α thỏa mãn $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ và $\sin \alpha = \frac{2}{3}$. Tính $P = \frac{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$.

- A. $P = -\frac{2\sqrt{5}}{3}$. B. $P = \frac{3}{2}$. C. $P = -\frac{3}{2}$. D. $P = \frac{2\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $P = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{2 \cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha)}{\sin \alpha + \cos \alpha} = 2 \cos \alpha$.

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Do $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên ta chọn $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow P = \frac{2\sqrt{5}}{3}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 37. Biết $\sin(\pi - \alpha) = -\frac{3}{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$.

A. $P = -\frac{3}{5}$. B. $P = \frac{3}{5}$. C. $P = \frac{-4 - 3\sqrt{3}}{10}$. D. $P = \frac{4 - 3\sqrt{3}}{10}$.

Lời giải.

Ta có $-\frac{3}{5} = \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$. Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{4}{5}$.

Do $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên ta chọn $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

Suy ra $P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{-4 - 3\sqrt{3}}{10}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 38. Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. Tính $P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$.

A. $P = \frac{11}{100}$. B. $P = -\frac{11}{100}$. C. $P = \frac{7}{25}$. D. $P = \frac{10}{11}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$, ta được

$P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos 2\alpha\right)$.

Ta có $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}$. Thay vào P , ta được $P = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{25}\right) = \frac{11}{100}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 39. Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. Tính $P = \cos 4\alpha$.

A. $P = \frac{527}{625}$. B. $P = -\frac{527}{625}$. C. $P = \frac{524}{625}$. D. $P = -\frac{524}{625}$.

Lời giải.

Ta có $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 = -\frac{7}{25}$.

Suy ra $P = \cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 = 2 \cdot \frac{49}{625} - 1 = -\frac{527}{625}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 40. Cho góc α thỏa mãn $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ và $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$. Tính $P = \sin \alpha - \cos \alpha$.

A. $P = \frac{3}{\sqrt{5}}$. B. $P = -\frac{3}{\sqrt{5}}$. C. $P = \frac{\sqrt{5}}{3}$. D. $P = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải.

Vì $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$ suy ra $\begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases}$ nên $\sin \alpha - \cos \alpha > 0$.

Ta có $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha = 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$.

Suy ra $\sin \alpha - \cos \alpha = \pm \frac{3}{\sqrt{5}}$. Do $\sin \alpha - \cos \alpha > 0$ nên $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

Vậy $P = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 41. Cho góc α thỏa mãn $\sin 2\alpha = \frac{2}{3}$. Tính $P = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$.

- A. $P = 1$. B. $P = \frac{17}{81}$. C. $P = \frac{7}{9}$. D. $P = \frac{9}{7}$.

Lời giải.

Áp dụng $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$.

Ta có $P = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha = \frac{7}{9}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 42. Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $P = \tan 2\alpha$.

- A. $P = -\frac{120}{119}$. B. $P = -\frac{119}{120}$. C. $P = \frac{120}{119}$. D. $P = \frac{119}{120}$.

Lời giải.

Ta có $P = \tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{2\cos^2 \alpha - 1}$.

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{12}{13}$.

Do $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ nên ta chọn $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$.

Thay $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$ và $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ vào P , ta được $P = \frac{120}{119}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 43. Cho góc α thỏa mãn $\cos 2\alpha = -\frac{2}{3}$. Tính $P = (1 + 3\sin^2 \alpha)(1 - 4\cos^2 \alpha)$.

- A. $P = 12$. B. $P = \frac{21}{2}$. C. $P = 6$. D. $P = 21$.

Lời giải.

Ta có $P = \left(1 + 3 \cdot \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}\right) \left(1 - 4 \cdot \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}\right) = \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2} \cos 2\alpha\right) (-1 - 2 \cos 2\alpha)$.

Thay $\cos 2\alpha = -\frac{2}{3}$ vào P , ta được $P = \left(\frac{5}{2} + 1\right) \left(-1 + \frac{4}{3}\right) = \frac{7}{6}$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 44. Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $P = \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$.

- A. $P = \frac{3 + \sqrt{21}}{8}$. B. $P = \frac{3 - \sqrt{21}}{8}$. C. $P = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{7}}{8}$. D. $P = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{7}}{8}$.

Lời giải.

Ta có $P = \cos \left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{3} \sin \alpha = \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha$.

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Do $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ nên ta chọn $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$.

Thay $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$ và $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ vào P , ta được $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = \frac{3 - \sqrt{21}}{8}$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 45. Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $P = \tan \left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $P = -\frac{1}{7}$. B. $P = \frac{1}{7}$. C. $P = -7$. D. $P = 7$.

Lời giải.

Ta có $P = \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha - 1}{1 + \tan \alpha}$.

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{3}{5}$.

Do $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên ta chọn $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$. Suy ra $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{4}$.

Thay $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ vào P , ta được $P = -\frac{1}{7}$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 46. Cho góc α thỏa mãn $\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$ và $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $P = \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $P = \frac{\sqrt{2}}{10}$. B. $P = -\frac{\sqrt{2}}{10}$. C. $P = -\frac{1}{5}$. D. $P = \frac{1}{5}$.

Lời giải.

Ta có $P = \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)$.

Từ hệ thức $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$, suy ra $\sin 2\alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 2\alpha} = \pm \frac{3}{5}$.

Do $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < 2\alpha < \pi$ nên ta chọn $\sin 2\alpha = \frac{3}{5}$.

Thay $\sin 2\alpha = \frac{3}{5}$ và $\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$ vào P , ta được $P = -\frac{\sqrt{2}}{10}$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 47. Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $P = \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{3\alpha}{2}$.

A. $P = -\frac{39}{50}$. B. $P = \frac{49}{50}$. C. $P = -\frac{49}{50}$. D. $P = \frac{39}{50}$.

Lời giải.

Ta có $P = \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{3\alpha}{2} = \frac{1}{2}(\sin 2\alpha - \sin \alpha) = \frac{1}{2} \sin \alpha (2 \cos \alpha - 1)$.

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{3}{5}$.

Do $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên ta chọn $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$.

Thay $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ và $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ vào P , ta được $P = \frac{39}{50}$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 48. Cho góc α thỏa mãn $\cot\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) = 2$. Tính $P = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $P = \frac{1}{2}$. B. $P = -\frac{1}{2}$. C. $P = 3$. D. $P = 4$.

Lời giải.

Ta có $P = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha}$.

Từ giả thiết $\cot\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) = 2 \Leftrightarrow \cot\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2 \Leftrightarrow \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2 \Leftrightarrow \tan \alpha = 2$.

Thay $\tan \alpha = 2$ vào P , ta được $P = -3$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 49. Cho góc α thỏa mãn $\cot \alpha = 15$. Tính $P = \sin 2\alpha$.

- A. $P = \frac{11}{113}$. B. $P = \frac{13}{113}$. C. $P = \frac{15}{113}$. D. $P = \frac{17}{113}$.

Lời giải.

Ta có $\cot \alpha = 15 \Leftrightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 15 \Leftrightarrow \cos \alpha = 15 \sin \alpha$.

$$\text{Suy ra } P = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 30 \sin^2 \alpha = \frac{30}{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} = \frac{30}{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{30}{1 + 15^2} = \frac{15}{113}.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 50. Cho góc α thỏa mãn $\cot \alpha = -3\sqrt{2}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $P = \tan \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\alpha}{2}$.

- A. $P = 2\sqrt{19}$. B. $P = -2\sqrt{19}$. C. $P = \sqrt{19}$. D. $P = -\sqrt{19}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } P = \tan \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} + \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{\sin \alpha}.$$

$$\text{Từ hệ thức } 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{19}}.$$

$$\text{Do } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \sin \alpha > 0 \text{ nên ta chọn } \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{19}} \Rightarrow P = 2\sqrt{19}.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 51. Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$ và $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$. Tính $P = \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}$.

- A. $P = \sqrt{5}$. B. $P = -\sqrt{5}$. C. $P = -\frac{\sqrt{5}}{5}$. D. $P = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } P^2 = 1 + \sin \alpha. \text{ Với } \alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right] \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \in \left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right]. \text{ Khi đó } \begin{cases} 0 \leq \sin \frac{\alpha}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 \leq \cos \frac{\alpha}{2} < -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}, \text{ suy ra}$$

$$P = \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} < 0.$$

$$\text{Từ hệ thức } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \text{ suy ra } \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{16}{25}. \text{ Vì } \alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right] \text{ nên}$$

$$\text{ta chọn } \sin \alpha = -\frac{4}{5}.$$

$$\text{Thay } \sin \alpha = -\frac{4}{5} \text{ vào } P^2, \text{ ta được } P^2 = \frac{1}{5}. \text{ Suy ra } P = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 52. Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = -2$. Tính $P = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 4\alpha + 1}$.

- A. $P = \frac{10}{9}$. B. $P = \frac{9}{10}$. C. $P = -\frac{10}{9}$. D. $P = -\frac{9}{10}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } P = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 4\alpha + 1} = \frac{\sin 2\alpha}{2\cos^2 2\alpha}.$$

$$\text{Nhắc lại công thức: Nếu đặt } t = \tan \alpha \text{ thì } \sin 2\alpha = \frac{2t}{1+t^2} \text{ và } \cos 2\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

$$\text{Do đó } \sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = -\frac{4}{5}, \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = -\frac{3}{5}.$$

Thay $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ và $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$ vào P , ta được $P = -\frac{10}{9}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 53. Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$ và $\sin \alpha = \frac{1}{5}$. Tính $P = \sin 2\alpha$.

- A. $P = \frac{4\sqrt{6}}{25}$. B. $P = -\frac{4\sqrt{6}}{25}$. C. $P = \frac{2\sqrt{6}}{25}$. D. $P = -\frac{2\sqrt{6}}{25}$.

Lời giải.

Ta có $A = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$. Từ hệ thức $\cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 25 \Leftrightarrow \cot^2 \alpha = 24 \Rightarrow \cot \alpha = \pm 2\sqrt{6}$.

Vì $\tan \alpha, \cot \alpha$ cùng dấu và $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$ nên $\tan \alpha < 0, \cot \alpha < 0$. Do đó ta chọn $\cot \alpha = -2\sqrt{6}$.

Suy ra $\cos \alpha = \cot \alpha \cdot \sin \alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Thay $\sin \alpha = \frac{1}{5}$ và $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$ vào P , ta được $P = 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}\right) = -\frac{4\sqrt{6}}{25}$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 54. Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\sin \alpha + 2 \cos \alpha = -1$. Tính $P = \sin 2\alpha$.

- A. $P = \frac{24}{25}$. B. $P = \frac{2\sqrt{6}}{5}$. C. $P = -\frac{24}{25}$. D. $P = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Lời giải.

Với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ suy ra $\begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases}$.

Ta có $\begin{cases} \sin \alpha + 2 \cos \alpha = -1 \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow (-1 - 2 \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1$

$\Leftrightarrow 5 \cos^2 \alpha + 4 \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0 \text{ (loại)} \\ \cos \alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$.

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ (do $\sin \alpha > 0$).

Vậy $P = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 55. Biết $\sin a = \frac{5}{13}; \cos b = \frac{3}{5}; \frac{\pi}{2} < a < \pi; 0 < b < \frac{\pi}{2}$. Hãy tính $\sin(a + b)$.

- A. $\frac{56}{65}$. B. $\frac{63}{65}$. C. $-\frac{33}{65}$. D. 0.

Lời giải.

Ta có $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169}$ mà $a \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow \cos a = -\frac{12}{13}$.

Tương tự, ta có $\sin^2 b = 1 - \cos^2 b = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$ mà $b \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin b = \frac{4}{5}$.

Khi đó $\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a = \frac{5}{13} \cdot \frac{3}{5} - \frac{12}{13} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{33}{65}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 56. Nếu biết rằng $\sin \alpha = \frac{5}{13} \left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right), \cos \beta = \frac{3}{5} \left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$ thì giá trị đúng của biểu thức $\cos(\alpha - \beta)$ là

- A. $\frac{16}{65}$. B. $-\frac{16}{65}$. C. $\frac{18}{65}$. D. $-\frac{18}{65}$.

Lời giải.

Ta có $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ suy ra $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = -\frac{12}{13}$.

Tương tự, có $\cos \beta = \frac{3}{5}$ với $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ suy ra $\sin \beta = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$.

Vậy $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta = -\frac{12}{13} \cdot \frac{3}{5} + \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{16}{65}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 57. Cho hai góc nhọn $a; b$ và biết rằng $\cos a = \frac{1}{3}; \cos b = \frac{1}{4}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \cos(a + b) \cdot \cos(a - b)$.

- A. $-\frac{113}{144}$. B. $-\frac{115}{144}$. C. $-\frac{117}{144}$. D. $-\frac{119}{144}$.

Lời giải.

Ta có $P = \cos(a + b) \cdot \cos(a - b) = (\cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b)(\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b)$
 $= (\cos a \cdot \cos b)^2 - (\sin a \cdot \sin b)^2 = \cos^2 a \cdot \cos^2 b - (1 - \cos^2 a) \cdot (1 - \cos^2 b) = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{16} - \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) = -\frac{119}{144}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 58. Nếu a, b là hai góc nhọn và $\sin a = \frac{1}{3}; \sin b = \frac{1}{2}$ thì $\cos 2(a + b)$ có giá trị bằng

- A. $\frac{7 - 2\sqrt{6}}{18}$. B. $\frac{7 + 2\sqrt{6}}{18}$. C. $\frac{7 + 4\sqrt{6}}{18}$. D. $\frac{7 - 4\sqrt{6}}{18}$.

Lời giải.

Vì $a, b \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên suy ra $\begin{cases} \cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \cos b = \sqrt{1 - \sin^2 b} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Khi đó $\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{-1 + 2\sqrt{6}}{6}$.

Vậy $\cos 2(a + b) = 2\cos^2(a + b) - 1 = 2 \cdot \left(\frac{-1 + 2\sqrt{6}}{6}\right)^2 - 1 = \frac{7 - 4\sqrt{6}}{18}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 59. Cho $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ và thỏa mãn $\tan \alpha = \frac{1}{7}, \tan \beta = \frac{3}{4}$. Góc $\alpha + \beta$ có giá trị bằng

- A. $\frac{\pi}{3}$. B. $\frac{\pi}{4}$. C. $\frac{\pi}{6}$. D. $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{\frac{1}{7} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{4}} = 1$ suy ra $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 60. Cho x, y là các góc nhọn và dương thỏa mãn $\cot x = \frac{3}{4}, \cot y = \frac{1}{7}$. Tổng $x + y$ bằng

- A. $\frac{\pi}{4}$. B. $\frac{3\pi}{4}$. C. $\frac{\pi}{3}$. D. π .

Lời giải.

Ta có $\cot(x+y) = \frac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{7} - 1}{\frac{3}{4} + \frac{1}{7}} = -1$.

Mặt khác $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$ suy ra $0 < x + y < \pi$. Do đó $x + y = \frac{3\pi}{4}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 61. Nếu α, β, γ là ba góc nhọn thỏa mãn $\tan(\alpha + \beta) \cdot \sin \gamma = \cos \gamma$ thì

A. $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$. B. $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{3}$. C. $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$. D. $\alpha + \beta + \gamma = \frac{3\pi}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\tan(\alpha + \beta) \cdot \sin \gamma = \cos \gamma \Rightarrow \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin \gamma = \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos \gamma$.

$\Rightarrow \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos \gamma - \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin \gamma = 0 \Rightarrow \cos(\alpha + \beta + \gamma) = 0$.

Vậy tổng ba góc $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ (vì α, β, γ là ba góc nhọn).

Chọn đáp án (C) □

Câu 62. Biết rằng $\tan a = \frac{1}{2}$ ($0 < a < 90^\circ$) và $\tan b = -\frac{1}{3}$ ($90^\circ < b < 180^\circ$) thì biểu thức $\cos(2a - b)$ có giá trị bằng

A. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$. B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$. C. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\cos 2a = \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{5}$ suy ra $\sin 2a = \sqrt{1 - \cos^2 2a} = \frac{4}{5}$.

Lại có $1 + \tan^2 b = \frac{1}{\cos^2 b} \Rightarrow \cos b = -\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 b}} = -\frac{3}{\sqrt{10}}$ vì $90^\circ < b < 180^\circ$

Mặt khác $\sin b = \tan b \cdot \cos b = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Khi đó $\cos(2a - b) = \cos 2a \cdot \cos b + \sin 2a \cdot \sin b = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right) + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 63. Nếu $\sin a - \cos a = \frac{1}{5}$ ($135^\circ < a < 180^\circ$) thì giá trị của biểu thức $\tan 2a$ bằng

A. $-\frac{20}{7}$. B. $\frac{20}{7}$. C. $\frac{24}{7}$. D. $-\frac{24}{7}$.

Lời giải.

Ta có $\sin a - \cos a = \frac{1}{5} \Rightarrow (\sin a - \cos a)^2 = \frac{1}{25} \Leftrightarrow 1 - \sin 2a = \frac{1}{25} \Leftrightarrow \sin 2a = \frac{24}{25}$. Khi đó $\cos 2a =$

$\sqrt{1 - \sin^2 2a} = \sqrt{1 - \left(\frac{24}{25}\right)^2} = \frac{7}{25}$ vì $270^\circ < 2a < 360^\circ$.

Vậy giá trị của biểu thức $\tan 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{24}{7}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 64. Nếu $\tan(a + b) = 7, \tan(a - b) = 4$ thì giá trị đúng của $\tan 2a$ là

A. $-\frac{11}{27}$. B. $\frac{11}{27}$. C. $-\frac{13}{27}$. D. $\frac{13}{27}$.

Lời giải.

Ta có $\tan 2a = \tan [(a+b) + (a-b)] = \frac{\tan(a+b) + \tan(a-b)}{1 + \tan(a+b) \cdot \tan(a-b)} = \frac{7+4}{1-7 \cdot 4} = -\frac{11}{27}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 65. Nếu $\sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) = \sin \beta$ với $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + l\pi, (k, l \in \mathbb{Z})$ thì

- A. $\tan(\alpha + \beta) = 2 \cot \alpha$. B. $\tan(\alpha + \beta) = 2 \cot \beta$.
C. $\tan(\alpha + \beta) = 2 \tan \beta$. D. $\tan(\alpha + \beta) = 2 \tan \alpha$.

Lời giải.

Ta có $\sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) = \sin \beta = \sin[(\alpha + \beta) - \alpha] \Leftrightarrow \sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) = \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos \alpha - \cos(\alpha + \beta) \cdot \sin \alpha$

$\Leftrightarrow 2 \sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) = \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos \alpha \Rightarrow \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = 2 \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \tan \alpha$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 66. Nếu $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ và $\cot \alpha + \cot \gamma = 2 \cot \beta$ thì $\cot \alpha \cdot \cot \gamma$ bằng

- A. $\sqrt{3}$. B. $-\sqrt{3}$. C. 3. D. -3.

Lời giải.

Từ giả thiết, ta có $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \gamma)$.

Suy ra $\cot \alpha + \cot \gamma = 2 \cot \beta = 2 \cot \left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \gamma) \right] = 2 \cdot \tan(\alpha + \gamma) = 2 \frac{\tan \alpha + \tan \gamma}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \gamma}$

Mặt khác $\frac{\tan \alpha + \tan \gamma}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \gamma} = \frac{\frac{1}{\cot \alpha} + \frac{1}{\cot \gamma}}{1 - \frac{1}{\cot \alpha} \cdot \frac{1}{\cot \gamma}} = \frac{\cot \alpha + \cot \gamma}{\cot \alpha \cdot \cot \gamma - 1}$ nên suy ra

$\cot \alpha + \cot \gamma = 2 \cdot \frac{\cot \alpha + \cot \gamma}{\cot \alpha \cdot \cot \gamma - 1} \Leftrightarrow \cot \alpha \cdot \cot \gamma - 1 = 2 \Leftrightarrow \cot \alpha \cdot \cot \gamma = 3$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 67. Nếu $\tan \alpha$ và $\tan \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0 (q \neq 1)$ thì $\tan(\alpha + \beta)$ bằng

- A. $\frac{p}{q-1}$. B. $-\frac{p}{q-1}$. C. $\frac{2p}{1-q}$. D. $-\frac{2p}{1-q}$.

Lời giải.

Vì $\tan \alpha, \tan \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$ nên theo định lý Viet, ta có $\begin{cases} \tan \alpha + \tan \beta = -p \\ \tan \alpha \cdot \tan \beta = q \end{cases}$.

Khi đó $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{p}{q-1}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 68. Nếu $\tan \alpha; \tan \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - px + q = 0 (p \cdot q \neq 0)$. Và $\cot \alpha; \cot \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - rx + s = 0$ thì tích $P = rs$ bằng

- A. pq . B. $\frac{p}{q^2}$. C. $\frac{1}{pq}$. D. $\frac{q}{p^2}$.

Lời giải.

Theo định lý Viet, ta có $\begin{cases} \tan \alpha + \tan \beta = p \\ \tan \alpha \cdot \tan \beta = q \end{cases}$ và $\begin{cases} \cot \alpha + \cot \beta = r \\ \cot \alpha \cdot \cot \beta = s \end{cases}$.

Khi đó $P = r \cdot s = (\cot \alpha + \cot \beta) \cdot \cot \alpha \cdot \cot \beta = \left(\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \beta} \right) \cdot \frac{1}{\tan \alpha} \cdot \frac{1}{\tan \beta} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{(\tan \alpha \cdot \tan \beta)^2} = \frac{p}{q^2}$.

Vậy $P = r \cdot s = \frac{p}{q^2}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 69. Nếu $\tan \alpha$ và $\tan \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - px + q = 0$ ($q \neq 0$) thì giá trị biểu thức $P = \cos^2(\alpha + \beta) + p \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha + \beta) + q \sin^2(\alpha + \beta)$ bằng:

A. p .

B. q .

C. 1.

D. $\frac{p}{q}$.

Lời giải.

Vì $\tan \alpha, \tan \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - px + q = 0$ nên theo định lý Viet, ta có

$$\begin{cases} \tan \alpha + \tan \beta = p \\ \tan \alpha \cdot \tan \beta = q \end{cases} \Rightarrow \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{p}{1 - q}.$$

Khi đó $P = \cos^2(\alpha + \beta) \cdot [1 + p \cdot \tan(\alpha + \beta) + q \cdot \tan^2(\alpha + \beta)]$.

$$\begin{aligned} &= \frac{1 + p \cdot \tan(\alpha + \beta) + q \cdot \tan^2(\alpha + \beta)}{1 + \tan^2(\alpha + \beta)} = \frac{1 + p \cdot \frac{p}{1 - q} + q \cdot \left(\frac{p}{1 - q} \right)^2}{1 + \left(\frac{p}{1 - q} \right)^2} \\ &= \frac{(1 - q)^2 + p^2(1 - q) + q \cdot p^2}{(1 - q)^2 + p^2} = \frac{(1 - q)^2 + p^2 - p^2 \cdot q + q \cdot p^2}{(1 - q)^2 + p^2} = 1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 70. Rút gọn biểu thức $M = \tan x - \tan y$.

A. $M = \tan(x - y)$.

B. $M = \frac{\sin(x + y)}{\cos x \cdot \cos y}$.

C. $M = \frac{\sin(x - y)}{\cos x \cdot \cos y}$.

D. $M = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } M = \tan x - \tan y = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x \cos y - \cos x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{\sin(x - y)}{\cos x \cos y}.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 71. Rút gọn biểu thức $M = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

A. $M = \sin 2\alpha$.

B. $M = \cos 2\alpha$.

C. $M = -\cos 2\alpha$.

D. $M = -\sin 2\alpha$.

Lời giải.

Vì hai góc $\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ và $\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ phụ nhau nên $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$.

Suy ra $M = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) = -\sin 2\alpha$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 72. Chọn đẳng thức đúng

A. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 - \sin a}{2}$.

B. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 + \sin a}{2}$.

C. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 - \cos a}{2}$.

D. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 + \cos a}{2}$.

Lời giải.

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right)}{2} = \frac{1 + \sin(-a)}{2} = \frac{1 - \sin a}{2}.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 73. Gọi $M = \frac{\sin(y-x)}{\sin x \cdot \sin y}$ thì

- A. $M = \tan x - \tan y$. B. $M = \cot x - \cot y$. C. $M = \cot y - \cot x$. D. $M = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin y}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } M = \frac{\sin y \cdot \cos x - \cos y \cdot \sin x}{\sin x \cdot \sin y} = \frac{\sin y \cdot \cos x}{\sin x \cdot \sin y} - \frac{\cos y \cdot \sin x}{\sin x \cdot \sin y} = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos y}{\sin y} = \cot x - \cot y.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 74. Gọi $M = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$ thì

- A. $M = 2 \cos 2x (\cos x + 1)$. B. $M = 4 \cos 2x \cdot \left(\frac{1}{2} + \cos x\right)$.
C. $M = \cos 2x (2 \cos x - 1)$. D. $M = \cos 2x (2 \cos x + 1)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } M = \cos x + \cos 2x + \cos 3x = (\cos x + \cos 3x) + \cos 2x = 2 \cos 2x \cdot \cos x + \cos 2x = \cos 2x (2 \cos x + 1).$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 75. Rút gọn biểu thức $M = \frac{\sin 3x - \sin x}{2 \cos^2 x - 1}$.

- A. $\tan 2x$. B. $\sin x$. C. $2 \tan x$. D. $2 \sin x$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \frac{\sin 3x - \sin x}{2 \cos^2 x - 1} = \frac{2 \cos 2x \sin x}{\cos 2x} = 2 \sin x.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 76. Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x}{2 \cos^2 x + \cos x - 1}$.

- A. $\cos x$. B. $2 \cos x - 1$. C. $2 \cos x$. D. $\cos x - 1$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } A = \frac{(1 + \cos 2x) + (\cos x + \cos 3x)}{(2 \cos^2 x - 1) + \cos x} = \frac{2 \cos^2 x + 2 \cos 2x \cos x}{\cos x + \cos 2x} = \frac{2 \cos x (\cos x + \cos 2x)}{\cos x + \cos 2x} = 2 \cos x.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 77. Rút gọn biểu thức $A = \frac{\tan \alpha - \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha} + \cos 2\alpha$.

- A. 0. B. $2 \cos^2 x$. C. 2. D. $\cos 2x$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}}{\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = -\cos 2\alpha.$$

$$\text{Do đó } A = -\cos 2\alpha + \cos 2\alpha = 0.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 78. Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 + \sin 4\alpha - \cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha + \cos 4\alpha}$.

- A. $\sin 2\alpha$. B. $\cos 2\alpha$. C. $\tan 2\alpha$. D. $\cot 2\alpha$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } A = \frac{(1 - \cos 4\alpha) + \sin 4\alpha}{(1 + \cos 4\alpha) + \sin 4\alpha} = \frac{2\sin^2 2\alpha + 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha}{2\cos^2 2\alpha + 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha} = \frac{2\sin 2\alpha(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)}{2\cos 2\alpha(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)} = \tan 2\alpha.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 79. Biểu thức $A = \frac{3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}$ có kết quả rút gọn bằng

- A. $-\tan^4 \alpha$. B. $\tan^4 \alpha$. C. $-\cot^4 \alpha$. D. $\cot^4 \alpha$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha; \cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 = 2(1 - 2\sin^2 \alpha)^2 - 1.$$

$$\text{Do đó } A = \frac{3 - 4(1 - 2\sin^2 \alpha) + 2(1 - 2\sin^2 \alpha)^2 - 1}{3 + 4(2\cos^2 \alpha - 1) + 2(2\cos^2 \alpha - 1)^2 - 1} = \frac{8\sin^2 \alpha - 8\sin^4 \alpha + 8\sin^4 \alpha}{8\cos^2 \alpha - 8\cos^2 \alpha + 8\cos^4 \alpha} = \tan^4 \alpha.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 80. Khi $\alpha = \frac{\pi}{6}$ thì biểu thức $A = \frac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^4 \alpha - 4\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4\sin^2 \alpha}$ có giá trị bằng

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{1}{9}$. D. $\frac{1}{12}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= \frac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^4 \alpha - 4\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4\sin^2 \alpha} = \frac{4\sin^4 \alpha}{4(1 - \sin^2 \alpha) - 4\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} \\ &= \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha(1 - \sin^2 \alpha)} = \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^4 \alpha} = \tan^4 \alpha. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó giá trị của biểu thức } A \text{ tại } \alpha = \frac{\pi}{6} \text{ là } \tan^4 \left(\frac{\pi}{6} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^4 = \frac{1}{9}.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 81. Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sin 2\alpha + \sin \alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos \alpha}$.

- A. $\tan \alpha$. B. $2\tan \alpha$. C. $\tan 2\alpha + \tan \alpha$. D. $\tan 2\alpha$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } A = \frac{\sin 2\alpha + \sin \alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha (2\cos \alpha + 1)}{2\cos^2 \alpha + \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha (2\cos \alpha + 1)}{\cos \alpha (2\cos \alpha + 1)} = \tan \alpha.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 82. Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 - \sin a - \cos 2a}{\sin 2a - \cos a}$.

- A. 1. B. $\tan \alpha$. C. $\frac{5}{2}$. D. $2\tan \alpha$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } A = \frac{1 - \sin a + 2\sin^2 a - 1}{2\sin a \cdot \cos a - \cos a} = \frac{\sin a (2\sin a - 1)}{\cos a (2\sin a - 1)} = \frac{\sin a}{\cos a} = \tan a.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 83. Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sin x + \sin \frac{x}{2}}{1 + \cos x + \cos \frac{x}{2}}$ được kết quả là

- A. $\tan \frac{x}{2}$. B. $\cot x$. C. $\tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$. D. $\sin x$.

Lời giải.

Ta có $\sin x = \sin \left(2 \cdot \frac{x}{2} \right) = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2},$

$1 + \cos x = 1 + \cos \left(2 \cdot \frac{x}{2} \right) = 2 \cos^2 \frac{x}{2}.$

Do đó $A = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2} (2 \cos \frac{x}{2} + 1)}{\cos \frac{x}{2} (2 \cos \frac{x}{2} + 1)} = \tan \frac{x}{2}.$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 84. Rút gọn biểu thức $A = \sin \alpha \cdot \cos^5 \alpha - \sin^5 \alpha \cdot \cos \alpha.$

- A. $\frac{1}{2} \sin 2\alpha.$ B. $-\frac{1}{2} \sin 4\alpha.$ C. $\frac{3}{4} \sin 4\alpha.$ D. $\frac{1}{4} \sin 4\alpha. .$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \sin \alpha \cdot \cos^5 \alpha - \sin^5 \alpha \cdot \cos \alpha \\ &= \sin \alpha \cdot \cos \alpha (\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha) \\ &= \frac{1}{2} \sin 2\alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \\ &= \frac{1}{2} \sin 2\alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\ &= \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cos 2\alpha \\ &= \frac{1}{4} \sin 4\alpha. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 85. Tìm giá trị lớn nhất M và nhỏ nhất m của biểu thức $P = 3 \sin x - 2.$

- A. $M = 1, m = -5.$ B. $M = 3, m = 1.$ C. $M = 2, m = -2.$ D. $M = 0, m = -2.$

Lời giải.

Ta có $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3 \sin x \leq 3 \Rightarrow -5 \leq 3 \sin x - 2 \leq 1 \Rightarrow -5 \leq P \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} M = 1 \\ m = -5. \end{cases}$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 86. Cho biểu thức $P = -2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + 2.$ Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $P \geq -4, \forall x \in \mathbb{R}.$ B. $P \geq 4, \forall x \in \mathbb{R}.$ C. $P \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$ D. $P \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}.$

Lời giải.

Ta có $-1 \leq \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \leq 1 \Rightarrow 2 \geq -2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \geq -2 \Rightarrow 4 \geq -2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + 2 \geq 0.$

Vậy $4 \geq P \geq 0.$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 87. Biểu thức $P = \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) - \sin x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải.

Áp dụng công thức $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}.$

Ta có $\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) - \sin x = 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \sin \frac{\pi}{6} = \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right).$

Ta có $-1 \leq \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 \Rightarrow -1 \leq P \leq 1 \xrightarrow{P \in \mathbb{Z}} P \in \{-1; 0; 1\}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 88. Tìm giá trị lớn nhất M và nhỏ nhất m của biểu thức $P = \sin^2 x + 2 \cos^2 x$.

- A. $M = 3, m = 0$. B. $M = 2, m = 0$. C. $M = 2, m = 1$. D. $M = 3, m = 1$.

Lời giải.

Ta có $P = \sin^2 x + 2 \cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x = 1 + \cos^2 x$.

$$\text{Do } -1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1 + \cos^2 x \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} M = 2 \\ m = 1. \end{cases}$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 89. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 8 \sin^2 x + 3 \cos 2x$.
Tính $T = 2M - m^2$.

- A. $T = 1$. B. $T = 2$. C. $T = 112$. D. $T = 130$.

Lời giải.

Ta có $P = 8 \sin^2 x + 3 \cos 2x = 8 \sin^2 x + 3(1 - 2 \sin^2 x) = 2 \sin^2 x + 3$.

$$\text{Mà } -1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow 3 \leq 2 \sin^2 x + 3 \leq 5 \Rightarrow 3 \leq P \leq 5 \Rightarrow \begin{cases} M = 5 \\ m = 3. \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = 2M - m^2 = 1.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 90. Cho biểu thức $P = \cos^4 x + \sin^4 x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $P \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}$. B. $P \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$. C. $P \leq \sqrt{2}, \forall x \in \mathbb{R}$. D. $P \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} P &= \cos^4 x + \sin^4 x \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x \\ &= 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos 4x}{2} \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \sin 4x. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 91. Tìm giá trị lớn nhất M và nhỏ nhất m của biểu thức $P = \sin^4 x - \cos^4 x$.

- A. $M = 2, m = -2$. B. $M = \sqrt{2}, m = -\sqrt{2}$.
C. $M = 1, m = -1$. D. $M = 1, m = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $P = \sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 (\sin^2 x - \cos^2 x) = -\cos 2x$.

$$\text{Mà } -1 \leq \cos 2x \leq 1 \Rightarrow -1 \geq -\cos 2x \geq -1 \Rightarrow -1 \leq P \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} M = 1 \\ m = -1. \end{cases}$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 92. Tìm giá trị lớn nhất M và nhỏ nhất m của biểu thức $P = \sin^6 x + \cos^6 x$.

- A. $M = 2, m = 0$. B. $M = 1, m = \frac{1}{2}$. C. $M = 1, m = \frac{1}{4}$. D. $M = \frac{1}{4}, m = 0$.

Lời giải.

Ta có $P = \sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 93. Tìm giá trị lớn nhất M và nhỏ nhất m của biểu thức $P = 1 - 2|\cos 3x|$.

- A. $M = 3, m = -1$. B. $M = 1, m = -1$. C. $M = 2, m = -2$. D. $M = 0, m = -2$.

Lời giải.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 94. Tìm giá trị lớn nhất M của biểu thức $P = 4\sin^2 x + \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

- A. $M = \sqrt{2}$. B. $M = \sqrt{2} - 1$. C. $M = \sqrt{2} + 1$. D. $M = \sqrt{2} + 2$.

Lời giải.

Ta có $P = 4 \frac{1 - \cos 2x}{2} + \sin 2x + \cos 2x = \sin 2x - \cos 2x + 2 = \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 2 \leq \sqrt{2} + 2$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 95. Đơn giản biểu thức $A = \frac{1 - \cos \alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin \alpha}$ thu được kết quả

- A. $\sin 2\alpha$. B. $\tan \alpha$. C. $\cot \alpha$. D. $\cos 2\alpha$.

Lời giải.

$$A = \frac{1 - \cos \alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin \alpha} = \frac{2\cos^2 \alpha - \cos \alpha}{\sin 2\alpha - \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \alpha.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 96. Cho $\tan \alpha = \sqrt{2}$ và $-\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2}$. Giá trị của $\sin\left(\frac{5\pi}{2} - 2\alpha\right)$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $-\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\sin\left(\frac{5\pi}{2} - 2\alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = -\frac{1}{3}$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 97. Biến đổi biểu thức $\sin a + 1$ thành tích.

- A. $\sin a + 1 = 2 \sin\left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$. B. $\sin a + 1 = 2 \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(a - \frac{\pi}{2}\right)$.
C. $\sin a + 1 = 2 \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(a - \frac{\pi}{2}\right)$. D. $\sin a + 1 = 2 \cos\left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin a + 1 &= 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{a}{2} = \left(\sin \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2}\right)^2 \\ &= \left(\sin \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2}\right) \left(\sin \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2}\right) \\ &= \sqrt{2} \sin\left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sqrt{2} \cos\left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2 \sin\left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 98. Nếu $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ thì $\sin 2x$ bằng

- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{3}{8}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $-\frac{3}{4}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 - (\sin^2 x + \cos^2 x) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{3}{4}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 99. Cho hình thang cân $ABCD$ có đáy nhỏ AB , đáy lớn CD . Biết $AB = AD$ và $\tan \widehat{BDC} = \frac{3}{4}$.

Tính giá trị của $\cos \widehat{BAD}$.

- A. $\frac{17}{25}$. B. $-\frac{7}{25}$. C. $\frac{7}{25}$. D. $-\frac{17}{25}$.

Lời giải.

Qua B kẻ đường thẳng song song với AD cắt DC tại I , ta có $BI \parallel AD$.

Ta có tứ giác $ABID$ là hình bình hành mà $AB = AD$ suy ra $ABID$ là hình thoi. Gọi O là tâm hình thoi $ABID$.

Xét tam giác OID có $\tan \widehat{BDC} = \frac{IO}{OD} \Rightarrow \frac{IO}{OD} = \frac{3}{4}$.

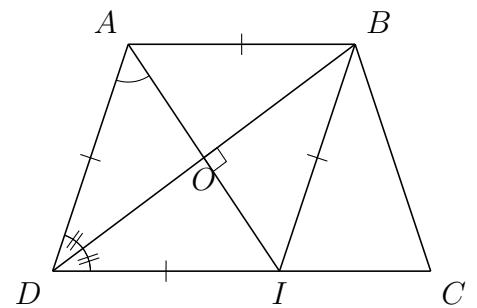
$$\Rightarrow IO = \frac{3}{4}OD.$$

$$\text{Tam giác } AOD \text{ vuông tại } O, AD = \sqrt{AO^2 + DO^2} = \sqrt{IO^2 + OD^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}OD\right)^2 + OD^2} = \frac{5}{4}OD.$$

$$\text{Đặt } \alpha = \widehat{ODA}. \text{ Ta có } \cos \alpha = \frac{AO}{AD} = \frac{OI}{AD} = \frac{\frac{3}{4}OD}{\frac{5}{4}OD} = \frac{3}{5}.$$

$$\text{Ta có } \widehat{BAD} = 2\widehat{ODA} = 2\alpha \text{ suy ra } \cos \widehat{BAD} = \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{25}.$$

Chọn đáp án **(B)** □



Câu 100. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$. B. $\cos(a-b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
C. $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$. D. $2 \cos a \cos b = \cos(a-b) + \cos(a+b)$.

Lời giải.

Câu A, D là công thức biến đổi đúng.

Câu C là công thức cộng đúng.

Câu B sai vì $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 101. Cho bất đẳng thức $\cos 2A + \frac{1}{64 \cos^4 A} - (2 \cos 2B + 4 \sin B) + \frac{13}{4} \leq 0$ với A, B, C là ba góc của tam giác ABC . Khẳng định đúng là

- A. $B + C = 120^\circ$. B. $B + C = 130^\circ$. C. $A + B = 120^\circ$. D. $A + C = 140^\circ$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 0 &\geq \cos 2A + \frac{1}{64 \cos^4 A} - (2 \cos 2B + 4 \sin B) + \frac{13}{4} \\ &= 2 \cos^2 A - 1 + \frac{1}{64 \cos^4 A} - (2 - 4 \sin^2 B + 4 \sin B) + \frac{13}{4} \\ &= \left(2 \cos^2 A + \frac{1}{64 \cos^4 A} - \frac{3}{4} \right) + (4 \sin^2 B - 4 \sin B + 1) \\ &= \frac{(4 \cos^2 A - 1)^2 (8 \cos^2 A + 1)}{64 \cos^4 A} + (2 \sin B - 1)^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Do đó bất đẳng thức trở thành đẳng thức, suy ra

$$\begin{cases} 4 \cos^2 A = 1 \\ 2 \sin B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 60^\circ \\ B = 30^\circ. \end{cases}$$

Vậy $C = 90^\circ$ và $B + C = 120^\circ$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 102. Nếu $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ thì $\sin 2x$ bằng

A. $\frac{3}{4}$.

B. $\frac{3}{8}$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $-\frac{3}{4}$.

Lời giải.

Do $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ nên

$$(\sin x + \cos x)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{3}{4}.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 103. Cho tam giác ABC có $\widehat{CAB} = 45^\circ$, $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính số đo $\widehat{AMC}$.

A. $\widehat{AMC} = 30^\circ$.

B. $\widehat{AMC} = 60^\circ$.

C. $\widehat{AMC} = 45^\circ$.

D. $\widehat{AMC} = 90^\circ$.

Lời giải.

Gọi $\widehat{CAM} = x$, khi đó $\widehat{MAB} = 45^\circ - x$. Áp dụng định lý Sin

cho tam giác ABM và ACM , ta có

$$\frac{BM}{\sin(45^\circ - x)} = \frac{AM}{\sin 30^\circ}, \quad \frac{CM}{\sin x} = \frac{AM}{\sin 105^\circ}.$$

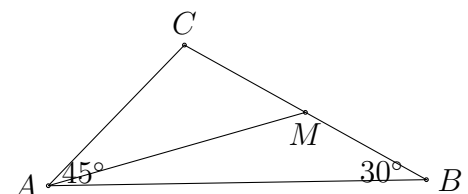
Vì $BM = CM$ nên $\frac{\sin 30^\circ}{\sin(45^\circ - x)} = \frac{\sin 105^\circ}{\sin x}$ hay

$$\begin{aligned} \sin(45^\circ - x) &= 2 \sin 105^\circ \sin x = 2 \sin x \cos 75^\circ \Leftrightarrow \sin(45^\circ - x) = \sin(x + 75^\circ) + \sin(x - 75^\circ) \\ \Leftrightarrow \sin(45^\circ - x) - \sin(x + 75^\circ) &= \sin(x - 75^\circ) \Leftrightarrow 2 \cos 60^\circ \sin(-x - 15^\circ) = \sin(x - 75^\circ) \Leftrightarrow \sin(-x - 15^\circ) = \sin(x - 75^\circ) \\ \Leftrightarrow x &= 30^\circ. \text{ Vậy } \widehat{AMC} = 45^\circ. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 104. Tính giá trị của biểu thức: $\sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ - \sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ$.



- A. 1. B. 0. C. $\frac{1}{2}$. D. $-\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $\sin 30^\circ \cos 60^\circ - \sin 60^\circ \cos 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 105. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$.

- A. $\max P = 1$ và $\min P = -1$. B. $\max P = 7$ và $\min P = -7$.
C. $\max P = 3$ và $\min P = -3$. D. $\max P = 4$ và $\min P = -4$.

Lời giải.

Ta có $P = 3 \sin x - 4 \sin^3 x = \sin 3x$, mà $-1 \leq \sin 3x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq P \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} \min P = -1 \\ \max P = 1 \end{cases}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 106. Trong các đẳng thức dưới đây, đẳng thức nào đúng?

- A. $\sin 3x + \sin 5x = 2 \sin 4x \sin x$. B. $\sin 3x + \sin 5x = -2 \sin 4x \sin x$.
C. $\sin 3x + \sin 5x = 2 \sin x \cos 4x$. D. $\sin 3x + \sin 5x = 2 \sin 4x \cos x$.

Lời giải.

Ta có: $\sin 3x + \sin 5x = 2 \sin \frac{5x+3x}{2} \cos \frac{5x-3x}{2} = 2 \sin 4x \cos x$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 107. Chọn đẳng thức **sai** trong các đẳng thức được liệt kê ở các phương án A, B, C và D sau đây.

- A. $\cos 4x + \cos x = 2 \cos \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2}$. B. $\cos 4x - \cos x = 2 \sin \frac{5x}{2} \sin \frac{3x}{2}$.
C. $\sin 4x - \sin x = 2 \cos \frac{5x}{2} \sin \frac{3x}{2}$. D. $\sin 4x + \sin x = 2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2}$.

Lời giải.

Trước hết, ta cần nắm công thức: $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$.

Do đó, ta có: $\cos 4x - \cos x = -2 \sin \frac{4x+x}{2} \sin \frac{4x-x}{2} = -2 \sin \frac{5x}{2} \sin \frac{3x}{2}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 108. Công thức nào sau đây là đúng?

- A. $\sin(x+y) = \sin x + \sin y$. B. $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$.
C. $\cos(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$. D. $\sin(x-y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$.

Lời giải.

Ta có: $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ với $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 109. Công thức nào sau đây là đúng (với điều kiện có nghĩa của biểu thức)?

- A. $\tan(x+y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 - \tan x \tan y}$. B. $\tan(x+y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$.
C. $\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$. D. $\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 - \tan x \tan y}$.

Lời giải.

Với điều kiện có nghĩa của biểu thức thì ta luôn có

$$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 110. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. $\sin(x + y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$. B. $\sin(x - y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$.
C. $\cos(x + y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$. D. $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin y \sin x$.

Lời giải.

Ta có $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin y \sin x$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 111. Trong các công thức sau công thức nào đúng?

- A. $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$. B. $\cos(x + y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$.
C. $\cos(x + y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y$. D. $\cos(x + y) = \cos x \sin y - \sin x \cos y$.

Lời giải.

Công thức đúng là $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 112. Biết rằng $\sin 18^\circ = \frac{-a + \sqrt{b}}{c}$ trong đó a, b là các số nguyên không âm, c là số nguyên dương và $(b, c) = 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + 2b + 3c$.

- A. 12. B. 18. C. 23. D. 27.

Lời giải.

Ta có hệ thức sau: $36^\circ = 90^\circ - 54^\circ$ hay $2 \cdot 18^\circ = 90^\circ - 3 \cdot 18^\circ$.

Từ đây suy ra: $\cos(2 \cdot 18^\circ) = \sin(3 \cdot 18^\circ)$ (*).

Ta có

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x.$$

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x.$$

Do đó (*) tương đương:

$$1 - 2 \sin^2 18^\circ = 3 \sin 18^\circ - 4 \sin^3 18^\circ.$$

Đặt $t = \sin 18^\circ$ ($0 < t < 1$). Khi đó đẳng thức trên trở thành:

$$\begin{aligned} 1 - 2t^2 &= 3t - 4t^3 \\ \Leftrightarrow 4t^3 - 2t^2 - 3t + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t - 1)(4t^2 + 2t - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (loại)} \\ t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \text{ (nhận)} \\ t = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \text{ (loại)} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $a = 1, b = 5, c = 4$. Do đó $P = 23$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 113. Biết rằng $\sin^8 x + \cos^8 x = a + b \cos 4x + c \cos 8x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Tính giá trị của biểu thức $P = 128(a - b + 2c)$.

A. 9.

B. 12.

C. 15.

D. 18.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} \sin^8 x + \cos^8 x &= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^4 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^4 \\ &= \frac{1}{16} [(1 - \cos 2x)^4 + (1 + \cos 2x)^4] \\ &= \frac{1}{16} [(1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x)^2 + (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x)^2] \\ &= \frac{1}{16} [(1 - 4 \cos 2x + 6 \cos^2 2x - 4 \cos^3 2x + \cos^4 2x) \\ &\quad + (1 + 4 \cos 2x + 6 \cos^2 2x + 4 \cos^3 2x + \cos^4 2x)] \\ &= \frac{1}{16} (2 + 12 \cos^2 2x + 2 \cos^4 2x) \\ &= \frac{1}{8} \left[1 + 3(1 + \cos 4x) + \left(\frac{1 + \cos 4x}{2} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{32} [4 + 12(1 + \cos 4x) + (1 + \cos 4x)^2] \\ &= \frac{1}{32} (4 + 12 + 12 \cos 4x + 1 + 2 \cos 4x + \cos^2 4x) \\ &= \frac{1}{32} \left(17 + 14 \cos 4x + \frac{1 + \cos 8x}{2} \right) \\ &= \frac{1}{64} (34 + 28 \cos 4x + 1 + \cos 8x) \\ &= \frac{1}{64} (35 + 28 \cos 4x + \cos 8x). \end{aligned}$$

Vậy $a = \frac{35}{64}$, $b = \frac{28}{64}$, $c = \frac{1}{64}$. Do đó $P = 18$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 114. Rút gọn biểu thức $\mathcal{B} = \sin^2 x + 2 \sin(a - x) \cdot \sin x \cdot \cos a + \sin^2(a - x)$.

A. $\mathcal{B} = \cos^2 a$.

B. $\mathcal{B} = \cos 2a$.

C. $\mathcal{B} = \sin 2a$.

D. $\mathcal{B} = \sin^2 a$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \sin^2 x + 2 \sin(a - x) \cdot \sin x \cdot \cos a + \sin^2(a - x) \\ &= \sin^2 x + \sin(a - x) \cdot [\sin(x + a) + \sin(x - a)] + \sin^2(a - x) \\ &= \sin^2 x + \sin(a - x) \cdot \sin(a + x) \\ &= \frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{\cos 2a - \cos 2x}{2} \\ &= \frac{1 - \cos 2a}{2} \\ &= \sin^2 a. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 115. Cho $\cos 4\alpha + 2 = 6 \sin^2 \alpha$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị $\tan 2\alpha$.

- A. $\tan 2\alpha = -2\sqrt{3}$. B. $\tan 2\alpha = -\sqrt{3}$. C. $\tan 2\alpha = \sqrt{3}$. D. $\tan 2\alpha = 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $\cos 4\alpha + 2 = 6 \sin^2 \alpha \Leftrightarrow 2 \cos^2 2\alpha - 1 + 2 = 3(1 - \cos 2\alpha)$.

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 2\alpha + 3 \cos 2\alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow (2 \cos 2\alpha - 1)(\cos 2\alpha + 2) = 0 \Leftrightarrow \cos 2\alpha = \frac{1}{2} \quad (\text{Vì } \cos 2\alpha + 2 > 0).$$

$$\text{Mặt khác } 1 + \tan^2 2\alpha = \frac{1}{\cos^2 2\alpha} \Rightarrow \tan^2 2\alpha = \frac{1}{\cos^2 2\alpha} - 1 = 3.$$

Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \pi < 2\alpha < 2\pi$ nên $\sin 2\alpha < 0$. Do đó, $\tan 2\alpha < 0$. Vậy $\tan 2\alpha = -\sqrt{3}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 116. Cho $\frac{1}{\tan^2 \alpha} + \frac{1}{\cot^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 7$. Tính giá trị $\cos 4\alpha$.

- A. $\cos 4\alpha = -\frac{7}{9}$. B. $\cos 4\alpha = -\frac{5}{9}$. C. $\cos 4\alpha = -\frac{11}{9}$. D. $\cos 4\alpha = -\frac{3}{9}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tan^2 \alpha} + \frac{1}{\cot^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 7 \\ \Leftrightarrow & \frac{\sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha + 1) + \cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha + 1)}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = 7 \\ \Leftrightarrow & \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 1 = 7 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\ \Leftrightarrow & (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 1 = 7 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\ \Leftrightarrow & 2 = 9 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\ \Leftrightarrow & 8 = 9 (2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 \\ \Leftrightarrow & 8 = 9 \sin^2 2\alpha \\ \Leftrightarrow & 16 = 9 (1 - \cos 4\alpha) \\ \Leftrightarrow & \cos 4\alpha = -\frac{7}{9}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 117. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $\sin 3\alpha = 4 \sin \alpha \cdot \sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right)$.
B. $\sin^3 \frac{\alpha}{3} + 3 \sin^3 \frac{\alpha}{3^2} + \dots + 3^{n-1} \sin^3 \frac{\alpha}{3^n} = \frac{1}{4} \left(3^n \sin \frac{\alpha}{3^n} - \sin \alpha \right)$.
C. $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = \frac{5}{8} - \frac{3}{8} \cos 4\alpha$.
D. $\sin^3 \frac{\alpha}{3} + 3 \cos^3 \frac{\alpha}{3^2} + 3^2 \sin^3 \frac{\alpha}{3^3} + \dots + 3^{n-1} \sin^3 \frac{\alpha}{3^n} + 3^n \cos^3 \frac{\alpha}{3^{n+1}} = \frac{1}{4} \left(3^n \sin \frac{\alpha}{3^n} - \cos \alpha \right)$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \sin^3 \frac{\alpha}{3} &= \frac{3 \sin \frac{\alpha}{3} - \sin \alpha}{4}, \quad \sin^3 \frac{\alpha}{3^2} = \frac{3 \sin \frac{\alpha}{3^2} - \sin \frac{\alpha}{3}}{4}, \quad \dots, \quad \sin^3 \frac{\alpha}{3^n} = \frac{3 \sin \frac{\alpha}{3^n} - \sin \frac{\alpha}{3^{n-1}}}{4}. \\ VT &= \frac{3 \sin \frac{\alpha}{3} - \sin \alpha}{4} + 3 \frac{3 \sin \frac{\alpha}{3^2} - \sin \frac{\alpha}{3}}{4} + \dots + 3^{n-1} \frac{3 \sin \frac{\alpha}{3^n} - \sin \frac{\alpha}{3^{n-1}}}{4} \\ &= -\frac{\sin \alpha}{4} + 3^{n-1} \frac{3 \sin \frac{\alpha}{3^n}}{4} = \frac{1}{4} \left(3^n \sin \frac{\alpha}{3^n} - \sin \alpha \right) \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 118. Cho tam giác ABC bất kì. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 + 2 \cos A \cos B \cos C$.
 B. $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A \cos B \cos C)$.
 C. $\sin^2 B + \sin^2 C = 1 - \cos 2A$.
 D. $\cos^2 B + \cos^2 C = \cos(A - B) + \cos 2A$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} + 1 - \cos^2 C &= 2 - \frac{\cos 2A + \cos 2B}{2} - \cos^2 C \\ &= 2 + \cos C [\cos(A - B) + \cos(A + B)] = 2(1 + \cos A \cos B \cos C) \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 119. Cho $\sin \frac{x}{5} \neq 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = \cos \frac{x}{5} \cos \frac{2x}{5} \cos \frac{4x}{5} \cos \frac{8x}{5}$.

- A. $P = \frac{\cos \frac{16x}{5}}{16 \sin \frac{x}{5}}$. B. $P = \frac{\sin \frac{16x}{5}}{16 \sin \frac{x}{5}}$. C. $P = \frac{1}{16}$. D. $P = -\frac{1}{16}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} P \cdot \sin \frac{x}{5} &= \sin \frac{x}{5} \cos \frac{x}{5} \cos \frac{2x}{5} \cos \frac{4x}{5} \cos \frac{8x}{5} \\ &= \frac{1}{2} \sin \frac{2x}{5} \cos \frac{2x}{5} \cos \frac{4x}{5} \cos \frac{8x}{5} \\ &= \frac{1}{4} \sin \frac{4x}{5} \cos \frac{4x}{5} \cos \frac{8x}{5} \\ &= \frac{1}{8} \sin \frac{8x}{5} \cos \frac{8x}{5} \\ &= \frac{1}{16} \sin \frac{16x}{5} \end{aligned}$$

Suy ra $P = \frac{\sin \frac{16x}{5}}{16 \sin \frac{x}{5}}$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 120. Cho a, b là các số nguyên, sao cho đẳng thức $\sin^4 x = \frac{a}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{b}{8} \cos 4x$ đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$. Tính giá trị $a + b$.

- A. 1. B. 5. C. 6. D. 4.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin^4 x &= (\sin^2 x)^2 = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos^2 2x = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \cdot \frac{1 + \cos 4x}{2} = \\ &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x. \end{aligned}$$

Suy ra $a = 3, b = 1$; và $a + b = 4$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 121. Giả sử a, b, c lần lượt là ba cạnh đối diện với ba góc A, B, C của tam giác ABC thỏa điều kiện $a^2 = \frac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c}$ và $a = 2b \cos C$. Tam giác ABC là

- A. Tam giác vuông. B. Tam giác đều.
C. Tam giác vuông cân. D. Tam giác cân.

Lời giải.

Áp dụng định lý hàm số sin ta có

$$\begin{aligned} a = 2b \cos C &\Leftrightarrow 2R \sin A = 4R \sin B \cos C \\ &\Leftrightarrow \sin A = 2 \sin B \cos C \\ &\Leftrightarrow \sin(B + C) = \sin(B + C) + \sin(B - C) \\ &\Leftrightarrow \sin(B - C) = 0. \end{aligned}$$

Vì B, C là hai góc của tam giác nên $\sin(B - C) = 0 \Leftrightarrow B = C$.

Ta lại có

$$\begin{aligned} a^2 = \frac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c} &\Leftrightarrow a^3 - a^2b - a^2c = a^3 - b^3 - c^3 \\ &\Leftrightarrow b^3 + c^3 - a^2(b + c) = 0 \\ &\Leftrightarrow (b + c)(b^2 - bc + c^2 - a^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow bc = b^2 + c^2 - a^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &\Leftrightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 60^\circ. \end{aligned}$$

Vậy tam giác ABC đều.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 122. Giả sử a, b, c lần lượt là ba cạnh đối diện với ba góc A, B, C của tam giác ABC thỏa điều kiện $2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{1}{2} + \frac{b+c}{a} \sin \frac{A}{2}$. Tính góc A của tam giác ABC .
A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Lời giải.

Đặt $2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{1}{2} + \frac{b+c}{a} \sin \frac{A}{2}$ (*). Ta có

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow 2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sin B + \sin C}{\sin A} \sin \frac{A}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos \frac{B+C}{2} + \cos \frac{B-C}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} \sin \frac{A}{2} \\ &\Leftrightarrow \sin \frac{A}{2} + \cos \frac{B-C}{2} = \frac{1}{2} + \cos \frac{B-C}{2} \left(\text{vì } \sin \frac{A}{2} > 0, \cos \frac{A}{2} = \sin \frac{B+C}{2} \right) \\ &\Leftrightarrow \sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 123. Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin A(\cos B + \cos C) = \sin B + \sin C$. Tính $\cos A \cdot \cos \frac{\pi}{3}$.

A. 1.

B. 0.

C. -1.

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}\sin A(\cos B + \cos C) &= \sin B + \sin C \\ \Leftrightarrow \sin A &= \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} \\ &= \frac{2 \sin \left(\frac{B+C}{2} \right) \cos \left(\frac{B-C}{2} \right)}{2 \cos \left(\frac{B+C}{2} \right) \cos \left(\frac{B-C}{2} \right)} \\ \Leftrightarrow 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} &= \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \\ \Leftrightarrow \sin^2 \frac{A}{2} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \sin \frac{A}{2} &= \frac{\sqrt{2}}{2} > 0 \Rightarrow A = \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow \cos A \cdot \cos \frac{\pi}{3} &= 0.\end{aligned}$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 124. Cho A, B, C là ba góc của một tam giác thỏa mãn $\sin A = \frac{\cos B + \cos C}{\sin B + \sin C}$. Khẳng định nào sau đây luôn đúng?

A. $\triangle ABC$ vuông.

B. $\triangle ABC$ cân.

C. $\triangle ABC$ đều.

D. $\triangle ABC$ vuông cân.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \frac{\cos B + \cos C}{\sin B + \sin C} = \frac{2 \cos \left(\frac{B+C}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{B-C}{2} \right)}{2 \sin \left(\frac{B+C}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{B-C}{2} \right)} = \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \right)} = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}}.$$

$$\text{Mà } \sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}.$$

$$\text{Do đó: } \sin A = \frac{\cos B + \cos C}{\sin B + \sin C} \Leftrightarrow 2 \cos^2 \frac{A}{2} = 1 \Leftrightarrow \cos A = 0 \Leftrightarrow A = 90^\circ.$$

Vậy $\triangle ABC$ vuông.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 125. Biến đổi thành tích biểu thức $C = \cos 3a + \cos 2a$ ta được

A. $C = 2 \cos \frac{5a}{2} \cos \frac{a}{2}.$

B. $C = -2 \sin \frac{5a}{2} \sin \frac{a}{2}.$

C. $C = 2 \sin \frac{5a}{2} \cos \frac{a}{2}.$

D. $C = 2 \cos \frac{5a}{2} \sin \frac{a}{2}.$

Lời giải.

Ta có

$$C = 2 \cos \frac{3a+2a}{2} \cos \frac{3a-2a}{2} = 2 \cos \frac{5a}{2} \cos \frac{a}{2}.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 126. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\cos a + \cos 2a = 2 \cos \frac{3a}{2} \cos \frac{a}{2}$.

C. $\cos a - \cos 2a = 2 \sin \frac{3a}{2} \sin \frac{a}{2}$.

B. $\sin a + \sin 2a = 2 \sin \frac{3a}{2} \cos \frac{a}{2}$.

D. $\sin a - \sin 2a = 2 \cos \frac{3a}{2} \sin \frac{a}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\sin a - \sin 2a = 2 \cos \frac{a+2a}{2} \sin \frac{a-2a}{2} = 2 \cos \frac{3a}{2} \sin \left(-\frac{a}{2}\right) = -2 \cos \frac{3a}{2} \sin \frac{a}{2}.$$

Vậy khẳng định “ $\sin a - \sin 2a = 2 \cos \frac{3a}{2} \sin \frac{a}{2}$ ” là sai.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 127. Biến đổi biểu thức $M = \sin \frac{a}{5} \sin \frac{2a}{5}$ thành tổng.

A. $\frac{1}{2}(\sin 8a - \sin 2a)$.

B. $4 \sin \left(\frac{\pi}{6} + a\right) + \sin \left(\frac{\pi}{6} - a\right)$.

C. $\frac{1}{2} \left(\cos \frac{a}{5} - \cos \frac{3a}{5} \right)$.

D. $-4 \cos a + \sin^2 \frac{a}{2}$.

Lời giải.

$$M = \sin \frac{a}{5} \sin \frac{2a}{5} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{a}{5} - \cos \frac{3a}{5} \right).$$

Chọn đáp án **(C)**

□

ĐÁP ÁN

1. B	2. A	3. D	4. A	5. A	6. C	7. D	8. D	9. D	10. B
11. B	12. D	13. C	14. D	15. B	16. B	17. B	18. A	19. D	20. D
21. B	22. B	23. A	24. A	25. B	26. B	27. C	28. C	29. A	30. B
31. D	32. A	33. A	34. D	35. A	36. D	37. C	38. A	39. B	40. A
41. C	42. C	43. D	44. B	45. A	46. B	47. D	48. C	49. C	50. C
51. C	52. C	53. B	54. C	55. C	56. B	57. D	58. D	59. B	60. B
61. C	62. A	63. C	64. A	65. D	66. C	67. A	68. B	69. C	70. C
71. D	72. A	73. B	74. D	75. D	76. C	77. A	78. C	79. B	80. C
81. A	82. B	83. A	84. D	85. A	86. C	87. C	88. C	89. A	90. B
91. C	92. C	93. D	94. D	95. C	96. D	97. A	98. D	99. B	100. B
101. A	102. D	103. C	104. D	105. A	106. D	107. B	108. B	109. C	110. D
111. A	112. C	113. D	114. D	115. B	116. A	117. B	118. B	119. B	120. D
121. B	122. C	123. B	124. A	125. A	126. D	127. C			

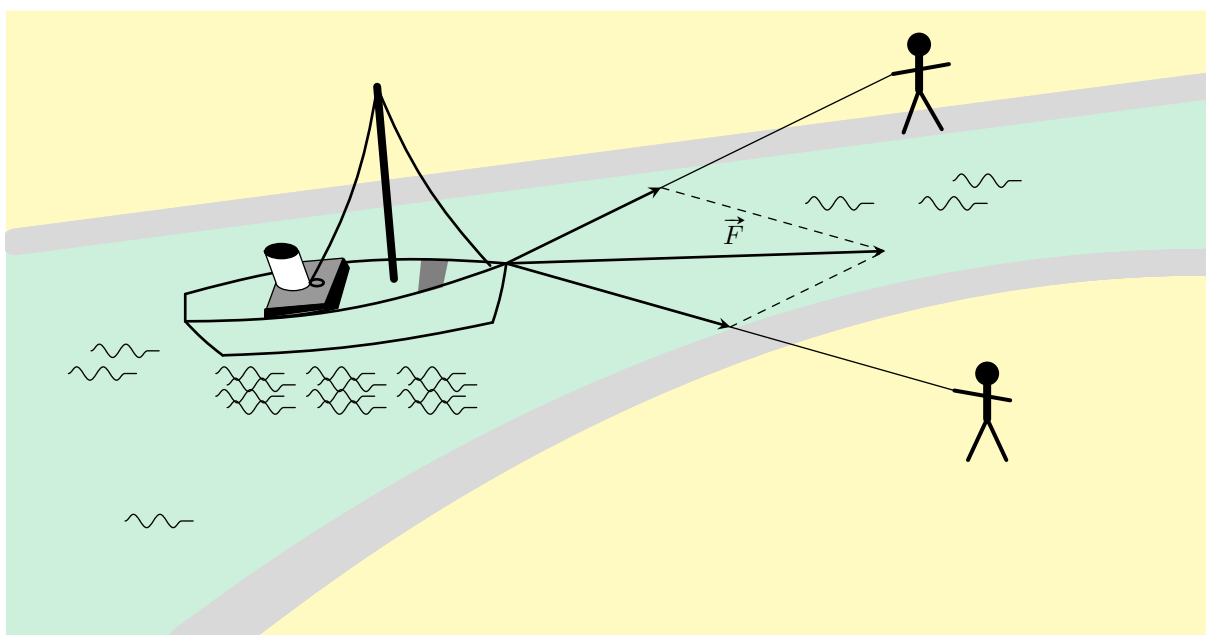
PHẦN



HÌNH HỌC

Chương 1: VEC-TƠ

§1 CÁC ĐỊNH NGHĨA



Hình 1.1

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

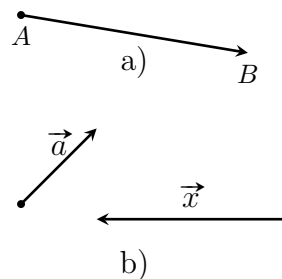
1 ĐỊNH NGHĨA, SỰ XÁC ĐỊNH VEC-TƠ

Định nghĩa (Vec-tơ). Vec-tơ là một đoạn thẳng có hướng.

Vec-tơ có điểm đầu (gốc) A , điểm cuối (ngọn) B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$.

Vec-tơ còn được kí hiệu là $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$,... khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của nó.

Một vec-tơ hoàn toàn được xác định khi biết điểm đầu và điểm cuối của nó.



Hình 1.2

! Với hai điểm phân biệt A và B ta chỉ có một đoạn thẳng (AB hoặc BA), nhưng có hai vec-tơ khác nhau là $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$.

Định nghĩa (Độ dài véc-tơ). Độ dài của đoạn thẳng AB là độ dài (hay mô-đun) của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$. Tức là $|\overrightarrow{AB}| = AB$.

Đương nhiên $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$.

Định nghĩa (Véc-tơ-không). Véc-tơ-không là véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau. Véc-tơ-không được kí hiệu là $\vec{0}$.

Ta có $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \dots$

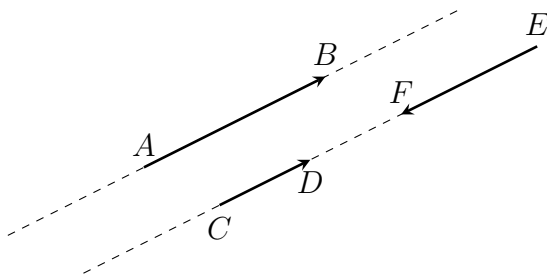
2 HAI VEC-TƠ CÙNG PHƯƠNG, CÙNG HƯỚNG

Định nghĩa (Giá véc-tơ). Giá của một véc-tơ khác $\vec{0}$ là đường thẳng chứa điểm đầu và điểm cuối của véc-tơ đó.

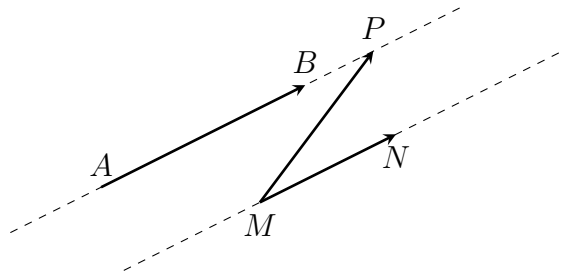
Định nghĩa (Phương, hướng véc-tơ). Hai véc-tơ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

Trên hình 1.3a) ta có các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ cùng phương. Trên hình 1.3b) ta có $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{MN}$ cùng phương, còn $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{MP}$ không cùng phương.

Hai véc-tơ cùng phương có thể cùng hướng hoặc ngược hướng. Chẳng hạn $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng, $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EF}$ ngược hướng (hình 1.3a).



Hình 1.3a)



Hình 1.3b)

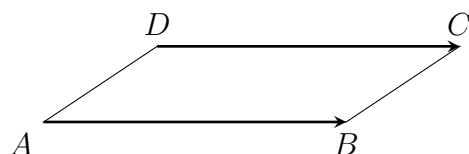
Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

! Khi nói hai véc-tơ cùng hướng hay ngược hướng thì chúng đã cùng phương. Véc-tơ $\vec{0}$ cùng phương, cùng hướng với mọi véc-tơ.

3 HAI VEC-TƠ BẰNG NHAU

Định nghĩa (Véc-tơ bằng nhau). Hai véc-tơ gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng hướng và cùng độ dài.

Chẳng hạn, nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.



! Khi cho trước véc-tơ $\vec{a}$ và điểm O , thì ta luôn tìm được một điểm A duy nhất sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$. Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

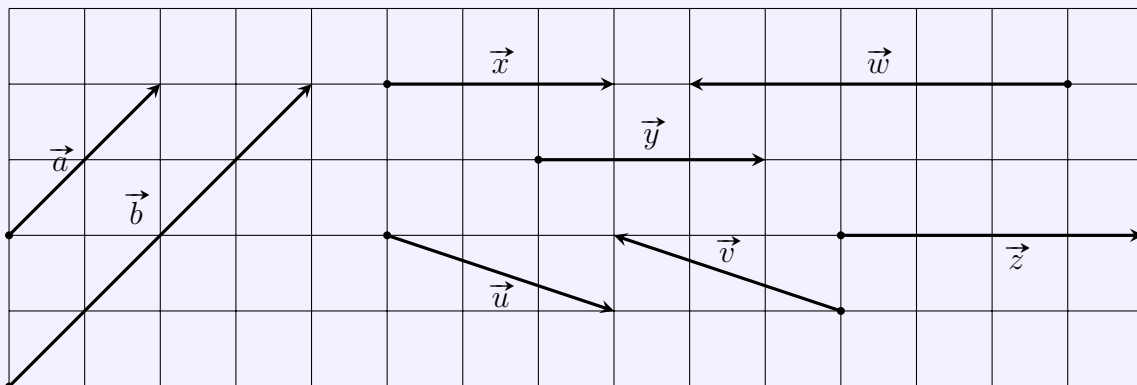
B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xác định một véc-tơ, phương hướng của véc-tơ, độ dài của véc-tơ

- Xác định một véc-tơ và xác định sự cùng phương, cùng hướng của hai véc-tơ theo định nghĩa.
- Dựa vào các tính chất hình học của các hình đã cho biết để tính độ dài của một véc-tơ.

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 1 ❖❖❖

Ví dụ 1. Trong hình 1.4, hãy chỉ ra các véc-tơ cùng phương, cùng hướng, ngược hướng và các véc-tơ bằng nhau.



Hình 1.4

Lời giải.

- + Các véc-tơ cùng phương: $\vec{a}$ và $\vec{b}$; $\vec{u}$ và $\vec{v}$; $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ và $\vec{w}$.
- + Các véc-tơ cùng hướng: $\vec{a}$ và $\vec{b}$; $\vec{x}$, $\vec{y}$ và $\vec{z}$.
- + Các véc-tơ ngược hướng: $\vec{u}$ và $\vec{v}$; $\vec{w}$ và $\vec{x}$; $\vec{w}$ và $\vec{y}$; $\vec{w}$ và $\vec{z}$.
- + Các véc-tơ bằng nhau: $\vec{x} = \vec{y}$.

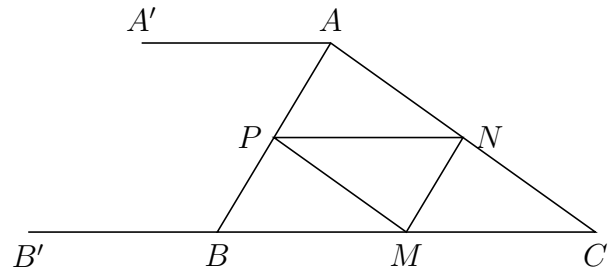
□

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC . Gọi M , N , P lần lượt là trung điểm của BC , CA , AB .

- Liệt kê tất cả các véc-tơ khác véc-tơ $\vec{0}$, cùng phương với $\overrightarrow{MN}$ và có điểm đầu, điểm cuối lấy trong các điểm đã cho.
- Liệt kê các véc-tơ khác véc-tơ $\vec{0}$, cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ và có điểm đầu, điểm cuối lấy trong các điểm đã cho.
- Vẽ các véc-tơ bằng véc-tơ $\overrightarrow{NP}$ mà có điểm đầu là A hoặc B .

Lời giải.

- a) Các véc-tơ khác véc-tơ $\vec{0}$, cùng phương với $\overrightarrow{MN}$ là $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{PB}$.
- b) Các véc-tơ khác véc-tơ $\vec{0}$, cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{NM}$.
- c) Trên tia CB lấy điểm B' sao cho $BB' = NP$.



Khi đó ta có $\overrightarrow{BB'}$ là véc-tơ có điểm đầu là B và bằng véc-tơ $\overrightarrow{NP}$.

Qua A dựng đường thẳng song song với đường thẳng NP . Trên đường thẳng đó lấy điểm A' sao cho $\overrightarrow{AA'}$ cùng hướng với $\overrightarrow{NP}$ và $AA' = NP$.

Khi đó ta có $\overrightarrow{AA'}$ là véc-tơ có điểm đầu là A và bằng véc-tơ $\overrightarrow{NP}$. □

Ví dụ 3. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi M là trung điểm của AB , N là điểm đối xứng với C qua D . Hãy tính độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{MD}$ và $\overrightarrow{MN}$.

Lời giải.

Áp dụng định lý Pythagoras trong tam giác vuông MAD ta có

$$DM^2 = AM^2 + AD^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Suy ra $|\overrightarrow{MD}| = MD = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

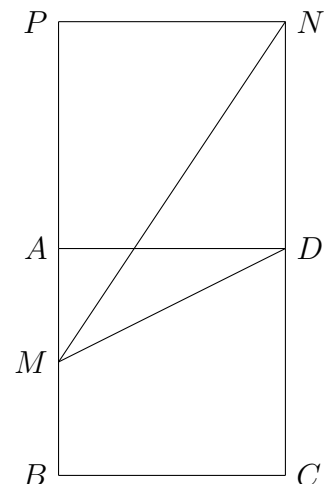
Qua N kẻ đường thẳng song song với AD cắt AB tại P .

Khi đó tứ giác $ADNP$ là hình vuông và $PM = PA + AM = a + \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}$.

Áp dụng định lý Pythagoras trong tam giác vuông NPM ta có

$$MN^2 = NP^2 + PM^2 = a^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{13a^2}{4} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{13}}{2}$$

Suy ra $|\overrightarrow{MN}| = MN = \frac{a\sqrt{13}}{2}$. □



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho ngũ giác $ABCDE$. Có bao nhiêu véc-tơ khác véc-tơ $\vec{0}$, có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của ngũ giác.

Lời giải.

Từ hai điểm phân biệt, chẳng hạn A, B , ta xác định được hai véc-tơ khác véc-tơ-không là $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}$. Mà từ năm đỉnh A, B, C, D, E của ngũ giác ta có 10 cặp điểm phân biệt, do đó có 20 véc-tơ thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Bài 2. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm là O . Tìm các véc-tơ từ 5 điểm A, B, C, D, O

a) Bằng véc-tơ $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{OB}$.

b) Có độ dài bằng $|\overrightarrow{OB}|$.

Lời giải.

- a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$.
 b) $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{DO}$, $\overrightarrow{OD}$.

□

Bài 3. Cho ba điểm A, B, C phân biệt thẳng hàng.

- a) Khi nào thì hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng?
 b) Khi nào thì hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ ngược hướng?

Lời giải.

- a) A nằm ngoài đoạn BC .
 b) A nằm trong đoạn BC .

□

Bài 4. Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt.

- a) Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ thì ba điểm A, B, C có đặc điểm gì?
 b) Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ thì bốn điểm A, B, C, D có đặc điểm gì?

Lời giải.

- a) B là trung điểm của AC .
 b) A, B, C, D thẳng hàng hoặc $ABCD$ là hình bình hành.

□

Bài 5. Cho tam giác ABC đều cạnh a và G là trọng tâm. Gọi I là trung điểm của AG . Tính độ dài của các véc-tơ $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BI}$.

Lời giải.

Sử dụng tính chất của trọng tâm và định lý Pythagoras.

Đáp án: $|\overrightarrow{AG}| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $|\overrightarrow{BI}| = \frac{a\sqrt{21}}{6}$

□

Dạng 2. Chứng minh hai véc-tơ bằng nhau

Để chứng minh hai véc-tơ bằng nhau ta chứng minh chúng có cùng độ dài và cùng hướng hoặc dựa vào nhận xét nếu tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 2 ❖❖❖

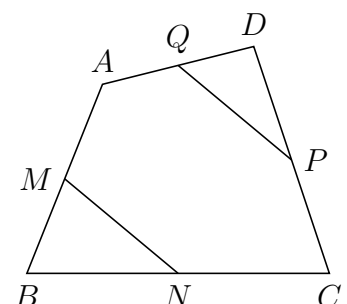
Ví dụ 1. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA . Chứng minh $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

Lời giải.

Do M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC nên MN là đường trung bình của tam giác ABC suy ra $MN \parallel AC$ và $MN = \frac{1}{2}AC$ (1).

Tương tự, QP là đường trung bình của tam giác ADC suy ra $QP \parallel AC$ và $QP = \frac{1}{2}AC$ (2).

Từ (1) và (2) kết hợp hình vẽ suy ra $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.



□

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi I là trung điểm của BC . Dựng điểm B' sao cho $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{GA}$.

- a) Chứng minh $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$.
b) Gọi J là trung điểm của BB' . Chứng minh $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IG}$.

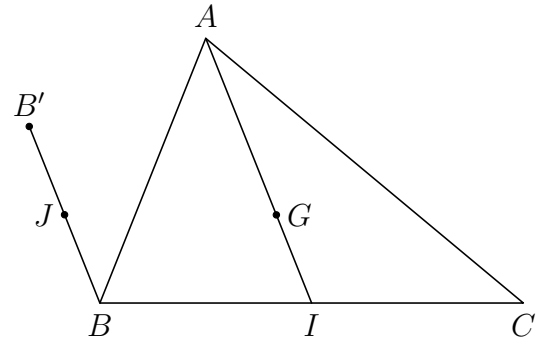
Lời giải.

a) Vì I là trung điểm của BC nên $BI = CI$ và $\overrightarrow{BI}$ cùng hướng với $\overrightarrow{IC}$ do đó $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$.

b) Ta có $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{GA}$ suy ra $BB' = AG$ và $BB' \parallel AG$. Do đó $\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{IG}$ cùng hướng (1).

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $IG = \frac{1}{2}AG$, J là trung điểm BB' suy ra $BJ = \frac{1}{2}BB'$. Vì vậy $BJ = IG$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IG}$.



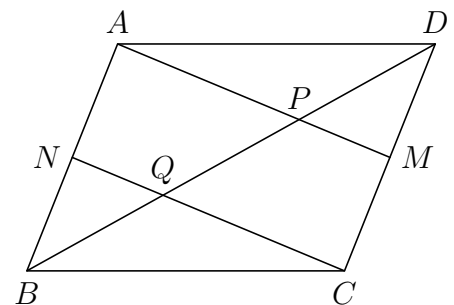
□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DC, AB ; P là giao điểm của AM và DB ; Q là giao điểm của CN và DB . Chứng minh $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QB}$.

Lời giải.

Chứng minh $DP = PQ$ dựa vào tính chất đường trung bình trong tam giác DQC và $PQ = QB$ dựa vào tính chất đường trung bình trong tam giác ABP . Suy ra $DP = PQ = QB$.



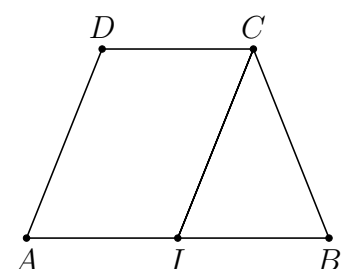
□

Bài 2. Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy là AB và CD với $AB = 2CD$. Từ C vẽ $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{DA}$. Chứng minh rằng:

- a) $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{CB}$.
b) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{DC}$.

Lời giải.

- a) Chứng minh $BICD$ là hình bình hành.
b) Chứng minh I là trung điểm AB và dữ kiện tứ giác $BICD$ là hình bình hành đã chứng minh ở câu a.



□

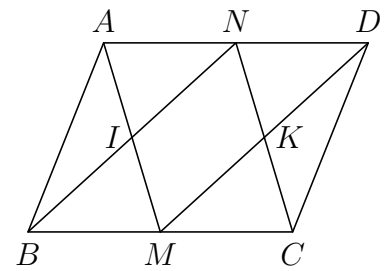
Bài 3. Cho hình bình hành $ABCD$. Hai điểm M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD . Điểm I là giao điểm của AM và BN , K là giao điểm của DM và CN . Chứng minh $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{IB}$.

Lời giải.

Theo giả thiết M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD nên $AN = \frac{1}{2}AD$ và $BM = \frac{1}{2}BC$. Mà $AD = BC$ do $ABCD$ là hình bình hành. Suy ra $ANMB$ là hình bình hành.

Ta có Điểm I là giao điểm của hai đường chéo AM và BN của hình bình hành $ANMB$ nên I là trung điểm của BN .

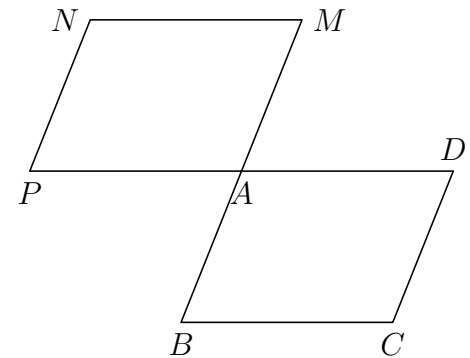
Tương tự, ta cũng chứng minh được K là trung điểm của DM . Từ đó dễ dàng chứng minh được $DKBI$ là hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{IB}$. □



Bài 4. Cho hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BC}$. Chứng minh $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{0}$.

Lời giải.

Chứng minh $AMNP$ và $QMPN$ đều là hình bình hành, suy ra $A \equiv Q$, suy ra $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{0}$.

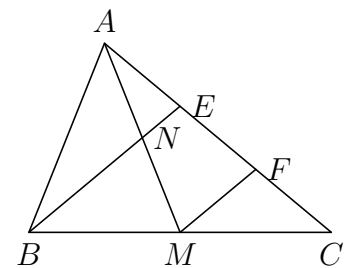


Bài 5. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM . Trên cạnh AC lấy hai điểm E và F sao cho $AE = EF = FC$; BE cắt AM tại N . Chứng minh $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{MN}$.

Lời giải.

$FM \parallel BE$ vì FM là đường trung bình của tam giác CEB .

Ta có $EA = EF$. Vậy EN là đường trung bình của tam giác AFM . Suy ra N là trung điểm của AM . Vậy $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{MN}$.



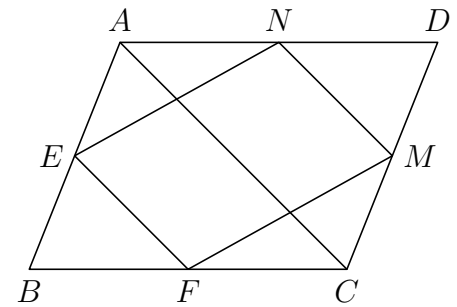
BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 6. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E, F, M và N lần lượt là trung điểm của cạnh AB, BC, CD và DA .

- Chứng tỏ rằng 3 vectơ $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ cùng phương;
- Chứng tỏ rằng $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{NM}$. Suy ra tứ giác $EFMN$ là hình bình hành.

Lời giải.

- a) Dựa vào tính chất đường trung bình, ta suy ra được $EF \parallel AC \parallel MN \Rightarrow \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ cùng phương;
- b) Dựa vào tính chất đường trung bình, ta suy ra được $EF = MN = \frac{1}{2}AC$ kết hợp với câu a) $\Rightarrow \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{NM}$. Suy ra tứ giác $EFMN$ là hình bình hành.

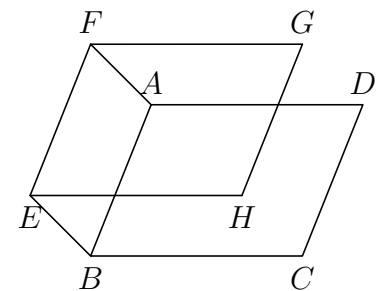


□

Bài 7. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$. Đặt $\overrightarrow{EH}$ và $\overrightarrow{FG}$ bằng $\overrightarrow{AD}$. Chứng minh $CDGH$ là hình bình hành.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AD}$ nên tứ giác $EFGH$ là hình bình hành, suy ra $GH \parallel FE \parallel AB \parallel DC$ và $GH = FE = AB = DC$ hay tứ giác $CDGH$ là hình bình hành.



□

Bài 8. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của đoạn BC , phân giác ngoài góc A cắt BC ở D . Giả sử giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM với AB, AC lần lượt là E, F (khác A). Gọi N là trung điểm của đoạn EF . Chứng minh hai véc-tơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{AD}$ cùng phương.

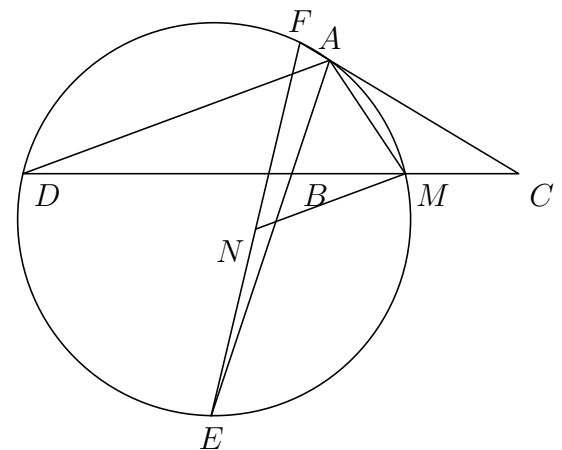
Lời giải.

Kẻ đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC . Gọi P là điểm chính giữa cung BC không chứa A , $PA \perp DA$. Q là điểm chính giữa cung BC chứa A . Ta có A, D, Q thẳng hàng và P, M, O, Q cũng thẳng hàng.

Dễ nhận thấy DP là đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM . Tam giác PEF cân tại P từ đó có DP là trung trực của EF nên $DP \perp EF$ tại N .

Hai tam giác PED và PCQ đồng dạng, EN và CM là đường cao nên suy ra $\frac{PN}{PD} = \frac{PM}{PQ} \Rightarrow MN \parallel DQ$.

Vậy, $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{AD}$ cùng phương.



□

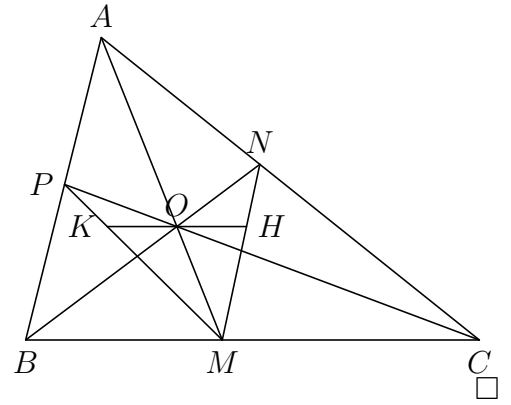
Bài 9. Cho tam giác ABC có O nằm trong tam giác. Các tia AO, BO, CO cắt các cạnh đối diện lần lượt tại M, N, P . Qua O kẻ đường thẳng song song với BC cắt MN, MP tại H, K . Chứng minh rằng: $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{KO}$.

Lời giải.

Do $HK \parallel BC$ nên ta có: $\frac{OH}{BM} = \frac{ON}{BN} \Rightarrow OH = \frac{ON}{BN} \cdot BM$,
 $\frac{OK}{CM} = \frac{OP}{CP} \Rightarrow OK = \frac{OP}{CP} \cdot CM$. (1)

Mặt khác, ta lại có $\frac{ON}{BN} = \frac{S_{AON}}{S_{ABN}} = \frac{S_{CON}}{S_{CBN}} = \frac{S_{AON} + S_{CON}}{S_{ABN} + S_{CBN}} = \frac{S_{AOC}}{S_{ABC}}$,
 $\frac{OP}{CP} = \frac{S_{AOB}}{S_{ABC}} \Rightarrow \frac{ON}{BN} \cdot \frac{CP}{OP} = \frac{S_{AOC}}{S_{ABC}} \cdot \frac{S_{ABC}}{S_{AOB}} = \frac{S_{AOC}}{S_{AOB}} = \frac{S_{AOC}}{S_{AOB}} \cdot \frac{CM}{BM}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $OK = OH$. Vì vậy, $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{KO}$.



C CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Véc-tơ có điểm đầu D , điểm cuối E được kí hiệu là

- A. DE . B. $|\overrightarrow{DE}|$. C. $\overrightarrow{ED}$. D. $\overrightarrow{DE}$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 2. Cho tam giác ABC . Có bao nhiêu véc-tơ khác véc-tơ-không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh A, B, C ?

- A. 3. B. 6. C. 4. D. 9.

Lời giải.

Đó là các véc-tơ: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AC}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 3. Cho tứ giác $ABCD$. Có bao nhiêu véc-tơ khác véc-tơ-không có điểm đầu và cuối là các đỉnh của tứ giác?

- A. 4. B. 6. C. 8. D. 12.

Lời giải.

Xét các véc-tơ có điểm A là điểm đầu thì có các véc-tơ thỏa mãn bài toán là $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.

Vậy có 3 véc-tơ. Tương tự cho các điểm còn lại B, C, D .

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 4. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Có duy nhất một véc-tơ cùng phương với mọi véc-tơ.
 B. Có ít nhất hai véc-tơ có cùng phương với mọi véc-tơ.
 C. Có vô số véc-tơ cùng phương với mọi véc-tơ.
 D. Không có véc-tơ nào cùng phương với mọi véc-tơ.

Lời giải.

Vì véc-tơ-không cùng phương với mọi véc-tơ.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 5. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Khi đó

- A. Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC}$.
 B. Điều kiện đủ để A, B, C thẳng hàng là với mọi M , $\overrightarrow{MA}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$.
 C. Điều kiện cần để A, B, C thẳng hàng là với mọi M , $\overrightarrow{MA}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$.
 D. Điều kiện cần để A, B, C thẳng hàng là $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 6. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC của tam giác đều ABC . Hỏi cặp véc-tơ nào sau đây cùng hướng?

- A. $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{CB}$. B. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{MB}$. C. $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$. D. $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{CA}$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 7. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Số các véc-tơ khác véc-tơ-không, cùng phương với $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

- A. 4. B. 6. C. 7. D. 9.

Lời giải.

Các véc-tơ cùng phương với $\overrightarrow{OC}$ là $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{FC}$, $\overrightarrow{CF}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8. Với $\overrightarrow{DE}$ (khác véc-tơ-không) thì độ dài đoạn ED được gọi là

- A. Phương của $\overrightarrow{ED}$. B. Hướng của $\overrightarrow{ED}$. C. Giá của $\overrightarrow{ED}$. D. Độ dài của $\overrightarrow{ED}$.

Lời giải.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$. B. $\vec{0}$ cùng hướng với mọi véc-tơ.
C. $|\overrightarrow{AB}| > 0$. D. $\vec{0}$ cùng phương với mọi véc-tơ.

Lời giải.

Vì có thể xảy ra trường hợp $|\overrightarrow{AB}| = 0 \Leftrightarrow A \equiv B$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 10. Hai véc-tơ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi

- A. Giá của chúng trùng nhau và độ dài của chúng bằng nhau.
B. Chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một hình bình hành.
C. Chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một tam giác đều.
D. Chúng cùng hướng và độ dài của chúng bằng nhau.

Lời giải.

Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D . Điều kiện nào trong các đáp án sau đây là điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$?

- A. $ABCD$ là hình bình hành. B. $ABDC$ là hình bình hành.
C. $AC = BD$. D. $AB = CD$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ AB = CD \end{cases} \Rightarrow ABDC \text{ là hình bình hành.}$

Mặt khác, $ABDC$ là hình bình hành $\Rightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ AB = CD \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Do đó, điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ là $ABDC$ là hình bình hành.

Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng $\overrightarrow{CD}$. B. $\overrightarrow{AB}$ cùng phương $\overrightarrow{CD}$.
C. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$. D. $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải.

Phải suy ra $ABDC$ là hình bình hành (nếu A, B, C, D không thẳng hàng) hoặc bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 13. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo của hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây sai?

- A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. B. $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$. C. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$. D. $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$.

Lời giải.

Hai véc-tơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}$ ngược hướng nhau.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 14. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$. B. $|\overrightarrow{QP}| = |\overrightarrow{MN}|$. C. $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$. D. $|\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{AC}|$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} MN \parallel PQ \\ MN = PQ \end{cases}$ (do cùng song song và bằng $\frac{1}{2}AC$). Do đó $MNPQ$ là hình bình hành.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 15. Cho hình vuông $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
C. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$. D. Hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

Lời giải.

Vì $AB = BC \Leftrightarrow |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 16. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình chữ nhật $ABCD$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$. B. $\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OD}$ cùng hướng.
C. $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$ cùng hướng. D. $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 17. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC của tam giác đều ABC . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$. B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. C. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}$. D. $|\overrightarrow{BC}| = 2|\overrightarrow{MN}|$.

Lời giải.

Ta có MN là đường trung bình của tam giác ABC . Do đó $BC = 2MN \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = 2|\overrightarrow{MN}|$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 18. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Gọi M là trung điểm BC . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$. B. $\overrightarrow{AM} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\overrightarrow{AM} = a$. D. $|\overrightarrow{AM}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Ta có AM là đường trung tuyến tam giác đều suy ra $|\overrightarrow{AM}| = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 19. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$. B. $|\overrightarrow{BD}| = a$. C. $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra tam giác ABD đều cạnh a nên $BD = a \Rightarrow |\overrightarrow{BD}| = a$.

Chọn đáp án **B**

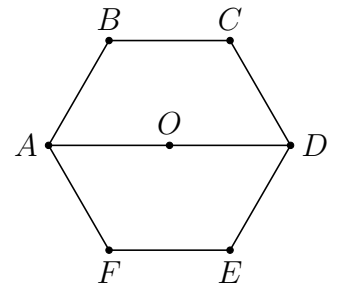
□

Câu 20. Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O . Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$. B. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AF}|$. C. $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BC}$. D. $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OE}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OE}$ ngược hướng.



Chọn đáp án **D**

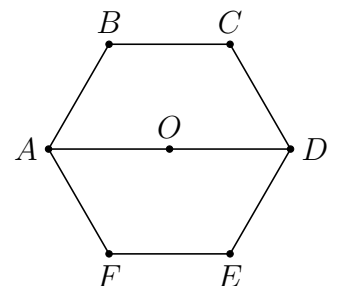
□

Câu 21. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Số các véc-tơ bằng $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 6.

Lời giải.

Các véc-tơ bằng $\overrightarrow{OC}$ là các véc-tơ: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{ED}$.



Chọn đáp án **A**

□

Câu 22. Cho tam giác ABC có trực tâm H . Gọi D là điểm đối xứng với B qua tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CH}$. B. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$.
C. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CH}$. D. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$ và $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$.

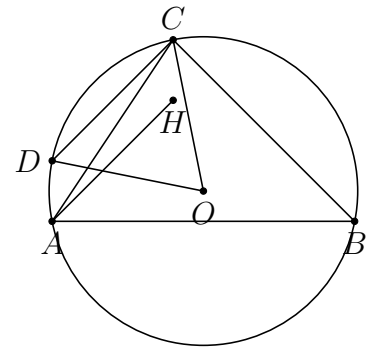
Lời giải.

Ta có $AH \perp BC$ và $DC \perp BC$ (do góc $\widehat{DCB}$ chắn nửa đường tròn).

Suy ra $AH \parallel DC$.

Tương tự ta cũng có $CH \parallel AD$.

Suy ra tứ giác $ADCH$ là hình bình hành. Do đó $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$.



Chọn đáp án **(B)** □

Câu 23. Cho $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ và một điểm C . Có bao nhiêu điểm D thỏa mãn $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$?

A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Lời giải.

Ta có $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \Leftrightarrow AB = CD$. Suy ra tập hợp các điểm D thỏa mãn yêu cầu bài toán là đường tròn tâm C , bán kính AB .

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 24. Cho $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ và một điểm C . Có bao nhiêu điểm D thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$?

A. 1. B. 2. C. 0. D. Vô số.

Lời giải.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 25. Cho hình vuông $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. C. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. D. $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB}|$.

Lời giải.

$ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB} \Rightarrow |\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB}|$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 26. Cho tứ giác $ABCD$. Có bao nhiêu véc-tơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của tứ giác.

- A. 8. B. 12. C. 6. D. 4.

Lời giải.

Do tứ giác $ABCD$ có tất cả 4 cạnh (AB, BC, CD, AD) và 2 đường chéo (AC, BD) nên số véc-tơ thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DB}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 27. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi

- A. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. B. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$. C. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$. D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Lời giải.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 28. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 1; -3)$ và $B(1; 0; -2)$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

A. $3\sqrt{3}$.

B. 11.

C. $\sqrt{11}$.

D. 27.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (3; -1; 1)$, nên $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{11}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 29. Bạn Minh đi học từ nhà đến trường với vận tốc 10km/h và thời gian là 30 phút. Giả sử nhà bạn Minh ở tại tọa độ $A(1; 3)$, còn trường của bạn Minh ở tọa độ $B(3; x)$. Tìm giá trị dương của x .

A. $x = 3 + \sqrt{21}$.

B. $x = 3 - \sqrt{21}$.

C. $x = 3$.

D. $x = 2$.

Lời giải.

Quãng đường từ nhà bạn Minh đến trường là $10 \cdot \frac{1}{2} = 15\text{km}$, suy ra $AB = 5$.

Từ đó, giải phương trình: $4 + (x - 3)^2 = 25$, ta được nghiệm dương là $x = 3 + \sqrt{21}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 30. Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng 1, trọng tâm G . Độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{AG}$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

Tam giác ABC đều có cạnh bằng 1 nên có độ dài đường trung tuyến xuất phát từ A là $m_a = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Do đó $AG = \frac{2}{3}m_a = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 31. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Số các véc-tơ khác véc-tơ $\vec{0}$, cùng phương với véc-tơ $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác trên là

A. 4.

B. 6.

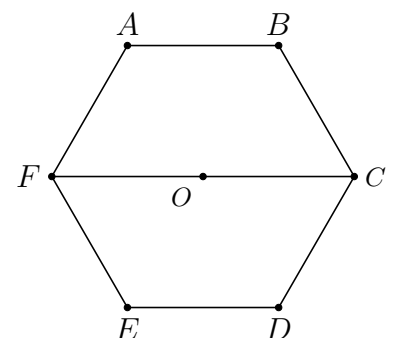
C. 7.

D. 9.

Lời giải.

Các véc-tơ khác véc-tơ $\vec{0}$, cùng phương với véc-tơ $\overrightarrow{OC}$, có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của lục giác trên là

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{CF}.$$



Chọn đáp án **B**

□

Câu 32. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Trên hình vẽ, số véc-tơ (khác $\vec{0}$, khác $\overrightarrow{AC}$) cùng phương với véc-tơ $\overrightarrow{AC}$ là

A. 2.

B. 5.

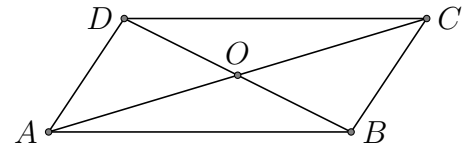
C. 4.

D. 3.

Lời giải.

Các véc-tơ (khác $\vec{0}$, khác $\vec{AC}$) cùng phương với $\vec{AC}$ là:

$$\vec{AO}, \vec{OA}, \vec{CO}, \vec{OC}, \vec{CA}.$$



Chọn đáp án **(B)** ☐

Câu 33. Véc-tơ $-2\vec{a}$ và véc-tơ $\vec{a}$ với $\vec{a} \neq \vec{0}$ là hai véc-tơ

- A. đối nhau. B. ngược hướng. C. bằng nhau. D. cùng hướng.

Lời giải.

Véc-tơ $-2\vec{a}$ và véc-tơ $\vec{a}$ với $\vec{a} \neq \vec{0}$ là hai véc-tơ ngược hướng.

Chọn đáp án **(B)** ☐

Câu 34. Cho 6 điểm phân biệt. Hỏi có mấy véc-tơ khác véc-tơ không mà có điểm đầu và điểm cuối lấy từ 6 điểm đó?

- A. 40. B. 20. C. 30. D. 10.

Lời giải.

Chọn 1 điểm từ 6 điểm là điểm đầu ta được 6 cách chọn.

Ứng với mỗi cách chọn điểm đầu ta chọn 1 điểm làm điểm cuối của véc-tơ ta có 5 cách chọn.

Vậy có $5 \cdot 6 = 30$ véc-tơ được tạo thành.

Chọn đáp án **(C)** ☐

Câu 35. Cho tứ giác $ABCD$. Có tất cả bao nhiêu véc-tơ (khác véc-tơ $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của tứ giác đó?

- A. 8. B. 12. C. 4. D. 16.

Lời giải.

Ta có $\vec{AB}, \vec{BA}, \vec{AC}, \vec{CA}, \vec{AD}, \vec{DA}, \vec{BC}, \vec{CB}, \vec{CD}, \vec{DC}, \vec{BD}, \vec{DB}$.

Vậy có 12 véc-tơ thỏa mãn bài.

Chọn đáp án **(B)** ☐

Câu 36. Cho tứ giác $ABCD$. Có bao nhiêu véc-tơ khác véc-tơ không có điểm đầu, điểm cuối là hai trong số bốn đỉnh của tứ giác?

- A. 16. B. 4. C. 12. D. 6.

Lời giải.

Có 12 véc-tơ, gồm: $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}, \vec{BA}, \vec{BC}, \vec{BD}, \vec{CA}, \vec{CB}, \vec{CD}, \vec{DA}, \vec{DB}, \vec{DC}$.

Chọn đáp án **(C)** ☐

Câu 37. Phát biểu nào sau đây là sai?

- A. Véc-tơ là đoạn thẳng có hướng. B. Hai véc-tơ cùng hướng thì cùng phương.
C. Véc-tơ không cùng phương với mọi véc-tơ. D. Hai véc-tơ cùng phương thì cùng hướng.

Lời giải.

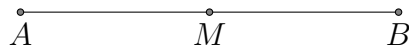
Hai véc-tơ cùng phương có thể khác hướng. Do đó mệnh đề "Hai véc-tơ cùng phương thì cùng hướng" là sai.

Chọn đáp án **(D)** ☐

Câu 38. Biết điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BM}$. B. $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{BM}$. C. $MA = -MB$. D. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM}$.

Lời giải.



Vì M là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BM}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 39. Hai véc-tơ có cùng độ dài và ngược hướng gọi là

- A. Hai véc-tơ cùng hướng. B. Hai véc-tơ cùng phương.
C. Hai véc-tơ đối nhau. D. Hai véc-tơ bằng nhau.

Lời giải.

Theo định nghĩa chúng là hai véc-tơ đối nhau.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 40. Cho $\overrightarrow{AB}$ khác $\vec{0}$ và cho điểm C . Có bao nhiêu điểm D thỏa mãn $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$?

- A. Vô số. B. 1 điểm.
C. 2 điểm. D. Không có điểm nào.

Lời giải.

$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \Leftrightarrow CD = AB \neq 0$. Nên D thuộc đường tròn $(C; AB)$. Vậy có vô số điểm D .

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 41. Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- A. $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$. B. $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DA}|$. C. $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}|$. D. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$.

Lời giải.

Theo tính chất của hình bình hành, ta có $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$ là đẳng thức sai.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 42. Cho ba điểm M, N, P thẳng hàng, trong đó điểm N nằm giữa hai điểm M và P . Khi đó, cặp véc-tơ nào sau đây cùng hướng?

- A. $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{PN}$. B. $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PN}$. C. $\overrightarrow{NM}$ và $\overrightarrow{NP}$. D. $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$.

Lời giải.

Ta có M, N, P thẳng hàng và điểm N nằm giữa hai điểm M và P nên $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$ cùng hướng.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 43. Cho tam giác đều ABC . Hãy chỉ ra đẳng thức **đúng**.

- A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$. B. $|\overrightarrow{AB}| = -|\overrightarrow{BA}|$. C. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$. D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Do tam giác ABC đều nên đẳng thức đúng trong các đẳng thức đã cho là $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 44. Phát biểu nào sau đây là **sai**?

- A. Hai véc-tơ cùng hướng thì cùng phương.
B. Hai véc-tơ cùng phương thì cùng hướng.
C. Độ dài của véc-tơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối.

D. Véc-tơ là đoạn thẳng có hướng.

Lời giải.

Hai véc-tơ cùng phương thì chúng có thể cùng hướng hoặc ngược hướng.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 45. Cho tam giác ABC . Số các véc-tơ khác véc-tơ $\vec{0}$ nhận các đỉnh của tam giác làm điểm đầu và điểm cuối là

A. 5.

B. 6.

C. 3.

D. 4.

Lời giải.

Ứng với đỉnh A ta có 2 véc-tơ có điểm đầu là A và điểm cuối là B, C .

Vậy tam giác có 3 đỉnh nên có 6 véc-tơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của tam giác.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 46. Cho hình bình hành $ABCD$. Trong các khẳng định sau hãy tìm khẳng định **sai**?

A. $\vec{AB} = \vec{DC}$.

B. $|\vec{AD}| = |\vec{CB}|$.

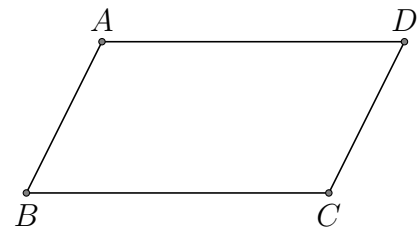
C. $\vec{AD} = \vec{CB}$.

D. $|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$.

Lời giải.

Từ hình vẽ, ta thấy vì $ABCD$ là hình bình hành nên

- $\vec{AB} = \vec{DC}$.
- $|\vec{AD}| = |\vec{CB}|$.
- $|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$.
- $\vec{AD} = \vec{BC}$.



Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 47. Cho ba điểm M, N, P thẳng hàng, N nằm giữa M và P . Khi đó cặp véc-tơ nào sau đây cùng hướng?

A. $\vec{MN}$ và $\vec{PN}$.

B. $\vec{MN}$ và $\vec{MP}$.

C. $\vec{MP}$ và $\vec{PN}$.

D. $\vec{NM}$ và $\vec{NP}$.

Lời giải.



Từ hình vẽ ta thấy $\vec{MN}$ và $\vec{MP}$ cùng hướng.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 48. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng $2a$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\vec{AB} = \vec{AC}$.

B. $\vec{AB} = 2a$.

C. $|\vec{AB}| = 2a$.

D. $|\vec{AB}| = \vec{AB}$.

Lời giải.

Do tam giác ABC đều cạnh $2a$ nên $AB = |\vec{AB}| = 2a$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 49. Cho tam giác ABC , gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB . Số véc-tơ bằng véc-tơ $\vec{MN}$ có điểm đầu và điểm cuối là một trong các điểm A, B, C, M, N, P bằng bao nhiêu?

A. 1.

B. 2.

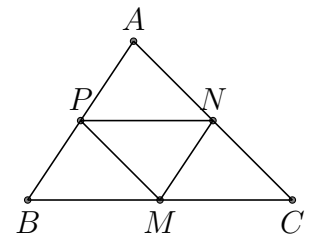
C. 3.

D. 6.

Lời giải.

Từ hình vẽ ta thấy các véc-tơ bằng véc-tơ $\overrightarrow{MN}$ là $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{PA}$.

Vậy có 2 véc-tơ bằng $\overrightarrow{MN}$.



Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 50. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Số các véc-tơ khác $\vec{0}$ cùng phương với $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác bằng

A. 6.

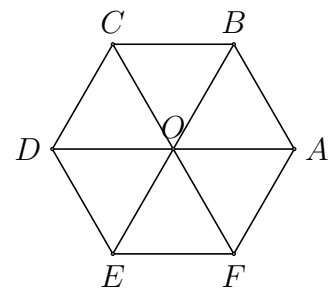
B. 4.

C. 8.

D. 7.

Lời giải.

Số các véc-tơ khác $\vec{0}$ cùng phương với $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{FC}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{DE}$.



Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 51. Cho tam giác ABC với trung tuyến AM và trọng tâm G . Khi đó $\overrightarrow{GA}$ bằng

A. $2\overrightarrow{GM}$.B. $\frac{2}{3}\overrightarrow{GM}$.C. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$.D. $-\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.**Lời giải.**

Theo tính chất đường trung tuyến $AG = \frac{2}{3}AM$ hay $GA = 2 \cdot GM$ và $\overrightarrow{GA}$ cùng hướng với $\overrightarrow{MG}$.
Khi đó ta có $\overrightarrow{GA} = 2 \cdot \overrightarrow{GM}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 52. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hai véc-tơ cùng phương với một véc-tơ thứ ba thì cùng phương.

B. Hai véc-tơ cùng phương với một véc-tơ thứ ba khác $\vec{0}$ thì cùng phương.

C. Hai véc-tơ ngược hướng với một véc-tơ thứ ba thì ngược hướng.

D. Hai véc-tơ bằng nhau là chúng có độ dài bằng nhau.

Lời giải.

“Hai véc-tơ cùng phương với một véc-tơ thứ ba thì cùng phương” là sai ví dụ 2 véc-tơ cùng phương với $\vec{0}$ nhưng chúng lại không cùng phương với nhau.

“Hai véc-tơ cùng phương với một véc-tơ thứ ba khác $\vec{0}$ thì cùng phương” là đúng.

“Hai véc-tơ ngược hướng với một véc-tơ thứ ba thì ngược hướng” là sai vì khi 2 véc-tơ ngược hướng với 1 véc-tơ thì chúng sẽ cùng hướng.

“Hai véc-tơ bằng nhau là chúng có độ dài bằng nhau” là sai vì thiếu điều kiện chúng cùng hướng.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 53. Phát biểu nào sau đây **sai**?

- A. Hai véc-tơ cùng hướng thì cùng phương.
- B. Độ dài của véc-tơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của véc-tơ.
- C. Hai véc-tơ cùng phương thì cùng hướng.
- D. Véc-tơ là đoạn thẳng có hướng.

Lời giải.

Hai véc-tơ cùng phương có thể cùng hướng hoặc ngược hướng.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 54. Gọi C là trung điểm đoạn thẳng AB . Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

- A. $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$.
- B. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng.
- C. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CB}$ ngược hướng.
- D. $|\overrightarrow{AC}| = \overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

Do C là trung điểm đoạn AB nên C nằm giữa A và B , do đó $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 55. Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BC}$.
- B. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.
- C. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$.
- D. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$.

Lời giải.

Do $ABCD$ là hình bình hành nên ta có: $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 56. Có bao nhiêu véc-tơ khác véc-tơ $\vec{0}$ có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của tam giác ABC ?

- A. 4.
- B. 9.
- C. 6.
- D. 3.

Lời giải.

Có 6 véc-tơ được tạo thành từ ba đỉnh A, B, C của tam giác ABC .

Chọn đáp án **C**

□

Câu 57. Cho hình vuông $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.
- B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
- C. $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB}|$.
- D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

Ta có $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB}| \Leftrightarrow AD = CB$ đúng.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 58. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. Véc-tơ là một đường thẳng có hướng.
- B. Véc-tơ là một đoạn thẳng.
- C. Véc-tơ là một đoạn thẳng có hướng.
- D. Véc-tơ là một đường thẳng.

Lời giải.

Câu hỏi lý thuyết.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 59. Chọn khẳng định đúng.

- A. Véc-tơ là một đường thẳng có hướng.
- B. Véc-tơ là một đoạn thẳng.
- C. Véc-tơ là một đoạn thẳng có hướng.

D. Véc-tơ là một đoạn thẳng không phân biệt điểm đầu và điểm cuối.

Lời giải.

Theo định nghĩa, “Véc-tơ là một đoạn thẳng có hướng”.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 60. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$. Trong các véc-tơ sau, véc-tơ nào bằng véc-tơ $\overrightarrow{CE}$.

A. $\overrightarrow{AF}$.

B. $\overrightarrow{DF}$.

C. $\overrightarrow{BF}$.

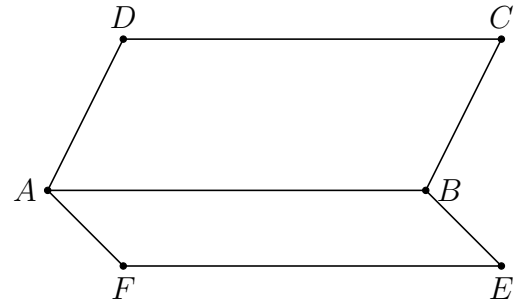
D. $\overrightarrow{BD}$.

Lời giải.

Ta có $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. (1)

và $ABEF$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FE}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE}$ nên $DCEF$ là hình bình hành do đó $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DF}$.



Chọn đáp án **B**

□

Câu 61. Cho tứ giác $ABCD$ có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

B. $ABCD$ là hình thoi.

C. $|\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{BC}|$.

D. $ABCD$ là hình thang cân.

Lời giải.

Vì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ nên $ABCD$ là hình bình hành, và $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$ nên $ABCD$ là hình thoi. Đồng thời chưa đủ dữ kiện để kết luận $ABCD$ là hình thang cân.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 62.

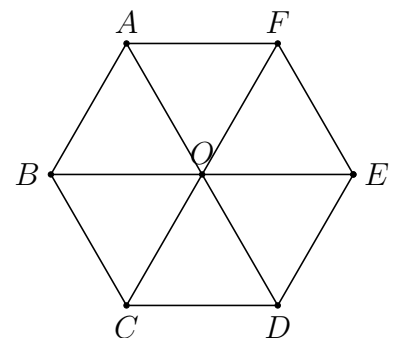
Cho lục giác đều $ABCDEF$, gọi O là giao điểm các đường chéo (có hình vẽ như hình bên). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DE}$.

B. $\overrightarrow{FO} = \overrightarrow{CO}$.

C. $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{ED}$.

D. $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{ED}$.



Lời giải.

Vì $OCDE$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{ED}$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 63. Cho hai điểm phân biệt A và B , hỏi có bao nhiêu véc-tơ được tạo thành từ hai điểm đó?

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Lời giải.

Cho hai điểm phân biệt A và B khi đó có các véc-tơ được tạo thành là $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BA}$ và $\vec{0}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 64. Cho véc-tơ $\vec{a}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Có vô số véc-tơ $\vec{u}$ sao cho $\vec{u} = \vec{a}$. B. Có duy nhất một véc-tơ $\vec{u}$ sao cho $\vec{u} = \vec{a}$.
 C. Có duy nhất một véc-tơ $\vec{u}$ sao cho $\vec{u} = -\vec{a}$. D. Không tồn tại véc-tơ $\vec{u}$ sao cho $\vec{u} = \vec{a}$.

Lời giải.

Mệnh đề "Có vô số véc-tơ $\vec{u}$ sao cho $\vec{u} = \vec{a}$ " là mệnh đề đúng.

Chọn đáp án **(A)**

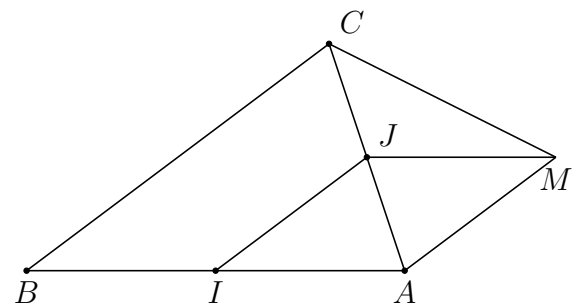
□

Câu 65. Cho tam giác ABC . Điểm M thỏa mãn hệ thức $2\vec{MA} - \vec{MB} - 3\vec{CM} = \vec{AB} + \vec{AC}$. Chọn khẳng định đúng.

- A. Hai véc-tơ $\vec{AM}$ và $\vec{AC}$ cùng hướng. B. Hai véc-tơ $\vec{AM}$ và $\vec{AB}$ cùng hướng.
 C. Hai véc-tơ $\vec{AM}$ và $\vec{BC}$ cùng hướng. D. Hai véc-tơ $\vec{AM}$ và $\vec{BC}$ ngược hướng.

Lời giải.

$$\begin{aligned} 2\vec{MA} - \vec{MB} - 3\vec{CM} &= \vec{AB} + \vec{AC} \\ \Leftrightarrow 2\vec{MA} - 2\vec{CM} - (\vec{MB} + \vec{CM}) &= \vec{AB} + \vec{AC} \\ \Leftrightarrow 2\vec{MA} - 2\vec{CM} - \vec{CB} &= \vec{AB} + \vec{AC} \\ \Leftrightarrow 2\vec{MA} - 2\vec{CM} &= \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{CB} \\ \Leftrightarrow \vec{MA} + \vec{MC} &= \vec{AB} \end{aligned}$$



Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và AC . Khi đó ta có $\vec{MJ} = \vec{AI} \Rightarrow$ tứ giác $MAIJ$ là hình bình hành. Vậy Hai véc-tơ $\vec{AM}$ và $\vec{BC}$ cùng hướng.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 66. Cho hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Tìm khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau.

- A. Hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương với một véc-tơ thứ ba khác $\vec{0}$ thì cùng phương.
 B. Hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng với một véc-tơ thứ ba khác $\vec{0}$ thì ngược hướng.
 C. Hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng với một véc-tơ thứ ba khác $\vec{0}$ thì không cùng phương.
 D. Hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương thì cùng hướng.

Lời giải.

- Hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương với một véc-tơ thứ ba khác $\vec{0}$ thì cùng phương. **Đúng.**
- Hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng với một véc-tơ thứ ba khác $\vec{0}$ thì ngược hướng. **Sai** có thể cùng hướng.
- Hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng với một véc-tơ thứ ba khác $\vec{0}$ thì không cùng phương. **Sai** hai véc-tơ sẽ cùng phương.
- Hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương thì cùng hướng. **Sai** có thể cùng hướng.

Chọn đáp án **(A)**

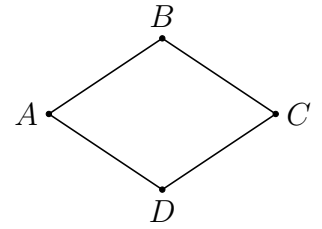
□

Câu 67. Cho tứ giác $ABCD$ có $\vec{AB} = \vec{DC}$ và $|\vec{AB}| = |\vec{AD}|$ thì tứ giác $ABCD$ là hình gì?

- A. Hình thoi. B. Hình chữ nhật. C. Hình bình hành. D. Hình vuông.

Lời giải.

Do $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ nên $ABCD$ là hình bình hành.
 Mặt khác $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}|$ nên $ABCD$ là hình thoi.



Chọn đáp án **(A)** □

Câu 68. Cho tam giác ABC có trực tâm H , gọi D là điểm đối xứng của B qua tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CH}$.

B. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$.

C. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CH}$.

D. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$ và $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$.

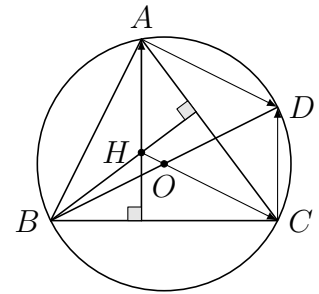
Lời giải.

Ta có $\begin{cases} AH \perp BC \\ CD \perp BC \end{cases}$ nên $AH \parallel CD$.

Tương tự $\begin{cases} CH \perp AB \\ AD \perp AB \end{cases}$ nên $CH \parallel AD$.

Vậy tứ giác $ADCH$ là hình bình hành.

Suy ra $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$.



Chọn đáp án **(B)** □

Câu 69. Cho đường tròn tâm O , lấy hai điểm A và B trên đường tròn sao cho AB không là đường kính. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B cắt nhau tại C . Gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BH}$.

B. $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{HC}$.

C. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$.

D. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{OB}$.

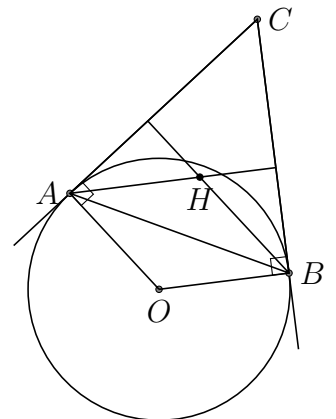
Lời giải.

Ta có $\begin{cases} OA \perp AC \\ BH \perp AC \end{cases}$ nên $OA \parallel BH$.

Tương tự $\begin{cases} OB \perp BC \\ AH \perp BC \end{cases}$ nên $OB \parallel AH$.

Vậy tứ giác $OAHB$ là hình bình hành.

Suy ra $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BH}$.



Chọn đáp án **(A)** □

Câu 70. Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng, mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $\forall M, \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$.

B. $\exists M, \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$.

C. $\exists M, \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MC}$.

D. $\forall M, \overrightarrow{MA} \neq \overrightarrow{MB} \neq \overrightarrow{MC}$.

Lời giải.

Với mọi điểm M ta luôn có $\overrightarrow{MA} \neq \overrightarrow{MB} \neq \overrightarrow{MC}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 71. Cho tam giác đều ABC cạnh a . Tìm mệnh đề đúng.

A. $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}| = a$.

B. $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}| = a\sqrt{3}$.

C. $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}| = 2a$.

Lời giải.

$$|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}| = AB + AC = 2a.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 72. Cho $\triangle ABC$ có trực tâm H , D là điểm đối xứng với B qua tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\begin{cases} \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CH} \end{cases}$

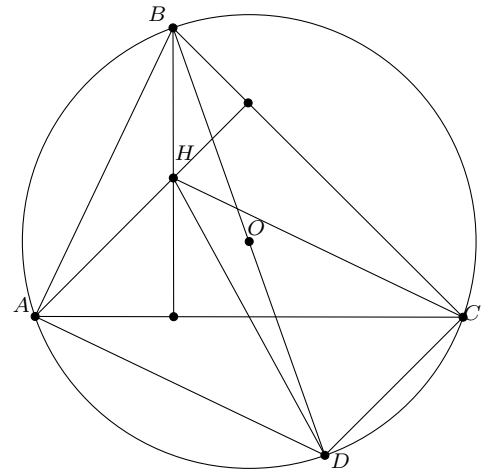
B. $\begin{cases} \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC} \end{cases}$

C. $\begin{cases} \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CH} \end{cases}$

D. $\begin{cases} \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC} \\ \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} \end{cases}$

Lời giải.

Ta có $AHCD$ là hình bình hành nên $\begin{cases} \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC} \end{cases}$.



Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 73. Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A có $AB = AC = a$. Độ dài của véc-tơ $3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC}$ là bao nhiêu?

A. $5a$.

B. $7a$.

C. a .

D. $12a$.

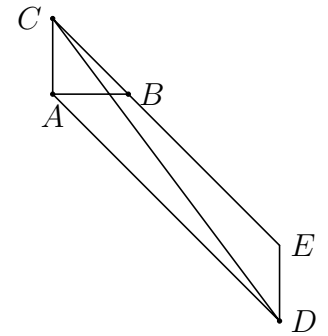
Lời giải.

Ta lấy E thỏa $CE = 3CB$ và dựng hình bình hành $CEDA$.

Ta được $3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CD}$.

$$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cos 135^\circ = 25a^2.$$

Suy ra $CD = 5a$.



Chọn đáp án **A**

□

Câu 74. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hai véc-tơ (khác $\vec{0}$) bằng nhau thì không bao giờ cùng phương.
- B. Hai véc-tơ bằng nhau thì chúng phải có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau.
- C. Hai véc-tơ (khác $\vec{0}$) cùng phương thì đối nhau.
- D. Hai véc-tơ đối nhau thì cùng phương.

Lời giải.

Hai véc-tơ bằng nhau thì cùng phương.

Hai véc-tơ bằng nhau thì chỉ cần chúng cùng hướng và cùng độ dài, không nhất thiết phải trùng điểm đầu và điểm cuối.

Hai véc-tơ cùng phương thì không nhất thiết đối nhau.

Rõ ràng, hai véc-tơ đối nhau thì cùng phương.

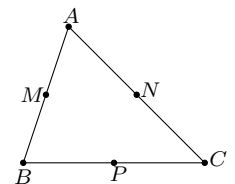
Chọn đáp án **D**

□

Câu 75.

Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC, BC . Véc-tơ $\overrightarrow{PM}$ **không** cùng hướng với véc-tơ nào dưới đây?

- A. $\overrightarrow{CN}$.
- B. $\overrightarrow{CA}$.
- C. $\overrightarrow{AC}$.
- D. $\overrightarrow{NA}$.



Lời giải.

Véc-tơ $\overrightarrow{PM}$ cùng hướng với véc-tơ $\overrightarrow{CA}$, do vậy nó ngược hướng với $\overrightarrow{AC}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 76. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

- A. Nếu hai véc-tơ (khác $\vec{0}$) cùng hướng thì chúng cùng phương.
- B. Hai véc-tơ (khác $\vec{0}$) có giá song song thì chúng cùng phương.
- C. Nếu hai véc-tơ (khác $\vec{0}$) cùng phương thì cùng hướng.
- D. Nếu hai véc-tơ (khác $\vec{0}$) ngược hướng thì cùng phương.

Câu 77. Hai vectơ có cùng độ dài và ngược hướng gọi là

- A. Hai vectơ cùng hướng.
- B. Hai vectơ cùng phương.
- C. Hai vectơ đối nhau.
- D. Hai vectơ bằng nhau.

Lời giải.

Hai vectơ đối nhau là hai vectơ có cùng độ dài và ngược hướng.

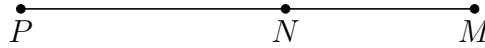
Chọn đáp án **C**

□

Câu 78. Cho ba điểm M, N, P thẳng hàng, trong đó điểm N nằm giữa hai điểm M và P . Khi đó các cặp véc-tơ nào sau đây cùng hướng?

- A. $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{PN}$. B. $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PN}$. C. $\overrightarrow{NM}$ và $\overrightarrow{NP}$. D. $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$.

Lời giải.



Ta thấy $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$ cùng hướng.

Chọn đáp án **D** □

Câu 79. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1; 0)$ và $B(0; -2)$. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là

- A. $\left(\frac{1}{2}; -1\right)$. B. $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$. C. $\left(\frac{1}{2}; -2\right)$. D. $(1; -1)$.

Lời giải.

Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là $I\left(\frac{1+0}{2}; \frac{0-2}{2}\right)$ hay $I\left(\frac{1}{2}; -1\right)$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 80. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây.

- A. $\vec{0}$ cùng hướng với mọi véc-tơ. B. $\vec{0}$ cùng phương với mọi véc-tơ.
C. $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$. D. $|\overrightarrow{AB}| > 0$.

Lời giải.

Mệnh đề $|\overrightarrow{AB}| > 0$ là mệnh đề sai, vì khi $A \equiv B$ thì $|\overrightarrow{AB}| = 0$.

Chọn đáp án **D** □

ĐÁP ÁN

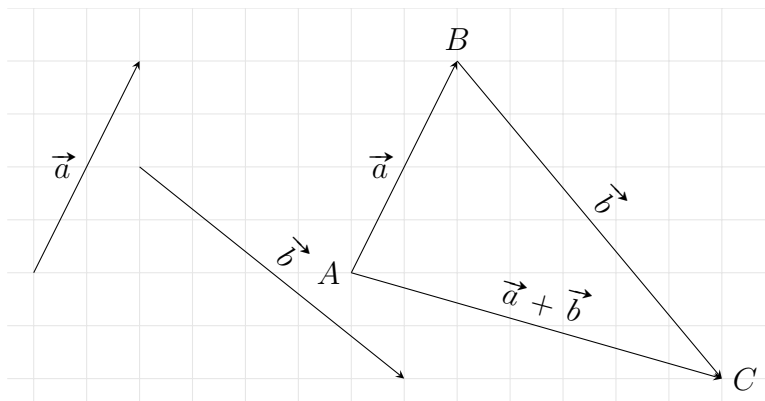
1. D	2. B	3. D	4. A	5. A	6. B	7. B	8. D	9. C	10. D
11. B	12. D	13. C	14. D	15. C	16. D	17. D	18. D	19. B	20. D
21. A	22. B	23. D	24. A	25. D	26. B	27. C	28. C	29. A	30. C
31. B	32. B	33. B	34. C	35. B	36. C	37. D	38. A	39. C	40. A
41. A	42. D	43. C	44. B	45. B	46. C	47. B	48. C	49. B	50. A
51. A	52. B	53. C	54. B	55. C	56. C	57. C	58. C	59. C	60. B
61. D	62. D	63. D	64. A	65. C	66. A	67. A	68. B	69. A	70. D
71. D	72. B	73. A	74. D	75. C	76. C	77. C	78. D	79. A	80. D

§2 TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VEC-TƠ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

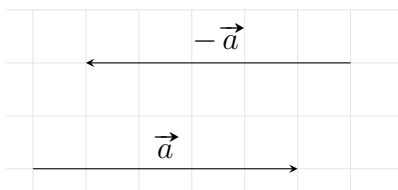
1 ĐỊNH NGHĨA TỔNG VÀ HIỆU HAI VEC-TƠ

Định nghĩa (Phép cộng). Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Với điểm A bất kỳ, dựng $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, dựng $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Khi đó, véc-tơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là véc-tơ tổng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ta ký hiệu: $\vec{a} + \vec{b}$, tức là: $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Phép toán tìm tổng của hai véc-tơ còn gọi là **phép cộng véc-tơ**.

Định nghĩa (Véc-tơ đối). Cho véc-tơ $\vec{a}$, véc-tơ có cùng độ dài và ngược hướng với $\vec{a}$ được gọi là véc-tơ đối của $\vec{a}$, ký hiệu là $-\vec{a}$.



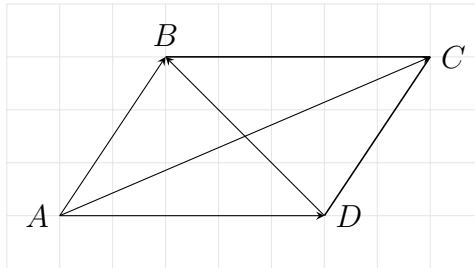
Định nghĩa (Phép trừ). Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Phép trừ của $\vec{a}$ với $\vec{b}$ được định nghĩa là phép cộng của $\vec{a}$ với $-\vec{b}$.

Ký hiệu $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

2 QUY TẮC HÌNH BÌNH HÀNH

Cho hình bình hành $ABCD$, khi đó

- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
- $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$



3 CÁC TÍNH CHẤT CỦA PHÉP CỘNG, TRỪ HAI VECTO

Tính chất 1. (giao hoán và kết hợp)

$$\text{a) } \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}, \quad \text{b) } \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}.$$

Tính chất 2. (véc-tơ đối)

$$\text{a) } -\vec{0} = \vec{0} \quad \text{b) } \vec{a} - \vec{b} = -(\vec{b} - \vec{a}), \quad \text{c) } -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}.$$

Tính chất 3. (cộng với véc-tơ $\vec{0}$) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

Tính chất 4. Cho 3 điểm A, B, C ta có:

$$\text{a) } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \text{ (quy tắc 3 điểm),} \quad \text{b) } \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \text{ (quy tắc trừ).}$$

Tính chất 5.

- a) (quy tắc trung điểm) I là trung điểm $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$,
 b) (quy tắc trọng tâm) G là trọng tâm $\triangle ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xác định véc-tơ

Dựa vào quy tắc cộng, trừ, quy tắc 3 điểm, hình bình hành, ta biến đổi và dựng hình để xác định các véc-tơ. Chú ý các quy tắc sau đây.

- a) $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.
 b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (quy tắc 3 điểm).
 c) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ (quy tắc trừ).
 d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ ($ABCD$ là hình bình hành).

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 1 ❖❖❖

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC .

a) Xác định véc-tơ $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

b) Xác định véc-tơ $\vec{b} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

c) Xác định véc-tơ $\vec{c} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

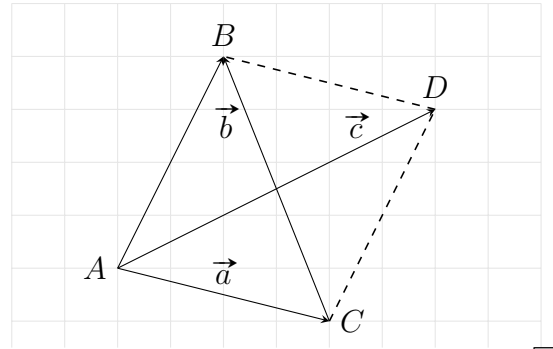
Lời giải.

Ta có

a) $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

b) $\vec{b} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

c) $\vec{c} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$, với $ABDC$ là hình bình hành.



□

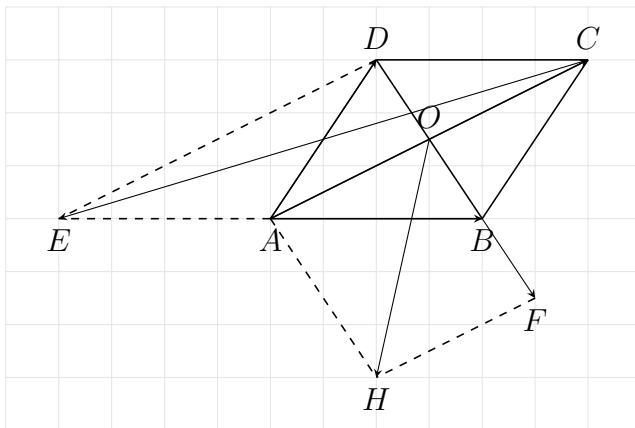
Ví dụ 2. Cho hình bình hành $ABCD$, có tâm O . Hãy xác định các véc-tơ sau đây:

a) $\vec{x} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

b) $\vec{y} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CD}$.

c) $\vec{z} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC}$.

d) $\vec{t} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{BD}$.



Lời giải.

a) Theo tính chất hình bình hành $\vec{x} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

b) $\vec{y} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD}$.

c) $\vec{z} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CE}$ (dựng hình bình hành $CDEA$).

d) $\vec{t} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OH}$. Trong đó, ta dựng $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{DB}$ và hình bình hành $OFHA$.

□

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC đều, G là trọng tâm và M là trung điểm cạnh BC . Hãy xác định các véc-tơ sau đây:

a) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$.

b) $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{CB}$.

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MC}$.

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$.

Lời giải.

- a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.
b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO}$.

- c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}$.
d) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AD}$.

Lời giải.

- a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.
b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{CA}$.
c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}$.
d) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.

□

Bài 3. Cho tam giác ABC . Tìm véc-tơ $\vec{x}$ trong các trường hợp:

- a) $\vec{x} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}$.
b) $\overrightarrow{CA} - \vec{x} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

- a) $\vec{x} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$.
b) $\vec{x} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BE}$, với $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA}$.

□

Bài 4. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm BC, AC, AB . Xác định các véc-tơ sau đây:

- a) $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{NA}$.
b) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{CM}$.

Lời giải.

- a) $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NA} = \vec{0}$.
b) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{ND}$ (dựng thêm điểm D sao cho $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA}$).

□

Bài 5. Cho tam giác ABC , gọi M là trung điểm AC và N là điểm đối xứng của B qua M . Xác định các véc-tơ sau đây:

- a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AN}$.
b) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CN}$.
c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MN}$.
d) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{MN}$.

Lời giải.

Ta có, tứ giác $BANC$ là hình bình hành.

- a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}$ (tính chất hình bình hành $BANC$).
b) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{BE}$ (dựng $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CN}$).
c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}$.
d) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{BM}$.

□

Bài 6. Cho hình lục giác đều $ABCDEF$, gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DE, EF, FA . Xác định các véc-tơ sau đây:

a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{CD}$.

b) $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{PS}$.

Lời giải.

a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DF} = \vec{0}$.

b) $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{DF} = \vec{0}$.

□

Bài 7. Cho tam giác ABC . Gọi D, E, F lần lượt nằm trên cạnh BC, AC, AB sao cho $BD = \frac{1}{3}BC$, $CE = \frac{1}{3}CA$, $AF = \frac{1}{3}AB$. Xác định các véc-tơ sau đây:

a) $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE}$

b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}$

Lời giải.

a) Lấy thêm các điểm P, Q về phía ngoài cạnh AB, AC sao cho $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{QA} = \overrightarrow{AF}$. Theo đó, tam giác APQ đồng dạng tam giác ACB nên ta có $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BD}$. Khi đó, $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$.

b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AF}) - (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$.

□

Dạng 2. Xác định điểm thỏa đẳng thức véc-tơ cho trước

Để xác định điểm M thỏa đẳng thức véc-tơ cho trước, ta làm như sau:

◦ HƯỚNG 1:

– Biến đổi đẳng thức véc-tơ đã cho về dạng $\overrightarrow{AM} = \vec{v}$, trong đó A là điểm cố định và $\vec{v}$ là véc-tơ cố định.

– Lấy A làm điểm gốc, dựng véc-tơ bằng $\vec{v}$ thì điểm ngọn chính là điểm M cần tìm.

◦ HƯỚNG 2:

– Biến đổi đẳng thức véc-tơ đã cho về dạng $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$, trong đó A, B là hai điểm cố định.

– Khi đó điểm M cần tìm trùng với điểm B .

◦ HƯỚNG 3:

– Biến đổi đẳng thức véc-tơ đã cho về một đẳng thức véc-tơ luôn đúng với mọi điểm M .

– Khi đó điểm M cần tìm là điểm tùy ý.

◦ HƯỚNG 4:

– Biến đổi đẳng thức véc-tơ đã cho về một đẳng thức véc-tơ luôn sai với mọi điểm M .

– Khi đó không có điểm M nào thỏa điều kiện.

◦ HƯỚNG 5:

– Biến đổi đẳng thức véc-tơ đã cho về dạng $|\overrightarrow{IM}| = |\overrightarrow{AB}|$, trong đó I, A, B là các điểm cố định.

– Khi đó điểm M cần tìm thuộc đường tròn tâm I , bán kính AB .

◦ HƯỚNG 6:

– Biến đổi đẳng thức véc-tơ đã cho về dạng $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$, trong đó A, B là các điểm cố định phân biệt.

– Khi đó điểm M cần tìm thuộc đường trung trực của đoạn AB .

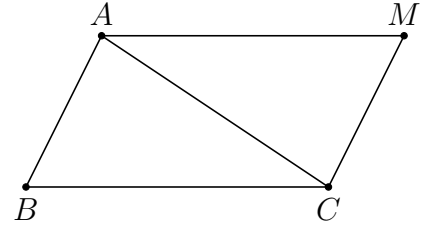
❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 2 ❖❖❖

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC . Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Lời giải.

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BA}$$

$\Rightarrow$ Điểm M là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$.



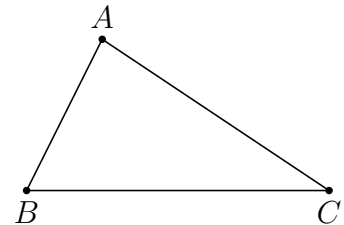
□

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC . Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CM} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CM}$$

$\Rightarrow$ Điểm M trùng với điểm A .



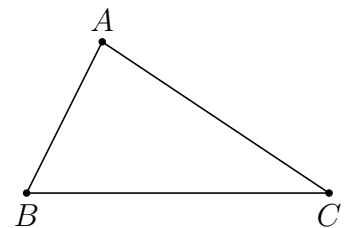
□

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC . Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB}$$

$\Rightarrow$ không có M nào thỏa điều kiện bài toán.



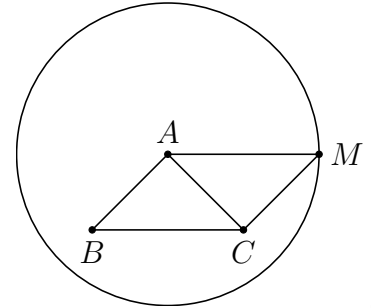
□

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC . Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$.

Lời giải.

$$|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{CB}| \Leftrightarrow MA = CB$$

$\Rightarrow$ Điểm M thuộc đường tròn tâm A , bán kính CB .



□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho $\triangle ABC$. Dựng điểm M thỏa mãn điều kiện

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}. \quad (1)$$

Lời giải.

Ta có (1) $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{CB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BC}$. Vậy bốn điểm A, C, B, M tạo thành hình bình hành. □

Bài 2. Cho tam giác ABC . Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Lời giải.

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{CB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AM}.$$

$\Rightarrow$ Điểm M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ACBM$. □

Bài 3. Cho tam giác ABC . Gọi I là trung điểm của cạnh AC . Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{CM} = \vec{0}$.

Lời giải.

$$\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{CM} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CM}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IM}.$$

$\Rightarrow M$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành $IABM$. □

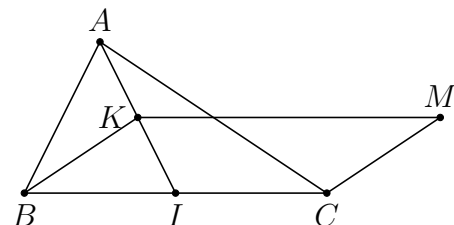
Bài 4. Cho tam giác ABC . Gọi I, K lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, AI . Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Lời giải.

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{BK} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BK}$$

$\Rightarrow$ Điểm M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $CBKM$.



□

Bài 5. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OM}$.

Lời giải.

$$\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AM}.$$

$\Rightarrow$ Điểm M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $AODM$. □

Bài 6. Cho hình bình hành $ABCD$. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.

Lời giải.

$$\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MD} = \vec{0}.$$

$\Rightarrow$ Điểm M trùng với điểm D . □

Bài 7. Cho tam giác ABC . Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CM} = \vec{0}$.

Lời giải.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CM} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AM} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AM}.$$

$\Rightarrow$ Điểm M trùng với điểm G . □

Bài 8. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA}.$$

$\Rightarrow$ Không có điểm M nào thỏa điều kiện trên. □

Bài 9. Cho hai điểm A và B . Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$.

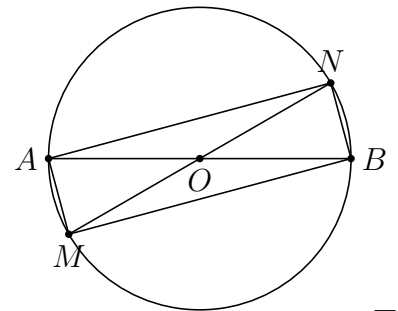
Lời giải.

$$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| \Leftrightarrow MN = BA.$$

Với N là đỉnh thứ tư của hình bình hành $AMBN$. Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB .

$$\Rightarrow 2MO = 2OB \Rightarrow MO = OB.$$

$\Rightarrow$ Điểm M thuộc đường tròn tâm O , bán kính OB . □



Bài 10. Cho tam giác ABC . Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}|$.

Lời giải.

$$|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{BC}| \Leftrightarrow MC = BC.$$

$\Rightarrow$ Điểm M thuộc đường tròn tâm C , bán kính BC . □

Bài 11. Cho tam giác ABC . Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BM}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}|$.

Lời giải.

$$|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BM}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}| \Leftrightarrow MA = MC.$$

$\Rightarrow$ Điểm M thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AC . □

Bài 12. Cho năm điểm A, B, C, D, E . Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CD}$.

Lời giải.

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CD} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{DM} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DM} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MM} = \vec{0}.$$

$\Rightarrow$ Điểm M là điểm tùy ý. □

Dạng 3. Tính độ dài của tổng và hiệu hai véc-tơ

- Độ dài của véc-tơ bằng độ dài của đoạn thẳng có hai đầu mút là điểm đầu và điểm cuối của véc-tơ đó.
- Ta thường sử dụng các công thức về cạnh như hệ thức lượng tam giác vuông, định lý Pytago, tính chất tam giác đều, hình chữ nhật, hình vuông,...

🔗🔗🔗 BÀI TẬP DẠNG 3 🔗🔗🔗

Ví dụ 1. Cho tam giác đều ABC cạnh a . Tính $|\vec{AB} - \vec{AC}|$.

Lời giải.

Ta có $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$ nên $|\vec{AB} - \vec{AC}| = |\vec{CB}| = CB = a$. □

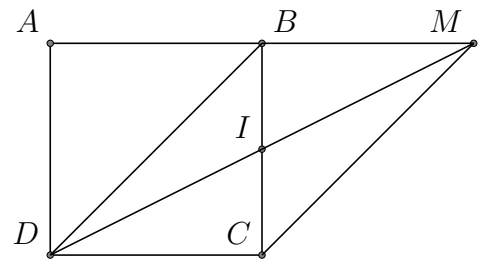
Ví dụ 2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $|\vec{DB} + \vec{DC}|$.

Lời giải.

Vẽ hình bình hành $CDBM$ thì DM cắt BC tại trung điểm I của mỗi đường.

Ta có $\vec{DB} + \vec{DC} = \vec{DM}$ nên $|\vec{DB} + \vec{DC}| = DM = 2DI$

Mà $DI^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}a^2$ nên $|\vec{DB} + \vec{DC}| = a\sqrt{5}$. □



Ví dụ 3. Chứng minh rằng nếu $\triangle ABC$ thỏa mãn $|\vec{AB} + \vec{AC}| = |\vec{AB} - \vec{AC}|$ thì $\triangle ABC$ là tam giác vuông.

Lời giải.

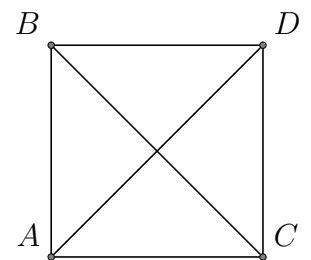
Dựng hình bình hành $ABDC$.

Theo quy tắc hình bình hành ta có $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$

Theo quy tắc hiệu hai véc-tơ ta có $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$.

Từ giả thiết suy ra $|\vec{AD}| = |\vec{BC}|$, tức là $AD = BC$.

Hình bình hành $ABDC$ có hai đường chéo bằng nhau nên nó là hình chữ nhật, tức là tam giác ABC vuông. □



Ví dụ 4. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi M là trung điểm của AB , N là điểm đối xứng với C qua D . Hãy tính độ dài của véc-tơ sau $\vec{MD}$, $\vec{MN}$.

Lời giải.

Áp dụng Định lý Pytago trong tam giác vuông MAD ta có

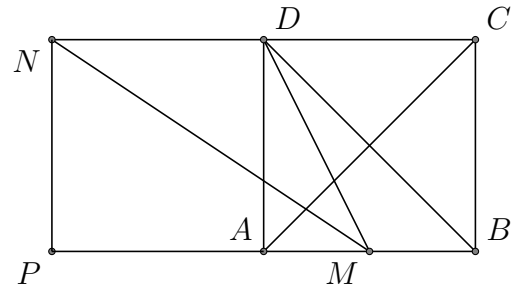
$$DM^2 = AM^2 + AD^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Suy ra $|\overrightarrow{MD}| = MD = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Qua N kẻ đường thẳng song song với AD cắt AB tại P .

Khi đó tứ giác $ADNP$ là hình vuông và $PM = PA + AM =$

$$a + \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}.$$



Áp dụng Định lý Pytago trong tam giác vuông NPM ta có

$$MN^2 = NP^2 + PM^2 = a^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{13a^2}{4} \Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{13}}{2}. \text{ Suy ra } |\overrightarrow{MN}| = MN = \frac{a\sqrt{13}}{2}. \quad \square$$

Ví dụ 5. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , M là một điểm bất kỳ. Tính độ dài véc-tơ $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$.

Lời giải.

Áp dụng quy tắc trừ ta có

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) - (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}) = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DC}$$

Lấy B' là điểm đối xứng của B qua A

$$\text{Khi đó } -\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB'} \Rightarrow \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BB'}$$

$$\text{Suy ra } |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = |\overrightarrow{BB'}| = BB' = 2a. \quad \square$$

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. Cho tam giác đều ABC cạnh $5a$. Tính độ dài các véc-tơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = 5a.$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow |\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{BA}| = BA = 5a. \quad \square$$

Bài 2. Xét các véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Khi nào thì $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

Lời giải.

Từ điểm O nào đó, ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Khi đó $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$. Như vậy:

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OA}| + |\overrightarrow{AB}| \Leftrightarrow OB = OA + AB.$$

Điều này xảy ra khi và chỉ khi O, A, B thẳng hàng theo thứ tự này. Hay hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

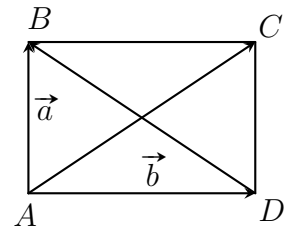
$\square$

Bài 3. Xét các véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Khi nào thì $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$.

Lời giải.

Từ điểm A nào đó, ta kẻ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Vẽ điểm C sao cho $ABCD$ là hình bình hành. Theo quy tắc hình bình hành ta có: $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Theo quy tắc về hiệu véc-tơ ta có: $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$. Như vậy:

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{DB}| \Leftrightarrow AC = BD.$$



Điều này xảy ra khi $ABCD$ là hình chữ nhật. Vậy AB vuông góc với AD hay giá của hai véc-tơ vuông góc với nhau. □

Bài 4. Chứng minh rằng với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương thì

$$|\vec{a}| - |\vec{b}| < |\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

Lời giải.

Gọi A, B là điểm đầu và điểm cuối của $\vec{a}$. Vẽ điểm C sao cho $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Vì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nên ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Ta có:

$$|\vec{a}| - |\vec{b}| = AB - BC < AC = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| < AB + BC = |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

Bài toán được chứng minh xong. □

Bài 5. Cho tam giác ABC cân tại A , đường cao AH . Biết $AB = a$ và $BC = 2b$ (với $a > b > 0$). Tính độ dài véc-tơ tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}$ và độ dài véc-tơ hiệu $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}$.

Lời giải.

Do tam giác ABC cân tại A , đường cao AH nên H là trung điểm BC . Suy ra $BH = b$. Trong tam giác vuông ABH , ta có:

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

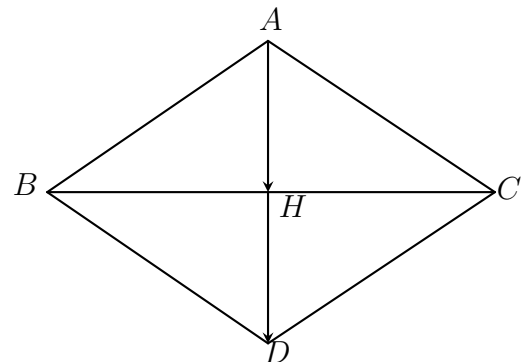
$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AH}.$$

$$\text{Suy ra } |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}| = |\overrightarrow{AH}| = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Vẽ hình bình hành $ABDC$. Khi đó:

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.$$

$$\text{Do đó: } |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{AD}| = 2AH = 2\sqrt{a^2 - b^2}.$$



Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = a$, $BC = a\sqrt{5}$. Tính độ dài các véc-tơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$. □

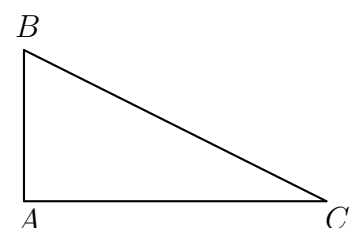
Lời giải.

Do tam giác ABC vuông tại A nên

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{5a^2 - a^2} = 2a.$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = 2a.$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow |\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{BA}| = BA = a.$$



Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A , biết $AB = a$ và $AC = 3a$. Tính độ dài véc-tơ tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ và độ dài véc-tơ hiệu $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

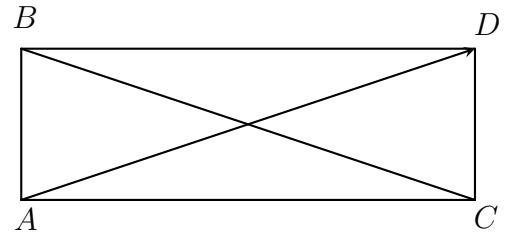
Ta có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}$.

Hay $BC = \sqrt{a^2 + 9a^2} = a\sqrt{10}$.

Ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

Do đó $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}| = CB = a\sqrt{10}$.

Vẽ hình bình hành $ABDC$. Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$. Do đó $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = AD = a\sqrt{10}$.



□

Bài 8. Cho hình thoi $ABCD$ có tâm O , cạnh bằng 4 và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Tính:

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|, |\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{AB}|, |-\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{OC}|.$$

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra ABD là tam giác đều cạnh bằng 4. Do

đó $AO = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$, $AC = 4\sqrt{3}$. Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. Như vậy $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = AC = 4\sqrt{3}$.

Ta có: $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BO}$.

Suy ra $|\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{AB}| = BO = \frac{1}{2}BD = 2$.

Vẽ hình bình hành $BDCH$. Do $DB = DC = 4$ nên hình bình hành $BDCH$ là hình thoi, do đó $DH = 2DK = 4\sqrt{3}$ (K là trung điểm của BC).

Ta có: $|-\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DB}| = |\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DB}| = |\overrightarrow{DH}| = 4\sqrt{3}$.

□

Bài 9. Cho đường thẳng d và hai điểm A, B phân biệt, không nằm trên d . Tìm $M \in d$ sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BA}|$ nhỏ nhất.

Lời giải.

Gọi C là điểm đối xứng của B qua A . Khi đó C là điểm cố định và

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MC}.$$

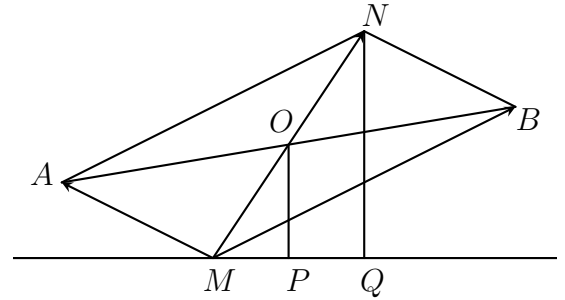
Do đó $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{MC}| = MC$. Như vậy $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BA}|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MC nhỏ nhất, hay M là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng d .

□

Bài 10. Cho đường thẳng d và hai điểm A, B nằm trên nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng d . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$, với $M \in d$.

Lời giải.

Trong trường hợp M, A, B không thẳng hàng, ta dựng hình bình hành $MANB$. Khi đó $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MN}$. Suy ra $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = MN$. Gọi O là giao điểm của MN và AB . Khi đó, O là trung điểm AB nên O là điểm cố định. Từ O, N lần lượt kẻ các đường vuông góc với d , cắt d tại P, Q . Ta có $MN \geq NQ = 2OP$. Còn khi M, A, B thẳng hàng thì hiển nhiên $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| > 2OP$. Vậy $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$ nhỏ nhất là bằng $2OP$, đạt được khi M trùng P .



□

Dạng 4. Chứng minh đẳng thức véc-tơ

- Sử dụng quy tắc ba điểm.
- Sử dụng quy tắc hình bình hành.

BÀI TẬP DẠNG 4

Ví dụ 1. Cho 5 điểm A, B, C, D, E . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$.

Lời giải.

Đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{ED}) + \overrightarrow{EA} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow & \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EA} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow & \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EA} = \vec{0} \quad (\text{luôn đúng}) \end{aligned}$$

□

Ví dụ 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

Lời giải.

Do $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$

Đẳng thức cần chứng minh tương đương với $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$ (luôn đúng)

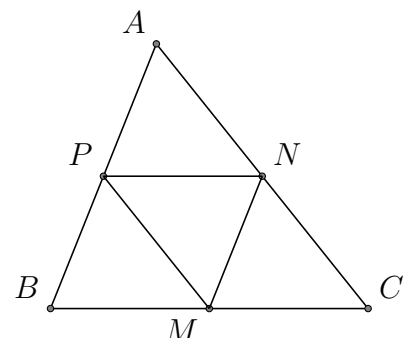
□

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } & \begin{cases} \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} \\ \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} \\ \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BP} \end{cases} \\ \Rightarrow & \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AN}) \\ & = \vec{0} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Lại có } & \begin{cases} \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{MN} \\ \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NC} \end{cases} \\ \Rightarrow & \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC} = \vec{0} \end{aligned}$$



□

Ví dụ 4. Cho 5 điểm A, B, C, D, E . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\text{Ta có} \quad \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CB} &= (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{CE}) + \overrightarrow{CB} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} \\ &= \overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

□

Ví dụ 5. Chứng minh rằng nếu hai hình bình hành $ABCD$ và $A'B'C'D'$ có cùng tâm thì $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} = \vec{0}$.

Lời giải.

Gọi O là tâm của hai hình bình hành.

$$\begin{aligned}\text{Ta có} \quad \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} &= (\overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OC'} - \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OD'} - \overrightarrow{OD}) \\ &= -(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) - (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) + (\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OC'}) + (\overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OD'}) \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Lời giải.

Ta có sự tương đương:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}.$$

Do đó ta có điều phải chứng minh.

□

Bài 2. Cho hình bình hành $ABCD$ và M là điểm tùy ý. Chứng minh:

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}.$$

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CD}$. Mà $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$. Vậy ta có đẳng thức cần chứng minh.

□

Bài 3. Cho hình bình hành $ABCD$. Chứng minh rằng với điểm M bất kì ta luôn có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\text{Ta có} \quad \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}) = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \vec{0} \quad (\text{luôn đúng do } ABCD \text{ là hình bình hành}).\end{aligned}$$

□

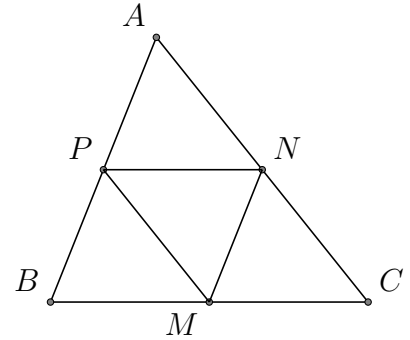
Bài 4. Cho tam giác ABC , gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . Chứng minh rằng với điểm O bất kì ta luôn có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{ON}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP}) &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{PC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} &= \vec{0} \\ \text{Mặt khác } \begin{cases} \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} \\ \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} \\ \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BP} \end{cases} \\ \Rightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AN}) \\ &= \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Lại có } \begin{cases} \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{MN} \\ \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NC} \end{cases} \\ \Rightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} &= \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC} = \vec{0} \end{aligned}$$



□

Bài 5. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi I là trung điểm của BC . Dựng điểm B' sao cho $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AG}$. Gọi J là trung điểm của BB' . Chứng minh rằng $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IG}$.

Lời giải.

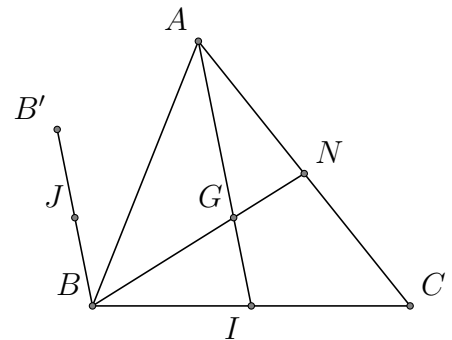
Ta có:

$$\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AG} \Rightarrow AGBB' \text{ là hình bình hành.}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BJ} \text{ và } \overrightarrow{GA} \text{ cùng hướng.}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BJ} \text{ và } \overrightarrow{IG} \text{ cùng hướng.}$$

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} BJ = \frac{1}{2}BB' \\ IG = \frac{1}{2}GA \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IG}$$



□

Bài 6. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{D'D} = \vec{0}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB'} \\ \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{D'D} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD'} \end{cases} \\ \Rightarrow \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{D'D} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'} - \overrightarrow{AC'}) = \vec{0} \end{aligned}$$

□

Bài 7. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và CD . Nối AF và CE , hai đường này cắt đường chéo BD lần lượt tại M và N . Chứng minh $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NB}$.

Lời giải.

Gọi I là giao điểm của AC và BD .

Dễ thấy I là trung điểm của MN .

Dễ thấy M là trọng tâm $\triangle ADC \Rightarrow DM = 2MI$.

N là trọng tâm tam giác $\triangle ABC \Rightarrow BN = 2NI$

$\Rightarrow DM = MN = NB \Rightarrow \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NB}$

□

Bài 8. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các đoạn thẳng DC, AB theo thứ tự lấy các điểm M, N sao cho $DM = BN$. Gọi P là giao điểm của AM, DB và Q là giao điểm của CN, DB . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$ và $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{QB}$.

Lời giải.

Ta có $AMCN$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$

$\triangle DPM = \triangle BQN \Rightarrow DP = QB \Rightarrow \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{QB}$

□

Bài 9. Cho tam giác ABC có H là trực tâm và O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi B' là điểm đối xứng của B qua O . Chứng minh $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}$ và $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{HC}$.

Lời giải.

Ta có $\widehat{BCB'} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

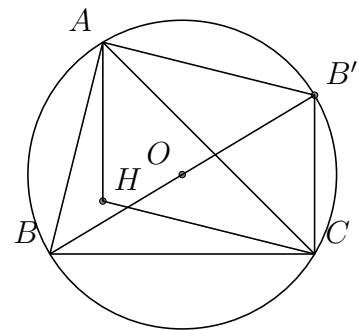
$\Rightarrow AH$ song song với $B'C$ (cùng vuông góc với BC)

$\widehat{BAB'} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow CH$ song song với AB' (cùng vuông góc với AB).

$\Rightarrow AHCB'$ là hình bình hành

$\Rightarrow \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}$ và $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{HC}$.



□

Bài 10. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM . Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = \frac{1}{3}AC$ và BE cắt AM tại N . Chứng minh $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NM} = \vec{0}$.

Lời giải.

Gọi F là trung điểm của EC

$\Rightarrow E$ là trung điểm của AF

$\Rightarrow MF$ là đường trung bình của $\triangle BEC$

$\Rightarrow MF$ song song với BE .

$\Rightarrow NE$ là đường trung bình của tam giác AMF .

$\Rightarrow N$ là trung điểm của $AM \Rightarrow \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NM} = \vec{0}$.

□

Bài 11. Cho ngũ giác đều $ABCDE$ tâm O . Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$.

Lời giải.

Các điểm B, E đối xứng với nhau qua $OA \Rightarrow \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE}$ có giá là đường thẳng OA .

Các điểm D, C đối xứng với nhau qua $OA \Rightarrow \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ có giá là đường thẳng OA .

$\Rightarrow$ Véc-tơ $\vec{u} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$ có giá là đường thẳng OA .

Tương tự các véc-tơ $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$ và $(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OD})$ có giá là đường thẳng OB .

$\Rightarrow$ Véc-tơ $\vec{u} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE}$ có giá là đường thẳng OB .

Do $\vec{OA}$ và $\vec{OB}$ có giá không trùng nhau $\Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$ □

Bài 12. Cho đa giác đều $A_1A_2\dots A_n$ với $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 3$ có tâm O . Chứng minh rằng $\vec{u} = \vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \dots + \vec{OA_n} = \vec{0}$.

Lời giải.

Ta xét hai trường hợp

- Trường hợp 1: n là số chẵn $\Rightarrow n = 2k$ với $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. Khi đó các cặp điểm A_i và A_{k+i} với $i = \overline{1, k}$ đối xứng với nhau qua O .

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{OA_1} + \vec{OA_{k+1}} = \vec{0} \\ \vec{OA_2} + \vec{OA_{k+2}} = \vec{0} \\ \dots \\ \vec{OA_k} + \vec{OA_{2k}} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}.$$

- Trường hợp 2: n là số lẻ $\Rightarrow n = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$. Khi đó các cặp điểm A_i và A_{2k+3-i} với $i = \overline{2, k+1}$ đối xứng với nhau qua đường thẳng OA_1 .

$\Rightarrow$ Giá của các véc-tơ $(\vec{OA_i} + \vec{OA_{2k+3-i}})$ là đường thẳng OA_1 .

$\Rightarrow$ Giá của véc-tơ $\vec{u}$ là đường thẳng OA_1 .

Tương tự, giá của các véc-tơ $(\vec{OA_1} + \vec{OA_3}), (\vec{OA_{2k}} + \vec{OA_4}) \dots$ là đường thẳng OA_2 .

$\Rightarrow$ Giá của véc-tơ $\vec{u}$ là đường thẳng OA_2 .

$\Rightarrow \vec{u}$ có giá là các đường thẳng OA_1 và $OA_2 \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$. □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 13. Cho n véc-tơ $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_n}$. Đặt $\vec{OA_1} = \vec{a_1}, \vec{A_1A_2} = \vec{a_2}, \dots, \vec{A_{n-1}A_n} = \vec{a_n}$. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để đường gấp khúc $OA_1A_2\dots A_n$ khép kín là $\vec{a_1} + \vec{a_2} + \dots + \vec{a_n} = \vec{0}$.

Lời giải.

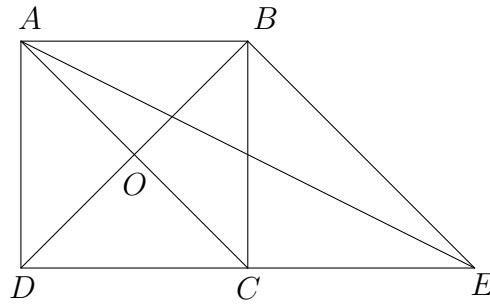
Đặt $\vec{OA_1} = \vec{a_1}, \vec{A_1A_2} = \vec{a_2}, \dots, \vec{A_{n-1}A_n} = \vec{a_n}$. Khi đó $\vec{a_1} + \vec{a_2} + \dots + \vec{a_n} = \vec{OA_n}$. Như vậy đường gấp khúc $OA_1A_2\dots A_n$ khép kín khi và chỉ khi O trùng với A_n hay $\vec{OA_n} = \vec{0}$, tức là $\vec{a_1} + \vec{a_2} + \dots + \vec{a_n} = \vec{0}$. □

Bài 14. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O , cạnh a . Hãy xác định và tính độ dài các véc-tơ:

$$\vec{AD} + \vec{AB}, \vec{OA} + \vec{OC}, \vec{OB} + \vec{BD}, \vec{AB} + \vec{AC}.$$

Lời giải.

Trước hết ta có $AC = BD = a\sqrt{2}$ và $OA = OB = OC = OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.



Ta có: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow |\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = a\sqrt{2}$.

Vì O là trung điểm AC nên $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

Vậy: $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}| = |\vec{0}| = 0$.

Theo quy tắc ba điểm: $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OD} \Rightarrow |\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD}| = |\overrightarrow{OD}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Dựng hình bình hành $BACE$. Ta có:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AE}| = AE.$$

Do đó:

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}.$$

□

Bài 15. Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm O , $AB = 2a$, $AD = a$, M là trung điểm CD .

a) Chứng minh $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$.

b) Tính $|\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{OM}|$.

Lời giải.

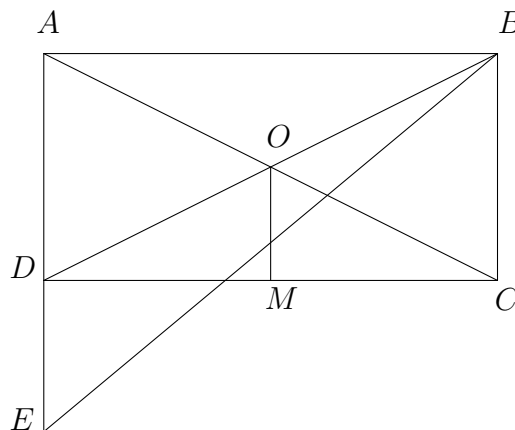
a) Ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$.

Ta có $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DB}$.

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$.

(1)

(2)



b) Dựng điểm E sao cho $OMED$ là hình bình hành. Khi đó

$$\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BE}.$$

Ta có:

$$BE^2 = AB^2 + AE^2 = 4a^2 + \frac{9a^2}{4} = \frac{25a^2}{4} \Rightarrow |\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{OM}| = |\overrightarrow{BE}| = BE = \frac{5a}{2}.$$

□

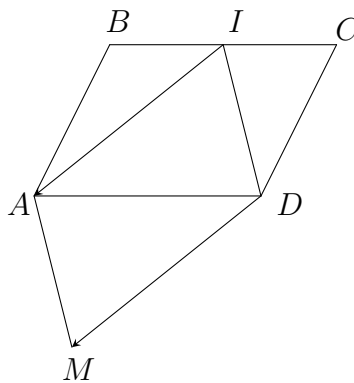
Bài 16. Cho hình bình hành $ABCD$, I là trung điểm BC . Tìm điểm M thỏa mãn:

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{CA}. \quad (*)$$

Lời giải.

Ta có sự tương đương sau:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{CA} &\Leftrightarrow \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BI} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{BI} &\Leftrightarrow (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BI}) + \overrightarrow{MD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{DM}. \end{aligned}$$

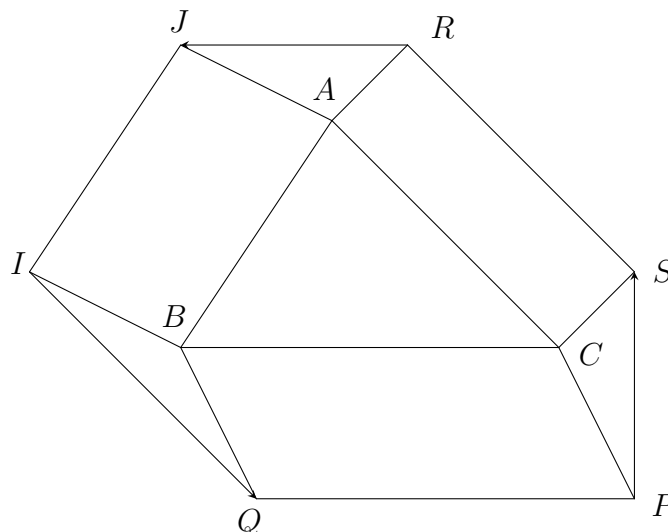


Vậy M là điểm sao cho $MDIA$ là hình bình hành. □

Bài 17. Cho tam giác ABC . Về phía ngoài tam giác vẽ các hình bình hành $ABIJ$, $BCPQ$, $CARS$. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{RJ} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} = \vec{0}.$$

Lời giải.



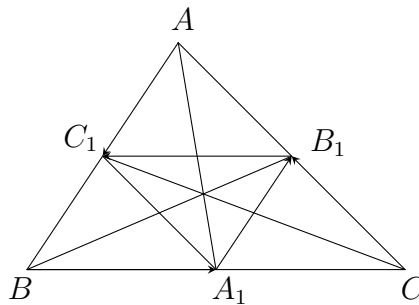
Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{RJ} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} &= \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CS} \\ &= (\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{CS}) + (\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{PC}) = \vec{0}.\end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

Bài 18. Cho tam giác ABC . Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB . Chứng minh $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$.

Lời giải.



Ta có:

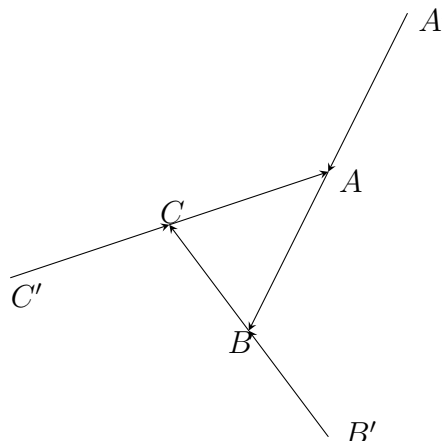
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} &= (\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{C_1A_1}) + (\overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{A_1B_1}) + (\overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{B_1C_1}) \\ &= (\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{A_1B_1}) + (\overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{B_1C_1}) + (\overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{C_1A_1}) \\ &= \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}.\end{aligned}$$

□

Bài 19. Cho $\triangle ABC$. Gọi A' là điểm đối xứng với B qua A , gọi B' là điểm đối xứng với C qua B , gọi C' là điểm đối xứng với A qua C . Chứng minh rằng với một điểm O bất kì ta có

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}.$$

Lời giải.



Ta có:

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{C'C} \\
 &= (\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}) + \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{C'C} \\
 &= (\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}) + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} \\
 &= (\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}) + \vec{0} \\
 &= \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}.
 \end{aligned}$$

□

Bài 20. Cho bảy điểm A, B, C, D, E, F, H . Chứng minh:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{HF}.$$

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}
 &\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{HA} - (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{HF}) \\
 &= \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{ED}) + (\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HF}) \\
 &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FA} = \vec{0}.
 \end{aligned}$$

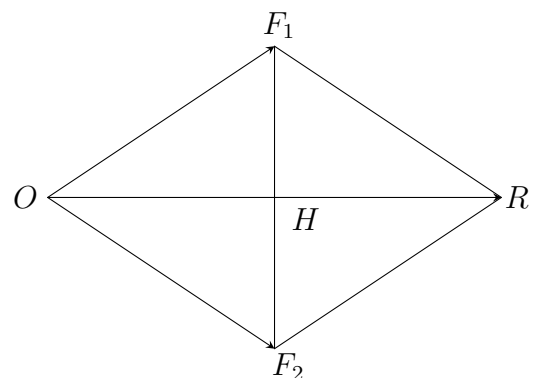
Vậy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{HF}$.

□

Bài 21. Cho hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ đều có cường độ là 40 N, có điểm đặt tại O và hợp với nhau một góc 60° . Tính cường độ lực tổng hợp của hai lực này.

Lời giải.

Theo quy tắc hình bình hành thì $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \overrightarrow{OR}$. Mà $OF_1 = OF_2 = 40$ (N) nên OF_1RF_2 là hình thoi có góc $\widehat{F_1OF_2} = 60^\circ$ và hai đường chéo RO, F_1F_2 vuông góc với nhau tại trung điểm H . Ta có $OH = 40 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}$ (OH là đường cao của tam giác đều cạnh bằng 40). Vậy cường độ lực tổng hợp của hai lực đã cho là $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = |\overrightarrow{OR}| = 20\sqrt{3}$ (N).

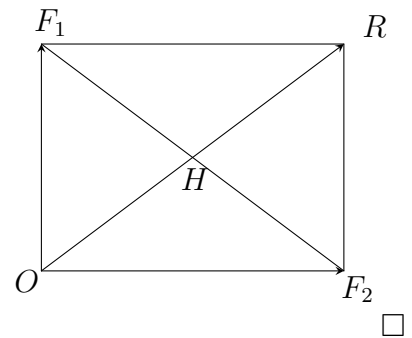


□

Bài 22. Cho hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ lần lượt có cường độ 30 N và 40 N, có điểm đặt O và vuông góc với nhau. Tính cường độ lực tổng hợp của chúng.

Lời giải.

Do hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ có cùng điểm đặt O nên tổng hợp lực $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ là đường chéo OR của hình bình hành OF_1RF_2 . Do hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ vuông góc với nhau nên hình bình hành OF_1RF_2 trở thành hình chữ nhật. Vậy $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{OR}$. Ta có $OF_1 = 30, OF_2 = 40$. Như vậy $OR = F_1F_2 = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50$. Do đó cường độ lực tổng hợp $\vec{OR}$ là $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = |\vec{OR}| = 50(\text{N})$.



Bài 23. Cho 2018 điểm trên mặt phẳng. Bạn Quỳnh kí hiệu chúng là $A_1, A_2, \dots, A_{2018}$. Bạn Vân kí hiệu chúng là $B_1, B_2, \dots, B_{2018}$. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \dots + \overrightarrow{A_{2018}B_{2018}} = \vec{0}.$$

Lời giải.

Lấy một điểm O nào đó. Ta có

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \dots + \overrightarrow{A_{2018}B_{2018}} \\ &= \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_2} - \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OB_{2018}} - \overrightarrow{OA_{2018}} \\ &= (\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \dots + \overrightarrow{OB_{2018}}) - (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_{2018}}). \end{aligned}$$

Vì 2018 điểm $B_1, B_2, \dots, B_{2018}$ cũng là 2018 điểm $A_1, A_2, \dots, A_{2018}$ nhưng được kí hiệu một cách khác, do đó

$$\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \dots + \overrightarrow{OB_{2018}} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_{2018}}.$$

Suy ra $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \dots + \overrightarrow{A_{2018}B_{2018}} = \vec{0}$. □

Bài 24. Cho n -đa giác đều $A_1A_2 \dots A_n$ (n lẻ, $n > 2$) nội tiếp đường tròn tâm O . Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}.$$

Lời giải.

Gọi d_1 là đường thẳng đi qua điểm O và điểm A_1 . Xét các đỉnh của đa giác đã cho mà không nằm trên d_1 . Chúng có thể phân tích thành những cặp đỉnh A_i, A_j đối xứng nhau qua đường thẳng d_1 (chẳng hạn cặp A_2, A_{n-1} , cặp $A_3, A_{n-2}, \dots$). Khi đó tổng $\overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_j}$ là một véc-tơ nằm trên đường thẳng d_1 . Từ đó suy ra tổng $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n}$ cũng là một véc-tơ có giá nằm trên đường thẳng d_1 . Hoàn toàn tương tự, nếu gọi d_2 là đường thẳng đi qua O và A_2 thì tổng $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n}$ cũng là một véc-tơ có giá nằm trên đường thẳng d_2 . Vì hai đường thẳng d_1 và d_2 không trùng nhau nên $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n}$ có hai phương khác nhau, hay $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$. □

C CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}$. C. $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CB}$. D. $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

Gọi D là điểm thỏa mãn $ABDC$ là hình bình hành. Ta có

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \neq \overrightarrow{BC}$. Suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ sai.

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$. Suy ra $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}$ đúng.

$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} = -(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) = -\overrightarrow{AD} \neq \overrightarrow{CB}$.

Suy ra $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CB}$ sai.

$\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{BB} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \neq \overrightarrow{AB}$. Suy ra $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$ sai.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 2. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là các véc-tơ khác $\vec{0}$ với $\vec{a}$ là véc-tơ đối của $\vec{b}$. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. Hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương. B. Hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng.
C. Hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng độ dài. D. Hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ chung điểm đầu.

Lời giải.

Do $\vec{a}$ là véc-tơ đối của $\vec{b}$ nên $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương, cùng độ dài và ngược hướng nhau.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 3. Cho $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng. B. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng độ dài.
C. $ABCD$ là hình bình hành. D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$. Suy ra $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng độ dài.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 4. Tính tổng $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR}$.

- A. $\overrightarrow{MR}$. B. $\overrightarrow{MN}$. C. $\overrightarrow{PR}$. D. $\overrightarrow{MP}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RN} = \overrightarrow{MN}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 5. Cho hai điểm A và B phân biệt. Điều kiện để I là trung điểm AB là

- A. $IA = IB$. B. $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$. C. $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$. D. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BI}$.

Lời giải.

I là trung điểm $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 6. Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để I là trung điểm của đoạn thẳng AB ?

- A. $IA = IB$. B. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$. C. $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$. D. $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$.

Lời giải.

I là trung điểm $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 7. Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- A. $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CD}$.
 B. $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$.
 C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$.
 D. $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}$.

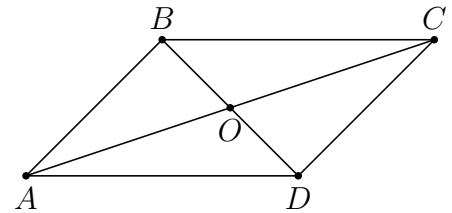
Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \text{ đúng.} \\ \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AD} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} \text{ sai.}$$

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB} \text{ đúng.}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} \end{cases} \text{ đúng.}$$



Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 8. Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

- A. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB}$.
 B. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$.
 C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$.
 D. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Do $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 9. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Tính $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$.

- A. $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC}$.
 B. $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{DA}$.
 C. $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$.
 D. $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 10. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$.
 B. $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB}$.
 C. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CA}| = a$.
 D. $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

Độ dài các cạnh của tam giác là a thì độ dài các véc-tơ $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CA}| = a$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 11. Cho tam giác ABC với M là trung điểm BC . Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$.
 B. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$.
 C. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$.
 D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM}$.

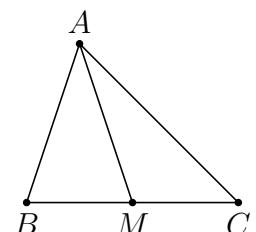
Lời giải.

Ta có

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}.$$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AC}.$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}.$$



Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 12. Cho tam giác ABC với M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.

B. $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$.

C. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MP}$.

Lời giải.

Ta có

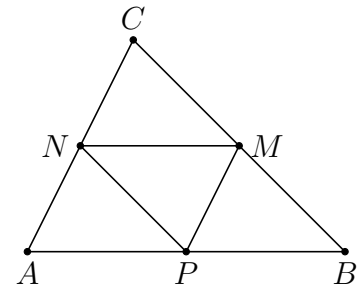
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0} \text{ (đúng).}$$

$$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA} = \vec{0} \text{ (đúng).}$$

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MM} = \vec{0} \text{ (đúng).}$$

$$\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{PM} = -\overrightarrow{MP} \text{ (sai).}$$



Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 13. Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $AB + BC = AC$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.

C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow |\overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{BC}|$.

D. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0} \text{ đúng theo quy tắc ba điểm.}$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 14. Cho tam giác ABC có $AB = AC$ và đường cao AH . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH}$.

B. $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$.

C. $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Do $\triangle ABC$ cân tại A , AH là đường cao nên H là trung điểm BC . Suy ra $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 15. Cho tam giác ABC vuông cân đỉnh A , đường cao AH . Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $|\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}| = |\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}|$.

B. $\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA}$.

D. $|\overrightarrow{AH}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AH}|$.

Lời giải.

Do $\triangle ABC$ cân tại A , AH là đường cao nên H là trung điểm BC .

Ta có

$$\begin{cases} |\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}| = |\overrightarrow{AB}| = a \\ |\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}| = |\overrightarrow{AC}| = a \end{cases} \Rightarrow |\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}| = |\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}|.$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BH} \\ \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CH} = -\overrightarrow{BH} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AC} \text{ sai.}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{AC} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HA}.$$

$$|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AH}| = |\overrightarrow{HB}| = |\overrightarrow{AH}| \text{ (do } \triangle ABC \text{ vuông cân tại } A).$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 16. Cho đường tròn O và hai tiếp tuyến song song với nhau tiếp xúc với O tại hai điểm A và B . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB}$. B. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{OB}$. C. $OA = -OB$. D. $AB = -BA$.

Lời giải.

Do hai tiếp tuyến song song và A, B là hai tiếp điểm nên AB là đường kính.

Do đó O là trung điểm của AB .

Suy ra $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 17. Cho đường tròn O và hai tiếp tuyến MT, MT' (T và T' là hai tiếp điểm). Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{MT'}$. B. $MT + MT' = TT'$. C. $MT = MT'$. D. $\overrightarrow{OT} = -\overrightarrow{OT'}$.

Lời giải.

Do MT, MT' là hai tiếp tuyến (T và T' là hai tiếp điểm) nên $MT = MT'$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 18. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA}$.
C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$. D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 19. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Véc-tơ nào trong các véc-tơ dưới đây bằng $\overrightarrow{CA}$?

- A. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$. B. $-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$. C. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}$. D. $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

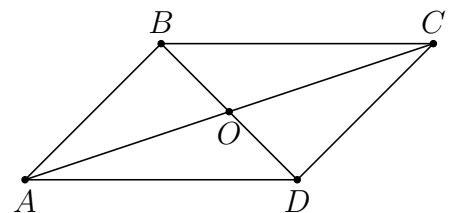
Ta có

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA} \text{ sai.}$$

$$-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA} \text{ sai.}$$

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = -(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) = -\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} \text{ đúng.}$$

$$\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} = -(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB}) = -\overrightarrow{CA} \text{ sai.}$$

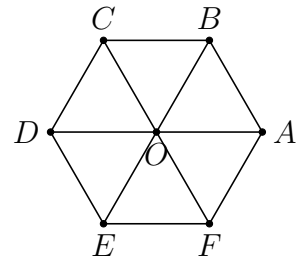


Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 20.

Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O . Đẳng thức nào sau đây **sai**?



- A. $\vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OE} = \vec{0}$.
- B. $\vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OB} = \vec{EB}$.
- C. $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{EF} = \vec{0}$.
- D. $\vec{BC} + \vec{EF} = \vec{AD}$.

Lời giải.

Ta có

$$\vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OE} = (\vec{OA} + \vec{OC}) + \vec{OE} = \vec{OB} + \vec{OE} = \vec{0} \text{ đúng.}$$

$$\vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OB} = (\vec{OA} + \vec{OC}) + \vec{OB} = \vec{OB} + \vec{OB} = 2\vec{OB} = \vec{EB} \text{ đúng.}$$

$$\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{EF} = (\vec{AB} + \vec{BO}) + \vec{OA} = \vec{AO} + \vec{OA} = \vec{AA} = \vec{0} \text{ đúng.}$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 21. Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- A. $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$.
- B. $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$.
- C. $|\vec{BA} + \vec{BC}| = |\vec{DA} + \vec{DC}|$.
- D. $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AB} + \vec{CB}$.

Lời giải.

Ta có

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = (\vec{OA} + \vec{OC}) + (\vec{OB} + \vec{OD}) = \vec{0}.$$

$$\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC} \text{ (quy tắc hình bình hành).}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |\vec{BA} + \vec{BC}| = |\vec{BD}| = BD \\ |\vec{DA} + \vec{DC}| = |\vec{DB}| = BD. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |\vec{BA} + \vec{BC}| = |\vec{BD}| = BD \\ |\vec{DA} + \vec{DC}| = |\vec{DB}| = BD. \end{array} \right.$$

$$\text{Do } (\vec{AB} + \vec{CD}) = (\vec{AB} + \vec{CB}) \Rightarrow \vec{CD} = \vec{CB} \text{ sai.}$$

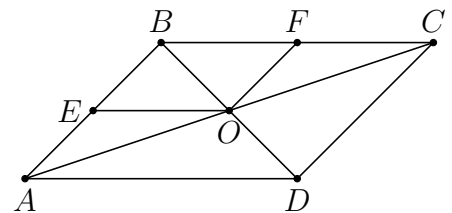
Chọn đáp án **D**

□

Câu 22.

Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, BC . Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- A. $\vec{DO} = \vec{EB} - \vec{EO}$.
- B. $\vec{OC} = \vec{EB} + \vec{EO}$.
- C. $\vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE} + \vec{OF} = \vec{0}$.
- D. $\vec{BE} + \vec{BF} - \vec{DO} = \vec{0}$.



Lời giải.

Ta có OF, OE lần lượt là đường trung bình của tam giác $\triangle BCD$ và $\triangle ABC$.

$\Rightarrow BEOF$ là hình bình hành.

$$\Rightarrow \vec{BE} + \vec{BF} = \vec{BO}.$$

$$\Rightarrow \vec{BE} + \vec{BF} - \vec{DO} = \vec{BO} - \vec{DO} = \vec{OD} - \vec{OB} = \vec{BD}.$$

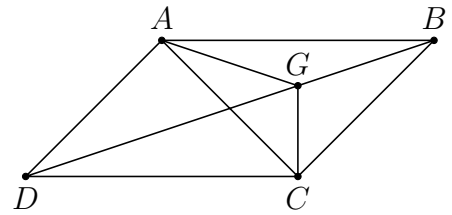
Chọn đáp án **D**

□

Câu 23.

Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\vec{GA} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{BD}$. B. $\vec{GA} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{CD}$.
C. $\vec{GA} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{O}$. D. $\vec{GA} + \vec{GD} + \vec{GC} = \vec{CD}$.



Lời giải.

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \Rightarrow \vec{GA} + \vec{GC} = -\vec{GB}$.
Do đó $\vec{GA} + \vec{GC} + \vec{GD} = -\vec{GB} + \vec{GD} = \vec{GD} - \vec{GB} = \vec{BD}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 24. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\vec{AC} = \vec{BD}$. B. $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = \vec{0}$.
C. $|\vec{AB} - \vec{AD}| = |\vec{AB} + \vec{AD}|$. D. $|\vec{BC} + \vec{BD}| = |\vec{AC} - \vec{AB}|$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} |\vec{AB} - \vec{AD}| = |\vec{DB}| = BD \\ |\vec{AB} + \vec{AD}| = |\vec{AC}| = AC. \end{cases}$$

$$\text{Mà } BD = AC \Rightarrow |\vec{AB} - \vec{AD}| = |\vec{AB} + \vec{AD}|.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 25. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Tính $|\vec{AB} + \vec{AC}|$.

- A. $|\vec{AB} + \vec{AC}| = a\sqrt{3}$. B. $|\vec{AB} + \vec{AC}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
C. $|\vec{AB} + \vec{AC}| = 2a$. D. $|\vec{AB} + \vec{AC}| = 2a\sqrt{3}$.

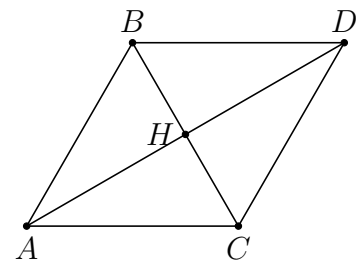
Lời giải.

Gọi D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABDC$.

Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow AH \perp BC$.

$$\text{Suy ra } AH = \frac{BC\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Ta lại có } |\vec{AB} + \vec{AC}| = |\vec{AD}| = 2AH = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$



Chọn đáp án **A**

□

Câu 26. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = a$. Tính $|\vec{AB} + \vec{AC}|$.

- A. $|\vec{AB} + \vec{AC}| = a\sqrt{2}$. B. $|\vec{AB} + \vec{AC}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.
C. $|\vec{AB} + \vec{AC}| = 2a$. D. $|\vec{AB} + \vec{AC}| = a$.

Lời giải.

Gọi D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABDC$.

Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow AM = \frac{1}{2}BC$.

$$\text{Ta có } |\vec{AB} + \vec{AC}| = |\vec{AD}| = 2AM = BC = a\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 27. Cho tam giác ABC vuông cân tại C và $AB = \sqrt{2}$. Tính độ dài của $\vec{AB} + \vec{AC}$.

A. $|\vec{AB} + \vec{AC}| = \sqrt{5}$. B. $|\vec{AB} + \vec{AC}| = 2\sqrt{5}$. C. $|\vec{AB} + \vec{AC}| = \sqrt{3}$. D. $|\vec{AB} + \vec{AC}| = 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $AB = \sqrt{2} \Rightarrow AC = CB = 1$.

Gọi D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABDC$.

Gọi I là trung điểm $BC \Rightarrow AI = \sqrt{AC^2 + CI^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Khi đó $\vec{AC} + \vec{AB} = \vec{AD} \Rightarrow |\vec{AC} + \vec{AB}| = |\vec{AD}| = 2AI = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 28. Cho tam giác ABC vuông tại A và có $AB = 3$, $AC = 4$. Tính $|\vec{CA} + \vec{AB}|$.

A. $|\vec{CA} + \vec{AB}| = 2$.

B. $|\vec{CA} + \vec{AB}| = 2\sqrt{13}$.

C. $|\vec{CA} + \vec{AB}| = 5$.

D. $|\vec{CA} + \vec{AB}| = \sqrt{13}$.

Lời giải.

Ta có $|\vec{CA} + \vec{AB}| = |\vec{CB}| = CB = \sqrt{AC^2 + AB^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 29. Tam giác ABC có $AB = AC = a$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Tính $|\vec{AB} + \vec{AC}|$.

A. $|\vec{AB} + \vec{AC}| = a\sqrt{3}$. B. $|\vec{AB} + \vec{AC}| = a$. C. $|\vec{AB} + \vec{AC}| = \frac{a}{2}$. D. $|\vec{AB} + \vec{AC}| = 2a$.

Lời giải.

Gọi D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABDC$.

Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow AM \perp BC$.

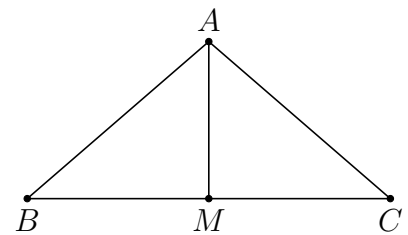
Trong tam giác vuông AMB , ta có

$$AM = AB \cdot \sin \widehat{ABM} = a \cdot \sin 30^\circ = \frac{a}{2}.$$

Ta có $|\vec{AB} + \vec{AC}| = |\vec{AD}| = 2AM = a$.

Chọn đáp án **B**

□



Câu 30. Cho tam giác ABC đều cạnh a , H là trung điểm của BC . Tính $|\vec{CA} - \vec{HC}|$.

A. $|\vec{CA} - \vec{HC}| = \frac{a}{2}$.

B. $|\vec{CA} - \vec{HC}| = \frac{3a}{2}$.

C. $|\vec{CA} - \vec{HC}| = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$.

D. $|\vec{CA} - \vec{HC}| = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

Lời giải.

Gọi D là điểm thỏa mãn tứ giác $ACHD$ là hình bình hành.

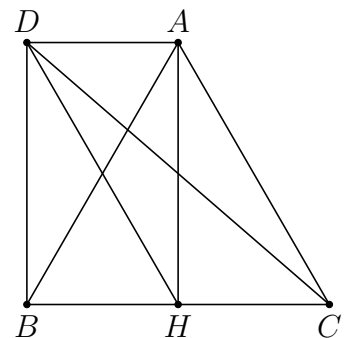
$\Rightarrow AHBD$ là hình chữ nhật.

Ta có $|\vec{CA} - \vec{HC}| = |\vec{CA} + \vec{CH}| = |\vec{CD}| = CD$.

$$CD = \sqrt{BD^2 + BC^2} = \sqrt{AH^2 + BC^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + a^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

Chọn đáp án **D**

□



Câu 31. Gọi G là trọng tâm tam giác vuông ABC với cạnh huyền $BC = 12$. Tính độ dài của véc-tơ $\vec{v} = \vec{GB} + \vec{GC}$.

- A. $|\vec{v}| = 2$. B. $|\vec{v}| = 2\sqrt{3}$. C. $|\vec{v}| = 8$. D. $|\vec{v}| = 4$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC .

$$\text{Ta có } |\vec{GB} + \vec{GC}| = |-\vec{GA}| = GA = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}BC\right) = \frac{BC}{3} = 4.$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 32. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $|\vec{AB} - \vec{DA}|$.

- A. $|\vec{AB} - \vec{DA}| = 0$. B. $|\vec{AB} - \vec{DA}| = a$. C. $|\vec{AB} - \vec{DA}| = a\sqrt{2}$. D. $|\vec{AB} - \vec{DA}| = 2a$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } |\vec{AB} - \vec{DA}| = |\vec{AB} + \vec{AD}| = |\vec{AC}| = AC = a\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 33. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , tâm O . Tính $|\vec{OB} + \vec{OC}|$.

- A. $|\vec{OB} + \vec{OC}| = a$. B. $|\vec{OB} + \vec{OC}| = a\sqrt{2}$.
C. $|\vec{OB} + \vec{OC}| = \frac{a}{2}$. D. $|\vec{OB} + \vec{OC}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Gọi } M \text{ là trung điểm của } BC. \text{ Ta có } |\vec{OB} + \vec{OC}| = |\vec{OM} + \vec{OM}| = |\vec{OM}| = OM = \frac{a}{2}.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 34. Cho tam giác ABC có M thỏa mãn điều kiện $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$. Xác định vị trí điểm M .

- A. M là điểm thứ tư của hình bình hành $ACBM$.
B. M là trung điểm của đoạn thẳng AB .
C. M trùng với C .
D. M là trọng tâm tam giác ABC .

Lời giải.

$$\text{Ta có } \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0} \text{ suy ra } M \text{ là trọng tâm tam giác } ABC.$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 35. Cho tam giác ABC . Tập hợp tất cả các điểm M thỏa mãn đẳng thức $|\vec{MB} - \vec{MC}| = |\vec{BM} - \vec{BA}|$ là

- A. đường thẳng AB . B. trung trực đoạn BC .
C. đường tròn tâm A , bán kính BC . D. đường thẳng qua A và song song với BC .

Lời giải.

$$\text{Ta có } |\vec{MB} - \vec{MC}| = |\vec{BM} - \vec{BA}| \Leftrightarrow |\vec{CB}| = |\vec{AM}| \Rightarrow AM = BC.$$

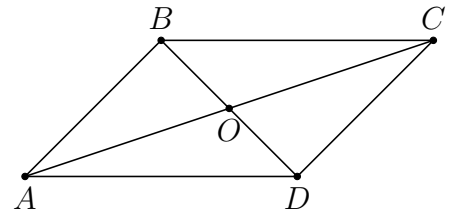
Do A, B, C cố định nên tập hợp điểm M là đường tròn tâm A , bán kính BC .

Chọn đáp án **C** □

Câu 36.

Cho hình bình hành $ABCD$. Tập hợp tất cả các điểm M thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD}$ là

- A. một đường tròn. B. một đường thẳng.
C. tập rỗng. D. một đoạn thẳng.



Lời giải.

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MA} \Leftrightarrow \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} \text{ (vô lí).}$$

$\Rightarrow$ Không có điểm M thỏa mãn.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 37. Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$. Tìm vị trí điểm M .

- A. M là trung điểm của AC .
B. M là trung điểm của AB .
C. M là trung điểm của BC .
D. M là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

Suy ra M là trung điểm AC .

Chọn đáp án **A**

□

Câu 38. Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $MABC$ là hình bình hành. B. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.
C. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM}$. D. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}.$$

$\Rightarrow MABC$ là hình bình hành.

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CB}.$$

Chọn đáp án **D**

□

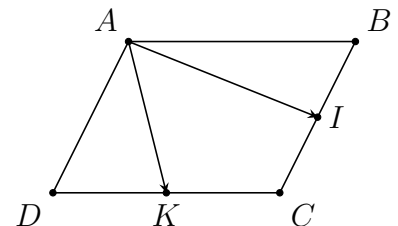
Câu 39. Cho $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BC và CD . Tính $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK}$.

- A. $\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. B. $3\overrightarrow{AC}$. C. $2\overrightarrow{AC}$. D. $\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}) + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK}) \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AD} \\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$



Chọn đáp án **D**

□

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (1; 2; -3)$ và $\vec{b} = (-2; 2; 0)$. Tọa độ của $\vec{a} - \vec{b}$ là

- A. $(3; 0; 3)$. B. $(3; 0; -3)$. C. $(-3; 0; 3)$. D. $(3; 4; -3)$.

Lời giải.

$$\vec{a} - \vec{b} = (1; 2; -3) - (-2; 2; 0) = (3; 0; -3).$$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 41. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB . Hỏi đẳng thức nào đúng?

- A. $2\vec{AI} + \vec{AB} = \vec{0}$. B. $\vec{IA} - \vec{IB} = \vec{0}$. C. $\vec{AI} - 2\vec{BI} = \vec{IB}$. D. $\vec{AI} - \vec{IB} = \vec{0}$.

Lời giải.

Ta có: $+\vec{AI} - \vec{IB} = \vec{AI} + \vec{BI} = \vec{0}$ nên D đúng
 $+\vec{2AI} + \vec{AB} = \vec{AB} + \vec{AB} = 2\vec{AB} \neq \vec{0}$ nên A sai
 $+\vec{IA} - \vec{IB} = \vec{BA} \neq \vec{0}$ nên B sai
 $+\vec{AI} - 2\vec{BI} = \vec{IB} + 2\vec{IB} = 3\vec{IB} \neq \vec{IB}$ nên C sai

Chọn đáp án (D)

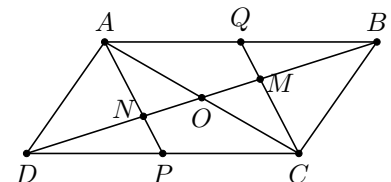
□

Câu 42. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O , $ABCD$ không là hình thoi. Trên đường chéo BD lấy 2 điểm M, N sao cho $BM = MN = ND$. Gọi P, Q là giao điểm của AN và CD ; CM và AB . Tìm mệnh đề sai.

- A. M là trọng tâm tam giác ABC .
 B. P và Q đối xứng qua O .
 C. M và N đối xứng qua O .
 D. M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Lời giải.

Vì nếu M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác suy ra $MA = MC$ nên tam giác MAC cân tại M suy ra MO vuông góc AC suy ra $ABCD$ là hình thoi (vô lý).



Chọn đáp án (D)

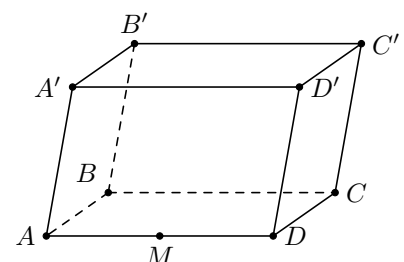
□

Câu 43. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của AD . Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $\vec{B'M} = \vec{B'B} + \vec{B'A'} + \vec{B'C'}$. B. $\vec{C'M} = \vec{C'C} + \vec{C'D'} + \frac{1}{2}\vec{C'B'}$.
 C. $\vec{B'B} + \vec{B'A'} + \vec{B'C'} = 2\vec{B'D}$. D. $\vec{C'M} = \vec{C'C} + \frac{1}{2}\vec{C'D'} + \frac{1}{2}\vec{C'B'}$.

Lời giải.

Ta có $\vec{C'A} = \vec{C'C} + \vec{C'D'} + \vec{C'B'}$.
 Mà $\vec{C'A} = \vec{C'M} + \vec{MA}$; $\vec{MA} = \frac{1}{2}\vec{C'B'}$.
 $\Rightarrow \vec{C'M} + \vec{MA} = \vec{C'C} + \vec{C'D'} + \vec{C'B'}$
 $\Rightarrow \vec{C'M} = \vec{C'C} + \vec{C'D'} + \frac{1}{2}\vec{C'B'}$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 44. Cho $\vec{a} = (3; -4)$, $\vec{b} = (-1; 2)$. Tìm tọa độ của $\vec{a} + \vec{b}$

- A. $(2; -2)$. B. $(-3; -8)$. C. $(4; -6)$. D. $(-4; 6)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a} + \vec{b} = (3 + (-1); -4 + 2) = (2; -2)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 45. Cho $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ là các véc-tơ tùy ý; h là số thực tùy ý. Có bao nhiêu mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

- (1) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$
 (2) $(h \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (h \cdot \vec{b})$
 (3) $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải.

(1) sai vì VT là véc-tơ cùng phương với $\vec{c}$, VP là véc-tơ cùng phương với $\vec{a}$ mà $\vec{c}$ và $\vec{a}$ chưa chắc cùng phương.

(2) đúng vì $(h \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (h \cdot \vec{b}) = h \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$.

(3) đúng vì $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b} = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 46. Cho O là tâm của hình bình hành $ABCD$. Hỏi véc-tơ $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{DO}$ bằng véc-tơ nào dưới đây?

- A. $\overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{BA}$. C. $\overrightarrow{BC}$. D. $\overrightarrow{DC}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 47. Cho tam giác ABC đều, cạnh bằng a . Khi đó $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ bằng

- A. $2a$. B. $a\sqrt{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. a .

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|^2 &= AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= a^2 + a^2 + 2AB \cdot AC \cos 60^\circ \\ &= 2a^2 + 2a^2 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 3a^2. \end{aligned}$$

Vậy $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 48. Cho hai điểm A và B phân biệt. Điều kiện cần và đủ để I là trung điểm của đoạn thẳng AB là

A. $IA = IB$.

B. $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$.

C. $\vec{AI} = \vec{BI}$.

D. $\vec{IA} = \vec{IB}$.

Lời giải.

Điều kiện cần và đủ để I là trung điểm của đoạn AB là $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$.

Chọn đáp án (B) ☐

Câu 49. Cho tam giác ABC và điểm M sao cho $\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} = \vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $ABCM$ là hình bình hành.

B. $ABMC$ là hình bình hành.

C. $BAMC$ là hình bình hành.

D. $AMBC$ là hình bình hành.

Lời giải.

$\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{BA} - \vec{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{MC} = \vec{BA}$. Suy ra $ABMC$ là hình bình hành.

Chọn đáp án (B) ☐

Câu 50. Trên mặt phẳng tọa độ $(O; \vec{i}, \vec{j})$, giá trị của $|4\vec{i} - 3\vec{j}| + |-4\vec{i} + 3\vec{j}|$ bằng

A. $2\sqrt{7}$.

B. 0.

C. 14.

D. 10.

Lời giải.

$$|4\vec{i} - 3\vec{j}|^2 = 16\vec{i}^2 - 24\vec{i}\vec{j} + 9\vec{j}^2 = 25 \Rightarrow |4\vec{i} - 3\vec{j}| = 5.$$

$$|-4\vec{i} + 3\vec{j}|^2 = 16\vec{i}^2 - 24\vec{i}\vec{j} + 9\vec{j}^2 = 25 \Rightarrow |-4\vec{i} + 3\vec{j}| = 5.$$

$$\text{Vậy } |4\vec{i} - 3\vec{j}| + |-4\vec{i} + 3\vec{j}| = 10.$$

Chọn đáp án (D) ☐

Câu 51. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng, B nằm giữa A và C sao cho $AB = 3a, AC = 4a$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $|\vec{AB} + \vec{CB}| = 2a$.

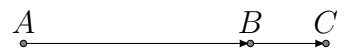
B. $|\vec{BC} + \vec{BA}| = 4a$.

C. $|\vec{AB} + \vec{AC}| = 7a$.

D. $|\vec{BC} + \vec{AB}| = 4a$.

Lời giải.

Dựa vào hình vẽ ta dễ nhận thấy $|\vec{BC} + \vec{BA}| = 2a$.



Chọn đáp án (B) ☐

Câu 52. Cho tam giác ABC là tam giác đều cạnh a . Khi đó $|\vec{AC} - \vec{BA}|$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{3a}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

D. $a\sqrt{3}$.

Lời giải.

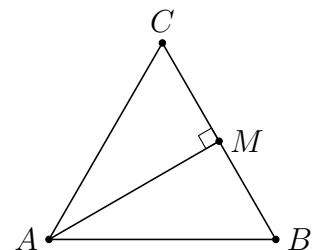
Gọi M là trung điểm của cạnh BC .

$$\text{Ta có } |\vec{AC} - \vec{BA}| = |\vec{AC} + \vec{AB}| = |2\vec{AM}| = 2AM.$$

$$AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Suy ra } |\vec{AC} - \vec{BA}| = 2AM = a\sqrt{3}.$$

Chọn đáp án (D) ☐



Câu 53. Cho 4 điểm bất kỳ A, B, C, O . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\vec{OA} = \vec{CA} - \vec{CO}$.

B. $\vec{AB} = \vec{OB} + \vec{OA}$.

C. $\vec{OA} = \vec{OB} - \vec{BA}$.

D. $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{BC}$.

Lời giải.

Theo quy tắc trừ, ta có $\vec{OA} = \vec{CA} - \vec{CO}$.

Chọn đáp án (A) ☐

Câu 54. Cho hình chữ nhật $ABCD$, gọi O là giao điểm của AC và BD , phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$.

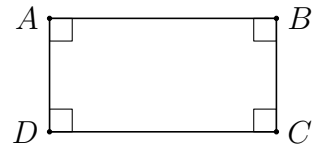
B. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AB}$.

C. $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}| = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ (vì $ABCD$ là hình chữ nhật).



Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 55. Cho hình bình hành $ABCD$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 56. Tổng $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR}$ bằng

A. $\overrightarrow{MP}$.

B. $\overrightarrow{MR}$.

C. $\overrightarrow{MN}$.

D. $\overrightarrow{PR}$.

Lời giải.

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RN} = \overrightarrow{MN}$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 57. Cho hình bình hành $ABCD$, mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

B. $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BD}$.

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

Ta có $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$ (quy tắc hình bình hành).

Vậy mệnh đề $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BD}$ là mệnh đề sai.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 58. Cho tam giác ABC vuông tại A và $AB = 3, AC = 4$. Véc-tơ $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$ có độ dài bằng

A. 0.

B. 15.

C. 5.

D. $\sqrt{13}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CB}| = CB = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 5.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 59. Cho ba điểm A, B, C bất kỳ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$.

B. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$.

C. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC}$.

D. $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

Theo quy tắc 3 điểm của véc-tơ thì $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 60. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng $2a$. Tính độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

A. $4a$.

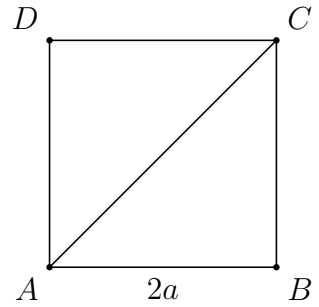
B. $2a$.

C. $2a\sqrt{2}$.

D. $a\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = 2a\sqrt{2}$.



Chọn đáp án **C** ☐

Câu 61. Cho ABC là tam giác đều cạnh bằng a . Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Đẳng thức nào dưới đây **sai**?

A. $|\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}| = 0$.

B. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{3}$.

C. $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = a$.

D. $|\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}| = a$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, suy ra $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA}$. Do đó $|\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}| = |\overrightarrow{GA}| = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án **D** ☐

Câu 62. Cho hình chữ nhật $ABCD$ thỏa mãn $AB = 2BC = 2a$. Khi đó $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$ bằng

A. $a\sqrt{5}$.

B. $a\sqrt{3}$.

C. $3a$.

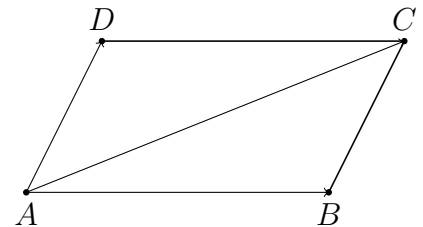
D. $2a$.

Lời giải.

Do $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Do đó, ta có

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = a\sqrt{5}.$$



Chọn đáp án **A** ☐

Câu 63. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC}$.

C. $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC}$.

D. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

Đáp án B sai, vì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$.

Chọn đáp án **B** ☐

Câu 64. Gọi B là trung điểm của đoạn thẳng AC . Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$.

B. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}$.

C. Hai véc tơ $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ cùng hướng.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.

Lời giải.

Do B là trung điểm của đoạn AC nên $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CB}$. Do đó $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$.

Chọn đáp án **A** ☐

Câu 65. Cho hai lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ có cùng điểm đặt tại O . Biết $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ đều có cường độ là 100 N, góc hợp bởi $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ bằng 120° . Cường độ lực tổng hợp của chúng là

A. 200 N.

B. $50\sqrt{3}$ N.

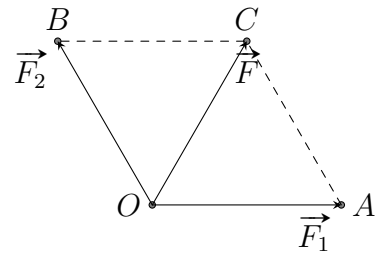
C. $100\sqrt{3}$ N.

D. 100 N.

Lời giải.

Giả sử $\vec{F}_1 = \vec{OA}$, $\vec{F}_2 = \vec{OB}$. Khi đó $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}$ với $OACB$ là hình bình hành.

Ta có $OA = OB$, $\widehat{AOB} = 120^\circ$ nên OAC là tam giác đều. Do đó cường độ lực tổng hợp $\vec{F}$ là 100 N.



Chọn đáp án **(D)**

□

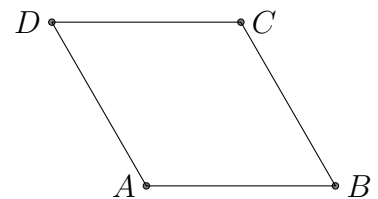
Câu 66. Cho hình bình hành $ABCD$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. $\vec{DA} + \vec{DC} = \vec{DB}$. B. $\vec{BA} + \vec{BC} = \vec{BD}$. C. $\vec{CB} + \vec{CD} = \vec{CA}$. D. $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$.

Lời giải.

Theo quy tắc hình bình hành ta có

- $\vec{DA} + \vec{DC} = \vec{DB}$ (đúng).
- $\vec{BA} + \vec{BC} = \vec{BD}$ (đúng).
- $\vec{CB} + \vec{CD} = \vec{CA}$ (đúng).
- $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC} \Rightarrow \vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$ (sai).



Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 67. Cho 4 điểm bất kì A, B, C, O . Đẳng thức nào sau đây luôn đúng?

- A. $\vec{OA} = \vec{OB} - \vec{BA}$. B. $\vec{OA} = \vec{CA} - \vec{CO}$. C. $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{BC}$. D. $\vec{AB} = \vec{OB} + \vec{OA}$.

Lời giải.

Áp dụng qui tắc hiệu hai véc-tơ, ta có $\vec{CA} - \vec{CO} = \vec{OA}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 68. Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn $\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AM}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. M là trọng tâm tam giác ABC . B. M là trung điểm của BC .
C. M trùng với B hoặc C . D. M trùng với A .

Lời giải.

Xét tam giác ABC , ta có $\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AM} \Leftrightarrow M$ là trung điểm của BC .

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 69. Tổng $\vec{MN} + \vec{PQ} + \vec{RN} + \vec{NP} + \vec{QR}$ bằng

- A. $\vec{MR}$. B. $\vec{MN}$. C. $\vec{MP}$. D. $\vec{MQ}$.

Lời giải.

Ta có $\vec{MN} + \vec{PQ} + \vec{RN} + \vec{NP} + \vec{QR} = \vec{MN} + \vec{NP} + \vec{PQ} + \vec{QR} + \vec{RN} = \vec{MN}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 70. Cho hai lực $\vec{F}_1 = \vec{MA}$, $\vec{F}_2 = \vec{MB}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M , cường độ hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ lần lượt là 300 N và 400 N. $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

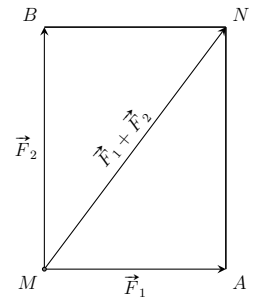
- A. 0 N. B. 700 N. C. 100 N. D. 500 N.

Lời giải.

Lực tổng hợp tác động vào vật $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \overrightarrow{MN}$.

Cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật

$$|\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = MN = \sqrt{MA^2 + MB^2} = 500 \text{ (N)}.$$



Chọn đáp án **(D)**



Câu 71. Cho tam giác đều ABC có cạnh a . Độ dài của tổng hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng bao nhiêu?

A. $2a$.

B. $a\sqrt{3}$.

C. a .

D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}| = a.$$

Chọn đáp án **(C)**



Câu 72. Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CB}$. Khi đó

A. M là trọng tâm của tam giác ABC .

B. M là trung điểm cạnh AC .

C. M là đỉnh của hình bình hành $ABMC$.

D. M là trung điểm cạnh AB .

Lời giải.

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

Khi đó M là trọng tâm của tam giác ABC .

Chọn đáp án **(A)**



Câu 73. Tổng của các vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC}$ là

A. $\vec{0}$.

B. $\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{DC}$.

D. $\overrightarrow{AD}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) + \overrightarrow{AC} = \vec{0} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}.$$

Chọn đáp án **(B)**



Câu 74. Cho hình bình hành $ABCD$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.

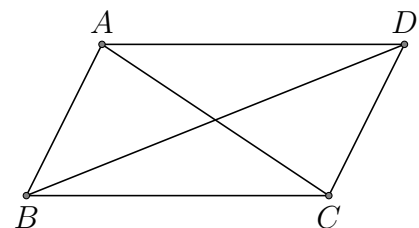
C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Từ hình vẽ, ta thấy vì $ABCD$ là hình bình hành nên

- $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$ là hai véc-tơ cùng độ dài nhưng khác hướng.
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{AD}$
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
- Theo quy tắc hình bình hành, ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.



Chọn đáp án **(D)**



Câu 75. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC, BC . Hỏi $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MP}$ bằng vectơ nào?

A. $\overrightarrow{MN}$.

B. $\overrightarrow{BA}$.

C. $\overrightarrow{BC}$.

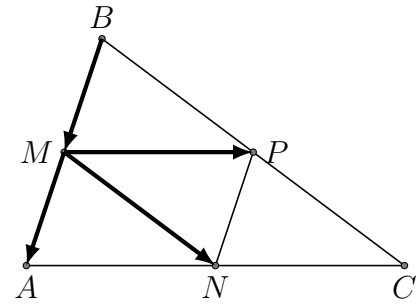
D. $\overrightarrow{AP}$.

Lời giải.Ta có $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MA}$, do đó $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MP}$.

Theo hình quy tắc hình bình hành, ta có

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MN}.$$

Vậy $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MN}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 76. Cho bốn điểm bất kỳ A, B, C, O . Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BA}$. B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$. C. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CO}$. D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

Ta có

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$.
- $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CO}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 77. Cho G là trọng tâm tam giác ABC và I là trung điểm cạnh BC . Hãy chọn đẳng thức đúng.

A. $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$. B. $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$. C. $\overrightarrow{GA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$. D. $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GI}$.

Lời giải.Vì I là trung điểm cạnh BC nên $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$.Chọn đáp án **A**

□

Câu 78. Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức **sai**?

A. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$. C. $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$. D. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

Ta có

- $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.
- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$.
- $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

Chọn đáp án **C**

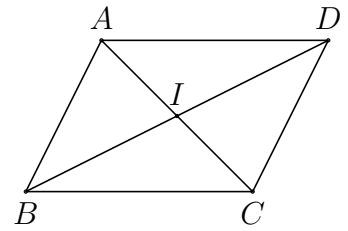
□

Câu 79. Cho hình bình hành $ABCD$, với giao điểm của hai đường chéo là I . Khi đó đẳng thức đúng là

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BI}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$. C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$. D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \vec{0}$.

Lời giải.

Ta có $AB = CD$ và $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ là hai véc-tơ ngược hướng nên $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$.
 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IB} \neq \overrightarrow{BI}$.
 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (tính chất hình bình hành).
 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} \neq \vec{0}$.



Chọn đáp án **C**

□

Câu 80. Cho tam giác ABC . Để điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ thì M phải thỏa mãn mệnh đề nào?

- A. M là điểm sao cho tứ giác $ABMC$ là hình bình hành.
- B. M là trọng tâm tam giác ABC .
- C. M là điểm sao cho tứ giác $BAMC$ là hình bình hành.
- D. M thuộc trung trực của AB .

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}$.

Suy ra M là đỉnh của hình bình hành $BAMC$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 81. Cho tam giác ABC cân tại A , cạnh $AB = 5$, $BC = 8$. Độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$ bằng

- A. 6.
- B. 8.
- C. 3.
- D. 10.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$

với D là đỉnh thứ 4 của hình bình hành $ABCD$.

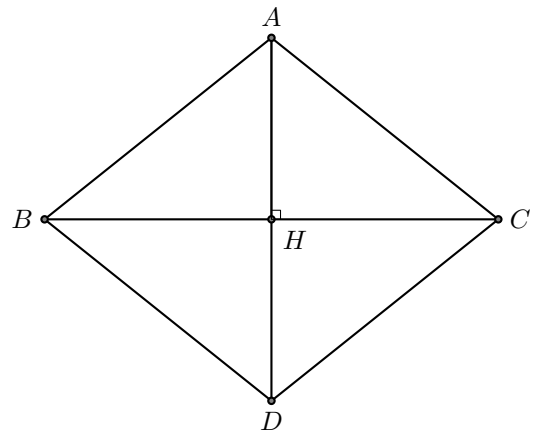
Mà $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = 2 \cdot |\overrightarrow{AH}|$

H là trung điểm của BC nên $BH = \frac{1}{2} \cdot BC = 4$.

Trong tam giác ABH vuông tại H có

$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

Suy ra $AD = 2 \cdot AH = 6$



Chọn đáp án **A**

□

Câu 82. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Khẳng định nào sau là đúng?

- A. $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}| = 0$.
- B. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}| = 2a$.
- C. $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}| = a\sqrt{2}$.
- D. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}| = 2a$.

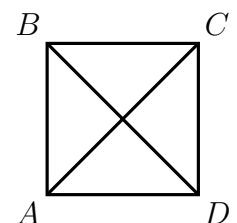
Lời giải.

Ta có $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}| = |\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}| = |\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{AC}| = AC$.

Do AC là đường chéo của hình vuông $ABCD$ cạnh a nên $AC = a\sqrt{2}$.

$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}| = |\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BD}| = a\sqrt{2}$ (đường chéo hình vuông cạnh a).

$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}| = |\vec{0}| = 0$ (vì $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ là hai véc-tơ đối của nhau).



Chọn đáp án **C**

□

Câu 83. Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$. C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \Rightarrow$ Đáp án C đúng.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 84. Hai véc-tơ có cùng độ dài và ngược hướng gọi là

- A. hai véc-tơ bằng nhau. B. hai véc-tơ đối nhau.
C. hai véc-tơ cùng hướng. D. hai véc-tơ không cùng phương.

Lời giải.

Hai véc-tơ cùng độ dài và ngược hướng là hai véc-tơ đối nhau.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 85. Cho 3 điểm A, B, C . Đẳng thức nào dưới đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$. B. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$. C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC}$. D. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 86. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Hãy tìm đẳng thức đúng.

- A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$. B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.
C. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$. D. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

Lời giải.

Ta có O là trung điểm của AC và BD . Suy ra

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \\ \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 87. Với ba điểm bất kì A, B, C thì bất đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$. B. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}$. C. $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$. D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}$.

Lời giải.

$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$ đúng theo quy tắc ba điểm trong phép cộng véc-tơ.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 88. Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Tìm mệnh đề **sai**?

- A. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM}$. B. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BC}$.
C. $MABC$ là hình bình hành. D. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Có $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BC}$ sai.

Chọn đáp án **B**

□

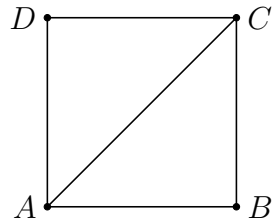
Câu 89. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Khi đó $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$ bằng

A. $2a$.B. a .C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.D. $a\sqrt{2}$.

Lời giải.

Theo quy tắc hình bình hành, ta có

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = a\sqrt{2}.$$



Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 90. Cho hình bình hành $ABCD$. Véc-tơ $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$ bằng véc-tơ nào dưới đây?

A. $\overrightarrow{DB}$.B. $\overrightarrow{BD}$.C. $\overrightarrow{AC}$.D. $\overrightarrow{CA}$.

Lời giải.

$$\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 91. Cho ba điểm M, N, P phân biệt. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PN}$.B. $\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MN}$.C. $\overrightarrow{NM} - \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{PM}$.D. $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{MP}$.

Lời giải.

Ta có

- $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PN}$.
- $\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{MN}$.
- $\overrightarrow{NM} - \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{PM}$.
- $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{PM}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 92. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O và G là trọng tâm của tam giác BCD . Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.B. $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$.C. $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GA}$.D. $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DG} = \vec{0}$.

Lời giải.

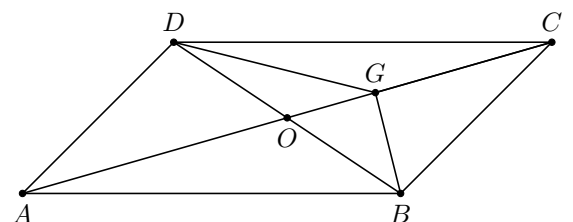
- Vì O là trung điểm của AC nên $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.
- Ta có $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$.
- G là trọng tâm của tam giác BCD nên

$$\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DG} = \vec{0}.$$

- Ta có $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{DG} \neq \overrightarrow{GA}$.

Chọn đáp án **(C)**

□



Câu 93. Cho tam giác đều ABC cạnh $2a$ có trọng tâm G và I là trung điểm cạnh BC . Tính $|\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{CG}|$?

- A. $a\sqrt{3}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

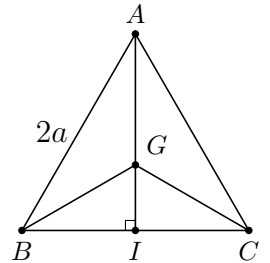
Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên

$$|\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{CG}| = |\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}| = |-\overrightarrow{GA}| = GA.$$

Ta tính được $GA = \frac{2}{3}AI = \frac{2}{3} \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $|\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{CG}| = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án **C**



Câu 94. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

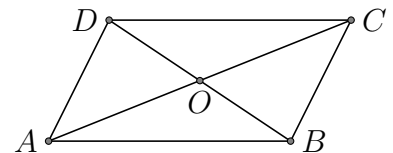
- A. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{DC}$. C. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BO}$. D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

Lời giải.

Ta có

- $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BC}$.
- $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
- $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BO}$.
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

Chọn đáp án **C**



Câu 95. Cho hình bình hành $ABCD$, mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$. C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$. D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Theo qui tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Chọn đáp án **D**

Câu 96. Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CB}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$. C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC}$. D. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$.

Mặt khác

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \neq \overrightarrow{CB}$.
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} \neq \overrightarrow{BC}$.
- $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \neq \overrightarrow{BC}$.

Chọn đáp án **A**

Câu 97. Cho tam giác ABC , trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{MC}$. Tìm hai số m và n sao cho $\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$.

- A. $m = -\frac{1}{3}$ và $n = -\frac{2}{3}$. B. $m = \frac{1}{3}$ và $n = \frac{2}{3}$.

C. $m = \frac{2}{3}$ và $n = -\frac{1}{3}$.

D. $m = -\frac{1}{3}$ và $n = \frac{2}{3}$.

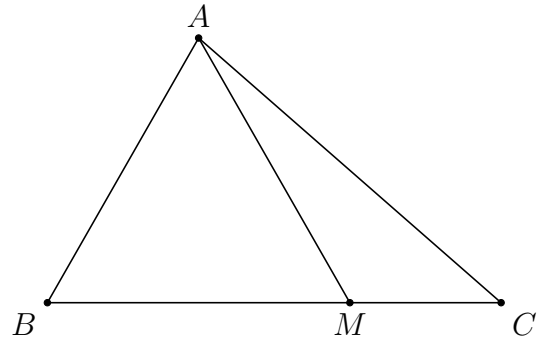
Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM} &= 2\overrightarrow{MC} \Rightarrow \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}) \\ &\Rightarrow 3\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Vậy $m = \frac{1}{3}, n = \frac{2}{3}$.

Chọn đáp án **(B)**



□

Câu 98. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, biết $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$.

A. 24.

B. 19.

C. $\sqrt{19}$.

D. 5.

Lời giải.

Ta có $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}) + |\vec{b}|^2 = 19$.

Do đó $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{19}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 99. Cho tam giác đều ABC có cạnh a , I là trung điểm của BC . Tính độ dài của $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AI}$.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{a\sqrt{13}}{4}$.

C. $\frac{a\sqrt{13}}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

Lấy điểm D sao cho $ABDI$ là hình bình hành.

Gọi K là giao điểm của AD và BI .

Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AK} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AI}| = 2 \cdot |\overrightarrow{AK}| = 2 \cdot AK$.

Áp dụng định lý Py-ta-go vào $\triangle AIK$ vuông tại I ta có

$$AK = \sqrt{AI^2 + KI^2} = \sqrt{AI^2 + \left(\frac{BC}{4}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2}$$

$$\Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{13}}{4}.$$

Vậy $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AI}| = \frac{a\sqrt{13}}{2}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 100. Cho véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$. Với điểm O bất kỳ, dựng véc-tơ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

Chọn mệnh đề đúng.

A. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$.

B. O là trung điểm đoạn AB .

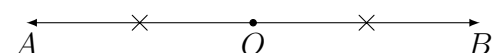
C. B là trung điểm đoạn OA .

D. A là trung điểm đoạn OB .

Lời giải.

Ta có $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BO}$.

Hay O là trung điểm của AB . (như hình vẽ)



Chọn đáp án (B) □

Câu 101. Cho vec-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai véc-tơ đối nhau. Với điểm O tùy ý, dựng $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Tìm mệnh đề đúng.

- A. $O \equiv B$. B. $A \equiv B$. C. $O \equiv A$. D. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $\vec{a} = -\vec{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow O \equiv B$.

Chọn đáp án (A) □

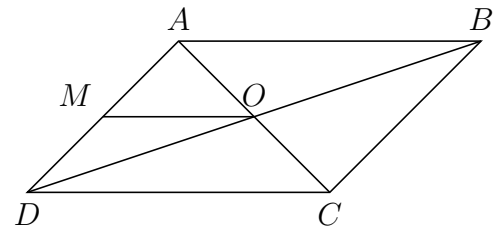
Câu 102. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Tìm điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$.

- A. M là trung điểm AB . B. M là trung điểm AD .
C. M là trung điểm OA . D. M là điểm tùy ý.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Vậy M là trung điểm của đoạn AD .



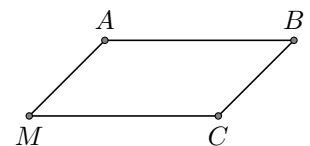
Chọn đáp án (B) □

Câu 103. Cho tam giác ABC và M là điểm sao cho $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ACMB$.
B. M đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABMC$.
C. M đỉnh thứ tư của hình bình hành $CAMB$.
D. M đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCM$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$, nên M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCM$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 104. Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) , cho $A(1; 3)$, $B(5; 1)$. Tìm tọa độ điểm I thỏa $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{AB}$.

- A. $I(-4; 2)$. B. $I(4; -2)$. C. $I(-4; -2)$. D. $I(4; 2)$.

Lời giải.

Gọi $I(x; y)$. Khi đó $\overrightarrow{OI} = (x; y)$, $\overrightarrow{AB} = (4; -2)$.

Theo đề bài ta có

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 105. Cho tam giác ABC , hãy xác định vị trí của điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

- A. M trùng C .

- B. M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $CBAM$.
 C. M trùng B .
 D. M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $CABM$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC}$.

Vậy tứ giác $CBAM$ là hình bình hành.

Chọn đáp án (B) □

Câu 106. Cho 4 điểm A, B, C, D . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{MA}$ là $N \equiv M$.
 B. Điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ là tứ giác $ABDC$ là hình bình hành.
 C. Điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ là $A \equiv B$.
 D. Điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ là hai véc-tơ đối nhau là $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

Lời giải.



Xét 4 điểm A, B, C, D thẳng hàng và $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ nhưng $ABDC$ không là hình bình hành.

Chọn đáp án (B) □

Câu 107. Cho tam giác ABC . M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- A. Ba điểm C, M, B thẳng hàng.
 B. AM là phân giác của góc A trong tam giác ABC .
 C. A, M , trọng tâm G của tam giác ABC thẳng hàng.
 D. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$ suy ra $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{MC}$. Do đó, tứ giác $MBAC$ là hình bình hành. Do đó, AM, BC cắt nhau tại trung điểm mỗi đường nên A, G, M thẳng hàng.

Chọn đáp án (C) □

Câu 108. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh a . Biết rằng tập hợp các điểm M thỏa mãn $2MA^2 + MB^2 + 2MC^2 + MD^2 = 9a^2$ là một đường tròn. Bán kính của đường tròn đó là

- A. $R = 2a$. B. $R = 3a$. C. $R = a$. D. $R = a\sqrt{2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 2MA^2 + MB^2 + 2MC^2 + MD^2 &= 9a^2 \\
 \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 + 2(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD})^2 &= 9a^2 \\
 \Leftrightarrow 6MO^2 + 2OA^2 + OB^2 + 2OC^2 + OD^2 + 2\overrightarrow{MO} \underbrace{(2\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD})}_{\vec{0}} &= 9a^2 \\
 \Leftrightarrow 6MO^2 + 3a^2 &= 9a^2 \Leftrightarrow MO = a.
 \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm O bán kính $R = a$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 109. Cho $\triangle ABC$. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . Hệ thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.
 B. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$.
 C. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$.
 D. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \vec{0} \\ \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}) = \vec{0} \\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} &= 2\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} &= 2\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} &= 2\overrightarrow{BA}\end{aligned}$$

Chọn đáp án **C**

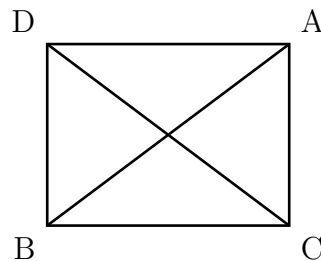
□

Câu 110. Cho tam giác ABC có $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}|$. Khi đó, tam giác ABC là

- A. tam giác vuông tại A .
 B. tam giác vuông tại B .
 C. tam giác vuông tại C .
 D. tam giác cân tại A .

Lời giải.

Đựng hình bình hành $ACBD$. Khi đó, $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA}$. Do đó, $CD = AB$. Mà $ABCD$ là hình bình hành nên suy ra $ABCD$ là hình chữ nhật. Vậy tam giác ABC vuông tại C .



Chọn đáp án **C**

□

Câu 111. Cho hình thang vuông $ABCD$, vuông tại A và D . Biết $AB = AD = 2$ cm, $CD = 4$ cm. Tính độ dài véc-tơ $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$.

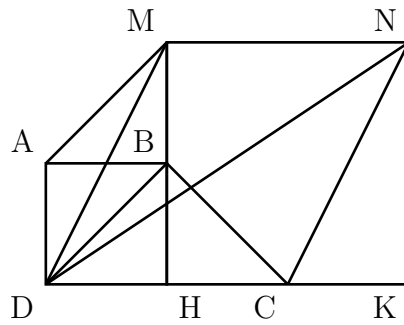
- A. $2\sqrt{13}$ cm.
 B. 0 cm.
 C. 4 cm.
 D. $2\sqrt{6}$ cm.

Lời giải.

Đựng hình bình hành $ADBM$. Ta có, $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DM}$. Do $BM \parallel DA$ nên $BM \perp DC$ tại H . Tứ giác $ADHB$ là hình vuông nên $BH = 2$. Ta tính được $MH = 4$.

Đựng hình bình hành $DMNC$, ta có $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DN}$. Gọi K là hình chiếu vuông góc của N lên DC . Ta chứng minh được $HMNK$ là hình vuông. Suy ra, $HK = NK = 4, DK = 6$.

Ta có $DN = \sqrt{DK^2 + KN^2} = 2\sqrt{13}$.



Chọn đáp án **A**

□

Câu 112. Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn bán kính bằng 4. Tính độ dài véc-tơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

A. 16.

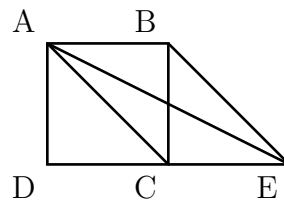
B. $8\sqrt{2}$.

C. $4\sqrt{10}$.

D. $8\sqrt{5}$.

Lời giải.

Dựng hình bình hành $ABEC$. Ta có $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AE}|$. Hình vuông có cạnh $4\sqrt{2}$ nên $AE = \sqrt{32 + 128} = 4\sqrt{10}$.



Chọn đáp án **C**

□

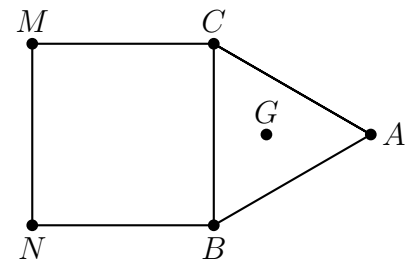
Câu 113. Cho tam giác ABC đều cạnh a , dựng hình vuông $BCMN$ như hình vẽ. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Tính theo a độ dài véc-tơ $\vec{u} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN}$.

A. $\frac{1}{2}\sqrt{24 + 2\sqrt{3}}a$.

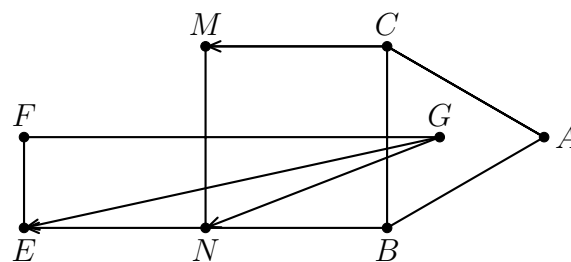
B. $\frac{1}{3}\sqrt{39 + 6\sqrt{3}}a$.

C. $\frac{1}{2}\sqrt{18 + 2\sqrt{3}}a$.

D. $\frac{1}{6}\sqrt{59 + 12\sqrt{3}}a$.



Lời giải.



Ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{GN} = \overrightarrow{NE} + \overrightarrow{GN} = \overrightarrow{GE}$
 $|\vec{u}| = |\overrightarrow{GE}| = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \left(2a + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2}$

Chọn đáp án **B**

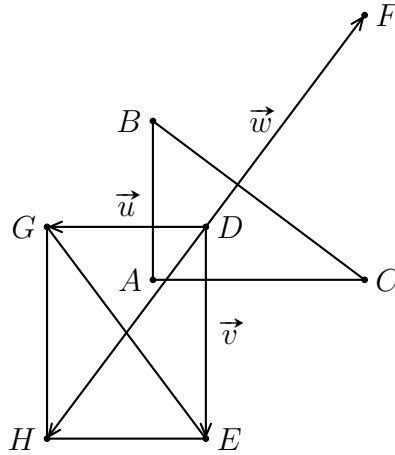
□

Câu 114. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3a$, $AC = 4a$. Gọi $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ theo thứ tự là các véc-tơ có giá vuông góc với các đường thẳng AB , AC , BC và $|\vec{u}| = AB$, $|\vec{v}| = AC$, $|\vec{w}| = BC$. Tính theo a độ dài của véc-tơ $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$.

A. 0.

B. $8a$.C. $9a$.D. $10a$.

Lời giải.

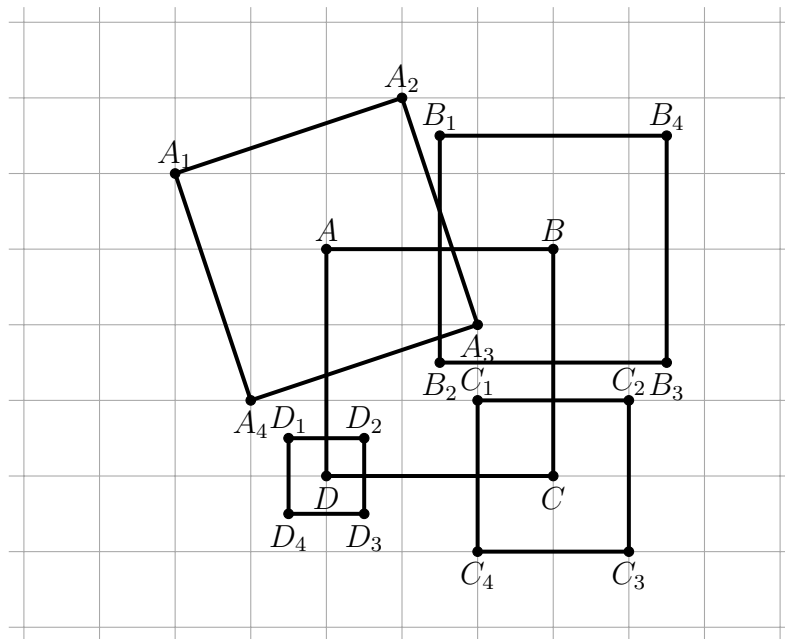


Gọi D là điểm thuộc miền trong tam giác ABC , dựng các véc-tơ $\overrightarrow{DG} = \vec{u}$, $\overrightarrow{DE} = \vec{v}$, $\overrightarrow{DF} = \vec{w}$, dựng hình chữ nhật $DGHE$ ta có $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{DH}$. Tam giác GDH bằng tam giác ABC cho nên $\widehat{GDH} = \widehat{ABC}$, mặt khác $\widehat{GDF} + \widehat{ABC} = 180^\circ$ cho nên $\widehat{GDF} + \widehat{GDH} = 180^\circ$, như vậy ba điểm H, D, F thẳng hàng. $|\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}| = |\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{FD}| = |\overrightarrow{FH}| = 10a$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 115. Cho hình vuông $ABCD$, dựng các hình vuông $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$, $C_1C_2C_3C_4$, $D_1D_2D_3D_4$ với A, B, C, D là tâm của các hình vuông như hình vẽ phía dưới.



Biết các hình vuông nhỏ có kích thước $1\text{cm} \times 1\text{cm}$. Tính độ dài của véc-tơ :

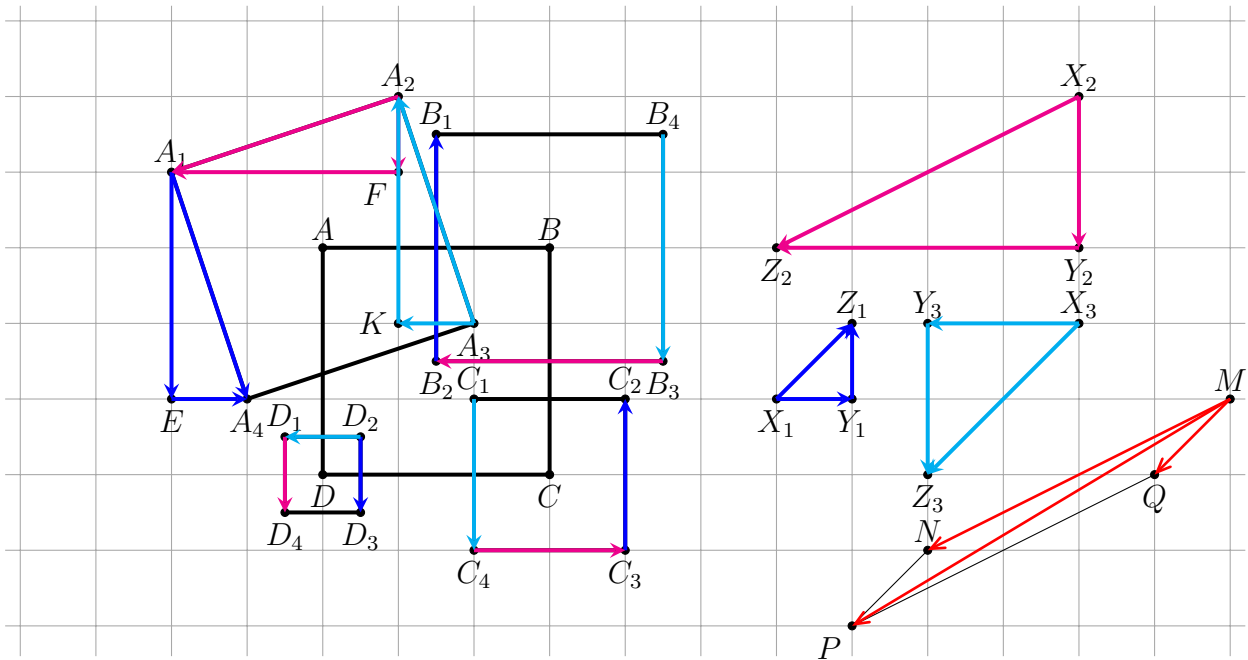
$$\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_2C_2} + \overrightarrow{C_3D_3} + \overrightarrow{D_4A_4} + \overrightarrow{A_2B_2} + \overrightarrow{B_3C_3} + \overrightarrow{C_4D_4} + \overrightarrow{D_1A_1} + \overrightarrow{A_3B_3} + \overrightarrow{B_4C_4} + \overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{D_2A_2}.$$

A. $\sqrt{10}$ cm.B. $\sqrt{13}$ cm.

C. 5 cm.

D. $\sqrt{34}$ cm.

Lời giải.



Ta có :

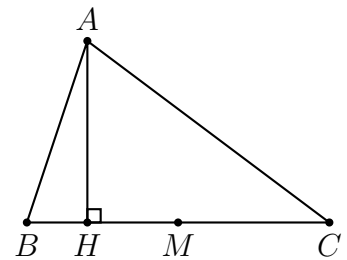
$$\begin{aligned}
 & \bullet \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_2C_2} + \overrightarrow{C_3D_3} + \overrightarrow{D_4A_4} = \overrightarrow{B_2B_1} + \overrightarrow{C_3C_2} + \overrightarrow{D_2D_3} + \overrightarrow{A_1E} + \overrightarrow{EA_4} = \overrightarrow{X_1Z_1} \\
 & \bullet \overrightarrow{A_2B_2} + \overrightarrow{B_3C_3} + \overrightarrow{C_4D_4} + \overrightarrow{D_1A_1} = \overrightarrow{B_3B_2} + \overrightarrow{C_4C_3} + \overrightarrow{D_1D_4} + \overrightarrow{A_2F} + \overrightarrow{FA_1} = \overrightarrow{X_2Z_2} \\
 & \bullet \overrightarrow{A_3B_3} + \overrightarrow{B_4C_4} + \overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{D_2A_2} = \overrightarrow{B_4B_3} + \overrightarrow{C_1C_4} + \overrightarrow{D_2D_1} + \overrightarrow{A_3K} + \overrightarrow{KA_2} = \overrightarrow{X_3Z_3} \\
 & \bullet |\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_2C_2} + \overrightarrow{C_3D_3} + \overrightarrow{D_4A_4} + \overrightarrow{A_2B_2} + \overrightarrow{B_3C_3} + \overrightarrow{C_4D_4} + \overrightarrow{D_1A_1} + \overrightarrow{A_3B_3} + \overrightarrow{B_4C_4} + \overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{D_2A_2}| = \\
 & |\overrightarrow{X_1Z_1} + \overrightarrow{X_2Z_2} + \overrightarrow{X_3Z_3}| = |\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MQ}| = |\overrightarrow{MP}| = \sqrt{34} \text{ cm}
 \end{aligned}$$

Chọn đáp án **D**

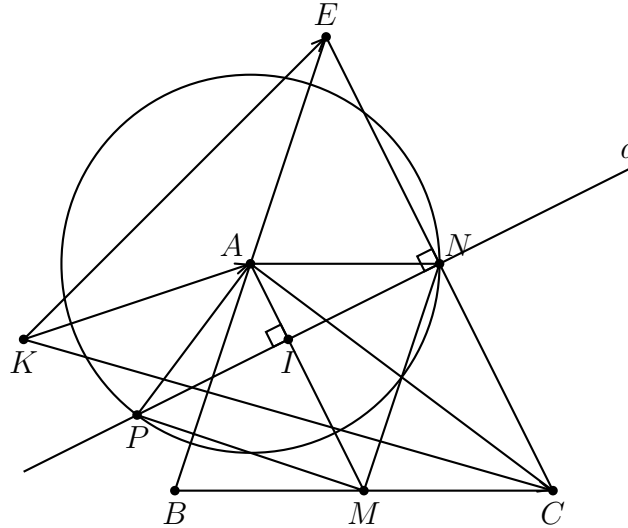
□

Câu 116. Cho tam giác ABC có H là chân đường cao kẻ từ A , $AH = 3 \text{ cm}$, $\cos \widehat{ACB} = \frac{3}{5}$, $\tan \widehat{ABC} = 3$, M là trung điểm của BC . Gọi K là điểm thỏa mãn $KA = \frac{5}{2} \text{ cm}$ và $|\overrightarrow{KA} - \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CK}|$. Tính độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{MK}$.

- A. 3 cm.
- B. $\sqrt{10} \text{ cm}$.
- C. $\sqrt{17} \text{ cm}$.
- D. 5 cm.



Lời giải.



Gọi E là điểm đối xứng với B qua A , ta có $|\overrightarrow{KA} - \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CK}| \Leftrightarrow KE = KC$ cho nên K thuộc đường thẳng a là trung trực của đoạn thẳng CE , mặt khác $KA = \frac{5}{2}$ cm suy ra K là giao điểm của a và đường tròn tâm A bán kính $KA = \frac{5}{2}$ cm. Điểm K cần tìm là N hoặc P . Ta có $MK = MP = AB = \sqrt{10}$ cm.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 117. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , d là đường thẳng qua A , song song với BD . Gọi M là điểm thuộc đường thẳng d sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}|$ nhỏ nhất. Tính theo a độ dài véc-tơ $\overrightarrow{MD}$.

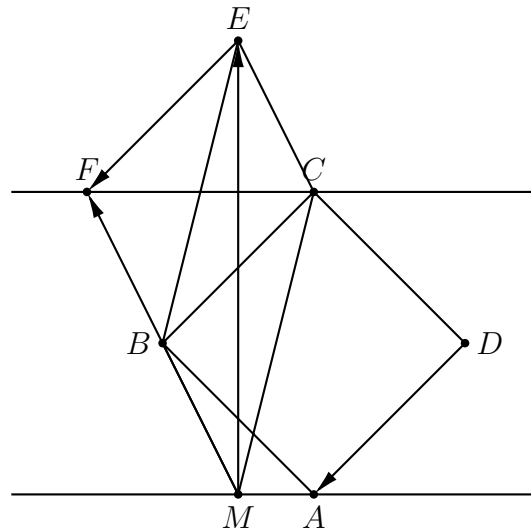
A. $a\sqrt{2}$.

B. $\frac{a\sqrt{10}}{2}$.

C. a .

D. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.



Dựng hình bình hành $MBEC$, $BCEF$, ta có $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}| = |\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{DA}| = |\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EF}| = |\overrightarrow{MF}|$. Khi M thay đổi trên d thì F thuộc đường thẳng cố định qua C song song với d , điểm M cần tìm là hình chiếu vuông góc của B trên d . $|\overrightarrow{MD}| = \frac{a\sqrt{10}}{2}$.

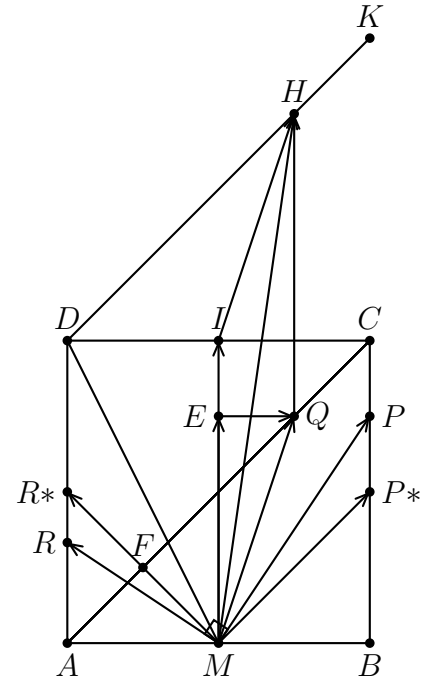
Chọn đáp án **(B)** □

Câu 118. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh 1 m. Gọi M là trung điểm của AB , P, Q, R theo thứ tự là các điểm thay đổi thuộc các cạnh BC, CA, AD sao cho $\widehat{PMR}$ vuông. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MR}|$

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ m. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ m. C. 1 m. D. $\frac{5}{4}$ m.

Lời giải.

Đặt $|\overrightarrow{AR}| = x$, $|\overrightarrow{BP}| = y$, $|\overrightarrow{ME}| = z$, $|\overrightarrow{EQ}| = t$, tam giác AMR đồng dạng tam giác BPM cho nên $xy = \frac{1}{4}$, $x + y \geq 2\sqrt{xy} = 1$ (Dấu bằng xảy ra khi $x = y$ hay P, R là trung điểm của BC, DA).
Ta có $|\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MR}|^2 = (x + y + z)^2 + t^2 \geq (1 + z)^2 + t^2 = |\overrightarrow{MH}|$.
Khi $P \equiv P^*$, $R \equiv R^*$, Q thay đổi trên AC , H sẽ thay đổi trên đoạn thẳng DK sao cho tam giác DCK vuông cân tại C . Góc $\widehat{MDH} \approx 108^\circ$ cho nên $MH \geq MD = \frac{\sqrt{5}}{2}$ m.



Chọn đáp án **A**

□

Câu 119. Gọi G là trọng tâm tam giác vuông ABC với cạnh huyền $BC = 12$. Tổng hai véc-tơ $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$ có độ dài bằng bao nhiêu?

- A. 2. B. 4. C. 8. D. $2\sqrt{3}$.

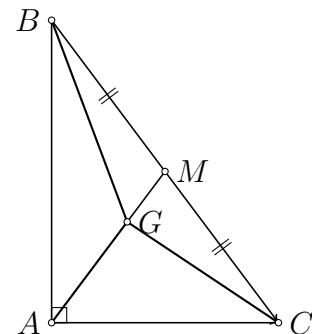
Lời giải.

Trên đường thẳng BN , lấy điểm E sao cho $\overrightarrow{NE} = \overrightarrow{CM}$.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên ta có

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA}.$$

Suy ra, $|\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}| = |\overrightarrow{GA}| = \frac{2}{3}AM = 4$.



Chọn đáp án **B**

□

Câu 120. Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy $AB = a$, $CD = 2a$. Gọi M, N là trung điểm của AD, BC . Khi đó $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MN}|$ bằng

- A. $\frac{a}{2}$. B. $3a$. C. a . D. $2a$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{NC}$. (1)

Qua A , dựng véc-tơ $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{NC}$. Suy ra I nằm trên đường thẳng MN và tứ giác $ABNI$ là hình bình hành.

Khi đó, từ (1) suy ra $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{MI}$. (2)

Vì M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AD và BC nên MN là đường trung bình của hình thang $ABCD$. Suy ra, $MN = \frac{3a}{2}$ và $MI = \frac{a}{2}$

Từ (1) và (2), suy ra $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{MI}| = \frac{a}{2}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 121. Cho hình thang $ABCD$ có AB song song với CD . Biết $AB = 2a$, $CD = a$ và O là trung điểm của AD . Khi đó

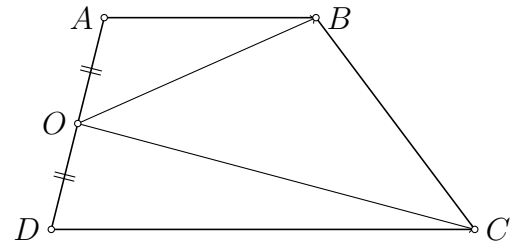
- A. $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = \frac{3a}{2}$. B. $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = a$. C. $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = 2a$. D. $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = 3a$.

Lời giải.

Ta có

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}.$$

Vì $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$ là hai véc-tơ cùng hướng nên ta có $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{DC}| = 3a$.



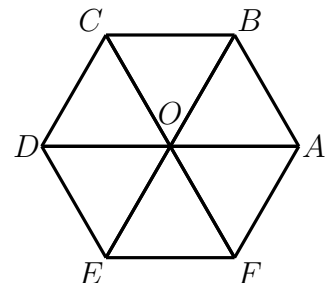
Chọn đáp án **D**

□

Câu 122.

Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Véc-tơ $\vec{v} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}$ bằng véc-tơ nào dưới đây?

- A. $\overrightarrow{DA}$.
B. $\overrightarrow{CF}$.
C. $\overrightarrow{BE}$.
D. $\vec{0}$.

**Lời giải.**

$$\vec{v} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{BE}.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 123. Cho năm điểm A, B, C, D, E . Véc-tơ $\vec{v} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CB}$ bằng véc-tơ nào dưới đây?

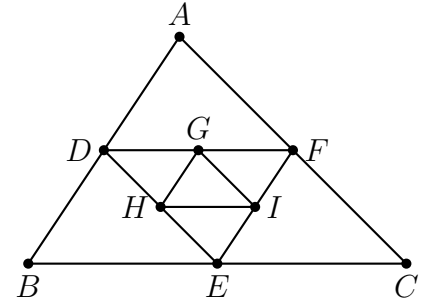
- A. $\overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{AB}$. C. $\overrightarrow{DB}$. D. $\overrightarrow{AD}$.

Lời giải.

Ta có: $\vec{v} = \vec{AC} + \vec{DE} - \vec{DC} - \vec{CE} + \vec{CB} = \vec{AC} + \vec{CB} + \vec{DE} - \vec{DC} - \vec{CE} = \vec{AB} + \vec{CE} - \vec{CE} = \vec{AB}$.
 Chọn đáp án (B) □

Câu 124. Cho tam giác ABC , gọi D, E, F, G, H, I theo thứ tự là trung điểm các cạnh AB, BC, CA, DF, DE, EF . Véc-tơ $\vec{u} = \vec{BE} - \vec{GH} - \vec{AI} + \vec{FE}$ bằng véc-tơ nào sau đây?

- A. $\vec{DA}$.
- B. $\vec{FC}$.
- C. $\vec{CE}$.
- D. $\vec{AB}$.



Lời giải.

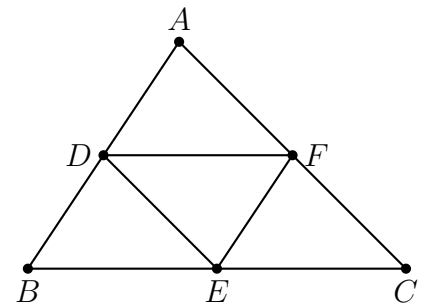
$\vec{u} = \vec{BE} - \vec{GH} - \vec{AI} + \vec{FE} = (\vec{BE} + \vec{FE}) - (\vec{GH} + \vec{AI}) = (\vec{BE} + \vec{FE}) - (\vec{IE} + \vec{AI}) = \vec{DE} - \vec{AE} = \vec{DA}$.
 Chọn đáp án (A) □

Câu 125. Cho tam giác ABC . Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . Hệ thức nào sau đây đúng?

- A. $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{BC}$.
- B. $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \vec{AF} + \vec{CE} + \vec{BC}$.
- C. $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \vec{AE} + \vec{BF} + \vec{CD}$.
- D. $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \vec{BA} + \vec{BC} + \vec{AC}$.

Lời giải.

Vì $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \vec{AD} + \vec{DF} + \vec{FA} = \vec{AA} = \vec{0}$, và
 $\vec{AE} + \vec{BF} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{AF} + \vec{BD} + \vec{BE} + \vec{CE} + \vec{CF} = \vec{0}$ nên
 $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \vec{AE} + \vec{BF} + \vec{CD}$.



Chọn đáp án (C) □

Câu 126. Khẳng định nào sau đây **sai**

- A. Với ba điểm bất kỳ I, J, K ta có $\vec{IJ} + \vec{JK} = \vec{IK}$.
- B. Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\vec{CB} + \vec{CD} = \vec{CA}$.
- C. Nếu $\vec{OA} = \vec{OB}$ thì O là trung điểm của AB .
- D. Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.

Lời giải.

Nếu $\vec{OA} = \vec{OB}$ thì A trùng với B .

Chọn đáp án (C) □

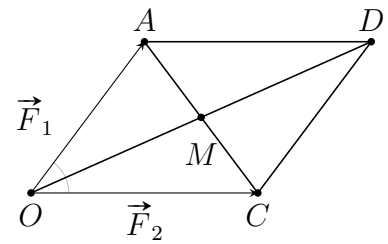
Câu 127. Cho hai lực $F_1 = F_2 = 100N$, có điểm đặt tại O và tạo với nhau góc 60° . Cường độ lực tổng hợp của hai lực ấy bằng bao nhiêu?

- A. $100\sqrt{3}$ N.
- B. $50\sqrt{3}$ N.
- C. 100 N.
- D. 200 N.

Lời giải.

Để thấy tam giác OAC đều nên $OD = 2OM = 2 \cdot OA \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 100\sqrt{3}$.

Ta có $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = |\vec{OD}| = OD = 100\sqrt{3} \text{ N}$.



Chọn đáp án **A**

□

Câu 128. Cho ba điểm bất kỳ I, J, K . Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- A. $\vec{IJ} + \vec{JK} = \vec{IK}$.
- B. Nếu I là trung điểm của JK thì $\vec{IJ}$ là véc-tơ đối của $\vec{IK}$.
- C. $\vec{JK} = \vec{IK} = \vec{IJ}$.
- D. $|\vec{KJ}| - |\vec{KI}| = |\vec{IJ}|$ khi K ở trên tia đối của IJ .

Lời giải.

Với ba điểm không thẳng hàng I, J, K , đẳng thức $\vec{JK} = \vec{IK} = \vec{IJ}$ không xảy ra.

Chọn đáp án **C**

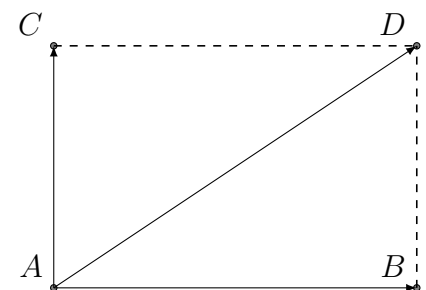
□

Câu 129. An chèo thuyền qua một dòng sông về hướng Đông với vận tốc 7,2 km/h. Dòng nước chảy về hướng Bắc với vận tốc 3,2 km/h. Tính gần đúng vận tốc của thuyền.

- A. 7,9 km/h.
- B. 10,4 km/h.
- C. 4,0 km/h.
- D. 5,2 km/h.

Lời giải.

Giả sử véc-tơ vận tốc chèo thuyền là $\vec{AB}$, véc-tơ vận tốc dòng nước là $\vec{AC}$. Khi đó vận tốc của thuyền là độ lớn của véc-tơ $\vec{AB} + \vec{AC}$. Mà $|\vec{AB} + \vec{AC}| = \sqrt{AB^2 + AC^2} \approx 7,9$.



Chọn đáp án **A**

□

Câu 130. (1.0 điểm)

Đề cương ôn tập của môn Công dân lớp 11 gồm có 9 câu hỏi tự luận. Đề thi học kỳ gồm 3 câu tự luận trong 9 câu đó.

- a) Tính số cách chọn đề thi.
- b) Một em học sinh chỉ ôn 5 câu trong đề cương. Tính xác suất để có ít nhất 2 câu hỏi của đề thi nằm trong số 5 câu hỏi mà học sinh đó đã ôn.

Lời giải.

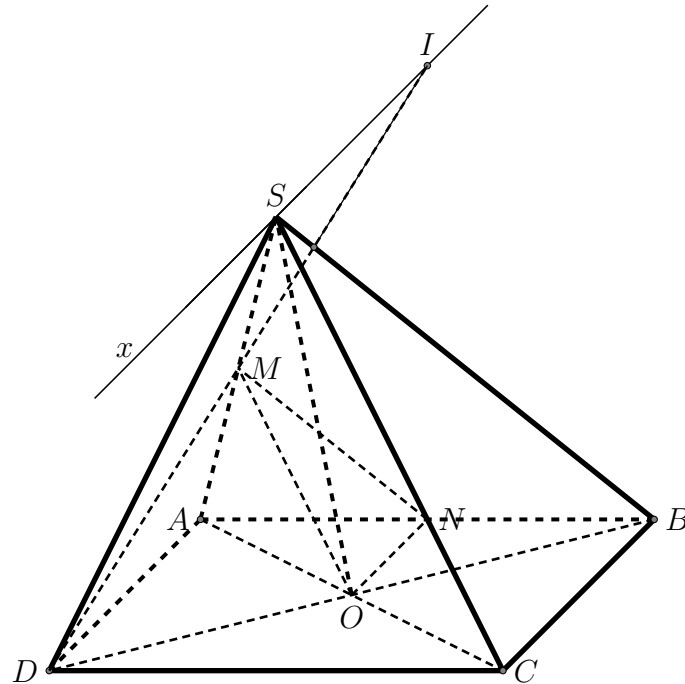
- a) Chọn 3 câu tự luận từ 9 câu tự luận có $C_9^3 = 84$ cách.
- b) Gọi A là biến cố có ít nhất 2 câu hỏi của đề thi nằm trong số 5 câu hỏi của đề cương mà em học sinh đó đã ôn.
Số cách chọn là: $n(A) = C_5^2 \cdot C_4^1 + C_5^3 = 50$ cách. Vậy $P(A) = \frac{50}{84} = \frac{25}{42}$.

□

Câu 131. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm cạnh SA, AB

- Tìm giao tuyến của $mp(SAC)$ và (SBD)
- Chứng minh $(OMN) \parallel (SBC)$
- Tìm giao điểm của DM và (SBC)

Lời giải.



- Dễ thấy S là điểm chung của hai mặt phẳng.
Gọi $O = AC \cap BD$. Khi đó, O là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng.
Vậy giao tuyến cần tìm là đường thẳng SO
- * $OM \parallel SC, OM \not\subset (SBC) \Rightarrow OM \parallel (SBC)$
* $ON \parallel BC, ON \not\subset (SBC) \Rightarrow ON \parallel (SBC)$
Mà $OM \cap ON = O$ nên $(OMN) \parallel (SBC)$.
- Ta có, $DM \subset (SAD)$ mà $(SAD) \cap (SBC) = Sx \parallel AD \parallel BC$
Trong mặt phẳng (SAD) có $DM \cap Sx = I$
Vậy I là giao điểm của DM và (SBC)

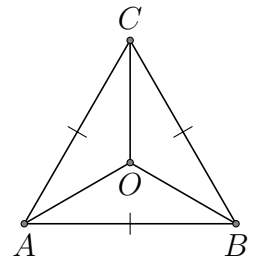
□

Câu 132. Cho tam giác ABC là tam giác đều, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. Mệnh đề nào là đúng trong các mệnh đề sau?

- A. $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}$. B. $\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{OB}$. C. $\vec{OA} = \vec{OB} + \vec{OC}$. D. $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{CO}$.

Lời giải.

Vì tam giác ABC đều nên O là trọng tâm của tam giác ABC suy ra $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CO}$.



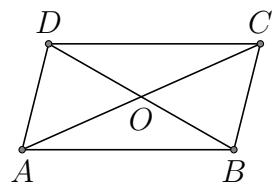
Chọn đáp án **(D)** □

Câu 133. Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo. Khi đó

- A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO}$. B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AD}$.
C. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$. D. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{DO} - \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \\ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \vec{0} = \vec{0} \text{ luôn đúng.} \end{aligned}$$



Chọn đáp án **(A)** □

Câu 134. Cho hình bình hành $ABCD$. O là điểm bất kỳ trên đường chéo AC . Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.
C. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$. D. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

Lời giải.

Với điểm O bất kỳ, ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$, luôn đúng vì $ABCD$ là hình bình hành.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 135. Cho tứ giác $ABCD$. Xét các khẳng định sau

- (I): $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$ (III): $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$
(II): $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA}$ (IV): $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}$

Tìm số khẳng định đúng.

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.

Lời giải.

Ta có:

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$. Vậy (I) đúng.
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{CA}$. Vậy (II) sai.
- $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB}$, luôn đúng. Vậy (III) đúng.
- $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB}$, vô lí. Vậy (IV) sai.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 136. Cho $ABCD$ là hình bình hành. O là giao điểm hai đường chéo. Xét các khẳng định sau

$$(I): \vec{CO} - \vec{OB} = \vec{BA}$$

$$(II): \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{DB}$$

$$(III): \vec{DA} - \vec{DB} = \vec{OD} - \vec{OC}$$

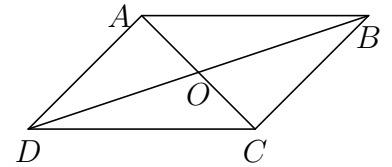
$$(IV): \vec{DA} - \vec{DB} + \vec{DC} = \vec{0}$$

Các khẳng định đúng là

- A. Chỉ (I). B. (I) và (III). C. (II) và (III). D. (I), (III) và (IV).

Lời giải.

- $\vec{CO} - \vec{OB} = \vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$. Vậy (I) đúng.
- $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} \neq \vec{DB}$. Vậy (II) sai.
- $\vec{DA} - \vec{DB} = \vec{BA} = \vec{CD} = \vec{OD} - \vec{OC}$. Vậy (III) đúng.
- $\vec{DA} - \vec{DB} + \vec{DC} = \vec{BA} + \vec{DC} = \vec{0}$. Vậy (IV) đúng.



Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 137. Cho bốn điểm A, B, C, D . Tìm khẳng định đúng.

- A. $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AC} + \vec{BD}$. B. $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{DB} + \vec{DC}$.
C. $\vec{AB} - \vec{CD} = \vec{AC} - \vec{BD}$. D. $\vec{AB} = \vec{CD} + \vec{DA} + \vec{BA}$.

Lời giải.

Ta có: $\vec{AB} - \vec{CD} = \vec{AC} - \vec{BD} \Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AC} + \vec{CD} \Leftrightarrow \vec{AD} = \vec{AD}$, luôn đúng.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 138. Cho tam giác ABC . Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau

$$(I) \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{AC} = \vec{0}; \quad (II) \vec{KB} + \vec{JC} = \vec{AI}; \quad (III) \vec{AK} + \vec{BI} + \vec{CJ} = \vec{0}.$$

- A. Chỉ (I). B. (II) và (III). C. Chỉ (II). D. (I) và (III).

Lời giải.

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{AC} = \vec{AC} + \vec{AC} = 2\vec{AC} \neq \vec{0}.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 139. Cho hình bình hành $ABCD$, M là một điểm tùy ý. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\vec{MA} + \vec{MC} = \vec{MC} + \vec{MD}$. B. $\vec{MB} + \vec{MC} = \vec{MD} + \vec{MA}$.
C. $\vec{MC} + \vec{CB} = \vec{MD} + \vec{DA}$. D. $\vec{MA} + \vec{MC} = \vec{MB} + \vec{MD}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \vec{MA} + \vec{MC} = \vec{MB} + \vec{BA} + \vec{MD} + \vec{DC} = \vec{MB} + \vec{MD} + \vec{BA} + \vec{DC} = \vec{MB} + \vec{MD}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 140. Cho tam giác ABC , I là trung điểm của BC . Xét các mệnh đề sau

$$(I) \vec{AB} = \vec{AI} + \vec{IB}; \quad (II) \vec{AI} = \vec{AB} + \vec{AC}; \quad (III) \vec{AC} = \vec{BI} + \vec{AI}.$$

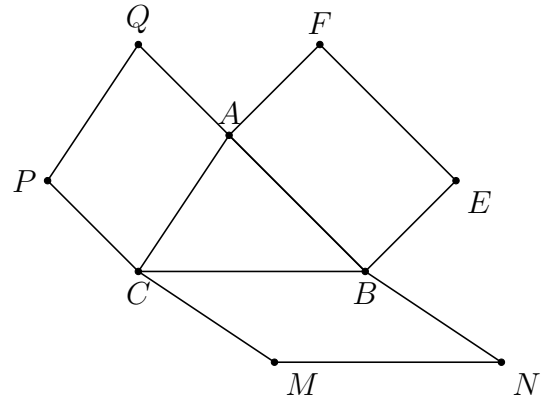
Mệnh đề đúng là

- A. Chỉ (I). B. (I) và (III). C. Chỉ (III). D. (II) và (III).

Lời giải.

- Ta có mệnh đề (I) là mệnh đề đúng, thật vậy

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NE} + \overrightarrow{FQ} &= \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AQ} \\ &= \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{AQ} \\ &= \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CP} \\ &= \overrightarrow{MP}.\end{aligned}$$



- Mệnh đề (II) là mệnh đề đúng, thật vậy

$$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{MN}.$$

- Mệnh đề (III) là mệnh đề sai, thật vậy

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CN} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BN} \\ &= \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BN} \\ &= \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{MC}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án **(D)**

□

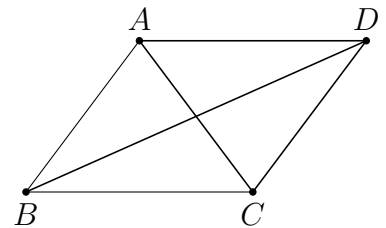
Câu 144. Cho hình bình hành $ABCD$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$.
C. $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$. D. $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

Vậy mệnh đề $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$ là mệnh đề đúng.



Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 145. Cho sáu điểm A, B, C, D, E, F phân biệt. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{FA} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{BF} = \vec{0}$.
C. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$. D. $\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CF}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{FC} \\ &= \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{CF} + (\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FB} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{CF}\end{aligned}$$

Vậy mệnh đề $\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CF}$ là mệnh đề sai.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 146. Cho bốn điểm A, B, C, D . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$.

C. $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BD}$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

Ta có

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$.
- $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD}$.
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$.

Xét mệnh đề còn lại: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC}$. Vì A, B, C, D tùy ý nên mệnh đề trên sai.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 147. Cho bốn điểm A, B, C, D tùy ý. Kết quả nào dưới đây đúng?

A. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}$.

B. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$.

C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}$.

D. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB}$ (đúng).

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 148. Cho bốn điểm bất kỳ A, B, C, D . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB}$ (đúng).

Chọn đáp án **(C)**

□

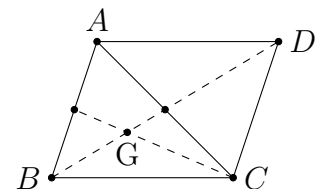
Câu 149. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{BD}$.

B. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{DB}$.

C. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{CD}$.



Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{BD}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 150. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}|$.

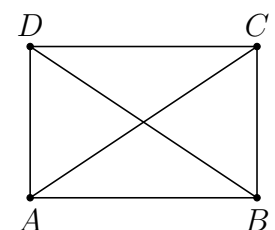
B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD}$.

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$.

D. $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA}$. Do đó mệnh đề $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$ là mệnh đề sai.



Chọn đáp án **(C)**

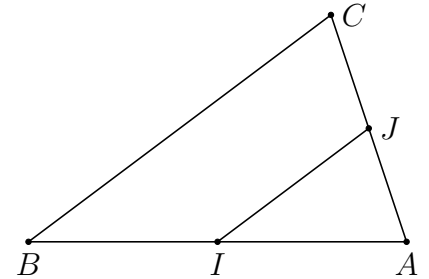
□

Câu 151. Cho tam giác ABC có I, J lần lượt là trung điểm của AB, AC . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{IJ}$. B. $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. C. $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{JC}$. D. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BI}$.

Lời giải.

Ta có IJ là đường trung bình của tam giác ABC nên $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.



Chọn đáp án **B** □

Câu 152. Cho tam giác ABC . Tồn tại điểm O sao cho $OA = OB = OC$ và $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$. Tam giác ABC có tính chất gì?

- A. Tam giác ABC vuông cân tại A . B. Tam giác ABC vuông tại B .
C. Tam giác ABC là tam giác đều. D. Tam giác ABC vuông cân tại C .

Lời giải.

Vì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ nên O là trọng tâm tam giác ABC . Hơn nữa, $OA = OB = OC$ nên O lại là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Do đó, ABC là tam giác đều.

Chọn đáp án **C** □

Câu 153. Cho véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và một điểm C . Có bao nhiêu điểm D thỏa mãn $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \vec{0}$?

- A. 1. B. 2. C. 0. D. vô số.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$. Vậy có duy nhất một điểm D thỏa mãn đẳng thức trên là đỉnh thứ 4 của hình bình hành $ABDC$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 154. Cho tam giác ABC và điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Khi đó điểm M là

- A. Đỉnh thứ tư của hình bình hành $ACMB$. B. Đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABMC$.
C. Đỉnh thứ tư của hình bình hành $CAMB$. D. Đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCM$.

Lời giải.

Vì $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BA}$ nên điểm M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCM$.

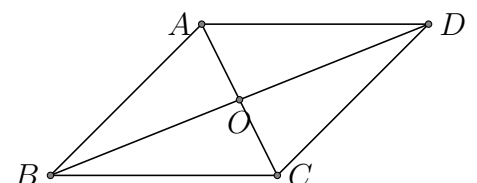
Chọn đáp án **D** □

Câu 155. Cho hình bình hành $ABCD$, O là giao điểm của hai đường chéo. Khi đó tổng $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ bằng

- A. $\vec{0}$. B. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$. C. $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD}$. D. $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB}$.

Lời giải.

Vì O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD nên O là trung điểm của mỗi đường AC, BD . Do đó, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$. Khi đó, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.



Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 156. Cho tam giác ABC , trung tuyến AM . Trên cạnh AC lấy điểm E và F sao cho $AE = EF = FC$. BE cắt AM tại N . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$.

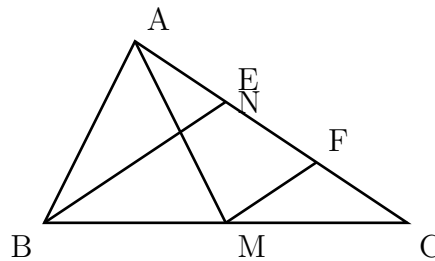
B. $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NM} = \vec{0}$.

C. $\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NE} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{NE} + \overrightarrow{NF} = \overrightarrow{EF}$.

Lời giải.

Ta có $MF \parallel BE$ theo tính chất đường trung bình, suy ra $NE \parallel MF$. Do đó N là trung điểm AM nên $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NM} = \vec{0}$.



Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 157. Cho tam giác ABC và điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M là trung điểm của BC .

B. M là trung điểm của AB .

C. M là trung điểm của AC .

D. $ABMC$ là hình bình hành.

Lời giải.

Vì $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CA}$ nên tứ giác $ABMC$ là hình bình hành.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 158. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(-2; 5)$, $B(2; 2)$, $C(10; -5)$. Tìm điểm $E(m; 1)$ sao cho tứ giác $ABCE$ là hình thang có một đáy là CE .

A. $E(-2; 1)$.

B. $E(0; 1)$.

C. $E(2; 1)$.

D. $E(-1; 1)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BA} = (-4; 3)$, $\overrightarrow{BC} = (8; -7) \Rightarrow \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ không cùng phương nên A, B, C không thẳng hàng; và $\overrightarrow{CE} = (m - 10; 6)$.

Để $ABCE$ là hình thang có một đáy là CE thì $\overrightarrow{CE}$ cùng chiều với $\overrightarrow{BA}$

$$\Rightarrow \frac{m - 10}{-4} = \frac{6}{3} > 0 \Leftrightarrow m = 2.$$

Vậy $E(2; 1)$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 159. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Nếu $\vec{a}$ là véc-tơ đối của $\vec{b}$ thì $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

B. Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng thì $\vec{b}$ là véc-tơ đối của $\vec{a}$.

C. Nếu $\vec{b}$ là véc-tơ đối của $\vec{a}$ thì $\vec{b} = -\vec{a}$.

D. Nếu $\vec{a}$ là véc-tơ đối của $\vec{b}$ thì $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$.

Lời giải.

Ta có mệnh đề “Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng thì $\vec{b}$ là véc-tơ đối của $\vec{a}$ ” là mệnh đề sai.

Chọn đáp án **(B)**

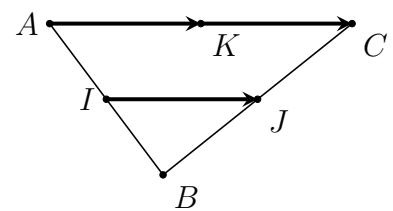
□

Câu 160. Cho tam giác ABC có I, J, K lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA . Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $\vec{JK}, \vec{BI}, \vec{IA}$ là ba véc-tơ bằng nhau.
- B. Véc-tơ đối của $\vec{IK}$ là $\vec{CJ}$ và $\vec{JB}$.
- C. Trong ba véc-tơ $\vec{IJ}, \vec{AK}, \vec{KC}$ có ít nhất hai véc-tơ đối nhau.
- D. $\vec{IA} + \vec{KJ} = \vec{0}$.

Lời giải.

Ta có $\vec{AK} = \vec{KC} = \vec{IJ}$ nên mệnh đề “Trong ba véc-tơ $\vec{IJ}, \vec{AK}, \vec{KC}$ có ít nhất hai véc-tơ đối nhau” là mệnh đề sai.



Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 161. Cho hình bình hành $ABCD$ có I là giao điểm của hai đường chéo. Tìm khẳng định sai.

- A. $\vec{AB} + \vec{BD} = \vec{BC}$.
- B. $\vec{AD} + \vec{AB} = \vec{AI} + \vec{IC}$.
- C. $\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID} = \vec{0}$.
- D. $|\vec{AB} + \vec{AD}| = |\vec{BD}|$.

Lời giải.

Với hình bình hành $ABCD$ có $AC \neq BD$ thì $|\vec{AB} + \vec{AD}| = |\vec{AC}| \neq |\vec{BD}|$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 162. Cho hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$ sao cho $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$. Khẳng định nào sau đây đúng?

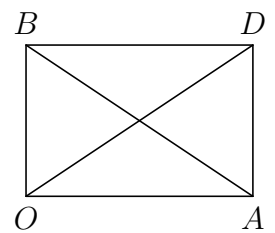
- A. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.
- B. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.
- C. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có giá vuông góc với nhau.
- D. Góc giữa các giá của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 60° .

Lời giải.

Trong mặt phẳng dựng $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$. Gọi D là đỉnh của hình bình hành $OADB$.

Khi đó, $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{OD}| = OD$ và $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{BA}| = BA$.

Vì $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ nên hình bình hành $OADB$ có hai đường chéo OD và BA bằng nhau. Suy ra $OADB$ là hình chữ nhật, tức là $\vec{OA} \perp \vec{OB}$, hay $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có giá vuông góc với nhau.

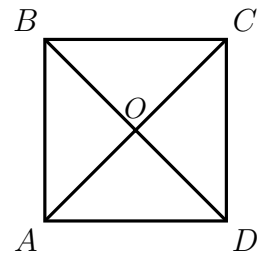


Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 163.

Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a tâm O . Tính theo a độ dài của véc-tơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{BC}$.



- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$. C. $a\sqrt{2}$. D. a .

Lời giải.

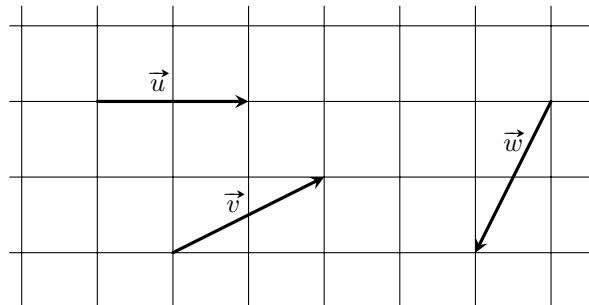
Ta có $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$.

Suy ra $|\vec{u}| = |\overrightarrow{OB}| = OB = \frac{\sqrt{2}}{2}AB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án **(A)**

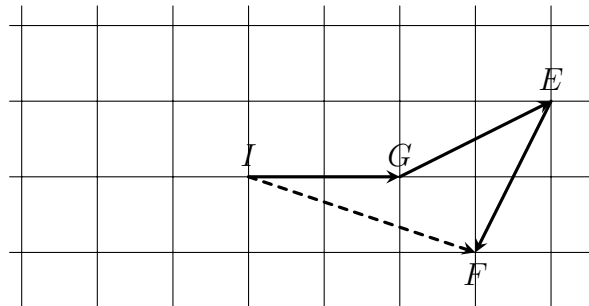
□

Câu 164. Cho ba véc-tơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ và $\vec{w}$ như hình vẽ. Biết mỗi ô vuông có kích thước $1\text{cm} \times 1\text{cm}$, tính độ dài của véc-tơ $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.



- A. $\sqrt{5}$ cm. B. $\sqrt{10}$ cm. C. $\sqrt{13}$ cm. D. $\sqrt{17}$ cm.

Lời giải.



Đặt $\overrightarrow{IG} = \vec{u}$, $\overrightarrow{GE} = \vec{v}$, $\overrightarrow{EF} = \vec{w}$ như hình vẽ.

Khi đó, $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \overrightarrow{IF}$. Suy ra $|\vec{a}| = IF = \sqrt{10}$ cm.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 165. Cho tam giác ABC vuông tại B có $AB = 3a$, $BC = 4a$. Gọi M là điểm thỏa mãn biểu thức $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$, N là trung điểm của AC . Tính theo a độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{MN}$.

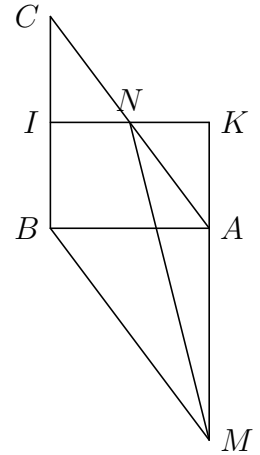
- A. $\frac{a\sqrt{109}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{205}}{2}$. C. $\frac{3\sqrt{17}a}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{73}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BC}$. Suy ra điểm M là đỉnh của hình bình hành $BCAM$.

Gọi I là trung điểm của BC , K là giao điểm của IN và AM . Khi đó,

$$|\overrightarrow{MN}| = MN = \sqrt{MK^2 + KN^2} = \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}BC\right)^2} = \frac{3\sqrt{17}a}{2}.$$



Chọn đáp án **C**

□

Câu 166. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Khi đó $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}|$ bằng

A. $2a$.

B. $a\sqrt{2}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = a\sqrt{2}$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 167. Cho hình bình hành $ABCD$ có $DA=2$ cm, $AB=4$ cm và đường chéo $BD=5$ cm. Tính $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA}|$.

A. 3 cm.

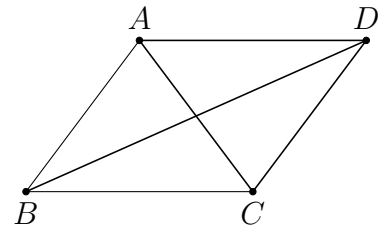
B. 4 cm.

C. 5 cm.

D. 6 cm.

Lời giải.

$|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA}| = |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BD}| = BD = 5$ cm.



Chọn đáp án **C**

□

Câu 168. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Khi đó $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}|$ bằng

A. 0.

B. a .

C. $a\sqrt{2}$.

D. $2a$.

Lời giải.

$|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = a\sqrt{2}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 169. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

B. $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

C. $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

D. $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.

Lời giải.

Tổng hai véc-tơ cùng hướng là một véc-tơ cùng hướng với véc-tơ đã cho và có độ dài bằng tổng hai độ dài của hai véc-tơ cho trước.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 170. Cho tam giác ABC vuông cân tại C và có $AB = \sqrt{2}$. Tính độ dài của $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

A. $\sqrt{5}$.

B. $2\sqrt{5}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. $2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Do tam giác ABC vuông cân tại C nên $CA = CB = 1$.

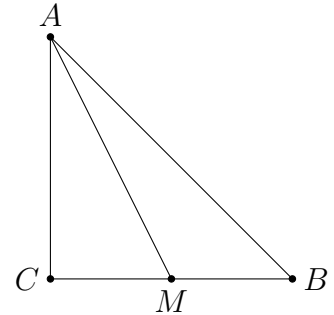
Gọi M là trung điểm BC , ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$.

Do đó $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2|\overrightarrow{AM}| = 2AM$.

Xét tam giác AMC vuông tại C ta có

$$CA^2 + CM^2 = AM^2 \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2AM = \sqrt{5}$.



Chọn đáp án **A**

□

Câu 171. Cho $\triangle ABC$ có $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}|$. Khi đó

A. $\triangle ABC$ là tam giác đều.

B. $\triangle ABC$ vuông tại A .

C. $\triangle ABC$ vuông tại C .

D. $\triangle ABC$ vuông tại B .

Lời giải.

Gọi D là điểm sao cho $ABDC$ là hình bình hành. Khi đó, $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$.

Từ giả thiết suy ra hình bình hành $ABDC$ có $BD = AC$. Do đó $ABDC$ là hình chữ nhật, nên $\triangle ABC$ vuông tại B .

Chọn đáp án **D**

□

Câu 172. Cho hình thang $ABCD$ với hai cạnh đáy là $AB = 2a$ và $CD = 6a$. Khi đó giá trị $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}|$ bằng bao nhiêu?

A. $8a$.

B. $4a$.

C. $-4a$.

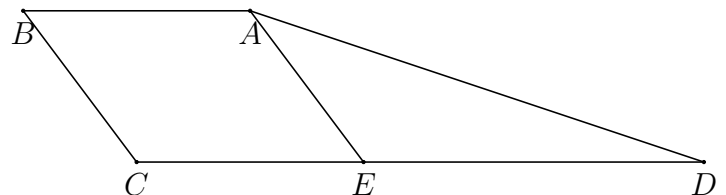
D. $2a$.

Lời giải.

Gọi E là điểm thuộc cạnh CD sao cho tứ giác

$ABCE$ là hình bình hành. Khi đó, Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BE}$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{DE}| = 4a.$$



Chọn đáp án **B**

□

Câu 173. Cho ba lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$, $\vec{F}_3 = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ đều bằng 60 N và tam giác MAB vuông tại M . Tìm cường độ lực $\vec{F}_3$.

A. 84,58 N.

B. 84,86 N.

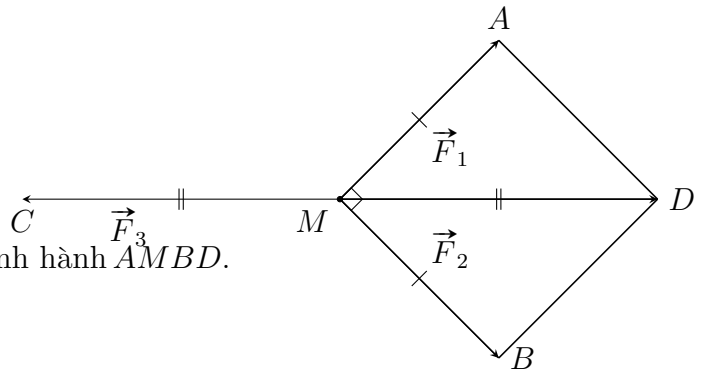
C. 84,85 N.

D. 120 N.

Lời giải.

Để vật đứng yên thì

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \vec{MD} + \vec{MC} &= \vec{0}. \\ \Rightarrow MD = MC, \quad D &\text{ là đỉnh thứ tư của hình bình hành } AMBD.\end{aligned}$$



Do $MA = MB = 60$ và $\widehat{AMB} = 90^\circ$, suy ra $AMBD$ là hình vuông, suy ra $MD = 60\sqrt{2}$.
Vậy cường độ lực $\vec{F}_3$ bằng $60\sqrt{2} \approx 84,85$ N.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 174. Cho tam giác đều ABC có cạnh là $2a$, G là trọng tâm tam giác. Khi đó, $|\vec{AB} - \vec{GC}|$ là

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{2a}{3}$.

Lời giải.

Do G là trọng tâm của tam giác ABC nên

$$\begin{aligned}\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} &= \vec{0} \Leftrightarrow \vec{GA} + \vec{GB} = -\vec{GC} \\ \Rightarrow |\vec{AB} - \vec{GC}| &= |\vec{AB} + \vec{GA} + \vec{GB}| = 2|\vec{GB}| = 2GB = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{2} = \frac{4a\sqrt{3}}{3}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 175. Cho tam giác ABC đều cạnh a , có AH là đường trung tuyến. Tính $|\vec{AC} + \vec{AH}|$.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $2a$. C. $\frac{a\sqrt{13}}{2}$. D. $a\sqrt{3}$.

Lời giải.

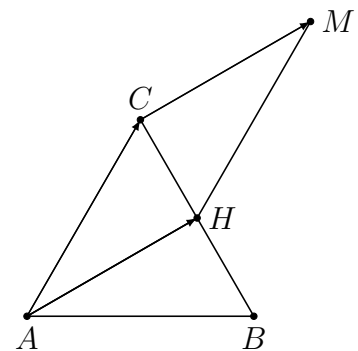
Dựng $\vec{CM} = \vec{AH} \Rightarrow AHMC$ là hình bình hành

$$\Rightarrow \vec{AC} + \vec{AH} = \vec{AM} \Rightarrow |\vec{AC} + \vec{AH}| = AM.$$

Gọi K đối xứng với A qua $BC \Rightarrow \triangle AKM$ vuông tại K .

$$AK = 2AH = a\sqrt{3}; \quad KM = CH = \frac{a}{2}.$$

$$AM = \sqrt{AK^2 + KM^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$



Chọn đáp án **C**

□

Câu 176. Cho tam giác ABC , biết $|\vec{AB} + \vec{AC}| = |\vec{AB} - \vec{AC}|$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Tam giác ABC vuông tại A . B. Tam giác ABC vuông tại B .
C. Tam giác ABC vuông tại C . D. Tam giác ABC cân tại A .

Lời giải.

Gọi M là trung điểm đoạn BC .

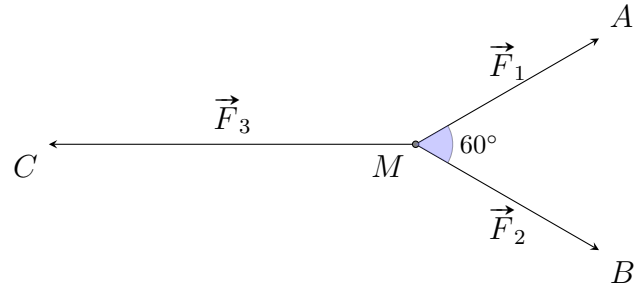
$$\text{Khi đó, } |\vec{AB} + \vec{AC}| = |\vec{AB} - \vec{AC}| \Leftrightarrow |2\vec{AM}| = |\vec{CB}| \Leftrightarrow 2AM = BC \Leftrightarrow AM = \frac{BC}{2}.$$

Vậy tam giác ABC vuông tại A theo tính chất: đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền.

Chọn đáp án **A** □

Câu 177.

Cho ba lực $\vec{F}_1 = \vec{MA}$, $\vec{F}_2 = \vec{MB}$, $\vec{F}_3 = \vec{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết ba cường độ của $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ đều bằng 25 N và góc $\widehat{AMB} = 60^\circ$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó cường độ lực của $\vec{F}_3$ là



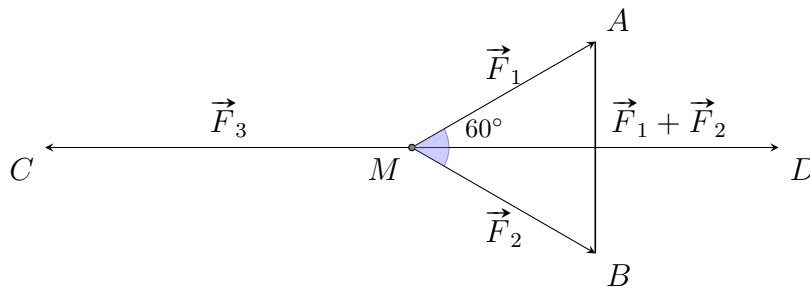
A. $25\sqrt{3}$ N.

B. $50\sqrt{3}$ N.

C. $50\sqrt{2}$ N.

D. $100\sqrt{3}$ N.

Lời giải.



Xét $\vec{MD} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Do $\widehat{AMB} = 60^\circ$ nên $\triangle MAB$ đều, suy ra

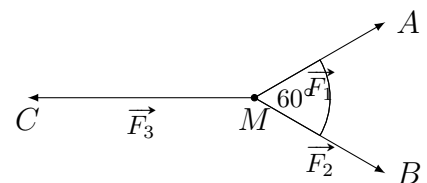
$$|\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = MD = 2 \cdot \frac{MA\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3} \text{ N.}$$

Để vật đứng yên thì $|\vec{F}_3| = |\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = 25\sqrt{3} \text{ N.}$

Chọn đáp án **A** □

Câu 178.

Cho ba lực $\vec{F}_1 = \vec{MA}$, $\vec{F}_2 = \vec{MB}$, $\vec{F}_3 = \vec{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ của $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ đều bằng 25 N và góc $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Khi đó cường độ lực của $\vec{F}_3$ là



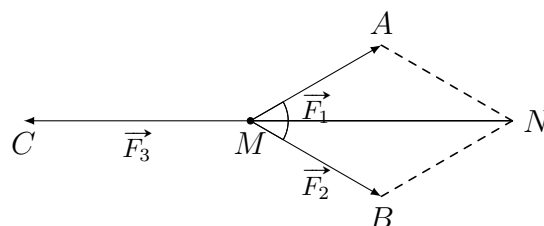
A. $25\sqrt{3} \text{ N.}$

B. $50\sqrt{3} \text{ N.}$

C. $50\sqrt{2} \text{ N.}$

D. $100\sqrt{3} \text{ N.}$

Lời giải.



Vật đứng yên nên ba lực đã cho cân bằng. Ta được $\vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$.

Dựng hình bình hành $AMBN$. Ta có $-\vec{F}_1 - \vec{F}_2 = -\vec{MA} - \vec{MB} = -\vec{MN}$.

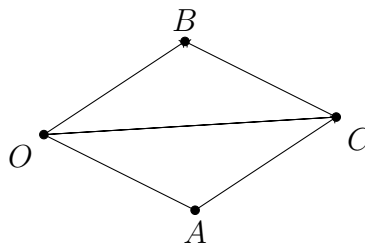
Suy ra $|\vec{F}_3| = |-\vec{MN}| = MN = \frac{2\sqrt{3}MA}{2} = 25\sqrt{3}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 179. Có hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ cùng tác động vào một vật đứng tại điểm O , biết hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ đều có cường độ là 50 (N) và chúng hợp với nhau một góc 60° . Hỏi vật đó phải chịu một lực tổng hợp có cường độ bằng bao nhiêu?

- A. 100 (N). B. $50\sqrt{3}$ (N). C. $100\sqrt{3}$ (N). D. $50\sqrt{2}$ (N).

Lời giải.



Giả sử $\vec{F}_1 = \vec{OA}, \vec{F}_2 = \vec{OB}$.

Theo quy tắc hình bình hành, suy ra $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{OC}$, như hình vẽ.

Ta có $\widehat{AOB} = 60^\circ, OA = OB = 50$, nên tam giác OAB đều, suy ra $OC = 50\sqrt{3}$.

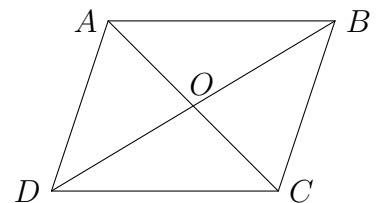
Vậy $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = |\vec{OC}| = 50\sqrt{3}$ (N).

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 180.

Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O . Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A. $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$. B. $\vec{BA} + \vec{BD} = \vec{BC}$.
C. $\vec{DA} = \vec{CD}$. D. $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$.



Lời giải.

Mệnh đề " $\vec{DA} = \vec{CD}$ " là mệnh đề sai.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 181. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC} + \vec{OD}$. B. $|\vec{AB} + \vec{AD}| = |\vec{BD}|$.
C. $\vec{CD} + \vec{DB} = \vec{BC}$. D. $\vec{BD} + \vec{AC} = \vec{AD} + \vec{BC}$.

Lời giải.

Đẳng thức " $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC} + \vec{OD}$ " sai. Đúng phải là $\vec{OA} + \vec{OB} = -(\vec{OC} + \vec{OD})$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 182. Cho $\triangle ABC$ bất kì. Đẳng thức nào dưới đây đúng?

- A. $\vec{AB} = \vec{CB} - \vec{CA}$. B. $\vec{BC} = \vec{AB} - \vec{AC}$. C. $\vec{AC} - \vec{CB} = \vec{BA}$. D. $\vec{BC} = \vec{AB} + \vec{AC}$.

Lời giải.

Đẳng thức " $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$ " là đúng.

Chọn đáp án (A) □

Câu 183. Cho hình bình hành $ABCD$. Tính $\vec{v} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$.

- A. $\vec{v} = \overrightarrow{DB}$. B. $\vec{v} = \overrightarrow{BD}$. C. $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. D. $\vec{v} = \overrightarrow{CA}$.

Lời giải.

$\vec{v} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD}$, theo quy tắc hình bình hành.

Chọn đáp án (B) □

Câu 184. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$. C. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AD}$. D. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

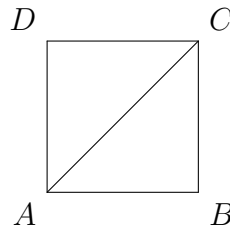
Gọi M là trung điểm AB , ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{DA}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 185. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $2a$. Khi đó $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$ bằng.

- A. $4a$. B. $a\sqrt{2}$. C. $2a$. D. $2a\sqrt{2}$.

Lời giải.



Ta có $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = 2a\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 186. Cho tam giác đều ABC cạnh a . Chọn khẳng định đúng.

- A. $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}| = a\sqrt{3}$. B. $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
C. $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}| = a$. D. $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}| = 0$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm BC . Khi đó $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$.

Vì tam giác ABC đều $\Rightarrow AM \perp BC \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}| = |2\overrightarrow{AM}| = a\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (A) □

ĐÁP ÁN

1. B	2. D	3. B	4. B	5. C	6. B	7. B	8. A	9. B	10. C
11. A	12. D	13. B	14. C	15. B	16. A	17. C	18. A	19. C	20. D
21. D	22. D	23. A	24. C	25. A	26. A	27. A	28. C	29. B	30. D
31. D	32. C	33. A	34. D	35. C	36. C	37. A	38. D	39. D	40. B
41. D	42. D	43. B	44. A	45. C	46. C	47. B	48. B	49. B	50. D
51. B	52. D	53. A	54. B	55. C	56. C	57. B	58. C	59. A	60. C
61. D	62. A	63. B	64. A	65. D	66. D	67. B	68. B	69. B	70. D
71. C	72. A	73. B	74. D	75. A	76. C	77. A	78. C	79. C	80. C
81. A	82. C	83. C	84. B	85. D	86. D	87. C	88. B	89. D	90. B
91. D	92. C	93. C	94. C	95. D	96. A	97. B	98. C	99. C	100. B
101. A	102. B	103. D	104. B	105. B	106. B	107. C	108. C	109. C	110. C
111. A	112. C	113. B	114. D	115. D	116. B	117. B	118. A	119. B	120. A
121. D	122. C	123. B	124. A	125. C	126. C	127. A	128. C	129. A	132. D
133. A	134. C	135. C	136. D	137. C	138. A	139. D	140. B	141. B	142. D
143. D	144. A	145. D	146. A	147. C	148. C	149. A	150. C	151. B	152. C
153. A	154. D	155. A	156. B	157. D	158. C	159. B	160. C	161. D	162. C
163. A	164. B	165. C	166. B	167. C	168. C	169. C	170. A	171. D	172. B
173. C	174. C	175. C	176. A	177. A	178. A	179. B	180. C	181. A	182. A
183. B	184. C	185. D	186. A						

§3 TÍCH CỦA MỘT VECTO VỚI MỘT SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa. Cho số $k \neq 0$ và $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của véc-tơ $\vec{a}$ với số k là một véc-tơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

- $k\vec{a}$ cùng phương $\vec{a}$.
- $k\vec{a}$ cùng hướng $\vec{a}$ khi $k > 0$.
- $k\vec{a}$ ngược hướng $\vec{a}$ khi $k < 0$.
- $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$

Quy ước: $0\vec{a} = \vec{0}$; $k\vec{0} = \vec{0}$.

Phép lấy tích của một véc-tơ với một số gọi là **phép nhân véc-tơ với một số** (hoặc phép nhân một số với một véc-tơ).

TÍNH CHẤT

Tính chất 1. Cho $\vec{a}$, $\vec{b}$ bất kì và $k, h \in \mathbb{R}$, khi đó:

- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$;
- $(k + h)\vec{a} = k\vec{a} + h\vec{a}$;
- $k(h\vec{a}) = (kh)\vec{a}$;
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$; $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

Tính chất 2. Cho I là trung điểm của đoạn AB , với mọi M ta có:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}.$$

Tính chất 3. Cho G là trọng tâm $\triangle ABC$, với mọi M ta có:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}.$$

ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI VEC-TƠ CÙNG PHƯƠNG

$\forall \vec{a}, \vec{b}$ ta có: $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \vec{a} = k\vec{b}$.

PHÂN TÍCH (BIỂU DIỄN) MỘT VEC-TƠ THEO HAI VEC-TƠ KHÔNG CÙNG PHƯƠNG

Cho hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương. Khi đó $\forall \vec{x}$ ta luôn tìm được duy nhất cặp số m, n sao cho $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

B CÁC DẠNG TOÁN**Dạng 1. Các bài toán sử dụng định nghĩa và tính chất của phép nhân véc-tơ với một số.**

Phương pháp giải: Áp dụng định nghĩa và các tính chất của phép nhân véc-tơ với một số để giải các bài tập.

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 1 ❖❖❖

Ví dụ 1. Cho $\vec{u} = -2\vec{a} + 5\vec{b}$. Tìm véc-tơ đối của $\vec{u}$.

Lời giải.

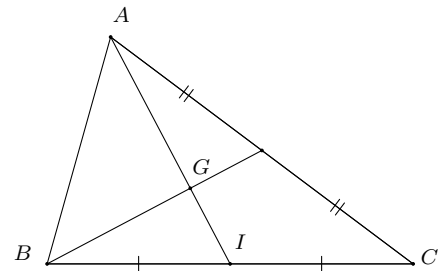
Véc-tơ đối của véc-tơ $\vec{u} = -2\vec{a} + 5\vec{b}$ là: $\vec{v} = -(-2\vec{a} + 5\vec{b}) = 2\vec{a} - 5\vec{b}$. □

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G . Gọi I là trung điểm của BC . Hãy tính:

- $\vec{BC}$ theo $\vec{IB}$.
- $\vec{BC}$ theo $\vec{IC}$.
- $\vec{AG}$ theo $\vec{IA}$.

Lời giải.

- Do $\vec{BC}$ ngược hướng và có độ dài gấp đôi $\vec{IB}$ nên $\vec{BC} = -2\vec{IB}$.
- Do $\vec{BC}$ cùng hướng và có độ dài gấp đôi $\vec{IC}$ nên $\vec{BC} = 2\vec{IC}$.
- Do $\vec{AG}$ ngược hướng và có độ dài bằng $\frac{2}{3}$ véc-tơ $\vec{IA}$ nên $\vec{AG} = -\frac{2}{3}\vec{IA}$.

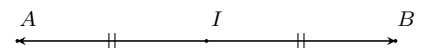


Ví dụ 3. Chứng minh rằng I là trung điểm của AB khi và chỉ khi $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$. □

Lời giải.

($\Rightarrow$) I là trung điểm của AB nên $\vec{IA}$ và $\vec{IB}$ ngược hướng và có cùng độ dài. Do đó $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$.

($\Leftarrow$) $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ suy ra hai véc-tơ $\vec{IA}$ và $\vec{IB}$ đối nhau. Do đó I là trung điểm của AB . □

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

Bài 1. Cho hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$. Tìm các véc-tơ đối của các véc-tơ sau:

- $\vec{u} = 7\vec{a} - 5\vec{b}$.
- $\vec{v} = (\sqrt{3} + 1)\vec{a} + 4\vec{b}$.
- $\vec{x} = (-2\sqrt{2})(3\vec{a} - 2\vec{b})$.

Lời giải.

- a) Véc-tơ đối của $\vec{u}$ là: $\vec{u}' = -7\vec{a} + 5\vec{b}$.
 b) Véc-tơ đối của $\vec{v}$ là: $\vec{v}' = -(\sqrt{3} + 1)\vec{a} - 4\vec{b}$.
 c) Véc-tơ đối của $\vec{x}$ là: $\vec{x}' = (6\sqrt{2})3\vec{a} - 4\sqrt{2}\vec{b}$.

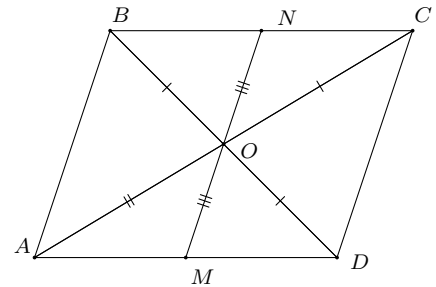
□

Bài 2. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC .

- a) Tìm $x; y$ biết $\vec{AB} = x\vec{OM}$, $\vec{BD} = y\vec{OB}$.
 b) Tìm tất cả các véc-tơ $\vec{u}$ thỏa mãn $\vec{u} = 2\vec{ON}$.

Lời giải.

- a) - Do $\vec{AB}$ cùng hướng với $\vec{OM}$ và có độ dài gấp đôi $\vec{OM}$ nên suy ra $x = 2$
 - Do $\vec{BD}$ ngược hướng với $\vec{OB}$ và có độ dài gấp đôi $\vec{OB}$ nên suy ra $y = -2$
 b) Tất cả các véc-tơ $\vec{u}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $\vec{AB}, \vec{MN}, \vec{DC}$



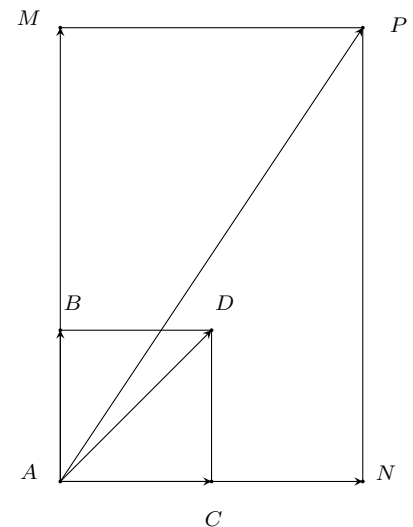
□

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ vuông, $AB = AC = 2$. Hãy dựng các véc-tơ sau đây và tính độ dài của chúng.

- a) $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{AC}$.
 b) $\vec{v} = 3\vec{AB} + 2\vec{AC}$.

Lời giải.

- a) Dựng hình chữ nhật $ABCD$ như hình vẽ.
 Khi đó ta có $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$.
 Suy ra $|\vec{u}| = |\vec{AD}| = 2\sqrt{2}$.
 b) - Trên đường thẳng AB lấy M sao cho $AM = 3AB$, và $\vec{AM}, \vec{AB}$ cùng hướng.
 - Trên đường thẳng AC lấy điểm N sao cho $AN = 2AC$ và $\vec{AN}, \vec{AC}$ cùng hướng.
 - Dựng hình chữ nhật $AMNP$ như hình vẽ.
 Khi đó $3\vec{AB} = \vec{AM}$, $2\vec{AC} = \vec{AN}$.
 $\Rightarrow \vec{v} = 3\vec{AB} + 2\vec{AC} = \vec{AM} + \vec{AN} = \vec{AP}$.
 $\Rightarrow |\vec{v}| = |\vec{AP}| = 2\sqrt{13}$.



□

Bài 4. Cho $\triangle ABC$ đều cạnh 4 cm. Gọi M là trung điểm của BC . Hãy dựng và tính độ dài véc-tơ $\vec{u} = 2\vec{AM}$.

Lời giải.

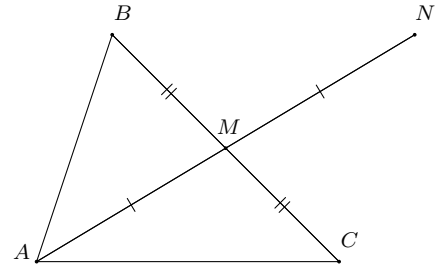
- Lấy N đối xứng với A qua M .

Khi đó $\overrightarrow{AN}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AM}$ và có độ dài gấp đôi $\overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AM} = \vec{u}$.

- Mặt khác $\triangle ABC$ là tam giác đều cạnh 4 cm nên trung tuyến AM đồng thời là đường cao.

$$\Rightarrow AM = 2\sqrt{3}.$$

$$\Rightarrow |\vec{u}| = 2|\overrightarrow{AM}| = 4\sqrt{3}.$$



□

Bài 5. Cho đường tròn tâm O và hai dây cung AB, CD vuông góc với nhau và cắt nhau tại E . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC . Chứng minh rằng $OIEJ$ là hình bình hành.

Lời giải.

Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của CD, AB

$$\Rightarrow \overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}}{2}; \overrightarrow{OQ} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

Do I, J lần lượt là trung điểm của AD, BC

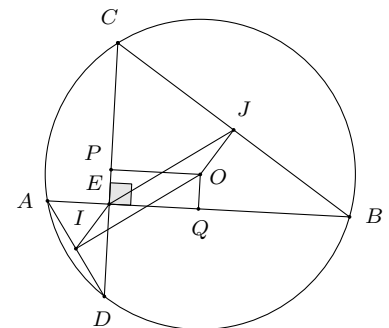
$$\Rightarrow \overrightarrow{EI} = \frac{\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{ED}}{2}; \overrightarrow{OJ} = \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}}{2}. \text{ Khi đó:}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{IE} &= \frac{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}}{2} + \frac{\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{ED}}{2} \\ &= \frac{(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})}{2} + \overrightarrow{EO} \\ &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{EO} \\ &= \vec{0}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{IE}.$$

Suy ra tứ giác $OIEJ$ là hình bình hành. (đpcm)

□



► Dạng 2. Phân tích một véc-tơ theo hai véc-tơ không cùng phương

Dùng các quy tắc về véc-tơ để phân tích một véc-tơ theo hai véc-tơ không cùng phương.

Lý thuyết cần nhớ

- Cho 2 véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Khi đó, với mọi $\vec{x}$, tồn tại duy nhất cặp số h, k sao cho $\vec{x} = h\vec{a} + k\vec{b}$.

- Điểm M thuộc đoạn AB sao cho $xAM = yBM$ ($x, y > 0$) thì $\overrightarrow{AM} = \frac{y}{x+y}\overrightarrow{AB}$

- Quy tắc 3 điểm: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.

- Quy tắc hình bình hành

Nếu ABCD là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

- Hiệu của hai véc-tơ: $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.

- Trung điểm của đoạn thẳng

$$\begin{aligned}
 I \text{ là trung điểm của đoạn thẳng } AB &\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\
 &\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \\
 &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}, \forall M \text{ bất kỳ}
 \end{aligned}$$

- Trọng tâm của tam giác

$$\begin{aligned}
 G \text{ là trọng tâm của tam giác } ABC &\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \\
 &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}, \forall M \text{ bất kỳ}
 \end{aligned}$$

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 2 ❖❖❖

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Phân tích véc-tơ $\overrightarrow{AG}$ theo 2 véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

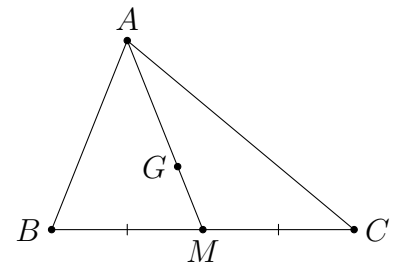
Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC .

$$\text{Suy ra: } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{Mà } \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$$

$$\text{Do đó: } \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

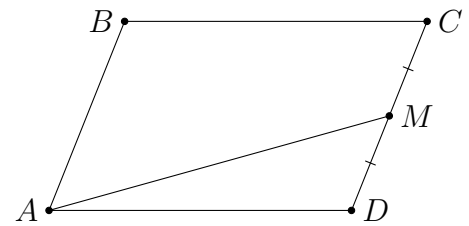


□

Ví dụ 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh CD . Phân tích véc-tơ $\overrightarrow{AM}$ theo 2 véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 \text{Vì } M \text{ là trung điểm của } CD \text{ nên } \overrightarrow{AM} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\
 &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \text{ (Vì } ABCD \text{ là hình bình hành)} \\
 &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.
 \end{aligned}$$



□

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC . Gọi H, K lần lượt thuộc 2 cạnh AB và AC sao cho $3AH = 2AB$, $3AK = AC$. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $4BM = 3MC$. Phân tích véc-tơ $\overrightarrow{BM}$ theo 2 véc-tơ $\overrightarrow{AH}$ và $\overrightarrow{AK}$.

Lời giải.

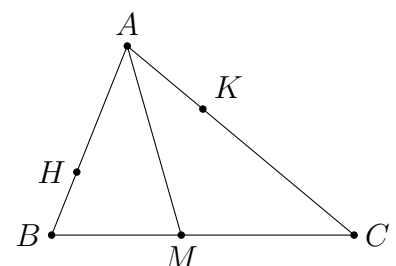
$$\text{Ta có } 3AH = 2AB \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AH}.$$

$$3AK = AC \Rightarrow \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AK}.$$

$$4BM = 3MC \Rightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{3}{7}\overrightarrow{BC}.$$

$$\text{Mà } \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}.$$

$$\text{Suy ra: } \overrightarrow{BM} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{7}\overrightarrow{AB} = \frac{9}{7}\overrightarrow{AK} - \frac{9}{14}\overrightarrow{AH}.$$

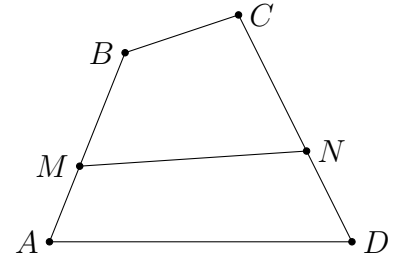


□

Ví dụ 4. Cho tứ giác $ABCD$ (AD và BC không song song). Trên cạnh AB và CD lần lượt lấy 2 điểm M, N sao cho $AM = kAB$ và $DN = kDC$ ($0 < k < 1$). Phân tích véc-tơ $\overrightarrow{MN}$ theo 2 véc-tơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Với mọi điểm } O \text{ bất kỳ, ta có: } \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} \\ &= \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = (1-k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB} \\ \text{Tương tự: } \overrightarrow{ON} &= (1-k)\overrightarrow{OD} + k\overrightarrow{OC} \\ \text{Suy ra: } \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} \\ &= (1-k)\overrightarrow{OD} + k\overrightarrow{OC} - [(1-k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}] \\ &= (1-k)(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) + k(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = (1-k)\overrightarrow{AD} + k\overrightarrow{BC}. \end{aligned}$$



□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Hãy biểu diễn các véc-tơ sao đây theo véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$.

- $\overrightarrow{DI}$ với I là trung điểm BC .
- $\overrightarrow{AG}$ với G là trọng tâm của tam giác CDI .

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CI} \\ \overrightarrow{DC} = \vec{a}; \overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\vec{b} \end{cases} \\ \text{Do đó } \overrightarrow{DI} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}. \end{aligned}$$

- Ta có $\overrightarrow{AG}$ với G là trọng tâm của tam giác CDI .

Theo tính chất của trọng tâm tam giác CDI , ta có:

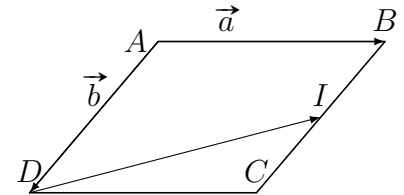
$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AI}).$$

Bên cạnh đó, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b}$ (qui tắc hình bình hành)

$$\text{và } \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b}.$$

□



Bài 2. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . H là điểm đối xứng của B qua G .

- Tính $\overrightarrow{AH}$ và $\overrightarrow{CH}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.
- Gọi M là trung điểm của BC .

$$\text{Chứng minh rằng: } \overrightarrow{MH} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}.$$

Lời giải.

a) Tính $\overrightarrow{AH}$ và $\overrightarrow{CH}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

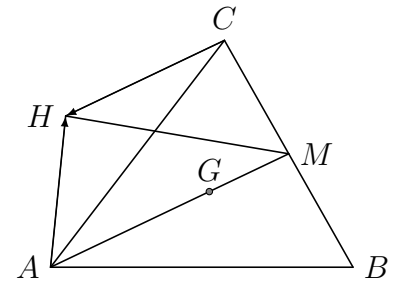
Ta có: $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AG}$ (qui tắc trung điểm)

$$= \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \quad (\text{vì } \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$

$$\text{Tương tự: } \overrightarrow{CH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB})$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$



b) Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} =$

$$\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \quad (\text{do câu a}).$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{MH} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.$$

□

Bài 3. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Cho các điểm D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB và I là giao điểm của AD và EF . Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{AE}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AF}$. Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{DC}$ theo hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$.

Lời giải.

Vì tứ giác $AEDF$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \vec{u} + \vec{v}$ và $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}.$$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}(\vec{u} + \vec{v}) = \frac{2}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}.$$

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{FA} = -\overrightarrow{AF} = -1 \cdot \vec{v} + 0 \cdot \vec{u}$$

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF} = \vec{u} - \vec{v}.$$

□

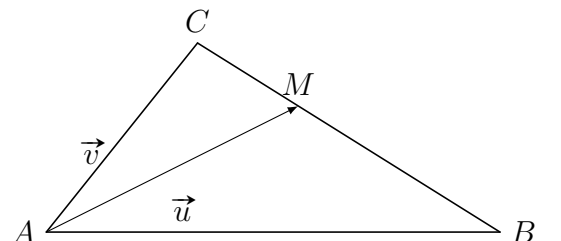
Bài 4. Cho tam giác ABC . Điểm M trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Hãy phân tích vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo hai vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$$

$$= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{Vậy: } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}.$$



□

Bài 5. Cho tam giác ABC có M, D lần lượt là trung điểm của AB, BC và N là điểm trên cạnh AC sao cho $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$. Gọi K là trung điểm của MN . Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{KD}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

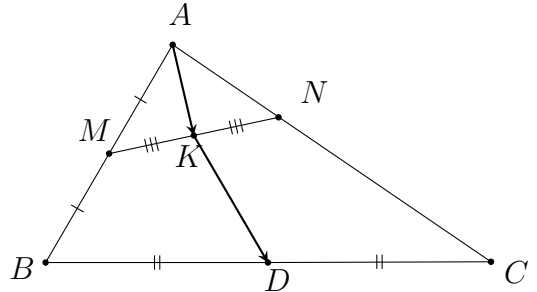
+) Phân tích $\overrightarrow{AK}$ hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

Ta có: $\overrightarrow{NC} = 2\overrightarrow{AN} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Suy ra $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

+) Phân tích $\overrightarrow{KD}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KD} &= \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AK} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{AK} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\right) \\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$



□

Bài 6. Cho tam giác ABC . Gọi M trung điểm của AB và N thuộc cạnh AC sao cho: $AN = 2NC$.

a) Gọi K là trung điểm của BC . Hãy phân tích véc-tơ $\overrightarrow{AK}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AN}$.

b) Gọi H là trung điểm của MN . Hãy phân tích véc-tơ $\overrightarrow{AH}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

a) Từ giả thiết ta có: $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AN}$.

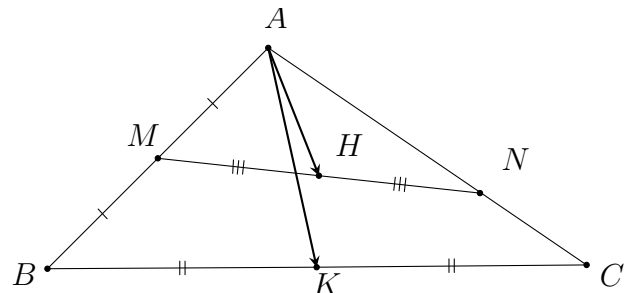
Suy ra $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{AM} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AN}\right) = \overrightarrow{AM} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AN}$.

Vậy $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AM} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AN}$.

b) Ta có: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Suy ra

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right) \\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$



Vậy $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

□

Bài 7. Cho tam giác ABC . Gọi các điểm M, N, P thỏa mãn $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{NA} = 3\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$. Hãy phân tích các véc-tơ $\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

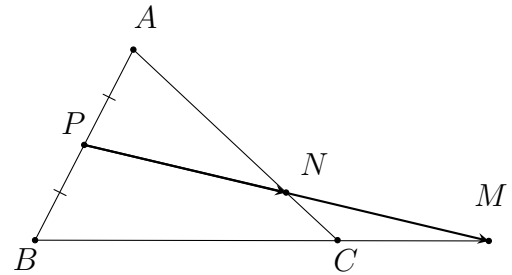
Lời giải.

Từ giả thiết ta có: $\overrightarrow{PB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} = 3(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$.

Suy ra:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PM} &= \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{MB} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{CB} \\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$



$$\overrightarrow{NA} = 3\overrightarrow{CN} = 3(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

□

Bài 8. Cho tam giác ABC . Điểm I thuộc tia đối của tia CB kéo dài sao cho $IB = 3IC$, điểm J thuộc tia đối của tia CA sao cho $JA = 2JC$, điểm K thuộc tia đối của tia AB sao cho $KB = 3KA$.

a) Phân tích các véc-tơ $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{JK}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

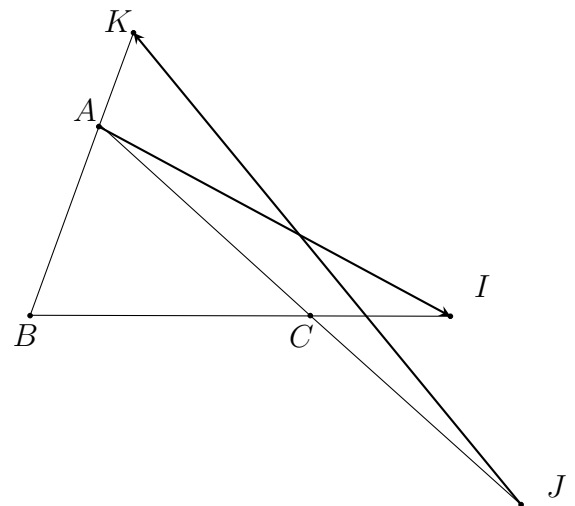
b) Phân tích véc-tơ $\overrightarrow{BC}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{JK}$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{BA} \\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} \\ &= \frac{3}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AB} \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{JK} &= \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AJ} \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$



$$\text{Vậy } \overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \text{ và } \overrightarrow{JK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}.$$

b) Từ câu a) ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{JK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = -\frac{8}{7}\overrightarrow{AI} - \frac{6}{7}\overrightarrow{JK} \\ \overrightarrow{AC} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AI} - \frac{2}{7}\overrightarrow{JK} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \frac{10}{7}\overrightarrow{AI} + \frac{4}{7}\overrightarrow{JK}.$$

$$\text{Vậy ta có } \overrightarrow{BC} = \frac{10}{7}\overrightarrow{AI} + \frac{4}{7}\overrightarrow{JK}.$$

□

Dạng 3. Chứng minh đẳng thức véc-tơ có chứa tích của véc-tơ với một số

Phương pháp giải:

- *Hướng 1.* Biến đổi một vế thành vế còn lại. Khi đó:
 - Nếu xuất phát từ vế phức tạp ta cần thực hiện việc đơn giản biểu thức.

- Nếu xuất phát từ vẻ đơn giản ta cần thực hiện việc phân tích véc-tơ.
- *Hướng 2.* Biến đổi đẳng thức cần chứng minh về một đẳng thức đã biết là luôn đúng.
- *Hướng 3.* Biến đổi một đẳng thức véc-tơ đã biết luôn đúng thành đẳng thức cần chứng minh.

Khi thực hiện các phép biến đổi cần lưu ý:

- *Quy tắc ba điểm:* Với ba điểm A, B, C bất kì ta luôn có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.
- *Quy tắc hình bình hành:* Với hình bình hành $ABCD$ ta luôn có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
- *Quy tắc trừ:* Với ba điểm A, B, O bất kì ta luôn có: $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$.
- *Tính chất trung điểm của đoạn thẳng:* Với điểm M tùy ý và I là trung điểm của AB ta có:

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}.$$

$$\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}).$$

- *Tính chất trọng tâm tam giác:* Với điểm M tùy ý và G là trọng tâm của tam giác ABC ta có:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}.$$

- Các tính chất của phép cộng, trừ véc-tơ và phép nhân một số với một véc-tơ.

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 3 ❖❖❖

Ví dụ 1. Cho hình bình hành $ABCD$. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AC}.$$

Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$.

Suy ra

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + 2\overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

□

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC với trọng tâm G . Chứng minh rằng: $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = -3\overrightarrow{AG}$.

Lời giải.

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên ta có:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA} = 3\overrightarrow{AG} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = -3\overrightarrow{AG}.$$

□

Ví dụ 3. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB và CD . Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MN}$.

Lời giải.

Cách 1. Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC}, \\ \overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ND}.\end{aligned}$$

Cộng hai đẳng thức trên theo vế ta được:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} &= 2\overrightarrow{MN} + (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}) + (\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND}) \\ &= 2\overrightarrow{MN}.\end{aligned}$$

(Vì $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = \vec{0}$).

Cách 2. Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}, \\ \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN}.\end{aligned}$$

Cộng hai đẳng thức trên theo vế ta được:

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{MN} &= (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}) + (\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND}) + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}.\end{aligned}$$

(Vì $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = \vec{0}$).

□

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC . Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

□

Ví dụ 5. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB, CD sao cho $MB = 2MA$ và $NC = 2ND$. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

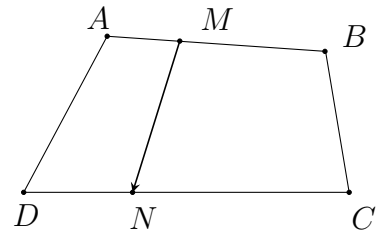
Lời giải.

Áp dụng quy tắc ba điểm, ta có:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN},$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}.$$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{MN} = (2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + (2\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN}).$$



Vì M, N lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB, CD sao cho $MB = 2MA$ và $NC = 2ND$ nên ta có:

$$2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0},$$

$$2\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}.$$

$$\text{Vậy } 3\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

□

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC . Lần lượt lấy các điểm M, N, P trên các đoạn thẳng AB, BC và CA sao cho $AM = \frac{1}{3}AB, BN = \frac{1}{3}BC, CP = \frac{1}{3}CA$. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}.$$

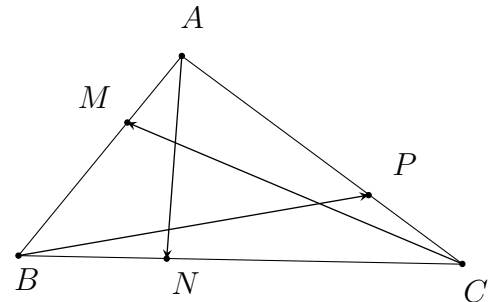
Lời giải.

Ta có:

$$\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \quad (1.1)$$

$$\overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} \quad (1.2)$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \quad (1.3)$$



Từ (1), (2), (3) ta suy ra:

$$\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \frac{4}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \frac{4}{3} \cdot \vec{0} = \vec{0}.$$

□

Ví dụ 7. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O . Gọi M là một điểm bất kì. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}.$

b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}.$

Lời giải.

a) Vì O là trung điểm của AC và BD nên ta có:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

Do đó $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

b) Theo quy tắc ba điểm ta có:

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD}$$

Suy ra $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$

Theo ý a) ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

Vậy $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$. □

Ví dụ 8. Cho tam giác đều ABC tâm O . M là một điểm bất kì trong tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của M trên BC, CA, AB . Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$.

Lời giải.

Qua điểm M dựng:

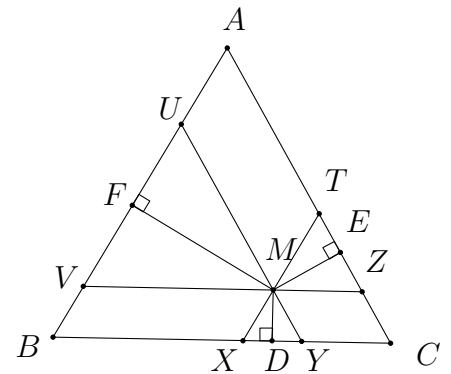
- đường thẳng song song với BC , cắt các cặp đường thẳng AB, AC tại V, Z .
- đường thẳng song song với AB , cắt các cặp đường thẳng AC, BC tại T, X .
- đường thẳng song song với BC , cắt các cặp đường thẳng AB, AC tại V, Z .

Ta dễ dàng chứng minh được $MTAU, MVBX, MYCZ$ là các hình bình hành và các điểm D, E, F tương ứng là trung điểm của XY, ZT, UV .

Từ đó suy ra:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{MX} + \overrightarrow{MY}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{MZ} + \overrightarrow{MT}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{MU} + \overrightarrow{MV}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{MT} + \overrightarrow{MU}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{MV} + \overrightarrow{MX}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{MY} + \overrightarrow{MZ}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}. \end{aligned}$$

□



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O . Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{OD}.$$

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{OD}$. □

Bài 2. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và $A'B'C'$. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}.$$

Lời giải.

Theo quy tắc cộng ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA'} &= \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{GA'} \\ \overrightarrow{BB'} &= \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{GB'} \\ \overrightarrow{CC'} &= \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{GC'}\end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'} + (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}) + (\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'}).$$

Vì G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và $A'B'C'$ nên ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} &= \vec{0}\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}.$$

□

Bài 3. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, BD . Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MN}$.

Lời giải.

Vì M, N lần lượt là trung điểm của AC và BD nên ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} &= 2\overrightarrow{MN}\end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}) = 2\overrightarrow{MN}.$$

□

Bài 4. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của AC, BD và MN . Chứng minh rằng:

- a) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.
b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OI}$ (với O là điểm bất kì).

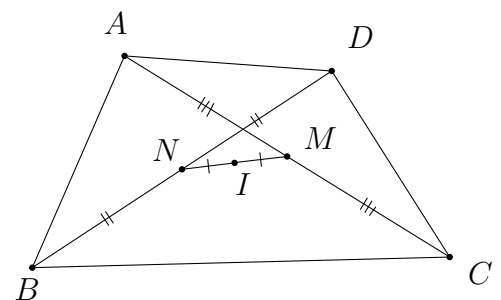
Lời giải.

a) Vì M, N lần lượt là trung điểm của AC và BD nên ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} &= 2\overrightarrow{IM} \\ \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} &= 2\overrightarrow{IN}\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} &= (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC}) + (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID}) \\ &= 2(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN}).\end{aligned}$$



Mặt khác I là trung điểm của MN nên $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \vec{0}$.
 Vậy $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 2 \cdot \vec{0} = \vec{0}$.
 b) Với điểm O bất kì ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} &= 2\overrightarrow{OM} \\ \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} &= 2\overrightarrow{ON} \\ \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} &= 2\overrightarrow{OI}\end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} &= (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) \\ &= 2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON} \\ &= 2(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) \\ &= 4\overrightarrow{OI}.\end{aligned}$$

□

Bài 5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O và H là trực tâm. Gọi D là điểm đối xứng của A qua O . Chứng minh rằng:

- a) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$.
 b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$.

Lời giải.

a) Ta có:

$BH \perp AC$ (vì H là trực tâm của tam giác ABC).

$DC \perp AC$ (vì AD là đường kính).

Do đó $BH \parallel DC$ (vì cùng vuông góc với AC).

Chứng minh tương tự ta có: $CH \parallel BD$ (vì cùng vuông góc với AB).

Suy ra $BHCD$ là hình bình hành. Theo quy tắc hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD}$.

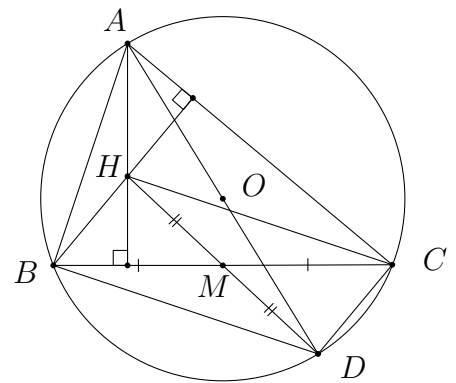
BC và HD là hai đường chéo của hình bình hành nên cắt nhau tại trung điểm M .

Trong tam giác AHD , O là trung điểm của AD nên ta có:
 $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} = 2\overrightarrow{HO}$.

$$\text{Vậy } \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} = 2\overrightarrow{HO}.$$

b) Theo quy tắc ba điểm ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA} \\ \overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB} \\ \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HC}\end{aligned}$$



Suy ra $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OH} + (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC})$.

Mặt khác theo kết quả ý a) ta có: $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$.

Vậy $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OH} + 2\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{OH}$. □

Bài 6. Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC có $AB = c, AC = b, BC = a$. Chứng minh rằng: $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Lời giải.

Qua C dựng đường thẳng song song với IA , cắt đường thẳng BI tại E .

Qua C dựng đường thẳng song song với IB , cắt đường thẳng AI tại F .

$IECF$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF}$ (1).

Gọi D là giao điểm của AI và BC . Vì $ID \parallel CE$ và AD là đường phân giác nên ta có:

$$\frac{BI}{IE} = \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} \Rightarrow \overrightarrow{IE} = -\frac{b}{c}\overrightarrow{IB} \quad (2)$$

$$\text{Tương tự ta chứng minh được } \overrightarrow{IF} = -\frac{a}{c}\overrightarrow{IA} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra

$$\overrightarrow{IC} = -\frac{b}{c}\overrightarrow{IB} - \frac{a}{c}\overrightarrow{IA} \Leftrightarrow a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

Bài tập tương tự: Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC . Chứng minh rằng:

$$\sin A \cdot \overrightarrow{IA} + \sin B \cdot \overrightarrow{IB} + \sin C \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

□

Bài 7. Cho tam giác ABC và một điểm M bất kì nằm trong tam giác ABC . Đặt $S_{MBC} = S_a$, $S_{MCA} = S_b$, $S_{MAB} = S_c$. Chứng minh rằng:

$$S_a \overrightarrow{MA} + S_b \overrightarrow{MB} + S_c \overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

Lời giải.

Gọi A' là giao điểm của đường thẳng MA với BC .

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MA'} = \frac{A'C}{BC} \overrightarrow{MB} + \frac{A'B}{BC} \overrightarrow{MC}$$

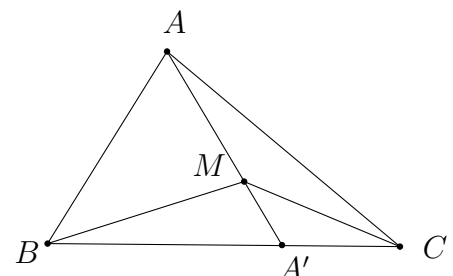
$$\text{Mà } \frac{A'C}{A'B} = \frac{S_{MA'C}}{S_{MA'B}} = \frac{S_{MAC}}{S_{MAB}} = \frac{S_b}{S_c}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{A'C}{BC} = \frac{S_b}{S_b + S_c} \\ \frac{A'B}{BC} = \frac{S_c}{S_c + S_b} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA'} = \frac{S_b}{S_b + S_c} \overrightarrow{MB} + \frac{S_c}{S_b + S_c} \overrightarrow{MC}. (*)$$

$$\text{Mặt khác } \frac{MA'}{MA} = \frac{S_{MA'B}}{S_{MAB}} = \frac{S_{MA'C}}{S_{MAC}} = \frac{S_{MA'B} + S_{MA'C}}{S_{MAB} + S_{MAC}} = \frac{S_a}{S_b + S_c}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA'} = \frac{-S_a}{S_b + S_c} \overrightarrow{MA}.$$



Thay vào (*) ta được:

$$-S_a \overrightarrow{MA} = S_b \overrightarrow{MB} + S_c \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow S_a \overrightarrow{MA} + S_b \overrightarrow{MB} + S_c \overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

□

Nhận xét:

- Cho M trùng với trọng tâm G của tam giác ABC , ta được kết quả: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
- Cho M trùng với tâm đường tròn nội tiếp I của tam giác ABC , ta được kết quả:

$$a \cdot \overrightarrow{IA} + b \cdot \overrightarrow{IB} + c \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

- Nếu tam giác ABC đều thì với điểm M bất kì trong tam giác, ta có:

$$x \cdot \overrightarrow{MA} + y \cdot \overrightarrow{MB} + z \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0},$$

trong đó x, y, z lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA và AB .

- Khi M nằm ngoài tam giác ABC , ta có các kết quả như sau:
 - Nếu M thuộc góc $\widehat{BAC}$ và góc đối đỉnh của nó thì: $-S_a \cdot \overrightarrow{MA} + S_b \cdot \overrightarrow{MB} + S_c \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.
 - Nếu M thuộc góc $\widehat{ABC}$ và góc đối đỉnh của nó thì: $S_a \cdot \overrightarrow{MA} - S_b \cdot \overrightarrow{MB} + S_c \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.
 - Nếu M thuộc góc $\widehat{ACB}$ và góc đối đỉnh của nó thì: $S_a \cdot \overrightarrow{MA} + S_b \cdot \overrightarrow{MB} - S_c \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Dạng 4. Chứng minh tính thẳng hàng, đồng quy

Phương pháp giải:

- Sử dụng nhận xét: ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ sao cho $\overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{AC}$.
- Sử dụng kết quả: Cho tam giác ABC . Khi đó M, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB} + (1 - \alpha) \overrightarrow{AC}$.
- Sử dụng các định lý về tính thẳng hàng, đồng quy như Menelaus, Ceva.

BÀI TẬP DẠNG 4

LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

Định lý 1. Điều kiện cần và đủ để hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng phương là tồn tại số k sao cho $\vec{a} = k \vec{b}$.

Định lý 2. Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi tồn tại số k sao cho $\overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{AC}$.

Định lý 3. Cho tam giác ABC . Khi đó điểm M thuộc đường thẳng BC khi và chỉ khi tồn tại số α sao cho $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB} + (1 - \alpha) \overrightarrow{AC}$.

Định lý 4. Cho tam giác ABC và ba điểm M, N, P thỏa mãn $\overrightarrow{MB} = \alpha \overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC} = \beta \overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{PA} = \gamma \overrightarrow{PB}$. Khi đó M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi $\alpha\beta\gamma = 1$.

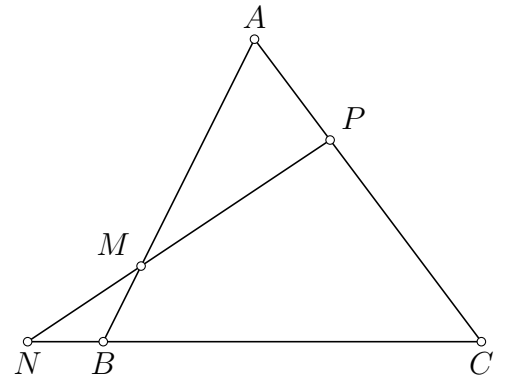
Định lý 5. Cho tam giác ABC và ba điểm M, N, P thỏa mãn $\overrightarrow{MB} = \alpha \overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC} = \beta \overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{PA} = \gamma \overrightarrow{PB}$. Khi đó các đường thẳng AM, BN, CP đôi một song song hoặc đồng quy khi và chỉ khi $\alpha\beta\gamma = -1$.

Ví dụ 1. Trên các cạnh của tam giác ABC lấy các điểm M, N, P sao cho $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 6\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{PC} + 2\overrightarrow{PA} = \vec{0}$. Chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng.

Lời giải.

Cách 1. Theo giả thiết ta có $\overrightarrow{NC} = 6\overrightarrow{NB}$, suy ra $\overrightarrow{AN} = \frac{\overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{AB}}{-5} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AP} + \frac{8}{5}\overrightarrow{AM}$. Do $\left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{8}{5} = 1$ nên ba điểm M, N, P thẳng hàng.

Cách 2. Theo giả thiết ta có $\overrightarrow{MA} = -3\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{NB} = \frac{1}{6}\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{PC} = -2\overrightarrow{PA}$. Do $(-3) \cdot \frac{1}{6} \cdot (-2) = 1$ nên theo định lí Menelaus ta có ba điểm M, N, P thẳng hàng.



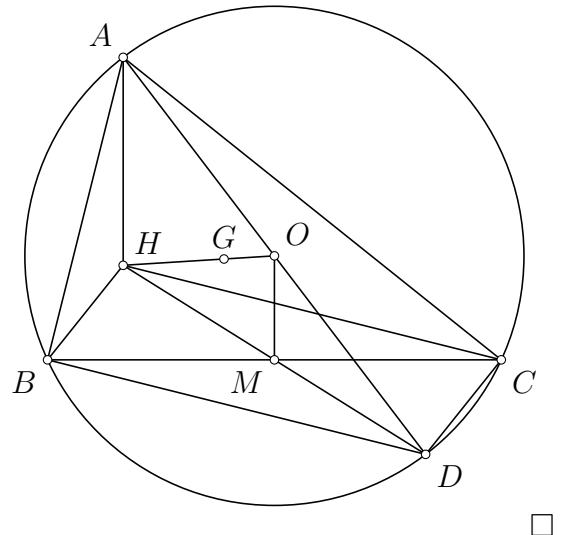
Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có O, H, G lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, trực tâm và trọng tâm của tam giác đó. Chứng minh rằng ba điểm O, H, G thẳng hàng.

Lời giải.

Ta chỉ xét trường hợp ba điểm O, H, G phân biệt.
Lấy điểm D đối xứng với A qua O , khi đó D thuộc đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC . Suy ra DB, DC lần lượt vuông góc với AB, AC . Từ tính chất của trực tâm H ta có CH, BH lần lượt vuông góc với AB, AC . Do đó $HBDC$ là hình bình hành. Khi đó HD cắt BC tại trung điểm M của mỗi đường. Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} &= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OM} \\ &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}.\end{aligned}$$

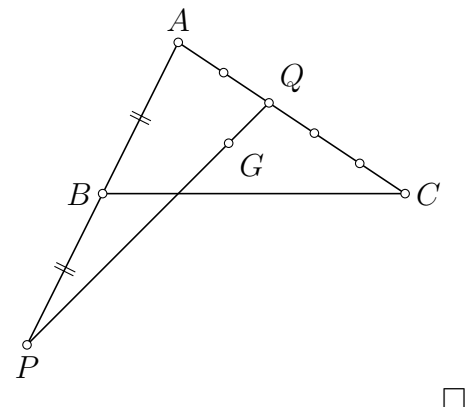
Vậy ba điểm O, H, G thẳng hàng.

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

Bài 1. Cho tam giác ABC và các điểm P, Q thỏa mãn $\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{PB}$, $3\overrightarrow{QA} + 2\overrightarrow{QC} = \vec{0}$. Chứng minh rằng đường thẳng PQ đi qua trọng tâm tam giác ABC .

Lời giải.

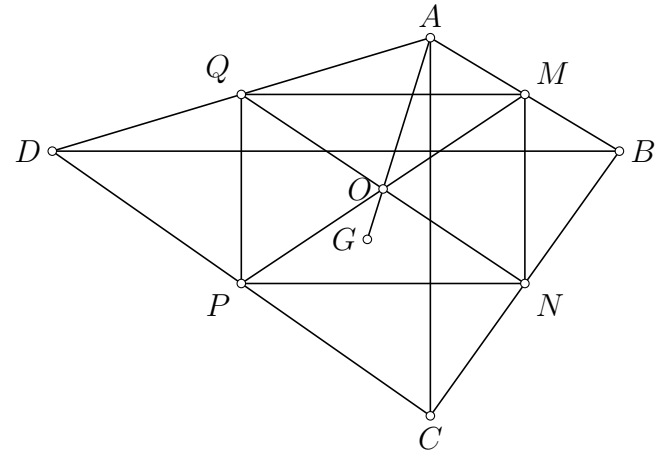
Từ giả thiết ta có $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AP}$ và $\overrightarrow{AC} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AQ}$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , ta có $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AP} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AQ}$. Chú ý rằng $\frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$ nên ba điểm P, Q, G thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh.



Bài 2. Cho tứ giác $ABCD$ có M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Gọi O là giao điểm của hai đường thẳng MP, NQ ; G là trọng tâm tam giác BCD . Chứng minh rằng ba điểm A, O, G thẳng hàng.

Lời giải.

Dễ thấy MN và PQ lần lượt là đường trung bình ứng với cạnh AC của tam giác ABC và DAC . Suy ra MN và PQ cùng song song và bằng một nửa AC hay tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành. Do đó O là trung điểm của MP và NQ . Ta có



□

Bài 3. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Lấy các điểm I và J sao cho $3\vec{IA} + 2\vec{IC} - 2\vec{ID} = \vec{0}$ và $\vec{JA} - 2\vec{JB} + 2\vec{JC} = \vec{0}$. Chứng minh rằng O, I, J thẳng hàng.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned} 3\vec{OI} &= 3\vec{OA} + 2\vec{OC} - 2\vec{OD} = \vec{OA} + 2\vec{OB} \\ \vec{OJ} &= \vec{OA} - 2\vec{OB} + 2\vec{OC} = -\vec{OA} - 2\vec{OB}. \end{aligned}$$

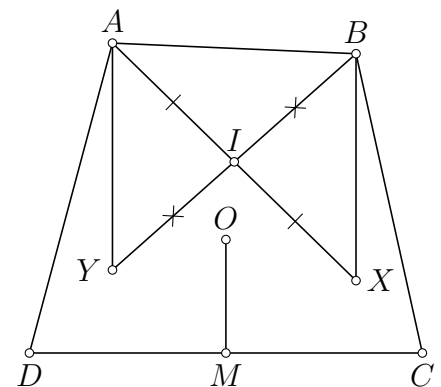
Từ đó ta có $\vec{OJ} = -3\vec{OI}$ hay ba điểm O, I, J thẳng hàng.

□

Bài 4. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . X, Y, Z, T lần lượt là trực tâm của các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC . Chứng minh rằng AX, BY, CZ, DT đồng quy.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của CD . Theo Ví dụ 2, ta có $\vec{BX} = 2\vec{OM}$ và $\vec{AY} = 2\vec{OM}$. Suy ra $\vec{AY} = \vec{BX}$ hay tứ giác $ABXY$ là hình bình hành. Do đó AX và BY cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường. Chứng minh tương tự, ta được AX, BY, CZ, DT đồng quy tại trung điểm I của mỗi đường.



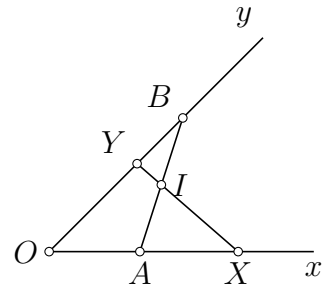
□

Bài 5. Cho góc xOy và hai điểm A, B thay đổi lần lượt trên tia Ox, Oy và hai số dương a, b sao cho $aOA + bOB = 1$. Chứng minh rằng trung điểm I của đoạn thẳng AB luôn thuộc vào một đường thẳng cố định.

Lời giải.

Chọn hai điểm X, Y lần lượt nằm trên tia Ox, Oy sao cho $OX = \frac{1}{2a}$ và $OY = \frac{1}{2b}$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned}\vec{OI} &= \frac{\vec{OA}}{2} + \frac{\vec{OB}}{2} = \frac{OA}{2OX} \vec{OX} + \frac{OB}{2OY} \vec{OY} \\ &= aOA\vec{OX} + bOB\vec{OY}.\end{aligned}$$



Do $aOA + bOB = 1$ nên I, X, Y thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh. □

Dạng 5. Xác định M thỏa mãn đẳng thức véc-tơ

Phương pháp: Biến đổi đẳng thức véc-tơ về một trong các dạng sau:

$\vec{OM} = \vec{v}$ (O cố định và $\vec{v}$ đã biết) $\Rightarrow M$ xác định duy nhất.

Những điểm cần chú ý:

- Áp dụng các qui tắc để biến đổi như: qui tắc 3 điểm, qui tắc hình bình hành, qui tắc hiệu.
- Biến đổi đẳng thức véc-tơ sao cho có duy nhất một véc-tơ có chứa điểm cuối là điểm cần tìm qua các véc-tơ đã xác định.
- Vẽ hình để xác định điểm hoặc mô tả điểm cần tìm ở vị trí nào so với các điểm cố định mà đề bài đã cho.

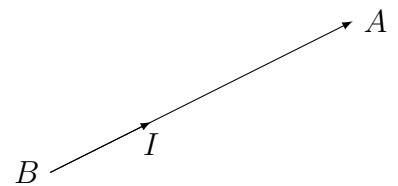
❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 5 ❖❖❖

Ví dụ 1. Cho hai điểm A, B . Tìm I thỏa mãn $\vec{IA} + 2\vec{IB} = \vec{0}$

Lời giải.

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } \vec{IA} + 2\vec{IB} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \vec{IB} + \vec{BA} + 2\vec{IB} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 3\vec{IB} + \vec{BA} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \vec{BI} &= \frac{1}{3}\vec{BA}.\end{aligned}$$

Vậy I nằm trên đoạn AB cách B một đoạn $\frac{1}{3}BA$. □



Ví dụ 2. Cho tam giác ABC . Tìm J thỏa mãn $\vec{JA} + 2\vec{JB} = \vec{CB}$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} = \overrightarrow{CB}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{JB} = \overrightarrow{CB}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{JB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BA}$$

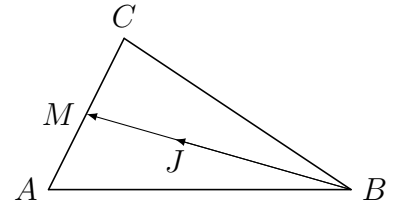
$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{JB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BA}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BJ} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BA})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM} \text{ (Với } M \text{ là trung điểm của cạnh } AC).$$

Vậy J nằm trên đoạn BM (với M là trung điểm AC) cách B một đoạn $\frac{2}{3}BM$



Ví dụ 3. Cho tam giác ABC . Tìm K thỏa mãn: $\overrightarrow{KA} - 3\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{KA} - 3\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BA} - 3\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$$

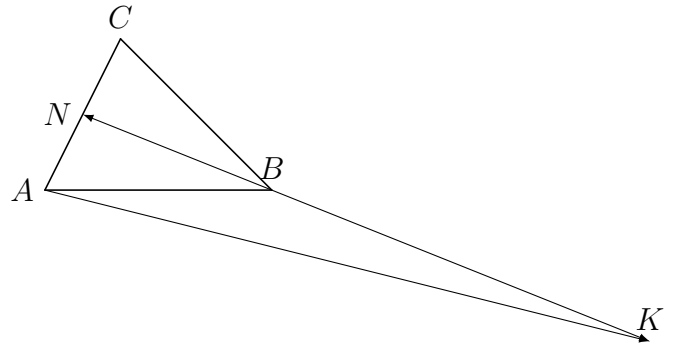
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BK} = 2\overrightarrow{BN} \text{ (Với } N \text{ là trung điểm của } AC).$$

Vậy: K nằm trên đường thẳng BN (với N là trung điểm AC ngược hướng của N và cách B một đoạn $2BN$).



Ví dụ 4. Cho hình bình hành $ABCD$. Xác định điểm I thỏa mãn $3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{DA}$.

Lời giải.

Ta có: $3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{DA}$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$$

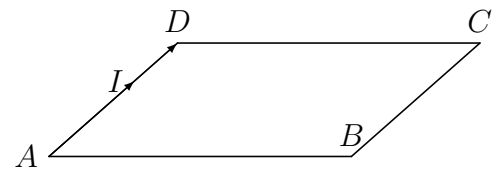
$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{CB}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} \text{ (Vì } ABCD \text{ là hình bình hành)}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{DA}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}.$$

Vậy: I nằm trên cạnh AD cách A một đoạn $\frac{2}{3}AD$.



Ví dụ 5. Cho trước hai điểm A, B và hai số thực $\alpha + \beta \neq 0$. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm I thỏa mãn $\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Lời giải.

Ta có: $\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{IA} + \beta(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{AB} = \vec{0} \quad (\forall \alpha + \beta \neq 0).$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}.$$

Vậy tồn tại duy nhất điểm I thoả mãn điều kiện đề bài. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho tam giác ABC . Hãy xác định điểm M thoả mãn điều kiện: $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

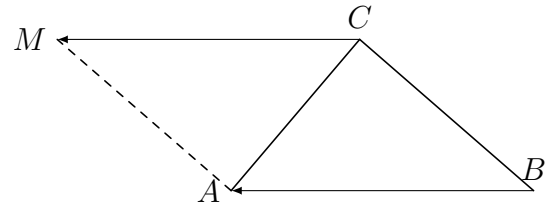
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} - (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BA}.$$

Vậy M xác định duy nhất thoả ($\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BA}$). □



Bài 2. Cho hai điểm A, B phân biệt. Xác định điểm M thoả $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Lời giải.

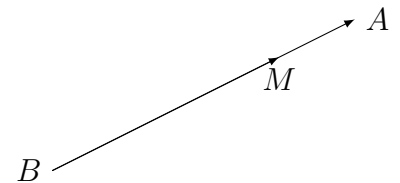
$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}.$$

Vậy: M nằm trên đoạn AB cách B một đoạn $\frac{3}{4}AB$. □



Bài 3. Cho tam giác ABC . Xác định điểm K thoả mãn điều kiện $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{KA} + (\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{CB}$$

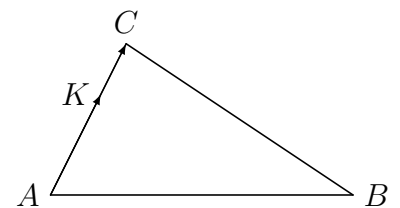
$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{KA} = 2\overrightarrow{CA}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \text{ Vậy } K \text{ nằm trên đoạn } AC \text{ và cách } A \text{ một đoạn là } \frac{2}{3}AC$$



Bài 4. Cho hai điểm B, C . Xác định điểm I thoả mãn $2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Lời giải.

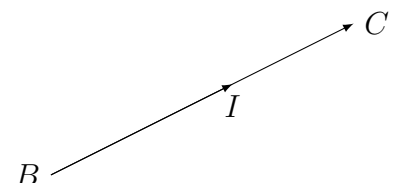
$$\text{Ta có: } 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IB} + 3(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{BC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}.$$

Vậy: I nằm trên đoạn BC và cách B một đoạn là $\frac{3}{5}BC$ □

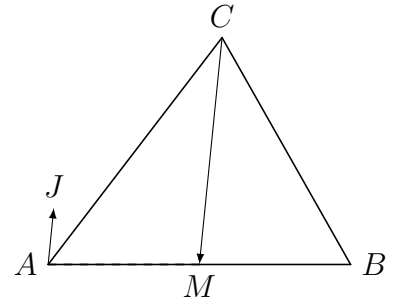


Bài 5. Cho tam giác ABC . Xác định điểm J thỏa mãn $2\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JC} - \overrightarrow{JB} = \overrightarrow{CA}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & 2\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JC} - \overrightarrow{JB} = \overrightarrow{CA} \\ \Leftrightarrow & 2\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AC} - (\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{CA} \\ \Leftrightarrow & 2\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} \\ \Leftrightarrow & 2\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} \\ \Leftrightarrow & 2\overrightarrow{JA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BC} \\ \Leftrightarrow & 2\overrightarrow{JA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} \\ \Leftrightarrow & \overrightarrow{AJ} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{CM} \text{ (Với } M \text{ là trung điểm } AB). \end{aligned}$$

Vậy: J xác định duy nhất thỏa ($\overrightarrow{AJ} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{CM}$) với M là trung điểm AB



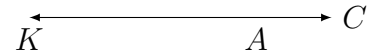
□

Bài 6. Cho hai điểm A, C . Xác định điểm K thỏa mãn $2\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KC} = 2\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & 2\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KC} = 2\overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow & \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KA} - \overrightarrow{KC} = 2\overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow & \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow & \overrightarrow{KA} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CA} \\ \Leftrightarrow & \overrightarrow{KA} = 3\overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow & \overrightarrow{AK} = -3\overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

Vậy: K nằm trên đường AC và cách A một đoạn là $3AC$ ngược hướng với C



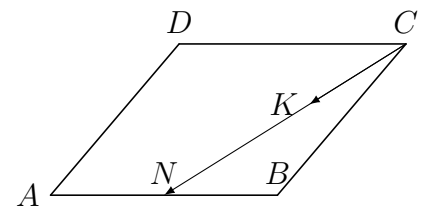
□

Bài 7. Cho hình bình hành $ABCD$. Tìm K thỏa mãn: $3\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & 3\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{KC} + 3\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow & 5\overrightarrow{KC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow & 5\overrightarrow{KC} + 2\overrightarrow{CN} = \vec{0} \text{ (Với } N \text{ là trung điểm của } AB). \\ \Leftrightarrow & \overrightarrow{CK} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CN}. \end{aligned}$$

Vậy: K nằm trên đoạn CN và cách C một đoạn là $\frac{2}{5}CN$ với N là trung điểm AB .



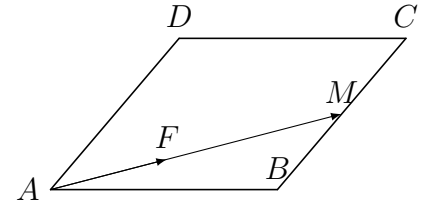
□

Bài 8. Cho hình bình hành $ABCD$. Xác định điểm F thỏa mãn $3\overrightarrow{FA} + 2\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
&\text{Ta có: } 3\overrightarrow{FA} + 2\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} \\
&\Leftrightarrow 3\overrightarrow{FA} + 2\overrightarrow{FA} + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} \\
&\Leftrightarrow 6\overrightarrow{FA} + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} \quad (\text{Vì } ABCD \text{ là hình bình hành}) \\
&\Leftrightarrow 6\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \\
&\Leftrightarrow 6\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} \\
&\Leftrightarrow 6\overrightarrow{FA} = 2\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{BA} \\
&\Leftrightarrow 6\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB} \\
&\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AM} \quad (\text{Với } M \text{ là trung điểm } BC) \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{AF} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}.
\end{aligned}$$

Vậy điểm F cần tìm thỏa mãn đẳng thức vec tơ $\overrightarrow{AF} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$. □



Bài 9. Cho trước ba điểm A, B, C và ba số thực $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm I thỏa mãn $\alpha \cdot \overrightarrow{IA} + \beta \cdot \overrightarrow{IB} + \gamma \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
&\text{Ta có: } \alpha \cdot \overrightarrow{IA} + \beta \cdot \overrightarrow{IB} + \gamma \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow \alpha \cdot \overrightarrow{IA} + \beta(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) + \gamma(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow (\alpha + \beta + \gamma) \cdot \overrightarrow{IA} + \beta \cdot \overrightarrow{AB} + \gamma \cdot \overrightarrow{AC} = \vec{0} \quad (\text{Vì } \alpha + \beta + \gamma \neq 0). \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = \frac{\beta + \gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \cdot \overrightarrow{AB}.
\end{aligned}$$

Vậy: Tồn tại duy nhất điểm I thỏa mãn điều kiện đề bài. □

C BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. Cho tứ giác $ABCD$. Hai điểm M, N lần lượt thay đổi trên các cạnh AB và CD sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{CD}$. Tìm tập hợp các điểm I là trung điểm của đoạn MN .

Lời giải.

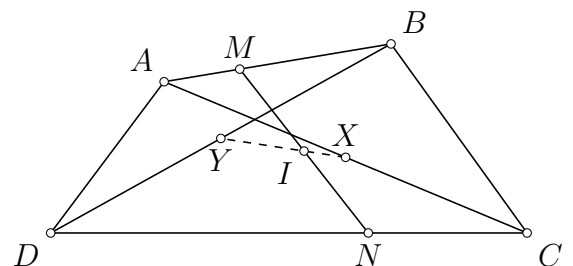
Giả sử $\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{CD} = k$. Gọi X, Y lần lượt là trung điểm của AC, BD . Ta có

$$\begin{aligned}
2\overrightarrow{IX} &= (\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AX}) + (\overrightarrow{IN} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CX}) \\
&= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{NC}.
\end{aligned}$$

Tương tự $2\overrightarrow{IY} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{ND}$. Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned}
(1 - k)\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} &= \vec{0} \\
(1 - k)\overrightarrow{NC} + k\overrightarrow{ND} &= \vec{0},
\end{aligned}$$

suy ra $(1 - k)\overrightarrow{IX} + k\overrightarrow{IY} = \vec{0}$. Chú ý rằng $0 \leq k \leq 1$ nên tập các điểm I là đoạn thẳng XY . □



Bài 2. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và điểm M . Gọi A', B', C' lần lượt là điểm đối xứng với M qua trung điểm của BC, CA, AB . Chứng minh rằng bốn đường thẳng AA', BB', CC' và MG đồng quy.

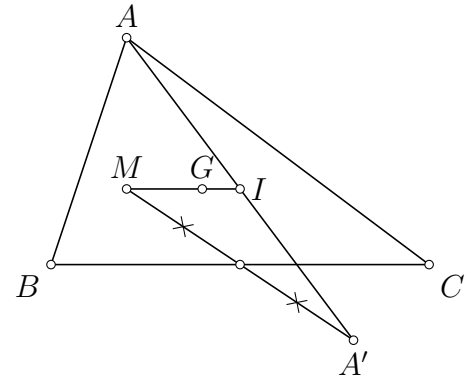
Lời giải.

Để thấy $MBA'C$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} - \overrightarrow{A'M} = \vec{0}$.
Tương tự $\overrightarrow{B'C} + \overrightarrow{B'A} - \overrightarrow{B'M} = \vec{0}$. Trừ hai vế của hai đẳng thức trên ta có

$$\begin{aligned}\vec{0} &= \overrightarrow{A'B} - \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{A'C} - \overrightarrow{B'C} - \overrightarrow{A'M} + \overrightarrow{B'M} \\ &= \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{B'A}.\end{aligned}$$

Từ đó ta có $ABA'B'$ là hình bình hành, do đó AA' và BB' cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường. Chứng minh tương tự, ta có AA', BB', CC' đồng quy tại trung điểm I của mỗi đường.

Ta có $\overrightarrow{MI} = \frac{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA'}}{2} = \frac{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}}{2} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MG}$. Vậy MG đi qua I , ta được điều phải chứng minh. $\square$



Bài 3. Cho đoạn thẳng AB có trung điểm là I . Điểm M là tùy ý không nằm trên đường thẳng AB . Trên MI kéo dài lấy một điểm N sao cho $IN = MI$.

- Chứng minh: $\overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{MB}$.
- Tìm các điểm D, C sao cho: $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NI} = \overrightarrow{ND}$ và $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CN}$.

Lời giải.

- Xét: $\overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{MB}$
 $= \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{MB}$
 $= \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IN} - \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IB}$
 $= \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IN} + \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{BI}$
 $= \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IN} + \overrightarrow{IM} = \vec{0}$ (Điều phải chứng minh).

b)

Tìm D

Ta có: $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NI} = \overrightarrow{ND}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{ND} = 2\overrightarrow{NK}$ (với K là trung điểm của AI).

Vậy: D nằm trên đường NK và cách N một đoạn $2NK$ cùng hướng với K .

Tìm C

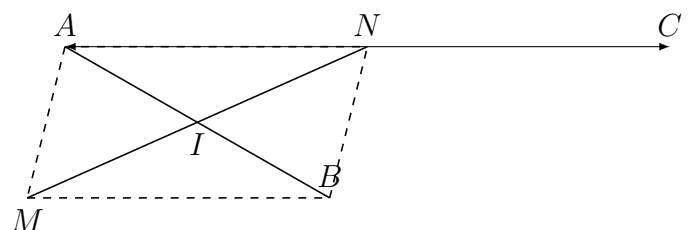
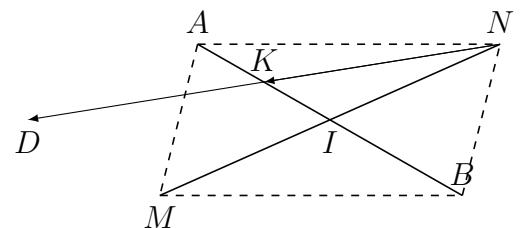
Ta có: $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CN}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB} = \overrightarrow{CN}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{NC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{NC} = -\overrightarrow{NA}$.

Vậy: C xác định duy nhất thỏa $\overrightarrow{NC} = -\overrightarrow{NA}$



$\square$

Bài 4. Cho hình bình hành $ABCD$.

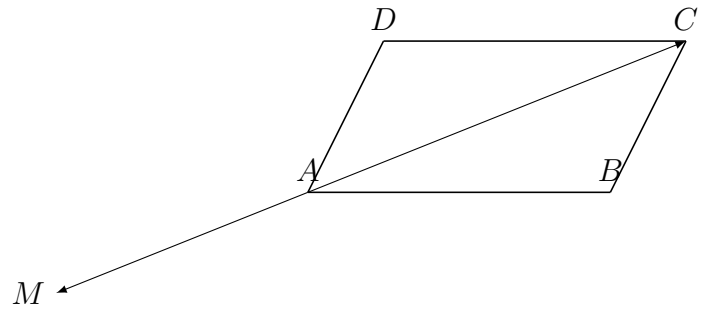
- a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$.
 b) Xác định điểm M thoả mãn điều kiện: $3\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.

Lời giải.

- a) Xét: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$.
 $= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}$ (Vì $ABCD$ là hình bình hành)
 $= 2\overrightarrow{AC}$ (Điều phải chứng minh).

b)

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } 3\overrightarrow{MA} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} \\ \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MA} &= 2\overrightarrow{AC} \text{ (Theo chứng minh câu a)} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} &= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \\ \text{Vậy: } M &\text{ xác định duy nhất } \overrightarrow{AM} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$



□

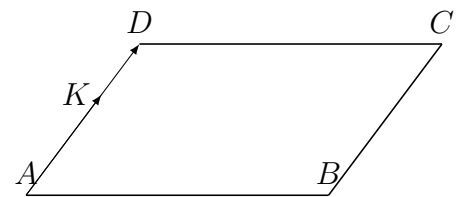
Bài 5. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC .

- a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$.
 b) Xác định điểm K thoả mãn điều kiện: $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$.

Lời giải.

- a) Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}$ (Vì $ABCD$ là hình bình hành).
 Vì vậy: $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
 Nên: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$.
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$. (Điều phải chứng minh).

- b) Ta có: $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow 3\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
 $\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AD}$ (Vì $ABCD$ là hình bình hành)
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.
 Vậy: K xác định duy nhất $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.



□

Bài 6. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD, CDA, ABD và ABC .

- a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} = \vec{0}$.
 b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, BD và I là trung điểm của MN . Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{IB'} + \overrightarrow{IC'} + \overrightarrow{ID'} = \vec{0}.$$

Lời giải.

a) Theo tính chất trọng tâm của tam giác, ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA'} &= \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) \\ \overrightarrow{BB'} &= \frac{1}{3} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) \\ \overrightarrow{CC'} &= \frac{1}{3} (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}) \\ \overrightarrow{DD'} &= \frac{1}{3} (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} &= \\ &= \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}) \\ &= \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC}) \\ &= \frac{1}{3} \vec{0} = \vec{0}.\end{aligned}$$

b) Theo kết quả đã biết ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{A'A}) + (\overrightarrow{IB'} + \overrightarrow{B'B}) + (\overrightarrow{IC'} + \overrightarrow{C'C}) + (\overrightarrow{ID'} + \overrightarrow{D'D}) &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{IB'} + \overrightarrow{IC'} + \overrightarrow{ID'} - (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'}) &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{IB'} + \overrightarrow{IC'} + \overrightarrow{ID'} &= \vec{0}.\end{aligned}$$

(Vì theo kết quả ý a) ta có: $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} = \vec{0}$).

□

Bài 7. Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC , tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P . Chứng minh rằng: $a\overrightarrow{IM} + b\overrightarrow{IN} + c\overrightarrow{IP} = \vec{0}$.

Lời giải.

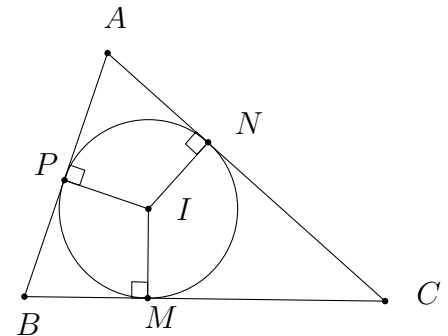
Gọi p là nửa chu vi tam giác ABC , ta có:

$$\begin{cases} AP = AN = p - a \\ BM = BP = p - b \\ CN = CM = p - c \end{cases}$$

Mặt khác ta có:

$$\begin{aligned}MC \cdot \overrightarrow{MB} + MB \cdot \overrightarrow{MC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow (p - c) (\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IM}) + (p - b) (\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IM}) &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow (2p - b - c) \overrightarrow{IM} &= (p - c) \overrightarrow{IB} + (p - b) \overrightarrow{IC} \\ \Leftrightarrow a\overrightarrow{IM} &= (p - c) \overrightarrow{IB} + (p - b) \overrightarrow{IC} \quad (1)\end{aligned}$$

$$\text{Tương tự, ta chứng minh được } \begin{cases} b\overrightarrow{IN} = (p - a) \overrightarrow{IC} + (p - c) \overrightarrow{IA} \quad (2) \\ c\overrightarrow{IP} = (p - b) \overrightarrow{IA} + (p - a) \overrightarrow{IB} \quad (3) \end{cases}$$



Cộng từng vế các đẳng thức (1), (2), (3) thu được

$$\begin{aligned} a\overrightarrow{IM} + b\overrightarrow{IN} + c\overrightarrow{IP} &= (2p - b - c)\overrightarrow{IA} + (2p - a - c)\overrightarrow{IB} + (2p - a - b)\overrightarrow{IC} \\ &= a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} \\ &= \vec{0}. \end{aligned}$$

□

Bài 8. Cho tam giác nhọn ABC có H là trực tâm. Chứng minh rằng:

$$\tan A \cdot \overrightarrow{HA} + \tan B \cdot \overrightarrow{HB} + \tan C \cdot \overrightarrow{HC} = \vec{0}.$$

Lời giải.

Qua điểm C dựng: đường thẳng song song với AH , cắt BH tại B' ; đường thẳng song song với BH , cắt AH tại A' . Khi đó $A'HB'C$ là hình bình hành.

Gọi D là giao điểm của AH và BC . Áp dụng định lý Ta - lét ta

có:

$$\frac{HB'}{HB} = \frac{DC}{DB} = \frac{\frac{AD}{BD}}{\frac{AD}{DC}} = \frac{\tan B}{\tan C}.$$

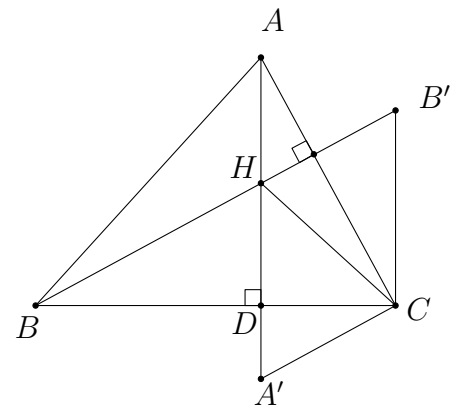
$$\Rightarrow \overrightarrow{HB'} = -\frac{\tan B}{\tan C} \cdot \overrightarrow{HB} \text{ (Do } \overrightarrow{HB'} \text{ và } \overrightarrow{HB} \text{ ngược hướng).}$$

Tương tự ta có: $\Rightarrow \overrightarrow{HA'} = -\frac{\tan A}{\tan C} \cdot \overrightarrow{HA}.$

Vì $AHB'C$ là hình bình hành nên ta có:

$$\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA'} + \overrightarrow{HB'} = -\frac{\tan A}{\tan C} \cdot \overrightarrow{HA} - \frac{\tan B}{\tan C} \cdot \overrightarrow{HB}.$$

$$\Rightarrow \tan A \cdot \overrightarrow{HA} + \tan B \cdot \overrightarrow{HB} + \tan C \cdot \overrightarrow{HC} = \vec{0}.$$



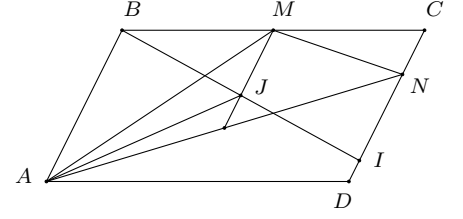
□

Bài 9. Cho hình bình hành $ABCD$. Lấy M, N sao cho $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$. Gọi I, J là hai điểm thỏa mãn $\overrightarrow{CI} = \alpha\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BJ} = \beta\overrightarrow{BI}$. Xác định α, β để J là trọng tâm tam giác AMN .

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JM} + \overrightarrow{JN} &= \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IN} \\
 &= \overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BJ} + \frac{\overrightarrow{BC}}{2} + \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CI} \\
 &= \overrightarrow{BA} + \frac{\overrightarrow{BC}}{2} + (-3\beta + 1)\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CI} \\
 &= \overrightarrow{BA} + \frac{\overrightarrow{BC}}{2} + (-3\beta + 1)(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CI}) + \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CI} \\
 &= \overrightarrow{BA} + \left(\frac{3}{2} - 3\beta\right)(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{CN} - 3\beta\overrightarrow{CI} \\
 &= \overrightarrow{BA} + \left(\frac{3}{2} - 3\beta\right)(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) + \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} - 3\alpha\beta\overrightarrow{CD} \\
 &= \overrightarrow{BA} + \left(\frac{3}{2} - 3\beta\right)(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) + \left(\frac{1}{3} - 3\alpha\beta\right)\overrightarrow{BA} \\
 &= \left(-\frac{17}{6} + 3\beta + 3\alpha\beta\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{3}{2} - 3\beta\right)\overrightarrow{AC}.
 \end{aligned}$$



Để J là trọng tâm $\triangle AMN$ thì $\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JM} + \overrightarrow{JN} = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow \left(-\frac{17}{6} + 3\beta + 3\alpha\beta\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{3}{2} - 3\beta\right)\overrightarrow{AC} = \vec{0}.$

Mặt khác, do $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên suy ra:

$$\begin{cases} -\frac{17}{6} + 3\beta + 3\alpha\beta = 0 \\ \frac{3}{2} - 3\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{8}{9} \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy với $\alpha = \frac{8}{9}, \beta = \frac{1}{2}$ thì J là trọng tâm $\triangle AMN$. □

Bài 10. Cho $\triangle ABC$, gọi M, N lần lượt là các điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$ với $k \in \mathbb{R}$.

a) Tìm k để M, N đi qua trung điểm I của AC .

b) Tính $\frac{IM}{IN}$.

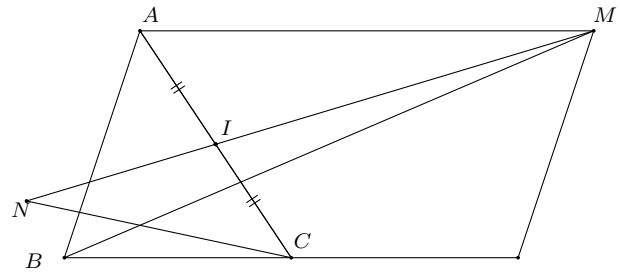
Lời giải.

- a) Do I là trung điểm của AC nên ta có $\overrightarrow{BI} = \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}{2}$. Khi đó:
- $$\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{BI} - \overrightarrow{BM} = \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}{2} - 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{BC},$$
- $$\overrightarrow{NI} = \overrightarrow{CI} - \overrightarrow{CN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \left(-\frac{1}{2} - k\right)\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}.$$

Mặt khác MN đi qua I nên suy ra $\exists t$ sao cho:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MI} &= t\overrightarrow{NI} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{BC} &= t\left(-\frac{1}{2} - k\right)\overrightarrow{AC} + t\overrightarrow{BC} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} = t\left(-\frac{1}{2} - k\right) \\ -2 = t \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ k = -\frac{1}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

- b) Với $t = -2 \Rightarrow \frac{IM}{IN} = 2$.



□

D CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho tam giác ABC cân ở A , đường cao AH . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{HC} = -\overrightarrow{HB}$. C. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$. D. $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{HC}$.

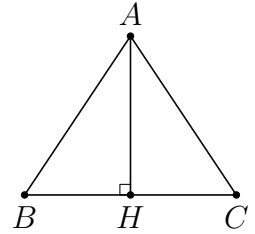
Lời giải.

Do tam giác ABC cân ở A có đường cao AH nên H là trung điểm BC .

Ta có

$$\text{Tam giác } ABC \text{ cân ở } A \Rightarrow AB = AC \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|.$$

$$H \text{ là trung điểm } BC \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{HC} = -\overrightarrow{HB} \\ \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{HC}. \end{cases}$$



Chọn đáp án **A** □

Câu 2. Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 2a$ và $BD = a$. Tính $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}|$.

- A. $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}| = 3a$. B. $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}| = a\sqrt{3}$. C. $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}| = a\sqrt{5}$. D. $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}| = 5a$.

Lời giải.

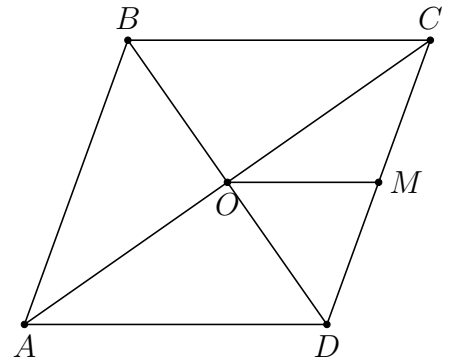
Gọi $O = AC \cap BD$ và M là trung điểm của CD .

Ta có

$$|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}| = 2|\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}| = 2|2\overrightarrow{OM}| = 4OM$$

$$OM = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}\sqrt{OD^2 + OC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{4}.$$

$$\text{Vậy } |\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}| = a\sqrt{5}.$$



Chọn đáp án **C** □

Câu 3. Cho tam giác OAB vuông cân tại O , cạnh $OA = a$. Tính $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|$.

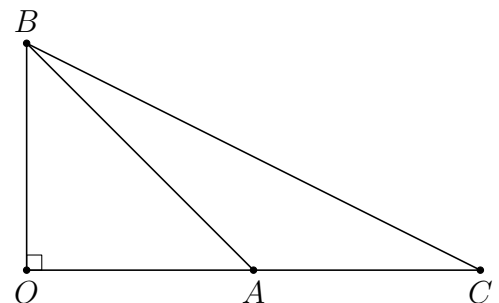
- A. a . B. $(1 + \sqrt{2})a$. C. $a\sqrt{5}$. D. $2a\sqrt{2}$.

Lời giải.

Gọi C là điểm đối xứng của O qua $A \Rightarrow OC = 2a$.

Ta có $2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BC}$. Suy ra

$$\begin{aligned} |2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| &= |\overrightarrow{BC}| \\ &= BC \\ &= \sqrt{OB^2 + OC^2} \\ &= a\sqrt{5}. \end{aligned}$$



Chọn đáp án **C** □

Câu 4. Cho tam giác OAB vuông cân tại O , cạnh $OA = a$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $|3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB}| = 5a$. B. $|2\overrightarrow{OA}| + |3\overrightarrow{OB}| = 5a$.
C. $|7\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB}| = 5a$. D. $|11\overrightarrow{OA}| - |6\overrightarrow{OB}| = 5a$.

Lời giải.

- Dụng các véc-tơ $\overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OB}$.

Dựng hình chữ nhật $OCED$ suy ra $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE}$ (quy tắc hình bình hành).

Ta có $|3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}| = |\overrightarrow{OE}| = OE = CD = \sqrt{OC^2 + OD^2} = 5a$ đúng.

- $|2\overrightarrow{OA}| + |3\overrightarrow{OB}| = 2|\overrightarrow{OA}| + 3|\overrightarrow{OB}| = 2a + 3a = 5a$ đúng.
- $|11\overrightarrow{OA}| - |6\overrightarrow{OB}| = 11|\overrightarrow{OA}| - 6|\overrightarrow{OB}| = 11a - 6a = 5a$ đúng.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 5. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC , I là trung điểm của AM . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IA} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + 2\overrightarrow{IA} = \vec{0}$.
C. $2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IA} = \vec{0}$. D. $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IA} = \vec{0}$.

Lời giải.

Vì M là trung điểm BC nên $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IM}$.

Mặt khác I là trung điểm AM nên $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IM} = \vec{0}$.

Suy ra $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + 2\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IM} + 2\overrightarrow{IA} = 2(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IA}) = \vec{0}$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 6. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC , I là trung điểm của AM . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. B. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$.
C. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Vì M là trung điểm BC nên $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$. (1)

Mặt khác I là trung điểm AM nên $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AM}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AI} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 7. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC , G là trọng tâm của tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. B. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.
C. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Vì G là trọng tâm của tam giác $ABC \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.

Và M là trung điểm của $BC \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$.

Do đó $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 8. Cho tứ giác $ABCD$. Trên cạnh AB , CD lấy lần lượt các điểm M , N sao cho $3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$ và $3\overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{DC}$. Tính véc-tơ $\overrightarrow{MN}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$.

- A. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

$$\text{C. } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}.$$

$$\text{D. } \overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$ và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$.

Suy ra

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} + 2(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}) \\ &= (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}) + \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{DN} + 2\overrightarrow{CN}) \\ &= \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{BC} \text{ (do } \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0} \text{ và } \overrightarrow{DN} + 2\overrightarrow{CN} = \vec{0}). \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 9. Cho hình thang $ABCD$ có đáy là AB và CD . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Khẳng định nào sau đây **sai**?

$$\text{A. } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DC}.$$

$$\text{B. } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BN}.$$

$$\text{C. } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}).$$

$$\text{D. } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}).$$

Lời giải.

Vì M, N lần lượt là trung điểm của $AD, BC \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \vec{0} \\ \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}. \end{cases}$

- $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DC} = (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{MN}$ đúng.
- $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BN} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}) - \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MN}$ đúng.
- $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}$.

$$\text{Suy ra } 2\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}) + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + (\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN}) = \vec{0} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) \text{ đúng.}$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 10. Cho hình bình hành $ABCD$ có M là trung điểm của AB . Khẳng định nào sau đây đúng?

$$\text{A. } \overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}.$$

$$\text{B. } \overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC}.$$

$$\text{C. } \overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BC}.$$

$$\text{D. } \overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}.$$

Lời giải.

Xét các đáp án ta thấy bài toán yêu cầu phân tích véc-tơ $\overrightarrow{DM}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{BC}$.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$.

Và M là trung điểm AB nên $2\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}$.

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BC}.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 11. Cho tam giác ABC , điểm M thuộc cạnh AB sao cho $3AM = AB$ và N là trung điểm của AC . Tính $\overrightarrow{MN}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

$$\text{A. } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$

$$\text{B. } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$

$$\text{C. } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

$$\text{D. } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$

Lời giải.

Vì N là trung điểm AC nên

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

Suy ra $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 12. Cho tam giác ABC . Hai điểm M, N chia cạnh BC theo ba phần bằng nhau $BM = MN = NC$. Tính $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

- A. $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
C. $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 13. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC . Tính $\overrightarrow{AB}$ theo $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{BC}$.

- A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$. C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14. Cho tam giác ABC , gọi M là trung điểm AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho $NC = 2NA$. Gọi K là trung điểm của MN . Khi đó

- A. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.
C. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 15. Cho hình bình hành $ABCD$. Tính $\overrightarrow{AB}$ theo $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$.

- A. $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. B. $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.
C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. D. $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$.

Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 16. Cho tam giác ABC và đặt $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Cặp véc-tơ nào sau đây cùng phương?

- A. $2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} + 2\vec{b}$. B. $2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a} - 2\vec{b}$.

C. $5\vec{a} + \vec{b}, -10\vec{a} - 2\vec{b}$.

D. $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}$.

Lời giải.

Để thấy $-10\vec{a} - 2\vec{b} = -2(5\vec{a} + \vec{b}) \Rightarrow$ hai véc-tơ $5\vec{a} + \vec{b}, -10\vec{a} - 2\vec{b}$ cùng phương.

Chọn đáp án **C** □

Câu 17. Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn $\vec{MA} = \vec{MB} + \vec{MC}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Ba điểm C, M, B thẳng hàng.B. AM là phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$.C. A, M và trọng tâm tam giác ABC thẳng hàng.D. $\vec{AM} + \vec{BC} = \vec{0}$.**Lời giải.**

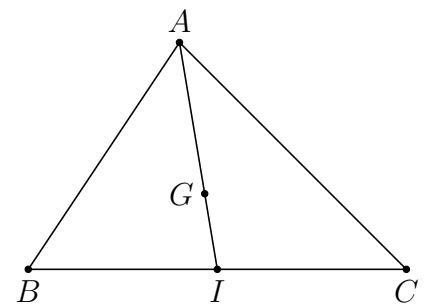
Gọi I, G lần lượt là trung điểm BC và trọng tâm tam giác ABC .

Vì I là trung điểm BC nên $\vec{MB} + \vec{MC} = 2\vec{MI}$.

Theo bài ra, ta có $\vec{MA} = \vec{MB} + \vec{MC}$ suy ra $\vec{MA} = 2\vec{MI} \Rightarrow A, M, I$ thẳng hàng.

Mặt khác G là trọng tâm của tam giác $ABC \Rightarrow G \in AI$.

Do đó, ba điểm A, M, G thẳng hàng.



Chọn đáp án **C** □

Câu 18. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm và I là trung điểm của BC . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\vec{GA} = 2\vec{GI}$.

B. $\vec{IG} = -\frac{1}{3}\vec{IA}$.

C. $\vec{GB} + \vec{GC} = 2\vec{GI}$.

D. $\vec{GB} + \vec{GC} = \vec{GA}$.

Lời giải.

Vì I là trung điểm của BC suy ra $\vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \vec{GB} = \vec{GI} + \vec{IB} \\ \vec{GC} = \vec{GI} + \vec{IC} \end{cases} \Rightarrow \vec{GB} + \vec{GC} = \underbrace{\vec{IB} + \vec{IC}}_{\vec{0}} + 2\vec{GI} = 2\vec{GI}.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 19. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm và M là trung điểm BC . Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\vec{GA} = -\frac{2}{3}\vec{AM}$.

B. $\vec{AB} + \vec{AC} = 3\vec{AG}$.

C. $\vec{GA} = \vec{BG} + \vec{CG}$.

D. $\vec{GB} + \vec{GC} = \vec{GM}$.

Lời giải.

Vì M là trung điểm của BC suy ra $\vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \vec{GB} = \vec{GM} + \vec{MB} \\ \vec{GC} = \vec{GM} + \vec{MC} \end{cases} \Rightarrow \vec{GB} + \vec{GC} = \underbrace{\vec{MB} + \vec{MC}}_{\vec{0}} + 2\vec{GM} = 2\vec{GM}.$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 20. Cho tam giác ABC vuông tại A, M là trung điểm của BC . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\vec{AM} = \vec{MB} = \vec{MC}$.

B. $\vec{MB} = \vec{MC}$.

C. $\vec{MB} = -\vec{MC}$.

D. $\vec{AM} = \frac{\vec{BC}}{2}$.

Lời giải.

Vì M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MC}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 21. Cho tam giác ABC . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$. B. $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{NC}$. C. $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{MN}$. D. $\overrightarrow{CN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Vì M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC .

Suy ra MN là đường trung bình của tam giác $ABC \Rightarrow MN = \frac{1}{2}BC$.

Mà $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{MN}$ là hai véc-tơ cùng hướng nên $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 22. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$. B. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BG}$.
C. $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CG}$. D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.

Lời giải.

Gọi E là trung điểm của $AC \Rightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BE}$. (1)

Mà G là trọng tâm của tam giác $ABC \Rightarrow \overrightarrow{BE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BG}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 2 \cdot \frac{3}{2}\overrightarrow{BG} = 3\overrightarrow{BG}$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 23. Cho tam giác đều ABC và điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{CI} = \frac{\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB}}{3}$. B. $\overrightarrow{CI} = \frac{\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}}{3}$. C. $\overrightarrow{CI} = -\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$. D. $\overrightarrow{CI} = \frac{\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}}{-3}$.

Lời giải.

Từ giả thiết $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB} \Rightarrow B$ là trung điểm của $IA \Rightarrow \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}$.

Lại có $\begin{cases} \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AB} \end{cases}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + 3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + 3(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) = -2\overrightarrow{CA} + 4\overrightarrow{CB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CI} = -\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 24. Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC}$. B. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.
C. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$. D. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$.

Lời giải.

Ta có $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 25. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm là O . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$. B. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.
C. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$. D. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CB}$ (vì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$).

Chọn đáp án **C** □

Câu 26. Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$. C. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{CD}$. D. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC} + \underbrace{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}}_{\vec{0}} = 2\overrightarrow{BC}.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 27. Cho hình bình hành $ABCD$ có M là giao điểm của hai đường chéo. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.
C. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BM}$. D. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BC}.$$

Suy ra điều trên không thể xảy ra vì $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{BC}$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 28. Cho tam giác ABC và điểm M thỏa mãn $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CA}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. M trùng A . B. M trùng B .
C. M trùng C . D. M là trọng tâm của tam giác ABC .

Lời giải.

$$\text{Ta có } 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CA} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MA} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

Suy ra M là trọng tâm của tam giác ABC .

Chọn đáp án **D** □

Câu 29. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Đặt $\overrightarrow{GA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{GB} = \vec{b}$. Hãy tìm m, n để có $\overrightarrow{BC} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

- A. $m = 1, n = 2$. B. $m = -1, n = -2$. C. $m = 2, n = 1$. D. $m = -2, n = -1$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{BG} - (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) = -\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} \text{ (do } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \text{)}.$$

Chọn đáp án **B** □

Câu 30. Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng và điểm M thỏa mãn đẳng thức véc-tơ $\overrightarrow{MA} = x\overrightarrow{MB} + y\overrightarrow{MC}$. Tính giá trị biểu thức $P = x + y$.

- A. $P = 0$. B. $P = 2$. C. $P = -2$. D. $P = 3$.

Lời giải.

Do $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên tồn tại các số thực x, y sao cho

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}, \forall M \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} &= x(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) + y(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}) \\ \Leftrightarrow (1 - x - y)\overrightarrow{AM} &= x\overrightarrow{MB} + y\overrightarrow{MC} \\ \Leftrightarrow (x + y - 1)\overrightarrow{MA} &= x\overrightarrow{MB} + y\overrightarrow{MC}.\end{aligned}$$

Theo bài ra, ta có $\overrightarrow{MA} = x\overrightarrow{MB} + y\overrightarrow{MC}$ suy ra $x + y - 1 = 1 \Leftrightarrow x + y = 2$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 31. Cho hình chữ nhật $ABCD$ và số thực $k > 0$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = k$ là

- A. một đoạn thẳng. B. một đường thẳng. C. một đường tròn. D. một điểm.

Lời giải.

Gọi I là tâm của hình chữ nhật $ABCD$, ta có $\begin{cases} 2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} \\ 2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} \end{cases}, \forall M$.

$$\text{Do đó } |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = k \Leftrightarrow |2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MI}| = k \Leftrightarrow 4|\overrightarrow{MI}| = k \Leftrightarrow |\overrightarrow{MI}| = \frac{k}{4}. \quad (*)$$

Vì I là điểm cố định nên tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $(*)$ là đường tròn tâm I , bán kính $R = \frac{k}{4}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 32. Cho hình chữ nhật $ABCD$ và I là giao điểm của hai đường chéo. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$ là

- A. trung trực của đoạn thẳng AB . B. trung trực của đoạn thẳng AD .
C. đường tròn tâm I , bán kính $\frac{AC}{2}$. D. đường tròn tâm I , bán kính $\frac{AB + BC}{2}$.

Lời giải.

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD .

$$\text{Khi đó } \begin{cases} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{ME} \\ \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MF} \end{cases}, \forall M.$$

$$\text{Do đó } |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| \Leftrightarrow 2|\overrightarrow{ME}| = 2|\overrightarrow{MF}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{ME}| = |\overrightarrow{MF}|. \quad (*)$$

Vì E, F là hai điểm cố định nên từ đẳng thức $(*)$ suy ra tập hợp các điểm M là trung trực của đoạn thẳng EF hay chính là trung trực của đoạn thẳng AD .

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 33. Cho hai điểm A, B phân biệt và cố định, với I là trung điểm của AB . Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$ là

- A. đường tròn tâm I , đường kính $\frac{AB}{2}$. B. đường tròn đường kính AB .
C. đường trung trực của đoạn thẳng AB . D. đường trung trực đoạn thẳng IA .

Lời giải.

Vì I là trung điểm của AB suy ra $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

$$\text{Do đó } |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| \Leftrightarrow |2\overrightarrow{MI}| = |\overrightarrow{BA}| \Leftrightarrow MI = \frac{AB}{2}. \quad (*)$$

Vậy tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức (*) là đường tròn tâm I , bán kính $R = \frac{AB}{2}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 34. Cho hai điểm A, B phân biệt và cố định, với I là trung điểm của AB . Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $|\overrightarrow{2MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}|$ là

- A. đường trung trực của đoạn thẳng AB . B. đường tròn đường kính AB .
C. đường trung trực đoạn thẳng IA . D. đường tròn tâm A , bán kính AB .

Lời giải.

Chọn điểm E thuộc đoạn AB sao cho $EB = 2EA \Rightarrow 2\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$.

Chọn điểm F thuộc đoạn AB sao cho $FA = 2FB \Rightarrow 2\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FA} = \vec{0}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có} \\ |\overrightarrow{2MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}| &\Leftrightarrow |2\overrightarrow{ME} + 2\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EB}| = |2\overrightarrow{MF} + 2\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FA}| \\ &\Leftrightarrow |3\overrightarrow{ME} + \underbrace{2\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB}}_{\vec{0}}| = |3\overrightarrow{MF} + \underbrace{2\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FA}}_{\vec{0}}| \\ &\Leftrightarrow |3\overrightarrow{ME}| = |3\overrightarrow{MF}| \\ &\Leftrightarrow ME = MF. \end{aligned} \quad (*)$$

Vì E, F là hai điểm cố định nên từ đẳng thức (*) suy ra tập hợp các điểm M là trung trực của đoạn thẳng EF .

Do I là trung điểm của AB nên I cũng là trung điểm của EF .

Vậy tập hợp các điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng AB .

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 35. Cho tam giác đều ABC cạnh a , trọng tâm G . Tập hợp các điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}|$ là

- A. đường trung trực của đoạn BC . B. đường tròn đường kính BC .
C. đường tròn tâm G , bán kính $\frac{a}{3}$. D. đường trung trực đoạn thẳng AG .

Lời giải.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, AC . Khi đó $\begin{cases} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI} \\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MJ} \end{cases}$

Theo bài ra, ta có $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow |2\overrightarrow{MI}| = |2\overrightarrow{MJ}| \Leftrightarrow MI = MJ$.

Vậy tập hợp các điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng IJ , cũng chính là đường trung trực của đoạn thẳng BC vì IJ là đường trung bình của tam giác ABC .

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 36. Cho tam giác đều ABC cạnh a . Biết rằng tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $|\overrightarrow{2MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}|$ là đường tròn cố định có bán kính R . Tính bán kính R theo a .

- A. $R = \frac{a}{3}$. B. $R = \frac{a}{9}$. C. $R = \frac{a}{2}$. D. $R = \frac{a}{6}$.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Chọn điểm I sao cho

$$2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 3(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) + \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA} = \vec{0} \Leftrightarrow 9\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow 9\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{CA}.$$

Suy ra điểm I cố định

Ta có

$$\left| 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} \right| = \left| \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} \right| \Leftrightarrow \left| 9\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} \right| = \left| \overrightarrow{AB} \right| \Leftrightarrow 9MI = AB.$$

Vì I là điểm cố định nên tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I , bán kính $R = \frac{AB}{9} = \frac{a}{9}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 37. Cho tam giác ABC . Có bao nhiêu điểm M thỏa mãn $\left| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right| = 3$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. Vô số.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Ta có

$$\left| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right| = 3 \Leftrightarrow \left| \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} - 3\overrightarrow{GM} \right| = 3 \Leftrightarrow 3 \left| \overrightarrow{GM} \right| = 3 \Leftrightarrow GM = 1.$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm G bán kính bằng 1.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 38. Cho tam giác đều ABC cạnh a . Chọn khẳng định đúng.

A. $\left| \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA} \right| = a\sqrt{3}.$

B. $\left| \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA} \right| = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$

C. $\left| \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA} \right| = a.$

D. $\left| \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA} \right| = 0.$

Lời giải.

Gọi M là trung điểm BC . Khi đó $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}.$

Vì tam giác ABC đều $\Rightarrow AM \perp BC \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$

Vậy $\left| \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA} \right| = \left| 2\overrightarrow{AM} \right| = a\sqrt{3}.$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 39. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB . Hỏi đẳng thức nào đúng?

A. $2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}.$

B. $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}.$

C. $\overrightarrow{AI} - 2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IB}.$

D. $\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}.$

Lời giải.

Ta có:

$\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$ nên “ $\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ ” đúng.

$2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ nên “ $2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ ” sai.

$\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{BA} \neq \vec{0}$ nên “ $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ ” sai.

$\overrightarrow{AI} - 2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IB} = 3\overrightarrow{IB} \neq \overrightarrow{IB}$ nên “ $\overrightarrow{AI} - 2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IB}$ ” sai.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 40. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB . Hỏi đẳng thức nào đúng?

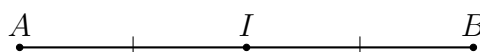
A. $2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}.$

B. $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}.$

C. $\overrightarrow{AI} - 2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IB}.$

D. $\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}.$

Lời giải.



Ta có:

- $\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$ nên $\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ đúng.
- $2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ nên $2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ sai.
- $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{BA} \neq \vec{0}$ nên $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ sai.
- $\overrightarrow{AI} - 2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IB} = 3\overrightarrow{IB} \neq \overrightarrow{IB}$ nên $\overrightarrow{AI} - 2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IB}$ sai.

Chọn đáp án **D**

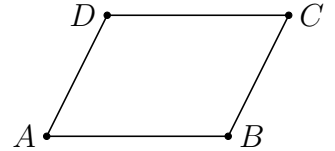
□

Câu 41. Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$. C. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD}$. D. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$.

Lời giải. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$: sai vì $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương $\overrightarrow{BD}$.

- $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$: sai.
- $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD}$: sai vì $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC}$ mới đúng.
- $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$: đúng.



Chọn đáp án **D**

□

Câu 42. Cho G là trọng tâm tam giác ABC và I là trung điểm cạnh BC . Hãy chọn đẳng thức **sai**.

- A. $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GI}$. B. $\overrightarrow{IG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$. C. $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$. D. $\overrightarrow{GA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.

Lời giải.

Ta thấy đẳng thức sai là $\overrightarrow{GA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 43. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O . Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

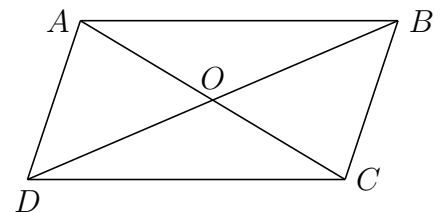
- A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$. B. $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}|$.
C. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

+) Vì $ABCD$ là hình bình hành tâm O nên O là trung điểm hai đường chéo AC, BD . Suy ra

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}; \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}.$$

+) Lại có $ABCD$ là hình bình hành nên theo qui tắc hình bình hành ta có



$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}; \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB} \Rightarrow |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{DB}| = BD.$$

+) Ta có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ (theo quy tắc hình bình hành).

+) Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}; \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \neq \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$.

Chọn đáp án **D**

□

D

Câu 44. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của AB và CD . Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$; $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{c} - \vec{b})$. B. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} + \vec{b})$.
C. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{b} - \vec{d})$. D. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{b} - \vec{c})$.

Lời giải.

Vì P là trung điểm của CD nên

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MP} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AM}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} - \vec{b}).\end{aligned}$$

Chọn đáp án **(A)**

□

A

Câu 45. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là các véc-tơ khác $\vec{0}$ sao cho $\vec{a} = \frac{2018}{2019}\vec{b}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

B. $|\vec{a}| > |\vec{b}|$.

C. $\vec{a}$ và $-\vec{b}$ ngược hướng.

D. $|\vec{a}| = \left|\frac{2018}{2019}\vec{b}\right|$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a} = \frac{2018}{2019}\vec{b} \Rightarrow |\vec{a}| = \left|\frac{2018}{2019}\vec{b}\right| < |\vec{b}|$. Vậy mệnh đề **sai** là “ $|\vec{a}| > |\vec{b}|$ ”.

Chọn đáp án **(B)**

□

B

Câu 46. Cho tam giác ABC , có bao nhiêu điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 1$?

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. Vô số.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC , ta có

$$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 1 \Leftrightarrow |3\overrightarrow{MG}| = 1 \Leftrightarrow MG = \frac{1}{3}.$$

Vậy có vô số điểm M thỏa mãn bài toán, đó là tập hợp các điểm trên đường tròn tâm G , bán kính $R = \frac{1}{3}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

D

Câu 47. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB . Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{MB}$.

B. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

C. $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

D. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$.

Lời giải.

$\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$ là hai véc-tơ ngược hướng, suy ra khẳng định “ $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$ ” là khẳng định sai.

Các khẳng định còn lại là các khẳng định đúng.

Chọn đáp án **(D)**

□

D

Câu 48. Cho tam giác ABC . Gọi I là trung điểm của AB . Tìm điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

A. M là trung điểm của IC .

B. M là trung điểm của IA .

C. M là điểm trên cạnh IC sao cho $IM = 2MC$.

D. M là trung điểm của BC .

Lời giải.

Do I là trung điểm AB nên $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$. Suy ra

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MC} &= \vec{0}\end{aligned}$$

Vậy M là trung điểm IC .

Chọn đáp án **(A)**

□

A

Câu 49. Gọi G là trọng tâm tam giác vuông ABC với cạnh huyền $BC = 12$. Tính độ dài của véc-tơ $\vec{v} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$.

- A. $|\vec{v}| = 2$. B. $|\vec{v}| = 2\sqrt{3}$. C. $|\vec{v}| = 8$. D. $|\vec{v}| = 4$.

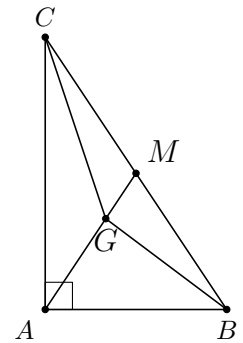
Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC .

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\vec{v} = -\overrightarrow{GA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{MA}$.

Do tam giác ABC vuông tại A nên $MA = \frac{1}{2}BC = 6$.

Vậy $|\vec{v}| = \frac{2}{3}MA = \frac{2}{3} \times 6 = 4$.



Chọn đáp án **(D)**

□

D

Câu 50. Cho tam giác ABC , với M là trung điểm của BC . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM}$.
C. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$. D. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

Ta có

- $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MN} \neq \overrightarrow{MC}$ và khác $\overrightarrow{AB}$, với N là trung điểm của AB .
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM} \neq \overrightarrow{AM}$.
- $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Vậy mệnh đề “ $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$ ” là mệnh đề đúng.

Chọn đáp án **(C)**

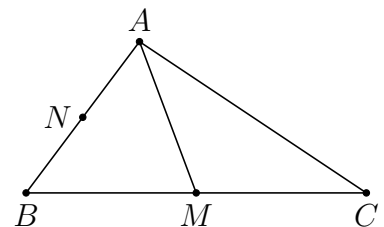
□

C

Câu 51. Cho tam giác ABC , M và N là hai điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN} = x\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$. Xác định x để A, M, N thẳng hàng.

- A. $x = -\frac{1}{2}$. B. $x = -\frac{1}{3}$. C. $x = 2$. D. $x = 3$.

Lời giải.



Ta có

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{CM} = -2\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

và

$$\overrightarrow{CN} = x\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BN} = x\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC}.$$

A, M, N thẳng hàng khi và chỉ khi tồn tại số k sao $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AM}$ (*).

$$(*) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC} = k(-2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow (1+2k)\overrightarrow{AB} + (x-k)\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2k=0 \\ x=k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-\frac{1}{2} \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } x = -\frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **A**

□

A

Câu 52. Cho hai điểm phân biệt A và B . Điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi

- A. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BI}$. B. $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$. C. $IA = IB$. D. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{IA}$.

Lời giải.

Điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$.

Chọn đáp án **C**

□

C

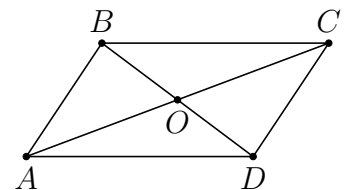
Câu 53. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O . Chọn hệ thức đúng trong các hệ thức sau:

- A. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{OC}$. B. $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OA}$. C. $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BD}$. D. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Lời giải.

Theo quy tắc hình bình hành thì $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

Mà $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{OC}$ nên $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{OC}$.



Chọn đáp án **A**

□

A

Câu 54. Cho hai điểm phân biệt và cố định A, B . Gọi I là trung điểm AB . Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$.

- A. Đường tròn đường kính AB . B. Nửa đường tròn đường kính AB .
C. Đường tròn tâm I , bán kính AB . D. Trung trực của AB .

Lời giải.

$$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| \Leftrightarrow |2\overrightarrow{MI}| = |\overrightarrow{BA}| \Leftrightarrow 2MI = BA \Leftrightarrow MI = \frac{1}{2}AB$$

Vậy tập hợp các điểm M thoả mãn là đường tròn đường kính AB .

Chọn đáp án **A**

□

A

Câu 55. Cho $\triangle ABC$ có G là trọng tâm. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}, \forall M.$ B. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$
 C. $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GA}.$ D. $3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$

Lời giải.

Theo tính chất trọng tâm của một tam giác, ta có

$$\begin{aligned} & G \text{ là trọng tâm } \triangle ABC \\ \Leftrightarrow & \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow & \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}, \forall M. \end{aligned}$$

Vì điểm M tùy ý nên ta có thể chọn $M \equiv A$ và được $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG}.$
 Gọi I là trung điểm của BC , thì ta có $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}.$

Chọn đáp án **C** □

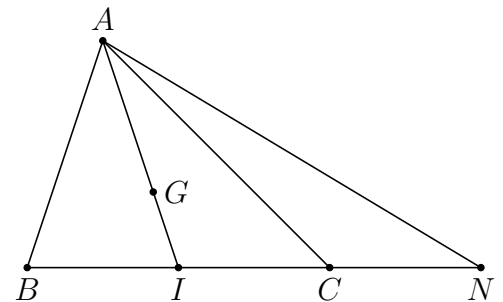
Câu 56. Cho tam giác ABC , N là điểm xác định bởi hệ thức $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, G là trọng tâm tam giác ABC . Hãy tính $\overrightarrow{AC}$ theo $\overrightarrow{AG}$ và $\overrightarrow{AN}.$

- A. $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}.$ B. $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}.$
 C. $\overrightarrow{AC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}.$ D. $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}.$

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của BC . Từ $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ suy ra $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{CN}$
 hay C là trung điểm IN nên $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AN})$ mà $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}.$ Do đó

$$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AN} \right) = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}.$$



Chọn đáp án **A** □

Câu 57. Cho tam giác ABC . Gọi I là điểm thỏa điều kiện $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$ Biểu thị vec-tơ $\overrightarrow{AI}$ theo hai vec-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ là

- A. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$ B. $\overrightarrow{AI} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$
 C. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$ D. $\overrightarrow{AI} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$

Lời giải.

Từ $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ ta suy ra

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{IA} + 2(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) + 3(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0} \\ \Leftrightarrow & 6\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow & \overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **A** □

A

Câu 58. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

B. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = 4\overrightarrow{AB}$.

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$.

D. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

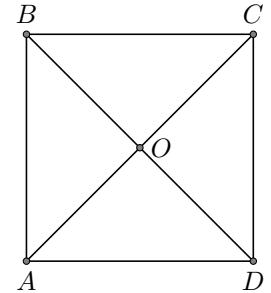
Kiểm tra từng đáp án, ta có:

• $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{AO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

• $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = 2(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) = 2\overrightarrow{AB}$.

• $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AO}$.

• $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CB}$.



Chọn đáp án **(B)**

B

Câu 59. Cho tam giác ABC . Nếu điểm D thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CD}$, với M tùy ý thì D là đỉnh của hình bình hành

A. $ABED$ với E là trung điểm của BC .

B. $ABCD$.

C. $ACED$ với B là trung điểm của EC .

D. $ADCE$ với B là trung điểm của EC .

Lời giải.

Ta có:

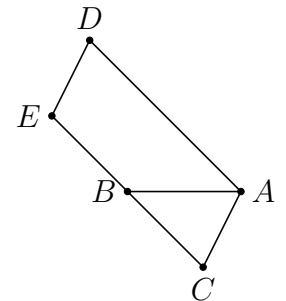
$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CD} &\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) + 3(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = \overrightarrow{CD} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD} \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}) + 2\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD}.\end{aligned}$$

Dựng véc-tơ $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{CB}$. Khi đó ta có $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD}$.

Suy ra, D là đỉnh của hình bình hành $ACED$ với B là trung điểm của EC .

Chọn đáp án **(C)**

C



Câu 60. Cho tam giác ABC có AM là trung tuyến. Gọi I là trung điểm của AM . Chọn mệnh đề đúng

A. $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + 2\overrightarrow{IA} = \vec{0}$.

B. $2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IA} = \vec{0}$.

C. $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IA} = \vec{0}$.

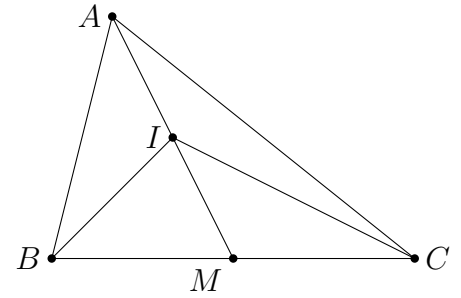
D. $\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} + 3\overrightarrow{IA} = \vec{0}$.

Lời giải.

Ta có M là trung điểm của $BC \Rightarrow \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IM}$.

Mặt khác I lại là trung điểm của đoạn $AM \Rightarrow \overrightarrow{IM} = -\overrightarrow{IA}$.

Do đó $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + 2\overrightarrow{IA} = \vec{0}$



Chọn đáp án **A**

□

Câu 61. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và M là trung điểm của cạnh BC . Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$.

C. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = -3\overrightarrow{MG}$.

Lời giải.

Do G là trọng tâm của tam giác ABC suy ra $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. (1)

Do M là trung điểm của BC suy ra $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. (2)

Ta lại có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{AM}$ (do (2)).

Và $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{MG}$ (do (1)).

Chọn đáp án **D**

□

Câu 62. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{NM}$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

C. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$.

D. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

Công thức hiệu hai véc tơ $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{NM}$.

Quy tắc cộng tam giác $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$.

Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

Ta có $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{DC}$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 63. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm và M là trung điểm của BC . Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GM} = \vec{0}$.

B. $3\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{AM} = \vec{0}$.

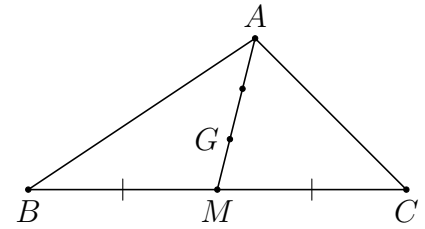
C. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GM} = \vec{0}$.

Lời giải.

Ta có

- $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
- Do $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GM}$ nên $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GM} = \vec{0}$.
- Ta có $3\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AM} \Rightarrow 3\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{AM} = \vec{0}$.
- Do $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GM} = 4\overrightarrow{GM} \neq \vec{0}$
nên đẳng thức $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GM} = \vec{0}$ là sai.



Chọn đáp án **(D)**

D

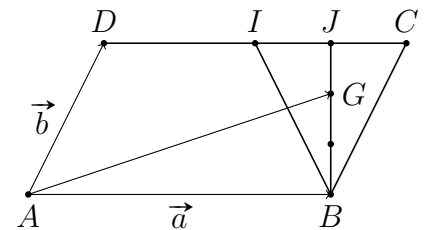
Câu 64. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là trung điểm của CD và G là trọng tâm của tam giác BCI . Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$. Hãy tìm đẳng thức đúng trong các đẳng thức dưới đây.

- A. $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{6}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$. B. $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{6}\vec{a} + \vec{b}$. C. $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b}$. D. $\overrightarrow{AG} = \frac{4}{5}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{BC}) \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{BC}) \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CI}) \\ &= \vec{a} + \frac{1}{3}\left(2\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) \\ &= \frac{5}{6}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}.\end{aligned}$$



Chọn đáp án **(A)**

A

Câu 65. Cho tam giác ABC với trọng tâm G . Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Biểu thị véc-tơ $\overrightarrow{AG}$ theo hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ta được

- A. $\overrightarrow{AG} = \frac{2\vec{a} - \vec{b}}{3}$. B. $\overrightarrow{AG} = \frac{-2\vec{a} + \vec{b}}{3}$. C. $\overrightarrow{AG} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$. D. $\overrightarrow{AG} = \frac{\vec{a} - 2\vec{b}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = -2\vec{a} + \vec{b}$.

Do đó $\overrightarrow{AG} = \frac{-2\vec{a} + \vec{b}}{3}$.

Chọn đáp án **(B)**

B

Câu 66. Biết điểm G là trọng tâm tam giác ABC . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{CG}$. B. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{CG}$. C. $\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{CG}$. D. $\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GC}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{CG}$.

Chọn đáp án **(B)**

B

Câu 67. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Biểu diễn véc-tơ $\overrightarrow{AG}$ qua hai véc-tơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$.

- A. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.
 B. $\overrightarrow{AG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.
 C. $\overrightarrow{AG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.
 D. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của cạnh BC ta có

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) = \frac{2}{3}\left(-\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

Chọn đáp án (B)

□

B

Câu 68. Cho tam giác ABC , M và N là hai điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN} = x\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$. Xác định x để A, M, N thẳng hàng.

- A. $x = 3$.
 B. $x = -\frac{1}{3}$.
 C. $x = 2$.
 D. $x = -\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta phân tích $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB}$:

- $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) - 2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
- $\overrightarrow{CN} = x\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AC} - (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC}$.

Ba điểm A, M, N thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AM}$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{1}{-2} = \frac{x}{1} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (D)

□

D

Câu 69. Cho tam giác ABC có I, D lần lượt là trung điểm của AB, CI . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.
 B. $\overrightarrow{BD} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
 C. $\overrightarrow{BD} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.
 D. $\overrightarrow{BD} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Vì I, D lần lượt là trung điểm của AB, CI nên ta có $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$ và $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CI}$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CI} \\ &= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) \\ &= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}(-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B)

□

B

Câu 70. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

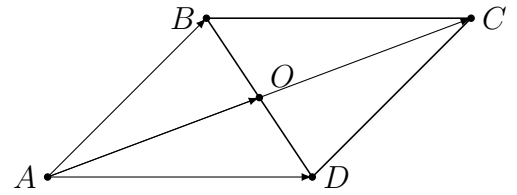
A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$. C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA}$. D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$.

Lời giải.

Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Mặt khác O là trung điểm AC nên $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AO}$.

Vậy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$.



Chọn đáp án **(B)**

□

B

Câu 71. Trên đường thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$. Điểm P được xác định đúng trong hình vẽ nào sau đây?

Hình 1:

Hình 2:

Hình 3:

Hình 4:

A. Hình1.

B. Hình2.

C. Hình3.

D. Hình4.

Lời giải.
 $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

C

Câu 72. Cho tam giác ABC đều, cạnh bằng a , có I, J, K lần lượt là trung điểm BC, CA và AB . Tính giá trị của $|\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{CK}|$.

A. $3a$.

B. $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$.

C. 0 .

D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{CK} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{1}{2}[(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})] = \vec{0}.\end{aligned}$$

Do đó $|\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{CK}| = 0$.

Chọn đáp án **(C)**

□

C

Câu 73. Cho tứ giác $ABCD$, O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Gọi G và G' theo thứ tự là trọng tâm của tam giác OAB và OCD . Khi đó $\overrightarrow{GG'}$ bằng

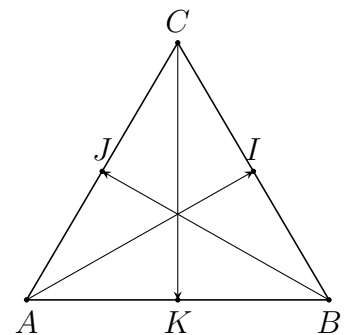
A. $\frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

B. $\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

C. $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

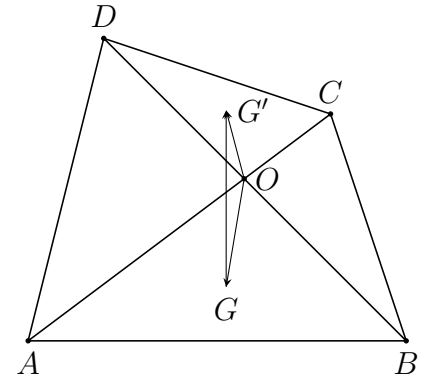
D. $3(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

Lời giải.



Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GG'} &= \overrightarrow{OG'} - \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) - \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}).\end{aligned}$$



Chọn đáp án **(B)**

B

Câu 74. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A, D có $AB = AD = a$ và $CD = 2a$; gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, DC . Tính $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MN}|$.

A. $3a$.

B. $2a$.

C. $a\sqrt{5}$.

D. $a\sqrt{17}$.

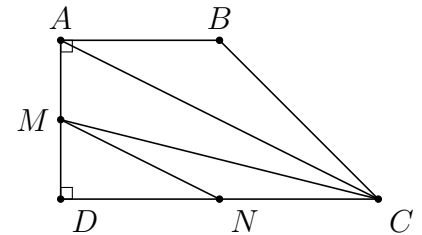
Lời giải.

MN là đường trung bình $\triangle ADC$ nên

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}).$$

Do đó

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MN}| &= |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}| \\ &= 2MC = 2\sqrt{MD^2 + DC^2} \\ &= 2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (2a)^2} \\ &= a\sqrt{17}.\end{aligned}$$



Chọn đáp án **(D)**

D

Câu 75. Cho $\triangle ABC$ đều cạnh a , d là đường thẳng qua A và song song với BC , khi M di động trên d thì giá trị nhỏ nhất của $|\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{MB}|$ là

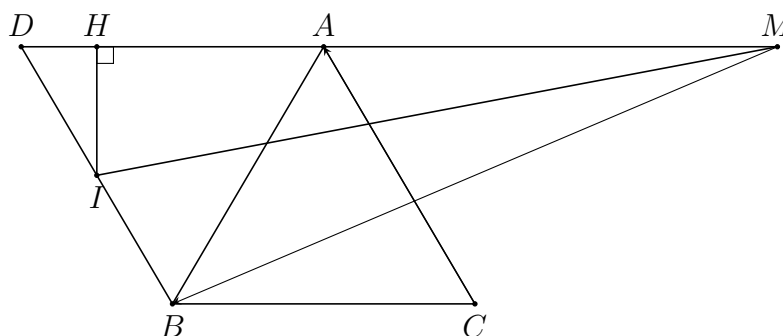
A. $a\sqrt{3}$.

B. $2a\sqrt{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.



Kẻ hình bình hành $ACBD$. Gọi I là trung điểm BD , khi đó, ta có

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{MB}| &= |\overrightarrow{CA} + 2(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IM})| = |\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IM}| \\ &= |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{IM}| = |\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{IM}| \\ &= 2|\overrightarrow{IM}| = 2IM \geq 2IH = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi M trùng với điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm I trên đường thẳng d .

Chọn đáp án **(D)**

□

D

Câu 76. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC , I là trung điểm của cạnh BC . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
- B. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ với M là điểm bất kì.
- C. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.
- D. $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GI}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GI}$ là hai vectơ ngược hướng và $GA = 2GI$ nên $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GI}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

D

Câu 77. Cho tam giác ABC , M và N là trung điểm của AB, AC . Ta xét các đẳng thức sau

$$(I) \quad 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}. \quad (II) \quad \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{NB} = \frac{3\overrightarrow{CB}}{2}.$$

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

- A. (I) đúng, (II) đúng. B. (I) sai, (II) sai. C. (I) sai, (II) đúng. D. (I) đúng, (II) sai.

Lời giải.

Ta có $2\overrightarrow{MN} = 2(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}) = 2\overrightarrow{AN} - 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow$ (I) đúng.

Do M là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$.

Do N là trung điểm của AC nên $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) \Rightarrow \overrightarrow{NB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB})$.

Suy ra $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{NB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CB}) = \frac{3\overrightarrow{CB}}{2} \Rightarrow$ (II) đúng.

Chọn đáp án **(A)**

□

A

Câu 78. Cho ba điểm M, N, P thỏa $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{MP}$. Tìm k để N là trung điểm của MP .

- A. 2. B. -1. C. $\frac{1}{2}$. D. -2.

Lời giải.

N là trung điểm của MP nên $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NP}$. Mà $\overrightarrow{NP} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{MP}$.

Suy ra $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{MP}$ hay $k = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **C**

□

C

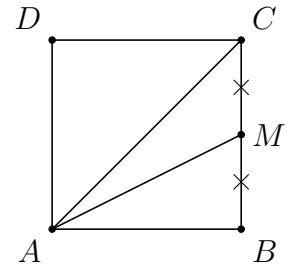
Câu 79. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Khi đó $|\vec{AB} + \vec{AC}|$ bằng

- A. $a\sqrt{5}$. B. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. C. $2a$. D. $a\sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC , ta có

$$\begin{aligned} |\vec{AB} + \vec{AC}| &= |2\vec{AM}| = 2AM \\ &= 2\sqrt{AB^2 + BM^2} \\ &= a\sqrt{5}. \end{aligned}$$



Chọn đáp án **A**

□

A

Câu 80. Nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\vec{AG} = \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{2}$. B. $\vec{AG} = \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{3}$.
C. $\vec{AG} = \frac{3(\vec{AB} + \vec{AC})}{2}$. D. $\vec{AG} = \frac{2(\vec{AB} + \vec{AC})}{3}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC .

Do G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên $AG = \frac{2}{3}AM \Rightarrow \vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AM}$.

Vì M là trung điểm BC nên $\vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$.

Do đó, $\vec{AG} = \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{3}$.

Chọn đáp án **B**

□

B

Câu 81. Cho tam giác ABC . Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 3MC$. Khi đó, biểu diễn $\vec{AM}$ theo $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$ là

- A. $\vec{AM} = -\frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AC}$. B. $\vec{AM} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AC}$.
C. $\vec{AM} = -\frac{1}{4}\vec{AB} - \frac{3}{4}\vec{AC}$. D. $\vec{AM} = \frac{1}{4}\vec{AB} - \frac{3}{4}\vec{AC}$.

Lời giải.

Ta có: $\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BM}$.

Ta có: M nằm trên cạnh BC sao cho $MB = 3MC \Rightarrow \vec{BM} = \frac{3}{4}\vec{BC}$.

Do đó, $\vec{AM} = \vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{BC} = \vec{AB} + \frac{3}{4}(\vec{AC} - \vec{AB}) = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AC}$.

Chọn đáp án **B**

□

B

Câu 82. Cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M trong mặt phẳng (ABC) thỏa mãn đẳng thức $|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}| = 3$ là

- A. đường tròn có tâm là trọng tâm của tam giác ABC và bán kính bằng 3.
 B. đường tròn đi qua trọng tâm của tam giác ABC .
 C. đường tròn có tâm là trọng tâm của tam giác ABC và bán kính bằng 1.
 D. đường tròn có tâm là trọng tâm của tam giác ABC và bán kính bằng 9.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , ta có

$$3 = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |3\overrightarrow{MG}|,$$

hay $MG = 1$. Vậy tập các điểm M là đường tròn tâm G , bán kính 1.

Chọn đáp án **C**

□

C

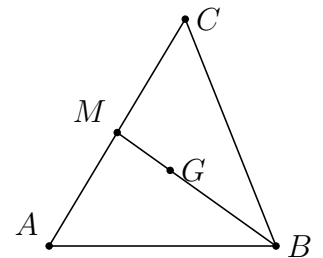
Câu 83. Cho G là trọng tâm tam giác ABC . Trong các mệnh đề dưới đây, tìm mệnh đề đúng.

- A. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BG}$.
 B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$.
 C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$.
 D. $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CG}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm AC . Khi đó,

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BM} = 2 \cdot \frac{3}{2}\overrightarrow{BG} = 3\overrightarrow{BG}.$$



Chọn đáp án **A**

□

A

Câu 84. Trên đoạn thẳng AB cho trước, lấy điểm M sao cho $AM = 3MB$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định dưới đây.

- A. $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB}$.
 B. $\overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{AM}$.
 C. $\overrightarrow{AB} = -4\overrightarrow{MB}$.
 D. $\overrightarrow{MA} = -3\overrightarrow{MB}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{MB}$ cùng hướng. Do đó $AM = 3MB \Rightarrow \overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB} \Rightarrow \overrightarrow{MA} = -3\overrightarrow{MB}$.

Chọn đáp án **D**

□

D

Câu 85. Cho tam giác ABC , M là trung điểm BC . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$.
 B. $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$.
 C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$.
 D. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Lời giải.

Theo công thức trung điểm thì với M là trung điểm BC và với mọi điểm A ta luôn có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$.

Chọn đáp án **A**

□

A

Câu 86. Cho hình chữ nhật $ABCD$, M là điểm tùy ý. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD}$.
 B. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD}$.

C. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.

D. $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.

Lời giải.Gọi O là tâm hình chữ nhật $\Rightarrow O$ là trung điểm của AC và BD .Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MO} = 2\overrightarrow{MO}$.Chọn đáp án **C**

□

C

Câu 87. Cho tam giác ABC có M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Đẳng thức nào sau đây đúng.

A. $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$.

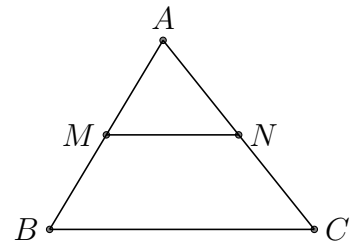
B. $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AM}$.

C. $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CN}$.

D. $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}$.

Lời giải.Từ giả thiết suy ra MN là đường trung bình của tam giác. Do đó

$$\begin{cases} MN \parallel BC \\ 2MN = BC \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}.$$

Chọn đáp án **D**

□

D

Câu 88. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}|$.

A. $2a\sqrt{2}$.

B. $3a$.

C. $2a + a\sqrt{2}$.

D. $3a\sqrt{2}$.

Lời giải.Ta có $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}| = 2|\overrightarrow{AC}| = 2AC = 2a\sqrt{2}$.Vậy $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}| = 2a\sqrt{2}$.Chọn đáp án **A**

□

A

Câu 89. Cho hình bình hành $ABCD$, M là trung điểm của AB , DM cắt AC tại I . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

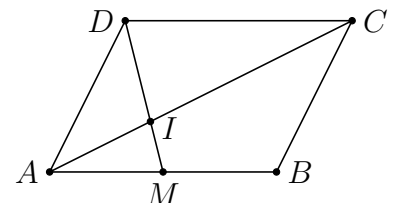
C. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có

$$\frac{IA}{IC} = \frac{IM}{ID} = \frac{AM}{DC} = \frac{1}{2} \Rightarrow IA = \frac{1}{3}AC \Rightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

Chọn đáp án **B**

□

B

Câu 90. Cho tam giác ABC . Điểm I thỏa $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$. Chọn mệnh đề đúng.

A. $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$.

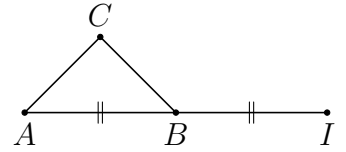
B. $\overrightarrow{CI} = \frac{\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}}{3}$.

C. $\overrightarrow{CI} = -\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$.

D. $\overrightarrow{CI} = \frac{\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}}{-3}$.

Lời giải.

$\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow B$ là trung điểm của AI
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CI} = -\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$.



Chọn đáp án **C**

C

Câu 91. Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng a . Độ dài của $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ bằng

A. $a\sqrt{3}$.

B. $2a$.

C. a .

D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC .

$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |2\overrightarrow{AM}| = 2AM = a\sqrt{3}$.

Chọn đáp án **A**

A

Câu 92. Cho tam giác ABC có M, N lần lượt nằm trên các cạnh AB, AC sao cho $3AM = AB$, $AN = 2NC$. Gọi K là trung điểm của MN . Hãy biểu diễn véc-tơ $\overrightarrow{BK}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{BK} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{BK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{3}\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{BK} = -\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{BK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{5}{3}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Từ cách xác định điểm M, N suy ra $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Vì K là trung điểm của MN nên

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

Do đó, $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AB} = -\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Chọn đáp án **C**

C

Câu 93. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(1; 0)$, $B(0; 5)$, $C(-3; -5)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc trục Oy sao cho $|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. $M(0; 5)$.

B. $M(0; 6)$.

C. $M(0; -6)$.

D. $M(0; -5)$.

Lời giải.

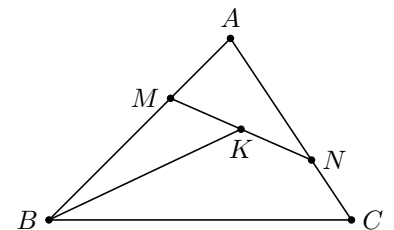
Vì M thuộc trục Oy nên $M(0; m)$. Khi đó, $\overrightarrow{MA} = (1; -m)$, $\overrightarrow{MB} = (0; 5 - m)$, $\overrightarrow{MC} = (-3; -5 - m)$.

Suy ra $3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} = (-9; -30 - 5m)$.

Do đó, $|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = \sqrt{9^2 + (30 + 5m)^2} \geq 9$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $30 + 5m = 0 \Leftrightarrow m = -6$.

Vậy $|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất là 9 khi $M(0; -6)$.



Chọn đáp án **C**

□

C

Câu 94. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(-2; 5)$, $B(2; 2)$, $C(10; -5)$. Tìm điểm $E(m; 1)$ sao cho tứ giác $ABCE$ là hình thang có một đáy là CE .

- A. $E(-1; 1)$. B. $E(0; 1)$. C. $E(2; 1)$. D. $E(-2; 1)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; -3)$ và $\overrightarrow{CE} = (m - 10; 6)$.

Vì hình thang có đáy là CE nên $\overrightarrow{CE}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$.

Do đó,

$$\begin{aligned} & \exists k \in \mathbb{R}: \overrightarrow{CE} = k\overrightarrow{AB} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} m - 10 = 4k \\ 6 = -3k \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} m = 2 \\ k = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $E(2; 1)$.

Chọn đáp án **C**

□

C

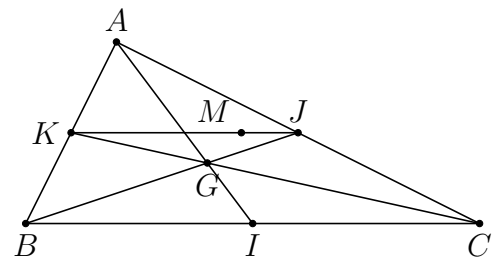
Câu 95. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm BC, CA, AB . Biết điểm M thỏa $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA}) = \vec{0}$. Phát biểu nào dưới đây đúng?

- A. M ở trên đoạn JK sao cho $MI = 3MK$. B. M ở trên đoạn JK sao cho $MJ = 3MK$.
C. M ở trên đoạn IK sao cho $IK = 2MI$. D. M ở trên đoạn JK sao cho $JK = 4MJ$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA}) = \vec{0} \\ \Leftrightarrow & 2\overrightarrow{MK} + 3(2\overrightarrow{MJ}) = \vec{0} \\ \Leftrightarrow & \overrightarrow{MK} + 3\overrightarrow{MJ} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow & \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JK} + 3\overrightarrow{MJ} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow & \overrightarrow{JK} = -4\overrightarrow{MJ}. \end{aligned}$$



Vậy M ở trên đoạn JK sao cho $JK = 4MJ$.

Chọn đáp án **D**

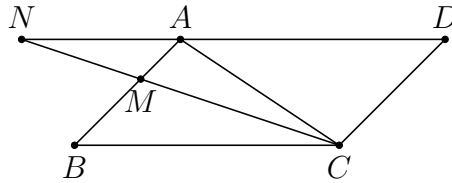
□

D

Câu 96. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Hai điểm M, N lần lượt nằm trên hai đường thẳng AB và AD . Giả sử $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AN} = y\overrightarrow{AD}$ với $x, y \neq 0$. Khi M, N, C thẳng hàng, tìm phát biểu đúng trong các phát biểu dưới đây?

- A. $x + y = xy$. B. $x + y = 2xy$. C. $x + y = 3xy$. D. $x + y = 4xy$.

Lời giải.



Ta có $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = (x-1)\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

Và $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + y\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + (y-1)\overrightarrow{AD}$.

Để C, M, N thẳng hàng thì $\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CN}$ cùng phương, do đó ta có $\frac{x-1}{-1} = \frac{-1}{y-1} \Leftrightarrow x+y=xy$.

Chọn đáp án **A**

□

A

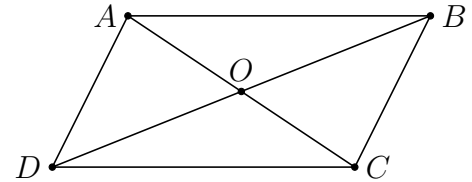
Câu 97. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BD}$. B. $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{CD}$. C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DA}$. D. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BO}$.

Lời giải.

Ta có

- $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AD} \neq \overrightarrow{BD}$.
- $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \neq \overrightarrow{CD}$.
- $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$.
- $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + 2\overrightarrow{AO} = 3\overrightarrow{AO} \neq \overrightarrow{BO}$.



Chọn đáp án **C**

□

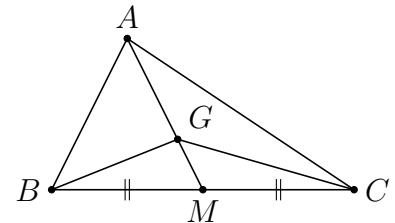
C

Câu 98. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và M là trung điểm của BC . Đẳng thức nào sau đây sai?

- A. $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GM} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.
C. $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MG}$. D. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GM} = 2\overrightarrow{GM} - \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GM} \neq \vec{0}$.

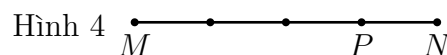
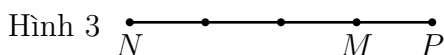
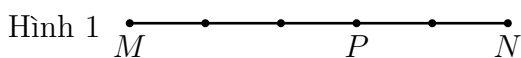


Chọn đáp án **A**

□

A

Câu 99. Điểm P được xác định $\overrightarrow{NP} = 4\overrightarrow{MP}$. Điểm P được xác định đúng trong hình vẽ nào sau đây?



- A. Hình 1. B. Hình 2. C. Hình 3. D. Hình 4.

Lời giải.

Vì $\overrightarrow{NP} = 4\overrightarrow{MP}$ nên $NP = 4MP$ và $\overrightarrow{NP}$ cùng hướng với $\overrightarrow{MP}$. Vậy chọn Hình 3.

Chọn đáp án **C**

□

C

Câu 100. Cho tam giác ABC cân tại A có cạnh $AB = 5$ cm, $BC = 8$ cm. Tính độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$.

A. 8 cm.

B. 6 cm.

C. 3 cm.

D. 10 cm.

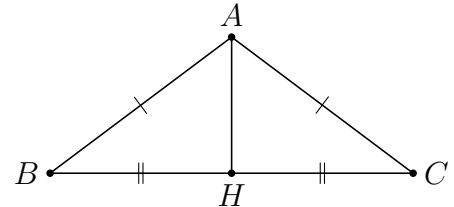
Lời giải.

Ta có $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}| = |2\overrightarrow{HA}| = 2HA$ (với H là trung điểm BC).

Tam giác ABC cân tại A nên AH cũng là đường cao, do đó

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3.$$

Vậy $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}| = 2HA = 6$ cm.

Chọn đáp án **B**

□

B

Câu 101. Cho hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ cùng đặt vào điểm O , có phương vuông góc nhau và cùng có cường độ 100N. Hỏi hợp của hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ có cường độ bao nhiêu N?

A. 100.

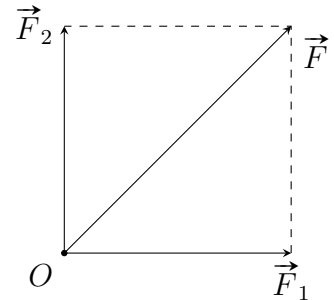
B. 200.

C. $100\sqrt{2}$.D. $100\sqrt{3}$.**Lời giải.**

Gọi $\vec{F}$ là hợp lực của hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$.

Suy ra $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ (quy tắc hình bình hành).

Vậy $|\vec{F}| = |\vec{F}_1| \cdot \sqrt{2} = 100\sqrt{2}$.

Chọn đáp án **C**

□

C

Câu 102. Cho tam giác ABC đều cạnh a , có G là trọng tâm, khi đó $|\overrightarrow{AG}|$ bằng

A. $a\sqrt{3}$.B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.C. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.D. a .**Lời giải.**

Gọi H là trung điểm của BC , ta có $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $|\overrightarrow{AG}| = AG = \frac{2}{3}AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án **B**

□

B

Câu 103. Cho phương trình $2x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m + 3 = 0$. Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình. Tìm GTLN của $A = |x_1x_2 - 2(x_1 + x_2)|$.

A. 4.

B. 9.

C. 8.

D. $\frac{9}{2}$.

(Phạm Hồng Quang Tên FB: Quang Phạm - phuongthu081980@gmail.com)

Lời giải.

Phương trình $2x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m + 3 = 0$ (1).

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = -(m^2 + 6m + 5) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 6m + 5 \leq 0 \Leftrightarrow -5 \leq m \leq -1$.

Theo Vi-et ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -(m+1) \\ x_1 x_2 = \frac{1}{2}(m^2 + 4m + 3) \end{cases}.$$

Ta có $A = \frac{1}{2}|m^2 + 8m + 7|$.

Xét hàm số $f(m) = m^2 + 8m + 7$ có BBT trên $[-5; -1]$ là

m	-5	-4	-1
$f(m)$	-8	-9	0

Suy ra $\max_{[-5; -1]} |f(m)| = 9$ do đó $\max A = \frac{9}{2}$ khi $m = -4$.

Chọn đáp án **D**

□

D

Câu 104. Cho hàm số $y = x^2 - 2x + 2\sqrt{x^2 - 2x} + m^2 - 2018m$. Tổng S tất cả các giá trị nguyên dương của m thỏa mãn điều kiện $T \leq 2019$ (với T là giá trị nhỏ nhất của hàm số khi $x \geq 2$) bằng

- A. $S = 2019 \cdot 1010$. B. $S = 2019 \cdot 1009$. C. $S = 2019 \cdot 2018$. D. $S = 2021 \cdot 1009$.

(Nguyễn Thị Phương Thu, FB: Buisonca Bui, phuongthu081980@gmail.com)

Lời giải.

Ta có $y = x^2 - 2x + 2\sqrt{x^2 - 2x} + m^2 - 2018m$.

Vì $x \geq 2 \Rightarrow t = \sqrt{x^2 - 2x} \geq 0$.

Ta có $y = t^2 + 2t + m^2 - 2018m \geq m^2 - 2018m, \forall t \geq 0$.

Suy ra $T = \min_{[0; +\infty)} y = m^2 - 2018m$.

$T \leq 2019 \Leftrightarrow m^2 - 2018m \leq 2019$.

Do m nguyên dương nên $1 \leq m \leq 2019, m \in \mathbb{N}$.

Do đó $S = 1 + 2 + \dots + 2019 = 2019 \cdot 1010$.

Chọn đáp án **A**

□

A

Câu 105. Cho hàm số $y = f(x) = mx^2 - 2x - m - 1$ (C). Khi giá trị lớn nhất của hàm số (C) đạt giá trị nhỏ nhất thì m thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(0; 3)$. B. $(-2; 0)$. C. $(-\infty; -2)$. D. $(3; +\infty)$.

(Nguyễn Thị Phương Thu, quangnam68@gmail.com)

Lời giải.

Xét các trường hợp:

- $m \geq 0$ thì hàm số không có GTLN.

- $m < 0$ Ta có BBT

x	$-\infty$	$\frac{1}{m}$	$+\infty$
y	$-\infty$	$-\frac{m^2 + m + 1}{m}$	$-\infty$

Từ BBT ta có GTLN là $-\frac{m^2 + m + 1}{m}$.

$$\text{Vì } m < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{m} > 0 \\ -m > 0 \end{cases} \Rightarrow \left(-\frac{1}{m}\right) + (-m) \geq 2 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{m}\right) + (-m) - 1 \geq 1.$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \left(-\frac{1}{m}\right) = (-m) \Leftrightarrow m = -1$ do $m < 0$.

Vậy GTNN bằng 1 khi và chỉ khi $m = -1$.

Chọn đáp án (B)

□

B

Câu 106. Cho hàm số $f(x) = |x^2 - 2x + m|$ với tham số m thuộc đoạn $[-2018; 2018]$. Gọi M là giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x + \frac{1}{x})$ trên tập $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Số giá trị m nguyên để $M \geq 2$ là

- A. 2017. B. 2018. C. 4036. D. 2016.

(Nguyễn Quang Nam, FB: Quang Nam, Samnk.thptnhuthanh@gmail.com)

Lời giải.

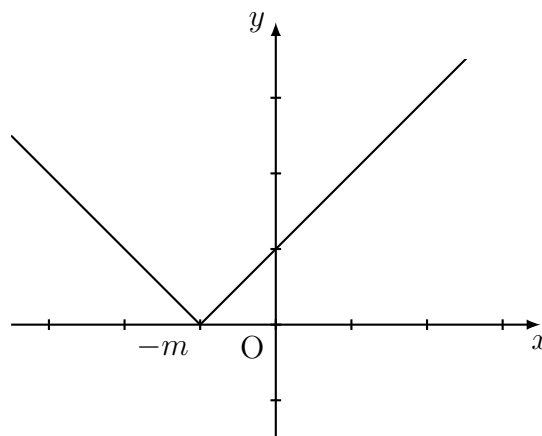
Đặt $t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow |t| \geq 2$.

Xét hàm số $f(t) = |t^2 - 2t + m|$ với $t \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Đặt $a = t^2 - 2t$ với $t \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$ suy ra $a \geq 0$.

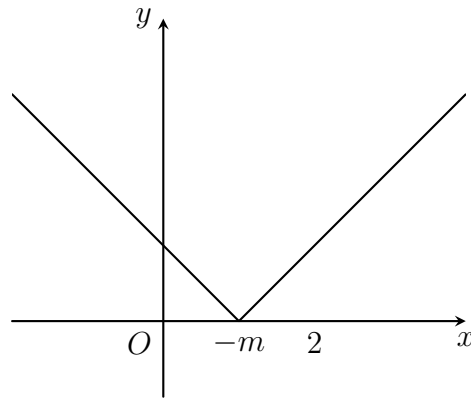
Xét hàm số $g(a) = |a + m|$. Khi đó $M = \min g(a)$ với $a \geq 0$.

- Nếu $-m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 0$.



Dựa vào đồ thị có $M = g(0) = |m| = m \geq 2 \Rightarrow m = \{2; 3; \dots; 2018\}$.

- Nếu $-m > 0 \Leftrightarrow m < 0$.



Dựa vào đồ thị có $M = g(-m) = 0 < 2$ không thỏa mãn bài toán.

Vậy có 2017 giá trị m thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án **A**

□

A

Câu 107. Cho hàm số $y = f(x) = x^2 + 6x + 5$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(f(x))$, với $-3 \leq x \leq 0$. Tổng $S = m + M$.

A. $S = 1$.

B. $S = 56$.

C. $S = 57$.

D. $S = 64$.

(Nguyễn Khắc Sâm Tên, anhtu82t@gmail.com)

Lời giải.

Cách 1

Ta có $f(f(x)) = f^2(x) + 6f(x) + 5$.

Đặt $t = f(x)$, xét hàm $t = f(x) = x^2 + 6x + 5$ trên $[-3; 0]$.

Ta có bảng biến thiên

x	-3	0
$t = x^2 + 6x + 5$	-4	5

Từ bảng biến thiên ta được $-4 \leq t \leq 5$.

Khi đó hàm số được viết lại $f(t) = t^2 + 6t + 5$.

Lập bảng biến thiên của hàm $f(t) = t^2 + 6t + 5$ trên $[-4; 5]$.

x	-4	-3	0
$f(t) = t^2 + 6t + 5$	-3	-4	60

Ta được $m = -4$, $M = 60$. Vậy $S = 56$.

Cách 2

Tìm min, max của $y = f(f(x)) = f^2(x) + 6f(x) + 5$ trên $x \in \mathbb{K} = [-3; 0]$ không cần BBT.

Ta có $y' = 2f(x) \cdot f'(x) + 6f'(x)$.

Xét

$$\begin{aligned} y' = 0 &\Leftrightarrow 2f(x) \cdot f'(x) + 6f'(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = -3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 6 = 0 \\ x^2 + 6x + 5 = -3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \in \mathbb{K} \\ x = -2 \in \mathbb{K} \\ x = -4 \notin \mathbb{K}. \end{cases} \end{aligned}$$

Khi đó

- $y(-3) = f(f(-3)) = f(-4) = -3$.
- $y(-2) = f(f(-2)) = f(-3) = -4$.
- $y(0) = f(f(0)) = f(5) = 60$.

Vậy $\begin{cases} \min y = -4 = m \\ \max y = 60 = M \end{cases}$. Khi đó $S = M + m = 56$.

Chọn đáp án **(B)**

□

B

Câu 108. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$, thỏa mãn $|f(x)| \leq 1, \forall x \in [-1; 1]$ và biểu thức $\frac{8}{3}a^2 + 2b^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $P = 5a + 11b + c$, biết $a > 0$

- A. $P = 10$. B. $P = 9$. C. $P = 16$. D. $P = 12$.

(Đồng Anh Tú, trungkien1980vn@gmail.com)

Lời giải.

Thay $x = -1, x = 0, x = 1$ vào hàm số $f(x)$, ta được $\begin{cases} -1 \leq c \leq 1 & (1) \\ -1 \leq a + b + c \leq 1 & (2) \\ -1 \leq a - b + c \leq 1 & (3) \end{cases}$

Từ (2), (3) ta có $\begin{cases} -1 - c \leq a + b \leq 1 + c \\ -1 - c \leq a - b \leq 1 + c \end{cases}$, kết hợp với (1), ta được $\begin{cases} -2 \leq a + b \leq 2 \\ -2 \leq a - b \leq 2 \end{cases}$.

Suy ra $\begin{cases} a^2 + 2ab + b^2 \leq 4 \\ a^2 - 2ab + b^2 \leq 4 \end{cases}$. Khi đó $a^2 + b^2 \leq 4$.

Vậy $\frac{8}{3}a^2 + 2b^2 = \frac{8}{3}(a^2 + b^2) - \frac{2}{3}b^2 \leq \frac{8}{3}(a^2 + b^2) \leq \frac{32}{3}$.

Nên $\frac{8}{3}a^2 + 2b^2$ lớn nhất khi $b = 0, a = 2$ thay vào (2), ta được $-3 \leq c \leq -1$ kết hợp với (1) thì $c = -1$.

Thử lại với $b = 0, a = 2, c = -1$ thỏa mãn $|f(x)| \leq 1, \forall x \in [-1; 1]$.

Vậy $b = 0, a = 2, c = -1$ nên $P = 9$.

Chọn đáp án **B**

□

B

Câu 109. Cho Parabol $(P): y = ax^2$, trong đó a là một tham số dương, và đường thẳng $d: y = 2x - 1$. Biết đường thẳng d cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B . Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của các điểm A, B trên trục hoành. Có bao nhiêu giá trị của tham số a để hình thang $ABKH$ có diện tích bằng $6\sqrt{2}$?

A. 1.

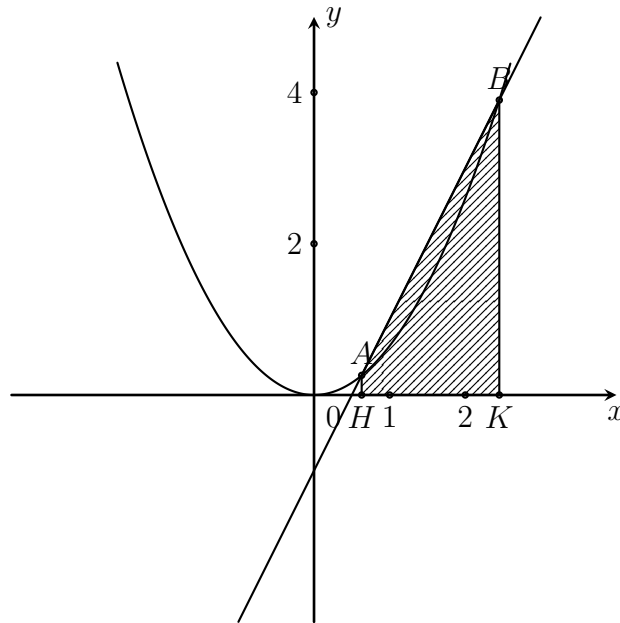
B. 2.

C. 3.

D. 4.

(Nguyễn Trung Kiên)

Lời giải.



Phương trình hoành độ giao điểm là $ax^2 = 2x - 1 \Leftrightarrow ax^2 - 2x + 1 = 0$.

Điều kiện: $\Delta' = 1 - a > 0 \Rightarrow 0 < a < 1$.

Theo định lý Viet:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{1}{a} \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} (AH + BK) HK \\ &= \frac{1}{2} (ax_1^2 + ax_2^2) |x_1 - x_2| \\ &= \frac{a}{2} [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2] \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} \\ &= \frac{a}{2} \left[\frac{4}{a^2} - \frac{2}{a} \right] \sqrt{\frac{4}{a^2} - \frac{4}{a}} \\ &= 2 \left(\frac{2}{a} - 1 \right) \sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a}} \\ &= 6\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Đặt $t = \frac{1}{a}$, $t > 1$. Ta được

$$\begin{aligned}(2t-1)\sqrt{t^2-t} &= 3\sqrt{2} \Leftrightarrow (2t-1)^2(t^2-t) = 18 \\ &\Leftrightarrow 4t^4 - 8t^3 + 5t^2 - t - 18 = 0 \\ &\Leftrightarrow (t+1)(t-2)(4t^2+5t+9) = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 2.\end{aligned}$$

Vậy chỉ có một giá trị duy nhất thỏa là $a = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

A

Câu 110. Cho ba điểm không thẳng hàng A, B, C và M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CM}$. Chọn khẳng định đúng.

A. $ABMC$ là hình bình hành.

B. $ABCM$ là hình bình hành.

C. M là trọng tâm của tam giác ABC .

D. CM là trung tuyến của tam giác ABC .

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CM} \Rightarrow \begin{cases} AB \parallel CM \\ AB = CM \end{cases} \Rightarrow ABMC$ là hình bình hành.

Chọn đáp án **(A)**

□

A

Câu 111. Cho hai điểm A, B phân biệt và điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB}$. Khi đó,

A. M là trung điểm AB .

B. M là điểm đối xứng với A qua B .

C. M là điểm đối xứng với B qua A .

D. M trùng với A .

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \begin{cases} MA = AB \\ M, A, B \text{ thẳng hàng} \end{cases} \Rightarrow A$ là trung điểm của MB hay M đối xứng với B qua A .

Chọn đáp án **(C)**

□

C

Câu 112. Cho tam giác ABC và điểm M tùy ý. Đẳng thức nào sau đây **không** suy ra được G là trọng tâm tam giác ABC ?

A. $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$.

B. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

C. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{GM}$.

D. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{GM}$ suy ra M là trọng tâm tam giác ABC .

Chọn đáp án **(C)**

□

C

Câu 113. Cho đoạn thẳng AB và điểm M tùy ý. Đẳng thức nào sau đây **không** suy ra được I là trung điểm đoạn thẳng AB ?

A. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

B. $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$.

C. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

D. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{IM}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{IM}$ suy ra M là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Chọn đáp án **(D)**

□

D

Câu 114. Cho tam giác ABC , điểm I là trung điểm BC . Điểm G có tính chất nào sau đây thì G là trọng tâm tam giác ABC ?

A. $\overrightarrow{GI} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$.

B. $GA = 2GI$.

C. $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$.

Lời giải.

Ta có G là trọng tâm tam giác ABC suy ra $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{BG} - \overrightarrow{CG} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

C

Câu 115. Cho hai điểm phân biệt A và B . Điều kiện cần và đủ để I là trung điểm của đoạn thẳng AB là

A. $IA = IB$.

B. $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$.

C. $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$.

D. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BI}$.

Lời giải.

Ta có I là trung điểm AB khi và chỉ khi $IA = IB$ và $\overrightarrow{IA}$ ngược hướng $\overrightarrow{IB}$ hay $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

B

Câu 116. Cho hai điểm phân biệt A, B và hai số thực α, β khác 0 thỏa mãn $\alpha + \beta = 0$. Có bao nhiêu điểm M thỏa mãn $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \vec{0}$?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

Ta có $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \alpha\overrightarrow{MA} - \alpha\overrightarrow{MB} = \alpha(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = \alpha\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ (Vô lí vì $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ và $\alpha \neq 0$).

Vậy không có điểm M nào thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án **(A)**

□

A

Câu 117. Cho hai điểm phân biệt A, B và hai số thực α, β thỏa mãn $\alpha + \beta \neq 0$. Có bao nhiêu điểm M thỏa mãn $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \vec{0}$?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{MA} + (-\alpha + \beta + \alpha)\overrightarrow{MB} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \alpha(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) + (\beta + \alpha)\overrightarrow{MB} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{BA} + (\beta + \alpha)\overrightarrow{MB} &= \vec{0}. \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} &= -\frac{\alpha}{\beta + \alpha}\overrightarrow{BA}.\end{aligned}$$

Vậy có 1 điểm M nào thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án (B)

□

B

Câu 118. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ và không cùng phương. Biết hai véc-tơ $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + (x - 1)\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là

A. $\frac{1}{2}$.

B. $-\frac{3}{2}$.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Hai véc-tơ $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + (x - 1)\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{x - 1}{-3} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (C)

□

C

Câu 119. Tìm điểm K sao cho $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{CB}$.

A. K là trung điểm đoạn thẳng AB .

B. K là trọng tâm tam giác ABC .

C. K là trung điểm của đoạn thẳng CB .

D. K thuộc đường tròn tâm C bán kính AB .

Lời giải.

Ta có

$$\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}.$$

Suy ra K là trọng tâm tam giác ABC .

Chọn đáp án (B)

□

B

Câu 120. Trong mặt phẳng Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ có $A(2; -3)$, $B(4; 5)$ và $G\left(0; -\frac{13}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác ADC . Tọa độ đỉnh D là

A. $D(2; 1)$.

B. $D(-1; 2)$.

C. $D(-2; -9)$.

D. $D(2; 9)$.

Lời giải.

Cách 1: Gọi $D(a; b)$. Vì $G\left(0; -\frac{13}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác ADC nên

$$\overrightarrow{BD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BG} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 4 = \frac{3}{2}(0 - 4) \\ b - 5 = \frac{3}{2}\left(-\frac{13}{3} - 5\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -9 \end{cases} \Rightarrow D(-2; -9).$$

Cách 2: Gọi I là trọng tâm tam giác ABC suy ra I là trung điểm $BG \Rightarrow I\left(2; \frac{1}{3}\right)$.

Lại có $G\left(0; -\frac{13}{3}\right)$ là trung điểm DI nên suy ra $D(-2; -9)$.

Chọn đáp án (C)

□

C

Câu 121. Cho tam giác ABC , trọng tâm G , gọi I là trung điểm BC , M là điểm thỏa mãn: $2\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| = 3\left|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$. Khi đó, tập hợp điểm M là

A. Đường trung trực của BC .

B. Đường tròn tâm G , bán kính BC .

C. Đường trung trực của IG .

D. Đường tròn tâm I , bán kính BC .

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 2|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| &= 3|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| \\ \Leftrightarrow 2|3\overrightarrow{MG}| &= 3|2\overrightarrow{MI}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MG}| = |\overrightarrow{MI}| \Leftrightarrow MG = MI. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp điểm M thỏa hệ thức trên là đường trung trực của IG .

Chọn đáp án **C**

□

Câu 122. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM và trọng tâm G . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng.

A. $\overrightarrow{AM} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

B. $\overrightarrow{AM} = -3\overrightarrow{GM}$.

C. $2\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{GA} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{MG} = 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$.

Lời giải.

Tam giác ABC có trung tuyến AM và trọng tâm G

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{GA} \Rightarrow 2\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{GA} = \vec{0}.$$

Chọn đáp án **C**

□

C

Câu 123. Cho tam giác ABC . Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Khi đó

A. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Cách 1: Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Cách 2: Ta có $MB = 2MC \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MC}$ (vì $\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{MC}$ ngược hướng)

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = -2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

□

Câu 124. Cho hình bình hành $ABCD$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

B. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$.

C. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

D. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Lời giải.

Áp dụng quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Chọn đáp án **D**

□

D

Câu 125. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm tam giác. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG}$.

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AG}$.

D. $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AG}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của BC , ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$.

Do G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AG}$.

Chọn đáp án **B**

□

B

Câu 126. Cho tam giác ABC , M là một điểm trên cạnh BC . Biểu diễn véc-tơ $\overrightarrow{AM}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AM} = \frac{MB}{BC} \overrightarrow{AB} + \frac{MC}{BC} \overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AM} = \frac{MC}{BC} \overrightarrow{AB} + \frac{MB}{BC} \overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AM} = \frac{MC}{BC} \overrightarrow{AB} - \frac{MB}{BC} \overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AM} = \frac{MB}{BC} \overrightarrow{AB} - \frac{MC}{BC} \overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$
 $\overrightarrow{BM} = \frac{BM}{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{BM}{BC} (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{BM}{BC} (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \left(1 - \frac{BM}{BC}\right) \overrightarrow{AB} + \frac{BM}{BC} \overrightarrow{AC} = \frac{MC}{BC} \overrightarrow{AB} + \frac{MB}{BC} \overrightarrow{AC}$.

Chọn đáp án (B)

□

B

Câu 127. Cho tam giác ABC và một điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BC}$. Biểu diễn véc-tơ $\overrightarrow{AM}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AM} = (1 - k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} + (1 - k)\overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AM} = (1 - k)\overrightarrow{AB} + (1 - k)\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + k(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = (1 - k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$.

Chọn đáp án (A)

□

A

Câu 128. Cho hình bình hành $ABCD$, gọi I là trung điểm của CD , đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Biểu diễn véc-tơ $\overrightarrow{BI}$ theo các véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$.

A. $\overrightarrow{BI} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

B. $\overrightarrow{BI} = \vec{a} + \vec{b}$.

C. $\overrightarrow{BI} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$.

D. $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$.

Chọn đáp án (C)

□

C

Câu 129. Cho tam giác ABC trung tuyến AM . Hãy phân tích véc-tơ $\overrightarrow{AM}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$.

C. $\overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

D. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

Lời giải.

Dễ thấy $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ (tính chất trung tuyến).

Chọn đáp án (D)

□

D

Câu 130. Cho tam giác ABC . Gọi M trên cạnh BC sao cho $MB = 3MC$. Khi đó, biểu diễn véc-tơ $\overrightarrow{AM}$ theo véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và véc-tơ $\overrightarrow{AC}$ là

A. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.

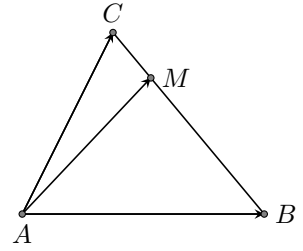
B. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$
 $= \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.



Chọn đáp án (B)

B

Câu 131. Cho $\triangle ABC$. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Các cặp véc-tơ nào sau đây cùng phương?

A. $2\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{a} + 2\vec{b}$.

B. $\vec{a} - 2\vec{b}$ và $2\vec{a} - \vec{b}$.

C. $5\vec{a} + \vec{b}$ và $-10\vec{a} - 2\vec{b}$.

D. $\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{a} - \vec{b}$.

Lời giải.

Ta có $-10\vec{a} - 2\vec{b} = -2(5\vec{a} + \vec{b})$ nên hai véc-tơ này cùng phương.

Chọn đáp án (C)

C

Câu 132. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là điểm trên cạnh BC được xác định bởi $\overrightarrow{BI} = k\overrightarrow{BC}$ ($k \neq$

1). Tìm hệ thức liên hệ giữa $\overrightarrow{DI}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$.

A. $\overrightarrow{DI} = (k - 1)\overrightarrow{DB} - k\overrightarrow{DC}$.

B. $\overrightarrow{DI} = (1 - k)\overrightarrow{DB} + k\overrightarrow{DC}$.

C. $\overrightarrow{DI} = (1 + k)\overrightarrow{DB} - k\overrightarrow{DC}$.

D. $\overrightarrow{DI} = (1 + k)\overrightarrow{DB} + k\overrightarrow{DC}$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BI} &= k\overrightarrow{BC} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{DI} - \overrightarrow{DB} &= k(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{DI} &= (1 - k)\overrightarrow{DB} + k\overrightarrow{DC} \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B)

B

Câu 133.

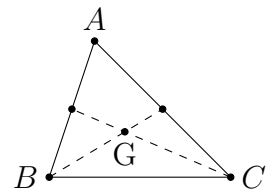
Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.



Lời giải.

Gọi M là trung điểm BC . Khi đó $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Mà $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Chọn đáp án (B)

B

B

Câu 134. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (-4; 1)$, $\vec{b} = (x + 1; 8x^2)$. Giá trị **âm** của x để $\vec{a} \perp \vec{b}$ là

- A. $x = -\frac{1}{2}$. B. $x = \frac{1}{2}, x = -1$. C. $x = -\frac{1}{2}, x = 1$. D. $x = -1$.

Lời giải.

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow -4(x + 1) + 8x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -\frac{1}{2}$. Do x âm nên $x = -\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **(A)** □

A

Câu 135. Biết rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nhưng hai véc-tơ $(x - 1)\vec{a} + \vec{b}$ và $8\vec{a} - 12\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là

- A. $x = \frac{1}{3}$. B. $x = \frac{2}{3}$. C. $x = -\frac{1}{3}$. D. $-\frac{2}{3}$.

Lời giải.

Hai véc-tơ $(x - 1)\vec{a} + \vec{b}$ và $8\vec{a} - 12\vec{b}$ cùng phương $\Rightarrow \frac{x - 1}{8} = \frac{1}{-12} \Leftrightarrow x - 1 = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$.

Chọn đáp án **(A)** □

A

Câu 136. Cho hình bình hành $ABCD$ có N là trung điểm AB và G là trọng tâm $\triangle ABC$. Phân tích $\vec{GA}$ theo $\vec{BD}$ và $\vec{NC}$

- A. $\vec{GA} = -\frac{1}{3}\vec{BD} + \frac{2}{3}\vec{NC}$. B. $\vec{GA} = \frac{1}{3}\vec{BD} - \frac{4}{3}\vec{NC}$.
C. $\vec{GA} = \frac{1}{3}\vec{BD} + \frac{2}{3}\vec{NC}$. D. $\vec{GA} = \frac{1}{3}\vec{BD} - \frac{2}{3}\vec{NC}$.

Lời giải.

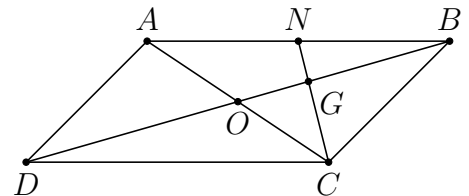
Vì G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{GA} = -(\vec{GB} + \vec{GC}).$$

Suy ra $\vec{GA} = -\left(-\frac{1}{3}\vec{BD} + \frac{2}{3}\vec{NC}\right) = \frac{1}{3}\vec{BD} - \frac{2}{3}\vec{NC}$.

Chọn đáp án **(D)** □

D



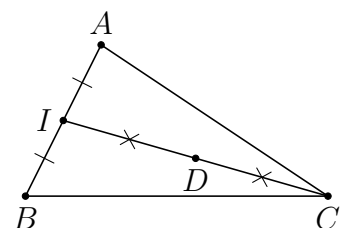
Câu 137. Cho tam giác ABC có I, D lần lượt là trung điểm AB, CI . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\vec{BD} = \frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{3}{4}\vec{AC}$. B. $\vec{BD} = -\frac{3}{4}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$.
C. $\vec{BD} = -\frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{AC}$. D. $\vec{BD} = -\frac{3}{4}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC}$.

Lời giải.

Vì I, D lần lượt là trung điểm AB, CI nên ta có

$$\begin{aligned} \vec{BD} &= \frac{1}{2}(\vec{BI} + \vec{BC}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{BA} + \vec{BA} + \vec{AC}\right) \\ &= -\frac{3}{4}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}. \end{aligned}$$



Chọn đáp án (B)

□

B

Câu 138. Cho tam giác ABC và điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IB}$. Biểu diễn $\overrightarrow{IC}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{IC} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

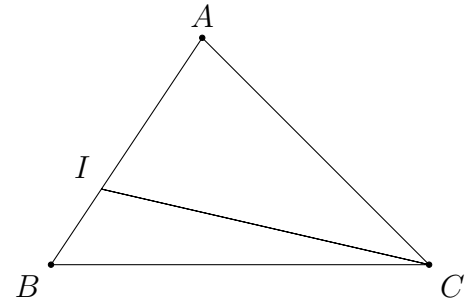
C. $\overrightarrow{IC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{IC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IB} \Rightarrow \overrightarrow{IA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Vậy $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.



Chọn đáp án (C)

□

C

Câu 139. Cho tam giác ABC , E là điểm nằm trên cạnh BC sao cho $BE = \frac{1}{4}BC$. Hãy chọn đẳng thức đúng.

A. $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AE} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Vì $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \Rightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

Chọn đáp án (A)

□

A

Câu 140. Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Điều kiện cần và đủ để ba điểm A, B, C thẳng hàng là

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

C. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

D. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

Lời giải.

Điều kiện cần và đủ để ba điểm A, B, C thẳng hàng là $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

Chọn đáp án (C)

□

C

Câu 141. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Tìm khẳng định **sai** khi nêu điều kiện cần và đủ để ba điểm A, B, C thẳng hàng.

A. $\exists k \in \mathbb{R}: \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

B. $\exists k \in \mathbb{R}: \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$.

C. $\forall M: \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

D. $\exists k \in \mathbb{R}: \overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{BA}$.

Lời giải.

Đó là khẳng định $\forall M: \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Chọn đáp án **C**

□

C

Câu 142. Cho $\vec{u} \neq \vec{0}$ và điểm A cố định. Tập hợp tất cả điểm M trong mặt phẳng thoả mãn $\vec{u}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng phương là

- A. một đường thẳng. B. một đường tròn. C. một điểm cố định. D. tập hợp rỗng.

Lời giải.

Ta có $\vec{u}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng phương suy ra giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với giá của $\overrightarrow{AM}$ hay tập hợp điểm M trong mặt phẳng là một đường thẳng qua A song song hoặc trùng với giá của $\vec{u}$.

Chọn đáp án **A**

□

A

Câu 143. Cho $\triangle ABC$, điểm M thoả $|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}|$. Tập hợp điểm M là

- A. một đường thẳng. B. một đường tròn. C. nửa đường tròn. D. một đoạn thẳng.

Lời giải.

Lấy điểm I sao cho $3\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$, dễ thấy điểm I cố định.

Khi đó ta có $3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) - 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}) = 2\overrightarrow{MI}$.

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} |3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| &= |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}| \\ \Leftrightarrow 2|\overrightarrow{MI}| &= |\overrightarrow{AB}| \\ \Leftrightarrow MI &= \frac{AB}{2}. \end{aligned}$$

Vậy quỹ tích điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R = \frac{AB}{2}$.

Chọn đáp án **B**

□

B

Câu 144. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a , M là điểm thay đổi, đặt $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MD}$. Tính $|\vec{u}|$.

- A. $|\vec{u}| = 2a\sqrt{2}$. B. $|\vec{u}| = 0$. C. $|\vec{u}| = 6a$. D. $|\vec{u}| = a\sqrt{2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MD} \\ &= \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} - 3\overrightarrow{MD} \\ &= (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{DB} \\ &= \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB} \\ &= 2\overrightarrow{DB}. \end{aligned}$$

Suy ra $|\vec{u}| = 2 \cdot DB = 2a\sqrt{2}$.

Chọn đáp án **A**

□

A

Câu 145. Cho tam giác vuông cân OAB với $OA = OB = a$. Độ dài của $\vec{u} = \frac{21}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{5}{2}\overrightarrow{OB}$ là

- A. $\frac{\sqrt{321}}{4}a$. B. $\frac{\sqrt{520}}{4}a$. C. $\frac{\sqrt{140}}{4}a$. D. $\frac{\sqrt{541}}{4}a$.

Lời giải.

Dựng hình chữ nhật $OMNP$ sao cho $\overrightarrow{OM} = \frac{21}{4}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OP} = \frac{5}{2}\overrightarrow{OB}$. Ta có $OM = \frac{21}{4}a$, $ON = \frac{5}{2}a$.

Áp dụng quy tắc hình bình hành, ta có $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} \Rightarrow ON = \sqrt{OM^2 + OP^2} = \frac{\sqrt{541}}{4}a$.

Chọn đáp án **D**

□

D

Câu 146. Cho tam giác ABC với H , O , G lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm của $\triangle ABC$. Tìm mệnh đề **đúng**.

A. $\overrightarrow{OH} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OG}$.

B. $\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OG}$.

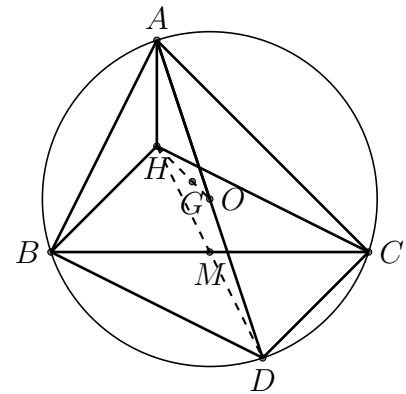
C. $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$.

D. $2\overrightarrow{GO} = -3\overrightarrow{OH}$.

Lời giải.

Gọi D là điểm đối xứng của A qua O , ta có $BHCD$ là hình bình hành. Do đó $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD}$.

Suy ra $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} = 2\overrightarrow{HO}$, mà $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{HG} \Rightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$.



Chọn đáp án **C**

□

C

Câu 147. Cho tam giác ABC . Gọi A' , B' , C' lần lượt là trung điểm của BC , CA , AB . Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

B. $\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{CC'})$.

C. $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}(2\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'})$.

D. $\overrightarrow{CA} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{BB'} + 2\overrightarrow{CC'})$.

Lời giải.

Xét tính đúng sai của từng khẳng định:

Xét phương án A: $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$
 $= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA}) = \vec{0}$. Phương án A đúng.

Xét phương án B: $\frac{2}{3}(\overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{CC'}) = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})\right]$
 $= (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{BC}$. Phương án B đúng.

Phương án C: có $\frac{2}{3}(2\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}) = \frac{2}{3}\left[2 \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})\right]$
 $= \frac{1}{3}(2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{3}(-2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})$
 $= \frac{1}{3}(-2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{3}(-3\overrightarrow{AB}) = -\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{AB}$. Phương án C sai.

Xét phương án D: có $\frac{2}{3}(\overrightarrow{BB'} + 2\overrightarrow{CC'}) = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) + 2 \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})\right]$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} [\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + 2(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})] = \frac{1}{3} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}) = \frac{1}{3} (2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA})$$

$$= \frac{1}{3} (2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA}. \text{ Phương án D đúng.}$$

Chọn đáp án **C**

□

C

Câu 148. Cho tam giác đều ABC tâm O , M là điểm tùy ý bên trong của tam giác được chiếu xuống ba cạnh tại D, E, F . Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

A. $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MO}.$

B. $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MO}.$

C. $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MO}.$

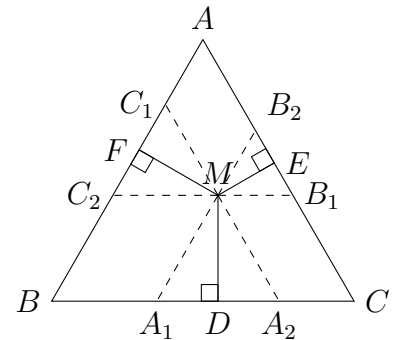
D. $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}.$

Lời giải.

Qua M : dựng các đoạn A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 lần lượt song song với AB, BC, CA .

Các tam giác $MA_1A_2, MB_1B_2, MC_1C_2$ là những tam giác đều.

Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của M xuống các cạnh BC, AC, AB .



$$\text{Do đó: } \overrightarrow{MD} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2}); \overrightarrow{ME} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MB_2}); \overrightarrow{MF} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MC_2});$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MB_2} + \overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MC_2})$$

$$= \frac{1}{2} [(\overrightarrow{MB_2} + \overrightarrow{MC_1}) + (\overrightarrow{MC_2} + \overrightarrow{MA_1}) + (\overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MB_1})]$$

$$= \frac{1}{2} (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = \frac{1}{2} \cdot 3\overrightarrow{MO} \text{ (vì } O \text{ là trọng tâm của tam giác } ABC)$$

$$= \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}.$$

Chọn đáp án **D**

□

D

Câu 149. Cho tam giác ABC . O là điểm bất kì trong mặt phẳng. Gọi M là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MC}$, với k là số thực tùy ý khác 1. Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

A. $(k-1)\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}.$

B. $(k+1)\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}.$

C. $(k-1)\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}.$

D. $k\overrightarrow{OM} = (k+1)\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}.$

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM} = k(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}) \Leftrightarrow (k-1)\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}.$$

Chọn đáp án **C**

□

C

Câu 150. Cho tứ giác $ABDC$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các đoạn AB và CD . M và N là các điểm xác định bởi $\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MC} = \vec{0}, \overrightarrow{NB} + k\overrightarrow{ND} = \vec{0}, (k \neq -1)$. Gọi O là trung điểm của đoạn MN . Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{NB}).$

B. $\overrightarrow{OJ} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ND}).$

C. $\overrightarrow{OI} + k\overrightarrow{OJ} = \vec{0}.$

D. $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{JN} = \vec{0}.$

Lời giải.

Ta xét tính đúng sai của từng phương án.

Phương án **A**:

$$\begin{cases} \vec{OI} = \vec{OM} + \vec{MA} + \vec{AI} \\ \vec{OI} = \vec{ON} + \vec{NB} + \vec{BI} \end{cases} \Rightarrow \vec{OI} = \frac{1}{2} (\vec{MA} + \vec{NB}).$$

Vậy phương án **A** đúng.

Phương án **B**: tương tự như phương án **A**. Đúng.

Phương án **C**:

$$\vec{OI} + k\vec{OJ} = \frac{1}{2} (\vec{MA} + \vec{NB}) + \frac{k}{2} (\vec{MC} + \vec{ND}) = \frac{1}{2} (\vec{MA} + k\vec{MC}) + \frac{1}{2} (\vec{NB} + k\vec{ND}) = \vec{0}.$$

Phương án **C** đúng.

Phương án **D**: Ta có

$$\vec{IM} + \vec{JN} = (\vec{OM} - \vec{OI}) + (\vec{ON} - \vec{OJ}) = (\vec{OM} + \vec{ON}) - (\vec{OI} + \vec{OJ}) = \vec{0} - (\vec{OI} + \vec{OJ}) \neq \vec{0},$$

(vì I không phải là trung điểm của đoạn IJ). Vậy phương án **D** sai.

Chọn đáp án **D**

□

D

Câu 151. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O , H là trực tâm của tam giác, D là điểm đối xứng của A qua O . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là **sai**?

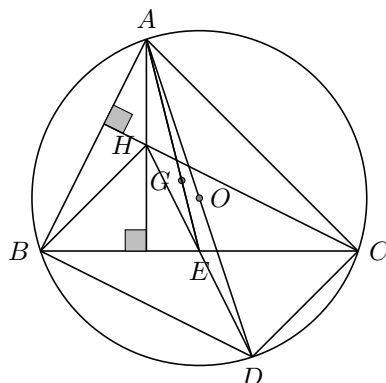
A. Tứ giác $HCDB$ là hình bình hành.

B. $\vec{HA} + \vec{HD} = 2\vec{HO}$.

C. $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 2\vec{OH}$.

D. $\vec{HA} + \vec{HB} + \vec{HC} = 2\vec{HO}$.

Lời giải.



Ta có

$$\bullet \begin{cases} BH \perp AC \\ DC \perp AC \end{cases} \Rightarrow BH \parallel DC.$$

Tương tự $CH \parallel DB \Rightarrow$ Tứ giác $HCDB$ là hình bình hành $\Rightarrow$ **A** đúng.

- Do O là trung điểm của AD nên $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} = 2\overrightarrow{HO} \Rightarrow$ **B** đúng.
- Ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$ với G là trọng tâm tam giác ABC , cũng là trọng tâm tam giác AHD .
 $2\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{HG} \Rightarrow 3\overrightarrow{HG} = 3\overrightarrow{GO} \Rightarrow \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{GO} \Rightarrow$ **C** sai.
- Do $HCDB$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HD} \Rightarrow$ **D** đúng.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 152. Cho $\triangle ABC$, gọi M lần lượt là trung điểm của AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho $NC = 2NA$, K là trung điểm của MN . Khi đó

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \overrightarrow{AK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}. & \text{B. } \overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}. \\ \text{C. } \overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}. & \text{D. } \overrightarrow{AK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}. \end{array}$$

Lời giải.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 153. Cho $\triangle ABC$, N là điểm xác định bởi $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, G là trọng tâm của tam giác ABC . Hệ thức tính $\overrightarrow{AC}$ theo $\overrightarrow{AG}$ và $\overrightarrow{AN}$ là

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}. & \text{B. } \overrightarrow{AC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}. \\ \text{C. } \overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}. & \text{D. } \overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}. \end{array}$$

Lời giải.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}(3\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AC}) + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}.$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 154. Cho tam giác ABC . Gọi D là trung điểm cạnh AC và I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. I là trực tâm tam giác BCD .
- B. I là trọng tâm tam giác ABC .
- C. I là trọng tâm tam giác CDB .
- D. I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Lời giải.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IC} = 2(\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) = \vec{0}.$$

Khi đó I là trọng tâm tam giác BCD .

Chọn đáp án **C**

□

Câu 155. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM . Điểm E xác định bởi $2\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC} = \vec{0}$. Một đường

thẳng d qua E song song với AB cắt AM , BC lần lượt tại D và F . Điểm G nằm trên cạnh AB sao cho diện tích các tam giác BFG và ADE bằng nhau. Biết $\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AB}$, tìm k .

- A. $k = \frac{1}{3}$. B. $k = \frac{1}{2}$. C. $k = \frac{1}{4}$. D. $k = \frac{2}{3}$.

Lời giải.

Theo định lí Thales ta có

$$\begin{aligned}\frac{FB}{FC} &= \frac{EA}{EC} = \frac{1}{2} \Rightarrow FC = \frac{2}{3}BC \\ \Rightarrow FM &= \frac{2}{3}BC - MC = \frac{2}{3}BC - \frac{1}{2}BC = \frac{1}{6}BC.\end{aligned}$$

Suy ra $\overrightarrow{FM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FC}$.

Mặt khác $\overrightarrow{EC} = -2\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{DA} = -\frac{DA}{DM}\overrightarrow{DM}$ mà ba điểm D , E , F thẳng hàng nên theo định lí Menelaus ta được

$$\left(-\frac{DA}{DM}\right) \cdot \frac{1}{4} \cdot (-2) = 1 \Rightarrow \frac{DA}{DM} = 2.$$

Từ đó $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Chú ý rằng khoảng cách từ F đến AB bằng khoảng cách từ A đến DE nên từ hai tam giác ADE và BGF có cùng diện tích ta suy ra $BG = DE$, do đó $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{DE}$.

Ta có $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BG}$. Mà $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ nên $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ hay $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

D

Câu 156. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm tam giác. Lấy các điểm P, Q sao cho $\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{PB}$, $3\overrightarrow{QA} + 2\overrightarrow{QC} = \vec{0}$. Biểu diễn véc-tơ $\overrightarrow{AG}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}$.

- A. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AP} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AQ}$. B. $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AQ}$.
C. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AP} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AQ}$. D. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AQ}$.

Lời giải.

Ta có

$$\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{BP} = 2(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}) \Rightarrow \overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB}.$$

$$3\overrightarrow{AQ} = 2\overrightarrow{QC} = 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AQ}) \Rightarrow \overrightarrow{AQ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}.$$

Do đó $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AP} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AQ}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

C

Câu 157. Trên các cạnh của tam giác ABC lấy các điểm M, N, P sao cho $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 6\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{PC} + 2\overrightarrow{PA} = \vec{0}$. Biểu diễn véc-tơ $\overrightarrow{AN}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AM}$.

- A. $\overrightarrow{AN} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AP} + \frac{8}{5}\overrightarrow{AM}$. B. $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AP} + \frac{8}{5}\overrightarrow{AM}$.

$$\text{C. } \overrightarrow{AN} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AP} - \frac{8}{5}\overrightarrow{AM}.$$

$$\text{D. } \overrightarrow{AN} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AP} - \frac{8}{5}\overrightarrow{AM}.$$

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{NC} = 6\overrightarrow{NB}$ nên $\overrightarrow{AN} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{AC} + \frac{6}{5}\overrightarrow{AB}$.

Do đó $\overrightarrow{AN} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AP} + \frac{8}{5}\overrightarrow{AM}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

A

Câu 158. Cho tam giác ABC . Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI = 3BI$ và J thuộc BC kéo dài sao cho $5JB = 2JC$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Biểu diễn véc-tơ $\overrightarrow{AG}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$.

$$\text{A. } \overrightarrow{AG} = \frac{35}{48}\overrightarrow{AI} - \frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}.$$

$$\text{B. } \overrightarrow{AG} = \frac{35}{48}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}.$$

$$\text{C. } \overrightarrow{AG} = \frac{25}{16}\overrightarrow{AI} - \frac{3}{16}\overrightarrow{AJ}.$$

$$\text{D. } \overrightarrow{AG} = \frac{25}{16}\overrightarrow{AI} + \frac{3}{16}\overrightarrow{AJ}.$$

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{5}{8}\overrightarrow{AI} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{AC} = \frac{25}{16}\overrightarrow{AI} - \frac{9}{16}\overrightarrow{AJ}$.

Do đó $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{35}{48}\overrightarrow{AI} - \frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

A

Câu 159. Cho tam giác ABC . Gọi G là trọng tâm tam giác và H là điểm đối xứng của B qua G . Gọi M là trung điểm BC . Biểu diễn véc-tơ $\overrightarrow{MH}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

$$\text{A. } \overrightarrow{MH} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.$$

$$\text{B. } \overrightarrow{MH} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AC}.$$

$$\text{C. } \overrightarrow{MH} = -\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.$$

$$\text{D. } \overrightarrow{MH} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AC}.$$

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BH} = 2\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB})$.

Do đó $\overrightarrow{MH} = -\overrightarrow{HM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{HB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{HC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BH} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AH}) = -\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

C

Câu 160. Cho góc $\widehat{xOy} = 60^\circ$. Các điểm A, B nằm trên tia Ox , các điểm C, D nằm trên tia Oy sao cho $AB = CD = 2$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm các đoạn AC, BD . Biết A nằm giữa O và B , C nằm giữa O và D , tính IJ .

$$\text{A. } IJ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{B. } IJ = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{C. } IJ = \sqrt{3}.$$

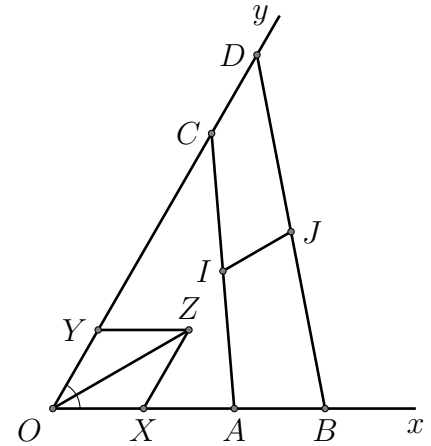
$$\text{D. } IJ = 2\sqrt{3}.$$

Lời giải.

Trên các tia Ox , Oy lần lượt lấy các điểm X , Y sao cho $OX = OY = 2$. dựng hình bình hành $OXZY$. Ta có

$$\begin{aligned} 2\vec{IJ} &= (\vec{IA} + \vec{AB} + \vec{BJ}) + (\vec{IC} + \vec{CD} + \vec{DJ}) \\ &= \vec{AB} + \vec{CD} = \vec{OX} + \vec{OY} = \vec{OZ}. \end{aligned}$$

Suy ra $IJ = \frac{1}{2}OZ = \sqrt{3}$.



Chọn đáp án **C**

C

Câu 161. Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$. Đặt $\vec{GA} = \vec{a}$, $\vec{GB} = \vec{b}$. Hãy tìm m , n để có $\vec{BC} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

- A. $m = 1, n = 2$. B. $m = -1, n = -2$. C. $m = 2, n = 1$. D. $m = -2, n = -1$.

Lời giải.

Ta có $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \Rightarrow \vec{BC} = \vec{GC} - \vec{GB} = -\vec{GA} - \vec{GB} - \vec{GB} = -\vec{a} - 2\vec{b}$.

Chọn đáp án **B**

B

Câu 162. Cho tứ giác $ABCD$ (AB , CD không song song), gọi M , N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Tìm m , n để $\vec{MN} = m\vec{AB} + n\vec{DC}$.

- A. $m = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{2}$. B. $m = -\frac{1}{2}, n = \frac{1}{2}$. C. $m = \frac{1}{2}, n = -\frac{1}{2}$. D. $m = -\frac{1}{2}, n = -\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AB} + \vec{BN} \\ \vec{MN} = \vec{MD} + \vec{DC} + \vec{CN} \end{cases} \Rightarrow 2\vec{MN} = \vec{AB} + \vec{DC}$. Vậy $m = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{2}$.

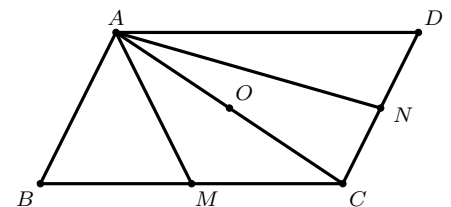
Chọn đáp án **A**

A

Câu 163.

Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và CD . Đặt $\vec{a} = \vec{AM}$, $\vec{b} = \vec{AN}$. Hãy biểu diễn $\vec{AO}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

- A. $\vec{AO} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$. B. $\vec{AO} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.
C. $\vec{AO} = \frac{1}{3}\vec{a} + 2\vec{b}$. D. $\vec{AO} = \vec{a} + 3\vec{b}$.



Lời giải.

Ta có: $\vec{AO} = \frac{1}{2}\vec{AC} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD}) = \frac{1}{2}(2\vec{AM} - \vec{AC} + 2\vec{AN} - \vec{AC}) = \vec{AM} + \vec{AN} - \vec{AC}$

Suy ra $\vec{AO} = \vec{a} + \vec{b} - 2\vec{AO} \Rightarrow 3\vec{AO} = \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow \vec{AO} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

Chọn đáp án **A**

A

Câu 164. Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho $NC = 2NA$. Gọi K là điểm trên cạnh MN sao cho $KN = 3KM$. Kết quả nào dưới đây đúng?

A. $\overrightarrow{AK} = -\frac{3}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AK} = -\frac{3}{8}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$.

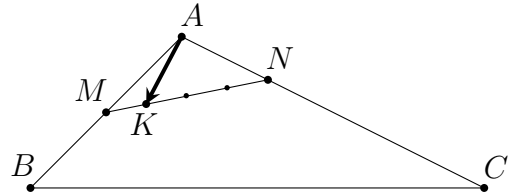
C. $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AK} &= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{MN} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{12}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{8}\overrightarrow{AB} \\ &= \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{12}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$



Chọn đáp án **C**

□

Câu 165. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là điểm xác định bởi $\overrightarrow{BI} = k\overrightarrow{BC}$ (với $k \neq 1$). Tìm hệ thức liên hệ giữa $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AI} = (k-1)\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AI} = (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AI} = (k+1)\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AI} = (k+1)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + k(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 166. Cho tam giác ABC , N là điểm xác định bởi $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Hệ thức tính $\overrightarrow{AC}$ theo $\overrightarrow{AG}$ và $\overrightarrow{AN}$ là

A. $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$.

B. $\overrightarrow{AC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$.

C. $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$.

D. $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC .

Vì G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$.

Ta có:

$$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 167. Cho $\triangle ABC$, gọi D là trung điểm cạnh AC , K là trọng tâm $\triangle BCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $3\overrightarrow{KB} - 2\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{AK}$.

B. $2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{AK}$.

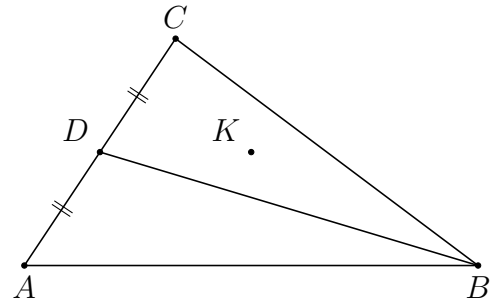
C. $\frac{1}{3}\overrightarrow{KB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{AK}$.

D. $\frac{1}{2}\overrightarrow{KB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{AK}$.

Lời giải.

Vì K là trọng tâm $\triangle BCD$ nên ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AD} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} &= \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{AD} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} &= \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} &= \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{KC} - \overrightarrow{KA}) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} &= 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC}.\end{aligned}$$



Chọn đáp án (B)

□

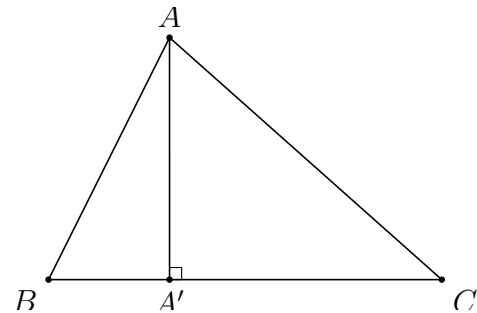
Câu 168. Tam giác ABC là tam giác nhọn có AA' là đường cao. Khi đó véc-tơ $\vec{u} = (\tan B)\overrightarrow{A'B} + (\tan C)\overrightarrow{A'C}$ là

- A. $\vec{u} = \overrightarrow{BC}$. B. $\vec{u} = \vec{0}$. C. $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. D. $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\text{Ta có } \vec{u} &= (\tan B)\overrightarrow{A'B} + (\tan C)\overrightarrow{A'C} \\ \Leftrightarrow \vec{u} &= \frac{AA'}{BA'}\overrightarrow{A'B} + \frac{AA'}{CA'}\overrightarrow{A'C}.\end{aligned}$$

Ta thấy hai véc-tơ $\frac{AA'}{BA'}\overrightarrow{A'B}$ và $\frac{AA'}{CA'}\overrightarrow{A'C}$ ngược hướng và độ dài mỗi véc-tơ bằng AA' nên chúng là hai véc-tơ đối nhau. Vậy $\vec{u} = \vec{0}$.



Chọn đáp án (B)

□

B

Câu 169. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Biết $BC \cdot \overrightarrow{GA} + CA \cdot \overrightarrow{GB} + AB \cdot \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $\widehat{BGC} = 45^\circ$. B. $\widehat{BGC} = 120^\circ$. C. $\widehat{BGC} = 90^\circ$. D. $\widehat{BGC} = 60^\circ$.

Lời giải.

Do G là trọng tâm tam giác ABC nên

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow BC \cdot \overrightarrow{GA} + BC \cdot \overrightarrow{GB} + BC \cdot \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Kết hợp với giả thiết, ta được

$$(CA - BC)\overrightarrow{GB} + (AB - BC)\overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Do $\overrightarrow{GB}$ và $\overrightarrow{GC}$ không cùng phương nên $CA - BC = AB - BC = 0$ hay $AB = BC = CA$. Tam giác ABC là tam giác đều, do đó $\widehat{BGC} = 120^\circ$.

Chọn đáp án (B)

□

B

Câu 170. Cho điểm O nằm trong hình bình hành $ABCD$. Các đường thẳng đi qua O và song song với các cạnh của hình bình hành lần lượt cắt AB, BC, CD, DA tại M, N, P, Q . Gọi E là giao điểm của BQ và DM , F là giao điểm của BP và DN . Tìm điều kiện cần và đủ để E, F, O thẳng hàng.

A. O là tâm của hình bình hành.

B. O nằm trên đường chéo AC .

C. O nằm trên đường chéo BD .

D. O là trọng tâm tam giác ABD .

Lời giải.

Xét tam giác ABQ . Ta có

$$\overrightarrow{DQ} = \frac{DQ}{DA} \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{MA} = -\frac{MA}{MB} \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{EB} = -\frac{EB}{EA} \overrightarrow{EQ}.$$

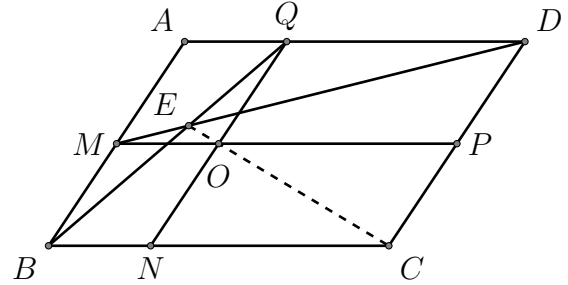
Theo định lí Menelaus thì

$$\begin{aligned} \frac{DQ}{DA} \left(-\frac{MA}{MB} \right) \left(-\frac{EB}{EA} \right) &= 1 \\ \Rightarrow \frac{CN}{CB} \left(-\frac{OQ}{ON} \right) \left(-\frac{EB}{EQ} \right) &= 1. \end{aligned}$$

Từ đó cũng do định lí Menelaus, ta có E, O, C thẳng hàng. Tương tự F, O, A thẳng hàng. Do đó E, F, O thẳng hàng khi và chỉ khi năm điểm E, F, O, A, C thẳng hàng hay O thuộc đường chéo AC .

Chọn đáp án **(B)**

□



Câu 171. Cho lục giác $ABCDEF$ có $AB \perp EF$ và hai tam giác ACE, BDF có cùng trọng tâm. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $AB^2 + EF^2 = AF^2$.

B. $AB^2 + EF^2 = BC^2$.

C. $AB^2 + EF^2 = CD^2$.

D. $AB^2 + EF^2 = DE^2$.

Lời giải.

Dựng hình bình hành $ABCH$. Vì G là trọng tâm của tam giác ACE và tam giác BDF nên

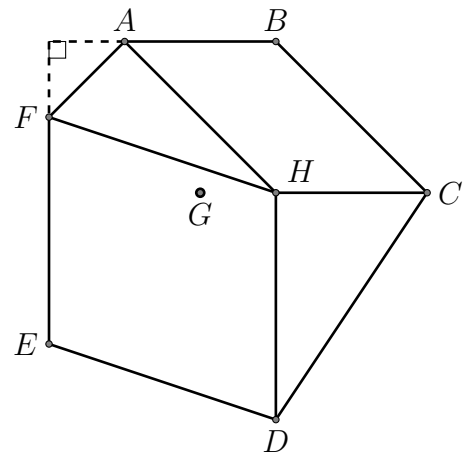
$$\begin{aligned} \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GE} &= \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GF} = \vec{0} \\ \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Ta có $\overrightarrow{HD} = \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{FE}$. Do đó $HDEF$ cũng là hình bình hành. Vì $AB \perp EF$ nên $HC \perp HD$.

Vậy $AB^2 + EF^2 = HC^2 + HD^2 = CD^2$.

Chọn đáp án **(C)**

□



Câu 172. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P là các điểm được xác định bởi $\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{NA} = -2\overrightarrow{NB}$ và $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AC}$. Ba điểm M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi

A. $k = \frac{2}{5}$.

B. $k = -\frac{3}{5}$.

C. $k = \frac{3}{5}$.

D. $k = -\frac{2}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{NB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{PC} = (1-k)\overrightarrow{AC}$.

$$\text{Do đó } \begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{NB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{PC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} + (k-1)\overrightarrow{AC} = \left(k + \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{BC} + (k-1)\overrightarrow{AB} \end{cases}$$

Để M, N, P thẳng hàng thì $\frac{k + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{k-1}{-\frac{1}{3}} \Leftrightarrow 2k+1 = -3k+3 \Leftrightarrow k = \frac{2}{5}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

A

Câu 173. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là trung điểm cạnh AB , P là điểm trên cạnh AD thỏa mãn tỉ lệ $PD = 2PA$. Điểm N trên cạnh AC phải thỏa mãn tỉ lệ nào sau đây để 3 điểm M, N, P thẳng hàng?

- A. $4NC = 3AC$. B. $NC = 4AN$. C. $AN = \frac{1}{4}AC$. D. $AC = \frac{5}{3}NC$.

Lời giải.

M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AM} + (1-k)\overrightarrow{AP}$ với $k > 0$.

Ta lại có:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \frac{AC}{AN}\overrightarrow{AN} = \frac{AB}{AM}\overrightarrow{AM} + \frac{AD}{AP}\overrightarrow{AP}$$

Từ đó ta có $\frac{AB}{AM} + \frac{AD}{AP} = \frac{AC}{AN} \Rightarrow \frac{AC}{AN} = 5$.

Vậy $NC = 4AN$.

Chọn đáp án **(B)**

□

B

Câu 174. Cho tam giác ABC có E, F lần lượt là trung điểm của AB, BC . Gọi M là điểm thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$. Tập hợp tất cả điểm M là

- A. đường cao kẻ từ B của tam giác ABC . B. đường trung trực của EF .
C. đường thẳng EF . D. đường trung trực của AC .

Lời giải.

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, BC , ta có

$$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow 2ME = 2MF.$$

Tập hợp M là trung trực của EF .

Chọn đáp án **(B)**

□

B

Câu 175. Cho đoạn thẳng AB . Tập hợp tất cả điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$ là

- A. đường trung trực của đoạn thẳng AB .
B. đường tròn đường kính AB .
C. trung điểm I của đoạn thẳng AB .
D. là điểm M thỏa mãn tam giác MAB là tam giác đều.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm AB , ta có $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| \Leftrightarrow 2MI = BA \Leftrightarrow MI = \frac{AB}{2}$. Vậy quỹ tích I là đường tròn đường kính AB .

Chọn đáp án **(B)**

□

B

Câu 176. Cho hình vuông $ABCD$ cố định và I là giao điểm hai đường chéo của nó. Gọi M là điểm thay đổi thoả mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = |3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}|$. Tập hợp tất cả điểm M là

A. một đường thẳng qua A .

B. một đường thẳng qua I .

C. đường tròn tâm A .

D. đường tròn tâm I .

Lời giải.

$$\begin{aligned} & |(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD})| = |3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}| \\ \Leftrightarrow & |2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MI}| = |3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{AD}| \\ \Leftrightarrow & |4\overrightarrow{MI}| = |-(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{AC}| \\ \Leftrightarrow & |4\overrightarrow{MI}| = |2\overrightarrow{AC}| \\ \Leftrightarrow & MI = \frac{AC}{2}. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R = \frac{AC}{2}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

D

Câu 177. Cho tam giác ABC và điểm M thoả mãn $|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$. Tập hợp điểm M là

A. một đoạn thẳng.

B. một đường tròn.

C. nửa đường tròn.

D. một đường thẳng.

Lời giải.

Vì $3 + (-2) + 1 \neq 0 \Rightarrow \exists I$ sao cho $3\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Khi đó ta có

$$3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) - 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}) = 2\overrightarrow{MI}.$$

Vậy $|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| \Leftrightarrow 2|\overrightarrow{MI}| = |\overrightarrow{BA}| \Leftrightarrow MI = \frac{1}{2}AB$.

Do đó quỹ tích điểm M là đường tròn.

Chọn đáp án **(B)**

□

B

Câu 178. Cho tam giác ABC , tìm tập hợp các điểm M sao cho

$$|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|.$$

A. Tập hợp các điểm M là một đường tròn.

- B. Tập hợp các điểm M là một đường thẳng.
 C. Tập hợp các điểm M là tập rỗng.
 D. Tập hợp các điểm M chỉ là một điểm trùng với A .

Lời giải.

Gọi I là điểm thỏa $\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$, ta có

$$\begin{aligned} & \left| \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} \right| = \left| 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \right| \\ \Leftrightarrow & \left| \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) - 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}) \right| = \left| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC} \right| \\ \Leftrightarrow & \left| 2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} \right| = \left| \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} \right| \\ \Leftrightarrow & 2MI = \left| 2\overrightarrow{JA} \right| \text{ (với } J \text{ là trung điểm của } BC) \\ \Leftrightarrow & MI = JA \text{ (hằng số)} \end{aligned}$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính JA .

Chọn đáp án **(A)**

□

A

Câu 179. Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm I và đường thẳng d cố định. Gọi M là một điểm thay đổi trên d . Khi $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ có độ dài nhỏ nhất thì

- A. M là hình chiếu vuông góc của I trên d .
 B. M là hình chiếu vuông góc của trung điểm đoạn IB trên d .
 C. M là hình chiếu vuông góc của trung điểm đoạn ID trên d .
 D. M trùng với I .

Lời giải.

Giả sử G là một điểm nào đó

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \\ &= \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC} \\ &= 4\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}. \end{aligned}$$

Chọn G là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ ta được $|\vec{u}| = 4MG$.

Để độ dài MG nhỏ nhất thì M trùng với hình chiếu vuông góc của G trên d . Ta sẽ xác định vị trí của G .

Ta có $(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC}) + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow G$ là trung điểm IB .

Chọn đáp án **(B)**

□

B

Câu 180. Cho tam giác ABC đều cạnh 1 nội tiếp đường tròn (O) và điểm M thay đổi trên O . Gọi s, i lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$. Tính $s + i$.

- A. $s + i = \sqrt{3}$. B. $s + i = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. C. $s + i = \frac{5\sqrt{3}}{3}$. D. $s + i = 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Dựng hình bình hành $DBCA$. Ta có

$$\begin{aligned} & \left| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \right| \\ &= \left| \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{DC} \right| \\ &= \left| \overrightarrow{MD} \right| = MD. \end{aligned}$$

Gọi E là giao điểm khác C của DC với (O) . Áp dụng bất đẳng thức tam giác ta có

$$MD \geq DO - OM = DO - OE = DE$$

$$\text{và } MD \leq DO + OM = DO + OC = DC$$

Dấu bằng xảy ra lần lượt khi M trùng E và M trùng C . Vậy

$$\begin{aligned} s + i &= DE + DC = DC - CE + DC = 2DC - 2OC \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(B)**

□

B

Câu 181. Cho tam giác ABC là tam giác đều có cạnh bằng a . Độ dài véc-tơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$ lần lượt là

A. a và $a\sqrt{3}$.

B. Đều bằng a .

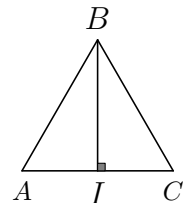
C. a và $2a$.

D. a và $a\sqrt{2}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của AC . Ta có: $\left| \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \right| = \left| \overrightarrow{AC} \right| = a$ và

$$\left| \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} \right| = \left| \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} \right| = \left| 2\overrightarrow{IB} \right| = 2IB = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$



Chọn đáp án **(A)**

□

A

Câu 182. Cho ba lực $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và làm vật đứng yên. Cho biết cường độ lực $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ đều là 100 N và $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Tìm cường độ và hướng của lực $\overrightarrow{F_3}$.

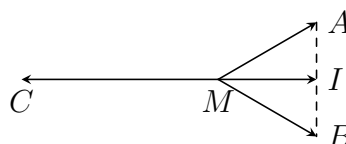
A. $|\overrightarrow{F_3}| = 100\sqrt{3}$ N và ngược hướng với tia phân giác góc M của tam giác AMB .

B. $|\overrightarrow{F_3}| = 100$ N và cùng hướng với tia phân giác góc M của tam giác AMB .

C. $|\overrightarrow{F_3}| = 200$ N và cùng hướng với véc-tơ $\overrightarrow{AB}$.

D. $|\overrightarrow{F_3}| = 100\sqrt{2}$ N và cùng hướng với véc-tơ $\overrightarrow{BA}$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của AB . Khi đó, MI là tia phân giác trong góc M của tam giác AMB . Do tam giác AMB đều cạnh bằng 100 nên $MI = \frac{100\sqrt{3}}{2}$.

Vì vật đứng yên nên $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{MI} + \vec{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{MC} = -2\vec{MI}$.
Suy ra: $\vec{MC}$ và $\vec{MI}$ ngược hướng, đồng thời $|\vec{MC}| = 2|\vec{MI}| \Leftrightarrow MC = 2MI \Leftrightarrow MC = 100\sqrt{3}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

A

Câu 183. Cho tam giác đều ABC cạnh a , trọng tâm G . Tính theo a độ dài của véc-tơ $\vec{v} = \vec{GA} + \vec{GB} - \vec{GC}$.

A. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

B. $2a$.

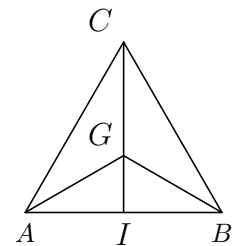
C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{3a}{2}$.

Lời giải.

Vì $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ nên $\vec{v} = \vec{GA} + \vec{GB} - \vec{GC} = -2\vec{GC}$.

Suy ra $|\vec{v}| = 2GC = 2 \cdot \frac{2}{3}CI = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$, với I là trung điểm của AB .



Chọn đáp án **(A)**

□

A

Câu 184. Cho tam giác đều ABC cạnh a . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $|\vec{AB} - \vec{CA}| = a\sqrt{3}$.

B. $|\vec{AB} - \vec{CA}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

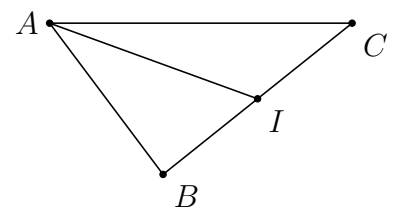
C. $|\vec{AB} - \vec{CA}| = a$.

D. $|\vec{AB} - \vec{CA}| = 0$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm BC . Ta có

$$|\vec{AB} - \vec{CA}| = |\vec{AB} + \vec{AC}| = |2\vec{AI}| = 2AI = a\sqrt{3}.$$



Chọn đáp án **(A)**

□

A

Câu 185. Cho hai lực $F_1 = F_2 = 100\text{N}$, có điểm đặt tại O và tạo với nhau góc 120° . Cường độ lực tổng hợp của hai lực ấy bằng bao nhiêu?

A. 100 N.

B. $100\sqrt{5}$ N.

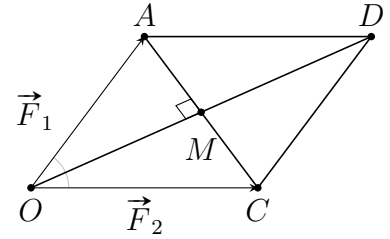
C. 200 N.

D. $50\sqrt{3}$ N.

Lời giải.

Ta có $\widehat{AOM} = 60^\circ$ nên $OM = OA \cdot \cos 60^\circ = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$.

Ta có $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = |\vec{OD}| = OD = 2OM = 100 \text{ N}$.



Chọn đáp án **(A)**

A

Câu 186. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM và trọng tâm G . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AC}$.

B. $\vec{MG} = \frac{1}{3}(\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC})$.

C. $\vec{AM} = 3\vec{MG}$.

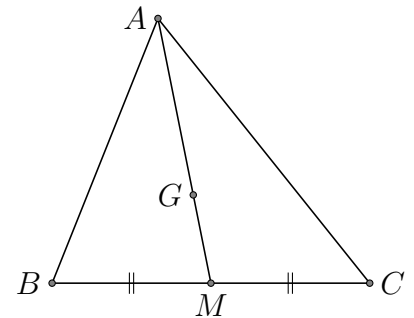
D. $\vec{AG} = \frac{2}{3}(\vec{AB} + \vec{AC})$.

Lời giải.

Vì M là trung điểm của tam giác BC nên ta có $\vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\vec{MG} = \frac{1}{3}\vec{MA}$.

Từ đó, ta suy ra $\vec{MG} = \frac{1}{3}(\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC})$.



Chọn đáp án **(B)**

B

Câu 187. Cho hình bình hành $ABCD$, M là trung điểm AB , DM cắt AC tại I . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\vec{AI} = \frac{2}{3}\vec{AC}$.

B. $\vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{AC}$.

C. $\vec{AI} = \frac{1}{4}\vec{AC}$.

D. $\vec{AI} = \frac{3}{4}\vec{AC}$.

Lời giải.

Đường thẳng $AB \parallel CD$ cắt hai cạnh CI , DI của tam giác CDI

lần lượt tại A , M . Áp dụng định lý Thales ta có

$$\frac{AM}{CD} = \frac{AI}{IC} = \frac{MI}{ID} = \frac{1}{2}.$$

Từ đó ta có $\frac{AI}{AI + IC} = \frac{1}{1 + 2} = \frac{1}{3}$.

Vậy $\vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{AC}$.

Chọn đáp án **(B)**

B

Câu 188. Cho tam giác đều ABC cạnh a . Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $|\vec{AB} - \vec{AC}| = a$.

B. $|\vec{AB} + \vec{AC}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

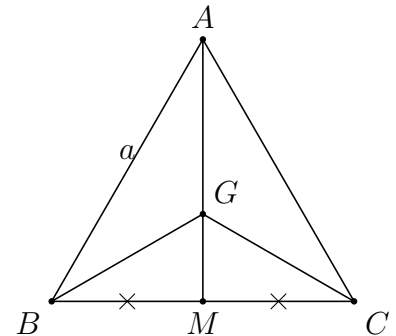
C. $|\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}| = 0.$

D. $|\vec{GB} + \vec{GC}| = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$

Lời giải.

Ta có

- $|\vec{AB} - \vec{AC}| = |\vec{CB}| = CB = a.$
- $|\vec{AB} + \vec{AC}| = |2\vec{AM}| = 2AM = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$
- $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \Rightarrow |\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}| = 0.$
- $|\vec{GB} + \vec{GC}| = |2\vec{GM}| = 2GM = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$



Chọn đáp án **(B)**

B

Câu 189. Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OA và CD . Biết $\vec{MN} = a \cdot \vec{AB} + b \cdot \vec{AD}$. Tính $a + b$.

- A. $a + b = 1.$ B. $a + b = \frac{1}{2}.$ C. $a + b = \frac{3}{4}.$ D. $a + b = \frac{1}{4}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \vec{MN} &= \vec{MO} + \vec{ON} = \frac{1}{4}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AD} \\ &= \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{BC}) + \frac{1}{2}\vec{AD} \\ &= \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AD}) + \frac{1}{2}\vec{AD} \\ &= \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AD}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{4}; b = \frac{3}{4}. \text{ Vậy } a + b = 1.$$

Chọn đáp án **(A)**

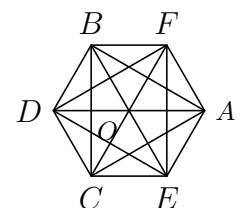
A

Câu 190. Cho tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn (O) . Các điểm D, E, F theo thứ tự là điểm đối xứng của A, B, C qua O . Véc-tơ nào dưới đây khác véc-tơ không?

- A. $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}.$ B. $\vec{DO} + \vec{EO} + \vec{FO}.$ C. $\vec{DA} + \vec{EB} + \vec{FC}.$ D. $\vec{FD} + \vec{EF} + \vec{AB}.$

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \vec{FD} + \vec{EF} + \vec{AB} = (\vec{EF} + \vec{FD}) + \vec{AB} = \vec{ED} + \vec{ED} = 2\vec{ED} \neq \vec{0}.$$



Chọn đáp án **(D)**

D

Câu 191. Gọi G, H, O lần lượt là trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC . Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{HG}$.
 C. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$.
 D. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OH}$.

Lời giải.

Với điểm M bất kỳ và G là trọng tâm tam giác ABC , ta luôn có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Phương án **A** đúng khi cho M trùng với trực tâm H .

Phương án **B** đúng khi cho M trùng với tâm O .

Phương án **C** đúng theo tính chất trọng tâm.

Phương án **D**: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$. Vậy phương án **D** sai.

Chọn đáp án **(D)**

□

D

Câu 192. Cho tam giác vuông cân ABC với $AB = AC = a$. Hỏi giá trị $|3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}|$ bằng bao nhiêu?

A. $a\sqrt{2}$.

B. $5a$.

C. $2a$.

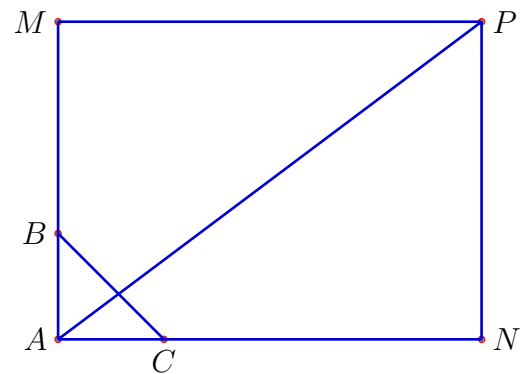
D. $a\sqrt{7}$.

Lời giải.

Đựng $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AN} = 4\overrightarrow{AC}$. Suy ra $AM = 3a$ và $AN = 4a$.

Đựng hình chữ nhật $AMPN$. Khi đó

$$|3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}| = |\overrightarrow{AP}| = AP = MN = \sqrt{AM^2 + AN^2} = \sqrt{9a^2 + 16a^2} = 5a.$$



Chọn đáp án **(B)**

□

B

Câu 193. Cho tam giác ABC . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC . Hỏi vectơ $\overrightarrow{MN}$ bằng vectơ nào sau đây?

A. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$.

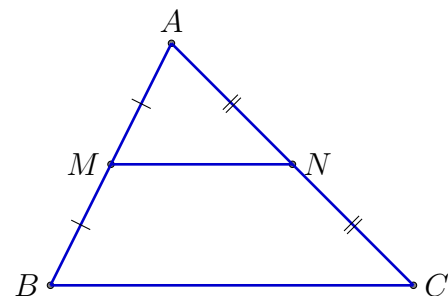
B. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

C. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

D. $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$



Chọn đáp án **(C)**

□

C

Câu 194. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $BC = a\sqrt{2}$, M là trung điểm của BC . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}| = a.$

B. $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$

C. $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$

D. $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}| = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$

Lời giải.

Dựng hình bình hành $ABMN$.

Ta có: $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BN}$ nên

$$|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}| = |\overrightarrow{BN}| = BN.$$

Tam giác BCN vuông tại C có

$$NC = AM = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Suy ra

$$BN = \sqrt{BC^2 + NC^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

D

Câu 195. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Gọi G là trung điểm của IJ . Xét các mệnh đề sau:

(I) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AG}.$

(II) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IG}.$

(III) $\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JD} = \overrightarrow{JI}.$

Mệnh đề sai là

A. (I) và (II).

B. (II) và (III).

C. Chỉ (I).

D. (I), (II) và (III).

Lời giải.

Ta xét tính đúng sai của từng mệnh đề:

Mệnh đề (I): $\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = 2\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{AJ} = 2(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ}) = 2 \cdot 2\overrightarrow{AG} = 4\overrightarrow{AG}.$ Mệnh đề (I) đúng.

Mệnh đề (II): $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} \neq 2\overrightarrow{IG}$ (vì G không phải là trung điểm của AC). Mệnh đề (II) đúng.

Mệnh đề (III): sai vì $IBJD$ không phải là hình bình hành.

Chọn đáp án **(C)**

□

C

Câu 196. Cho $ABCD$ là hình bình hành. M là điểm thỏa mãn $4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$. Khi đó điểm M là

A. trung điểm của AC .

B. điểm C .

C. trung điểm của AB .

D. trung điểm của AD .

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AM}.$ Suy ra $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}.$ Vậy M là trung điểm AC .

Chọn đáp án **(A)**

□

A

Câu 197. Cho bốn điểm A, B, C, D trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là **sai**?

A. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{IJ}$.

B. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$.

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{IJ}$.

D. $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{IJ}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}.$$

$$\text{Lại có } 2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IC} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DA}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}).$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \Rightarrow \text{A, B đúng.}$$

$$\text{Từ } 2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{IJ}.$$

Chọn đáp án **C**

□

C

Câu 198. Cho tứ giác $ABCD$ và điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} + k\overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm tam giác các ACD, BCD . Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh CD, AB . Tìm k sao cho G là trung điểm của IJ .

A. $k = 1$.

B. $k = 2$.

C. $k = 3$.

D. $k = 4$.

Lời giải.

Vì I, J lần lượt là trọng tâm tam giác các ACD, BCD nên

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 3\overrightarrow{GI}$$

$$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 3\overrightarrow{GJ}$$

Cộng vế theo vế hai đẳng thức véc-tơ trên ta được Theo giả thiết ta có

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GD} = 3(\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ}).$$

Nhưng G là trung điểm của IJ nên $\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ} = \vec{0}$.

$$\text{Do đó } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} + 2\overrightarrow{GD} = \vec{0}.$$

Vậy $k = 2$.

Chọn đáp án **B**

□

B

Câu 199. Cho ngũ giác $ABCDE$ có M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của MP, NQ . Biết $\overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{EA}$, tìm k .

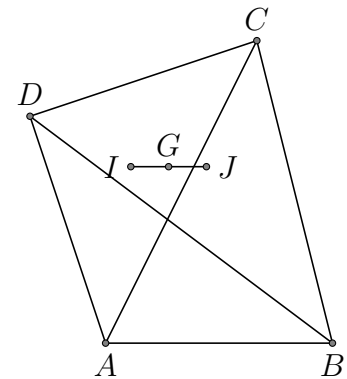
A. $k = -\frac{1}{2}$.

B. $k = \frac{1}{2}$.

C. $k = -\frac{1}{4}$.

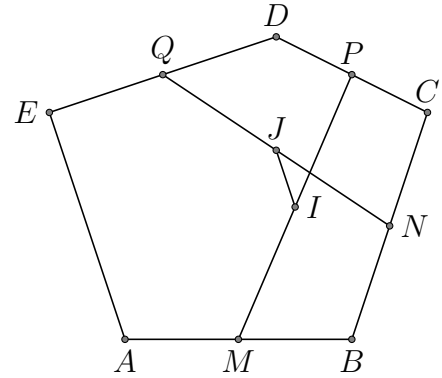
D. $k = \frac{1}{4}$.

Lời giải.



Ta có

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{IJ} &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{IN}) \\
 &= \frac{1}{4} (\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) \\
 &= \frac{1}{4} (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IC}) \\
 &= \frac{1}{4} \overrightarrow{AE} \\
 &= -\frac{1}{4} \overrightarrow{EA}
 \end{aligned}$$



Vậy $k = -\frac{1}{4}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 200. Cho $\triangle ABC$ và một điểm M tùy ý. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC}$. B. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.
 C. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$. D. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$.

Lời giải.

Ta có

$$2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB}) - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 201. Cho $\triangle ABC$ có trung tuyến AM . Hãy phân tích $\overrightarrow{AM}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

- A. $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$. B. $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{-2}$. C. $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}}{2}$. D. $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}}{2}$.

Lời giải.

Do AM là trung tuyến, suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 202. Cho hình chữ nhật $ABCD$, I và K lần lượt là trung điểm của BC , CD . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

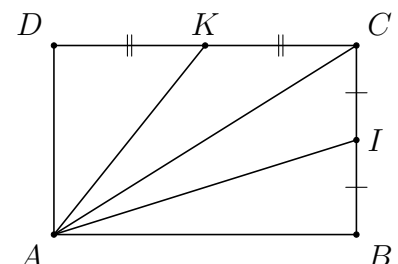
- A. $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
 C. $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{IK}$. D. $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Do I , K lần lượt là trung điểm của BC , CD , suy ra

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI} \\ \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AK} \end{cases} \Rightarrow 2(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AC}.$$

Từ đó suy ra $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.



Chọn đáp án **(D)**

□

D

Câu 203. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O . Tìm mệnh đề **sai**.

A. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$.

B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

C. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$.

Lời giải.

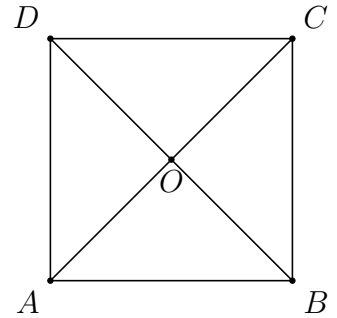
Ta có

• $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AO} + 2\overrightarrow{BO} = 2\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{BO} = 2\overrightarrow{BC}$.

• $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CB}$.

• $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

• $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AO}$.



Chọn đáp án **(B)**

□

B

Câu 204. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và đường trung tuyến AM . Khẳng định nào dưới đây **sai**?

A. $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GM} = \vec{0}$.

B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$, với mọi điểm O .

C. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{MG}$.

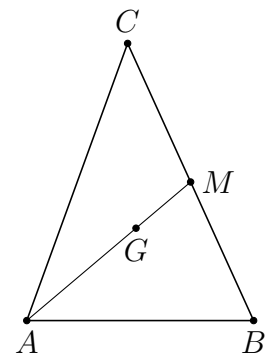
Lời giải.

Ta có $GA = 2GM$ nên

$$\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GM} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GM} = \vec{0}.$$

Mặt khác, G là trọng tâm của tam giác ABC nên với mọi điểm O ta có

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG} \text{ và } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$



Chọn đáp án **(D)**

□

D

Câu 205. Tam giác ABC là tam giác nhọn có AA' là đường cao. Khi đó, véc-tơ $\vec{u} = (\tan B)\overrightarrow{A'B} + (\tan C)\overrightarrow{A'C}$ là

A. $\vec{u} = \overrightarrow{BC}$.

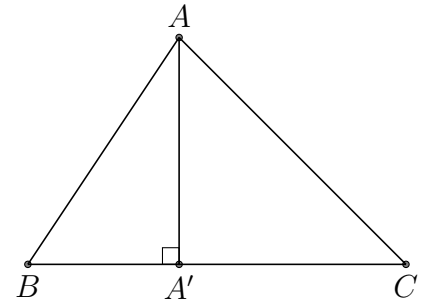
B. $\vec{u} = \vec{0}$.

C. $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

D. $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
\text{Ta có } \vec{u} &= (\tan B)\vec{A'B} + (\tan C)\vec{A'C} \\
&= \frac{AA'}{A'B}\vec{A'B} + \frac{AA'}{A'C}\vec{A'C} = AA' \left(\frac{\vec{A'B}}{A'B} + \frac{\vec{A'C}}{A'C} \right) \\
&= AA' \left(\frac{\frac{A'B}{BC}\vec{CB}}{A'B} + \frac{\frac{A'C}{BC}\vec{BC}}{A'C} \right) \\
&= AA' \left(\frac{\vec{CB}}{BC} + \frac{\vec{BC}}{BC} \right) = \vec{0}.
\end{aligned}$$



Chọn đáp án (B)

□

B

Câu 206. Cho tam giác ABC . Tìm điểm M thỏa mãn đẳng thức $\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$.

- A. M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCM$.
- B. M là trọng tâm tam giác ABC .
- C. M là trung điểm AB .
- D. M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $CAMB$.

Lời giải.

$$\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{BA} + \vec{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{BA} = \vec{CM}.$$

Chọn đáp án (A)

□

A

Câu 207. Cho trước tam giác ABC và giả sử M là điểm thỏa mãn đẳng thức $x\vec{MA} + y\vec{MB} + z\vec{MC} = \vec{0}$ (trong đó x, y, z là các số thực). Hãy chọn khẳng định đúng.

- A. Nếu $x + y + z \neq 0$ thì tồn tại duy nhất điểm M thỏa mãn đẳng thức trên.
- B. Nếu $x + y + z = 0$ thì tồn tại duy nhất điểm M thỏa mãn đẳng thức trên.
- C. Nếu ít nhất một trong ba số x, y, z khác 0 thì tồn tại duy nhất điểm M thỏa mãn đẳng thức trên.
- D. Nếu cả ba số x, y, z khác 0 thì tồn tại duy nhất điểm M thỏa mãn đẳng thức trên.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
&x\vec{MA} + y\vec{MB} + z\vec{MC} = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow x\vec{MA} + y\vec{MA} + y\vec{AB} + z\vec{MA} + z\vec{AC} = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow (x + y + z)\vec{MA} = \vec{u}
\end{aligned}$$

trong đó $\vec{u} = -y\vec{AB} - z\vec{AC}$.

Nếu $x + y + z \neq 0$ thì tồn tại duy nhất điểm M .

Chọn đáp án (A)

□

A

Câu 208. Cho tứ giác $ABCD$ và M là điểm thỏa $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = \vec{0}$. Chọn khẳng định đúng.

- A. M là giao điểm hai đường chéo của tứ giác $ABCD$.
- B. M là giao điểm của các đoạn thẳng nối hai trung điểm hai cạnh đối diện của tứ giác $ABCD$.
- C. M là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$.
- D. M là tâm đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$.

Lời giải.

Gọi E, F lần lượt là trung điểm AB, CD .

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 2\overrightarrow{ME} + 2\overrightarrow{MF} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow M &\text{ là trung điểm } EF.\end{aligned}$$

Tương tự nếu gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AD, BC thì ta cũng có M là trung điểm PQ . Khi đó M cũng chính là giao điểm của EF và PQ .

Chọn đáp án **(B)** □

B

Câu 209. Cho đoạn thẳng AB , C là trung điểm AB , E và F lần lượt là trung điểm của CA và CB . Cho M là điểm thoả mãn $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$. Khi đó

- A. M trùng với A . B. M trùng với F . C. M trùng với C . D. M trùng với D .

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MF} = \vec{0} \Leftrightarrow M \equiv F$.

Chọn đáp án **(B)** □

B

Câu 210. Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm hai đường chéo, tìm vị trí điểm M thoả mãn $\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$.

- A. M là trung điểm OB . B. M là trung điểm OD .
C. M trùng với B . D. M là trung điểm DA .

Lời giải.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}) + 4\overrightarrow{MB} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MO} + 2\overrightarrow{MO} + 4\overrightarrow{MB} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 4(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MB}) &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow M &\text{ là trung điểm } OB.\end{aligned}$$

Chọn đáp án **(A)** □

A

Câu 211. Cho tam giác ABC có I là trung điểm BC . Gọi M là điểm thoả mãn $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Xác định vị trí của điểm M .

- A. M là trọng tâm tam giác ABC .
B. M là trung điểm AI .
C. M là điểm thuộc đoạn thẳng AI thoả $MA = 2MI$.
D. M là điểm thuộc đoạn thẳng AI thoả $MI = 2MA$.

Lời giải.

Ta có $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MI} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MF} = \vec{0} \Leftrightarrow M \equiv F$ với F là trung điểm AI .

Chọn đáp án **(B)** □

B

Câu 212. Cho tam giác ABC , gọi M là điểm thoả mãn $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Khi đó,

- A. $ABCM$ là hình bình hành. B. $ABMC$ là hình bình hành.
C. $ABCM$ là hình bình thang có đáy lớn AM . D. $ABCM$ là hình bình thang có đáy lớn BC .

Lời giải.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{BC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} &= 2\overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

Khi đó $ABCM$ là hình thang với đáy lớn AM .

Chọn đáp án **C**

□

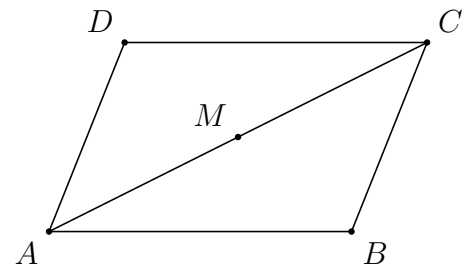
Câu 213. Cho hình bình hành $ABCD$, điểm M thoả $4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$. Khi đó điểm M là

- A. trung điểm AC . B. điểm C . C. trung điểm AB . D. trung điểm AD .

Lời giải.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2}.$$

Từ đó suy ra M là trung điểm của AC .



Chọn đáp án **A**

□

Câu 214. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABC và $A'B'C'$. Tìm điều kiện cần và đủ để $G \equiv G'$.

- A. $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + 3\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$.
C. $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} - 3\overrightarrow{G'G} = \vec{0}$. D. $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{G'G}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} &= 3\overrightarrow{G'G} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C'} &= 3\overrightarrow{G'G} \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}) + (\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'}) + 3\overrightarrow{GG'} &= 3\overrightarrow{G'G} \\ \Leftrightarrow \vec{0} + \vec{0} + 3\overrightarrow{GG'} &= 3\overrightarrow{G'G} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{GG'} = 3\overrightarrow{G'G} \Leftrightarrow \overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{G'G} \Leftrightarrow G \equiv G'.\end{aligned}$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 215. Cho tam giác ABC . Gọi D, E là các điểm xác định bởi $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. Gọi K là trung điểm của DE và M xác định bởi $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BC}$. Tìm giá trị thực của x sao cho A, K, M thẳng hàng.

- A. $\frac{3}{8}$. B. $-\frac{4}{3}$. C. $\frac{8}{3}$. D. $-\frac{3}{4}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + x(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = (1-x)\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC}$$

Do đó A, K, M thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AK}$ cùng phương

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AK} \Leftrightarrow (1-x)\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC} = \frac{k}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{5}\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x = \frac{k}{3} \\ x = \frac{k}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{15}{8} \\ x = \frac{3}{8} \end{cases}.$$

Vậy $x = \frac{3}{8}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

A

Câu 216. Cho tam giác ABC và hai điểm M, N xác định bởi $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$, $2\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$. Gọi I là trung điểm MN . Điểm D thỏa mãn $\overrightarrow{DB} = k\overrightarrow{DC}$ ($k \neq 1$). Biết ba điểm A, I, D thẳng hàng, tìm k .

A. $k = -\frac{1}{2}$.

B. $k = -2$.

C. $k = -\frac{2}{3}$.

D. $k = -\frac{3}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Có } \overrightarrow{AD} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{AB} - \frac{k}{1-k}\overrightarrow{AC} \text{ và } \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.$$

Do đó A, I, D thẳng hàng khi

$$\frac{\frac{1}{1-k}}{\frac{1}{4}} = \frac{-\frac{k}{1-k}}{\frac{1}{6}} \Rightarrow k = -\frac{2}{3}.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

C

Câu 217. Cho $A(0; 3)$, $B(4; 2)$. Điểm D thỏa $\overrightarrow{OD} + 2\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} = \vec{0}$, tọa độ D là

A. $(-3; 3)$.

B. $(-8; 2)$.

C. $(8; -2)$.

D. $\left(2; \frac{5}{2}\right)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{OD} + 2\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{AB}.$$

$$\text{Mà } \overrightarrow{AB} = (4; -1) \Rightarrow 2\overrightarrow{AB} = (8; -2) \Rightarrow \overrightarrow{OD} = (8; -2).$$

Vậy $D(8; -2)$.

Chọn đáp án **(C)**

□

C

Câu 218. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm tam giác. Điểm N trên BC sao cho $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Biểu diễn véc-tơ $\overrightarrow{AC}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{AG}$ và $\overrightarrow{AN}$.

A. $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$.

B. $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$.

C. $\overrightarrow{AC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$.

D. $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}(3\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AC}) + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}.$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

B

Câu 219. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của AB , D là trung điểm của BC , N là điểm trên AC sao cho $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{NA}$. Gọi K là trung điểm MN . Biểu diễn véc-tơ $\overrightarrow{AK}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

Chọn đáp án **A**

□

A

Câu 220. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của AB , D là trung điểm của BC , N là điểm trên AC sao cho $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{NA}$. Gọi K là trung điểm MN . Biểu diễn véc-tơ $\overrightarrow{KD}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{KD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{KD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{KD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{KD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KD} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{KB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{KD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{KA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án **A**

□

A

Câu 221. Cho tam giác ABC . Gọi I là điểm trên BC sao cho $\overrightarrow{CI} = -2\overrightarrow{BI}$. Biểu diễn véc-tơ $\overrightarrow{AI}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Chọn đáp án **D**

□

D

Câu 222. Cho tứ giác $ABCD$. Các điểm M , N lần lượt thuộc các đoạn AD , BC sao cho $\frac{MA}{MD} =$

$\frac{NB}{NC} = \frac{m}{n} (m+n \neq 0)$. Biểu diễn véc-tơ $\overrightarrow{MN}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{MN} = \frac{m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{DC}}{m+n}$.

B. $\overrightarrow{MN} = \frac{n\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{DC}}{m+n}$.

C. $\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}}{m+n}$.

D. $\overrightarrow{MN} = \frac{n\overrightarrow{AB} - m\overrightarrow{DC}}{m+n}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n\overrightarrow{MN} = n\overrightarrow{MA} + n\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{BN} \\ m\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{MD} + m\overrightarrow{DC} + m\overrightarrow{CN} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (m+n)\overrightarrow{MN} = n\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{DC}.$$

Chọn đáp án (B)

□

B

Câu 223. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O , đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Gọi I là trung điểm của BO . Biểu diễn véc-tơ $\overrightarrow{AI}$ theo các véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$.

A. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

B. $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$.

C. $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}$.

D. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AO}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}.$$

Chọn đáp án (B)

□

B

Câu 224. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O , đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Gọi G là trọng tâm tam giác OCD . Biểu diễn véc-tơ $\overrightarrow{BG}$ theo các véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$.

A. $\overrightarrow{BG} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b}$.

B. $\overrightarrow{BG} = \frac{3}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}$.

C. $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{5}{6}\vec{b}$.

D. $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b}$.

Lời giải.

Ta có

$$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{AB}\right]$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b}.$$

Chọn đáp án (A)

□

A

Câu 225. Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AC và N là trung điểm của BM thì $\overrightarrow{AN} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$ với m, n bằng bao nhiêu?

A. $\frac{1}{6}$.

B. $\frac{1}{8}$.

C. $\frac{1}{2}$.

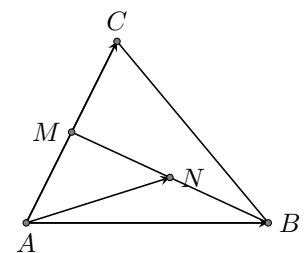
D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM}) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}.$$

$$\text{Vậy } m = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{4}. \text{ Suy ra } m \cdot n = \frac{1}{8}.$$



Chọn đáp án (B)

□

B

Câu 226. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM . Hãy phân tích $\overrightarrow{AM}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

- A. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. B. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{-2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.
 C. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$. D. $\overrightarrow{AM} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

Lời giải.

Do AM là trung tuyến của tam giác ABC , ta có:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM} \text{ nên } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 227. Cho $\triangle ABC$ với G là trọng tâm. Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Khi đó $\overrightarrow{AG}$ được biểu diễn theo hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là

- A. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$. B. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$. C. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$. D. $\overrightarrow{AG} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm cạnh BC .

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})\right) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$$

$$\text{Nên } \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) - \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 228. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. Mọi véc-tơ $\vec{x}$ đều có thể biểu thị được một cách duy nhất qua hai véc-tơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
 B. Véc-tơ $\vec{b}$ cùng phương với véc-tơ $\vec{a}$ khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{b} = k\vec{a}$.
 C. Nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì với mọi điểm M ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.
 D. Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số k khác 0 để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Véc-tơ $\vec{0}$ cùng phương với mọi véc-tơ $\vec{b}$, nhưng không có số thực k nào để $\vec{b} = k \cdot \vec{0}$ (khi $\vec{b}$ khác $\vec{0}$).

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 229. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Đặt $\overrightarrow{GA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{GB} = \vec{b}$. Tìm các giá trị thực của m, n để $\overrightarrow{BC} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

- A. $m = 1; n = 2$. B. $m = -1; n = -2$. C. $m = -2; n = -1$. D. $m = 2; n = 1$.

Lời giải.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB}$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = -\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB}.$$

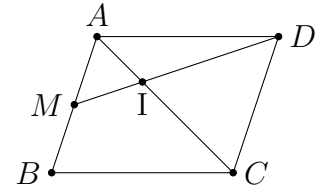
Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 230. Cho hình bình hành $ABCD$. M là trung điểm AB , DM cắt AC tại I . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
C. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
D. $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.



Lời giải.

Theo Ta-lét ta có $\frac{AI}{IC} = \frac{AM}{CD} = \frac{1}{2}$, suy ra $AI = \frac{1}{3}AC$.

Chọn đáp án (B)

□

B

Câu 231. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Hãy tìm m và n sao cho $\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{DC}$.

A. $m = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{2}$. B. $m = -\frac{1}{2}, n = \frac{1}{2}$. C. $m = \frac{1}{2}, n = -\frac{1}{2}$. D. $m = -\frac{1}{2}, n = -\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC})$.

Vì M là trung điểm AD nên $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$. Vậy $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$.

Chọn đáp án (A)

□

A

Câu 232. Cho tam giác ABC , gọi D là điểm xác định bởi hệ thức $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Biết $\overrightarrow{BD} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$ ($m, n \in \mathbb{R}$). Tính tổng $T = m + n$.

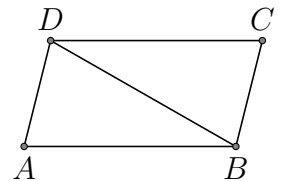
A. $T = -3$. B. $T = -1$. C. $T = 3$. D. $T = 1$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $ABCD$ là hình bình hành.

Ta có $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Vậy theo giả thiết thì $m = -2$ và $n = 1$ nên $T = -2 + 1 = -1$.



Chọn đáp án (B)

□

B

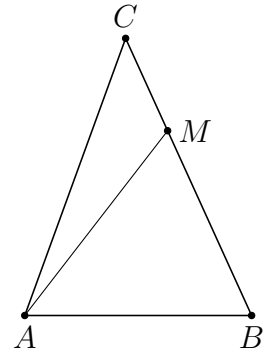
Câu 233. Cho tam giác ABC , gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
C. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$



Chọn đáp án **(A)**

□

A

Câu 234. Cho hình bình hành $ABCD$ trên cạnh AB, CD lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho $3AM = AB, 2NC = CD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BMN . Đặt $\overrightarrow{AG} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AD}$. Hãy tính $T = m + n$.

A. $\frac{5}{6}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{7}{8}$.

D. $\frac{11}{12}$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN})$. Mà

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Suy ra

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) = \frac{7}{12}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}.$$

$$m = \frac{7}{12}, n = \frac{1}{3} \Rightarrow m + n = \frac{11}{12}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

D

Câu 235. Cho $\triangle ABC$ và I thỏa mãn $\overrightarrow{IA} = 3\overrightarrow{IB}$. Phân tích $\overrightarrow{CI}$ theo $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$.

A. $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{CB})$.

B. $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{CB}$.

C. $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}(3\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})$.

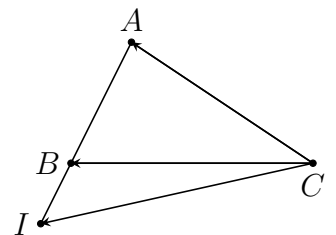
D. $\overrightarrow{CI} = 3\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CI} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AI} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{CI} &= \overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{IB} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{CI} &= \overrightarrow{CA} - 3(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CB}) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{CI} &= \overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{CI} - 3\overrightarrow{CB} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{CI} &= -\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{CB}) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{CI} &= \frac{1}{2}(3\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}).\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}(3\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}).$$



Chọn đáp án **C**

□

C

Câu 236. Cho tứ giác $ABCD$ trên cạnh AB, CD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$ và $3\overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{DC}$. Biểu diễn véc-tơ $\overrightarrow{MN}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

B. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

C. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

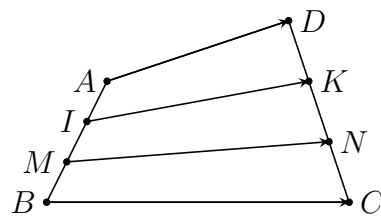
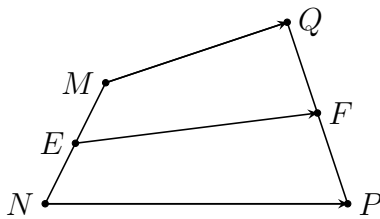
D. $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

Ta chứng minh bài toán sau

Nếu E, F lần lượt là trung điểm của MN, PQ thì $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{NP})$.

Thật vậy, ta có $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{EP} + \overrightarrow{EQ}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{EN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{MQ}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{NP})$.



Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AM và DN .

Khi đó áp dụng kết quả của bài toán trên ta được

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{IK}) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MN})\right) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}.$$

Chọn đáp án **C**

□

C

Câu 237. Cho tứ giác $ABCD$, trên cạnh AB, CD lấy lần lượt các điểm M, N sao cho $3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$ và $3\overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{DC}$. Biểu diễn véc-tơ $\overrightarrow{MN}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

B. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

C. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

D. $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$

$$= \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$$

$$= \frac{2}{3}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) + \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$

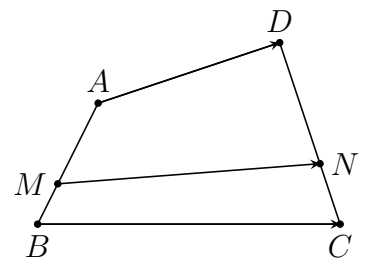
$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}.$$

Vậy $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

Chọn đáp án **C**

□

C



Câu 238. Cho tam giác ABC có AK, BM là hai đường trung tuyến. Đặt $\overrightarrow{AK} = \vec{a}, \overrightarrow{BM} = \vec{b}$. Hãy biểu thị $\overrightarrow{BC}$ theo $\vec{a}, \vec{b}$.

A. $\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$. B. $\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b}$. C. $\overrightarrow{BC} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$. D. $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$ (1).

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AK} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = 2\vec{a} - \overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 239. Cho tam giác ABC và điểm D thoả mãn $\overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$. Điều kiện cần và đủ để điểm D thuộc đường thẳng BC là

A. $mn = 1$. B. $m = n = \frac{1}{2}$. C. $m + n = 1$. D. $m - n = 1$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} &= -m\overrightarrow{BA} + n(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{BD} &= (1 - m - n)\overrightarrow{BA} + n\overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

Điểm D thuộc đường thẳng BC khi và chỉ khi tồn tại số k sao cho $\overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{BC}$

Thay vào đẳng thức ở trên ta được:

$$\begin{aligned}k\overrightarrow{BC} &= (1 - m - n)\overrightarrow{BA} + n\overrightarrow{BC} \\ \Leftrightarrow (k - n)\overrightarrow{BC} &= (1 - m - n)\overrightarrow{BA}.\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $k - n = 1 - m - n = 0$. Vậy $m + n = 1$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 240. Cho tam giác ABC có trung tuyến AD . Xét các điểm M, N, P cho bởi $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AD}$. Tìm k để M, N, P thẳng hàng.

A. $k = \frac{1}{6}$. B. $k = \frac{1}{3}$. C. $k = \frac{1}{4}$. D. $k = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AD} = \frac{k}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{2}\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AM} + 2k\overrightarrow{AN}$.

M, N, P thẳng hàng khi $k + 2k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{3}$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 241. Cho tam giác ABC và ba điểm M, N, P xác định bởi $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$, $3\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PB}$ ($k \neq 1$). Tìm k để ba điểm M, N, P thẳng hàng.

A. $k = \frac{3}{2}$. B. $k = -\frac{3}{2}$. C. $k = \frac{1}{6}$. D. $k = -\frac{1}{6}$.

Lời giải.

Cách 1. Có $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{NB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{NC}$ và $\overrightarrow{NP} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{NA} - \frac{k}{1-k}\overrightarrow{NB} = -\frac{k}{1-k}\overrightarrow{NB} + \frac{3}{1-k}\overrightarrow{NC}$.

Do đó M, N, P thẳng hàng khi

$$\frac{-\frac{k}{1-k}}{\frac{1}{k}} = \frac{\frac{3}{1-k}}{\frac{2}{3}} \Rightarrow k = -\frac{3}{2}.$$

Cách 2. Dễ thấy $k \neq 0$. Có $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{k-1}{3k}\overrightarrow{AP} + \frac{4}{9}\overrightarrow{AN}$.

M, N, P thẳng hàng khi $\frac{k-1}{3k} + \frac{4}{9} = 1 \Rightarrow k = -\frac{3}{2}$.

Cách 3. Theo định lí Menelaus thì M, N, P thẳng hàng khi $(-2) \cdot 3 \cdot k = 1$ hay $k = -\frac{3}{2}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

B

Câu 242. Cho tam giác ABC . Gọi I, J, K là các điểm xác định $\overrightarrow{CI} = 2\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AK} = -2\overrightarrow{AB}$.

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Ba đường thẳng AI, BJ, CK đôi một song song.
- B. Ba đường thẳng AI, BJ, CK đồng quy.
- C. J nằm giữa I và K .
- D. I nằm giữa K và J .

Lời giải.

Cách 1. Gọi H là giao điểm của AI và BJ . Đặt $\overrightarrow{HI} = k\overrightarrow{HA}$.

Ta có $\overrightarrow{HB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HC} = \frac{k}{2}\overrightarrow{HA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HC}$ và $\overrightarrow{HJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{JA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{JC}$.

Do H, J, B thẳng hàng nên

$$\frac{\frac{k}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} \Rightarrow k = 3.$$

Suy ra $\overrightarrow{CH} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CI} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$.

Mặt khác $\overrightarrow{CK} = 3\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB}$ nên $\overrightarrow{CK} = 2\overrightarrow{CH}$.

Vậy C, H, K thẳng hàng hay AI, BJ, CK đồng quy.

Cách 2. Ta có $\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IC}$, $\overrightarrow{JC} = -3\overrightarrow{JA}$, $\overrightarrow{KA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{KB}$ và $\frac{1}{2} \cdot (-3) \cdot \frac{2}{3} = -1$ nên theo định lí Ceva thì AI, BJ, CK đồng quy.

Chọn đáp án **(B)**

□

B

Câu 243. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương và $\vec{v} = -2\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

Trong các véc-tơ sau, véc-tơ nào cùng hướng với véc-tơ $\vec{v}$?

- A. $\vec{u}_1 = -\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}$.
- B. $\vec{u}_2 = -2\vec{a}$.
- C. $\vec{u}_3 = 2\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$.
- D. $\vec{u}_4 = 6\vec{a} - \vec{b}$.

Lời giải.

Ta có $2\vec{u}_1 = \vec{v}$. Suy ra $\vec{u}_1$ và $\vec{v}$ cùng hướng.

Chú ý: Cho $\vec{b} \neq \vec{0}$.

- Nếu tồn tại $k > 0$ sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.
- Nếu tồn tại $k < 0$ sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.

Chọn đáp án **A**

□

A

Câu 244. Cho $\triangle ABC$. Gọi M, N là các điểm thỏa mãn $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{0}$, $2\vec{NA} + 3\vec{NC} = \vec{0}$ và $\vec{BC} = k\vec{BP}$. Tìm k để ba điểm M, N, P thẳng hàng.

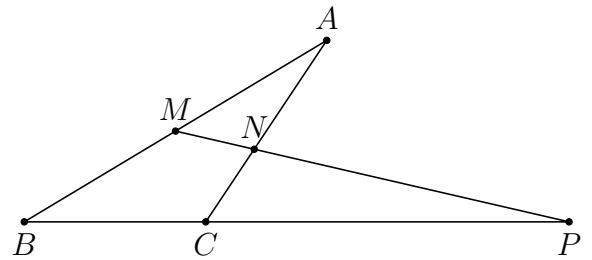
- A. $k = \frac{1}{3}$. B. $k = 3$. C. $k = \frac{2}{3}$. D. $k = \frac{3}{5}$.

Lời giải.

Cách tự luận.

Ta có

- $\vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM} = \frac{3}{5}\vec{AC} - \frac{1}{2}\vec{AB}$.
- $\vec{NP} = \vec{NC} + \vec{CP}$
 $= \frac{2}{5}\vec{AC} + (\vec{BP} - \vec{BC})$
 $= \frac{2}{5}\vec{AC} + \left(\frac{1}{k} - 1\right)\vec{BC}$
 $= \frac{2}{5}\vec{AC} + \left(\frac{1}{k} - 1\right)(\vec{AC} - \vec{AB})$
 $= \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{5}\right)\vec{AC} - \left(\frac{1}{k} - 1\right)\vec{AB}$.



Để ba điểm M, N, P thẳng hàng thì $\exists m \in \mathbb{R}: \vec{NP} = m\vec{MN}$ hay

$$\left(\frac{1}{k} - \frac{3}{5}\right)\vec{AC} - \left(\frac{1}{k} - 1\right)\vec{AB} = \frac{3m}{5}\vec{AC} - \frac{m}{2}\vec{AB}.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \frac{1}{k} - \frac{3}{5} = \frac{3m}{5} \\ -\left(\frac{1}{k} - 1\right) = -\frac{m}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ k = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Vậy $k = \frac{1}{3}$.

Cách trắc nghiệm.

Ta có

- $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{MA} = -\vec{MB} \Rightarrow \frac{\vec{MA}}{\vec{MB}} = -1$.
- $\vec{BC} = k\vec{BP} \Leftrightarrow \vec{PB} = (1 - k)\vec{PC} \Rightarrow \frac{\vec{PB}}{\vec{PC}} = 1 - k$.
- $2\vec{NA} + 3\vec{NC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{NA} = -\frac{3}{2}\vec{NC} \Rightarrow \frac{\vec{NA}}{\vec{NC}} = -\frac{3}{2}$.

Theo định lí Menelaus, ba điểm M, N, P thẳng hàng khi

$$\frac{\vec{MA}}{\vec{MB}} \cdot \frac{\vec{PB}}{\vec{PC}} \cdot \frac{\vec{NC}}{\vec{NA}} = 1 \Leftrightarrow (-1) \cdot (1 - k) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{3}.$$

Vậy $k = \frac{1}{3}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

A

Câu 245. Cho tam giác ABC , M là điểm di động thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$. Tìm tập hợp điểm M .

- A. Tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng BC .
- B. Tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng AC .
- C. Tập hợp điểm M là một đường thẳng qua trung điểm của AB .
- D. Tập hợp điểm M là đường tròn (C) , có tâm I là trung điểm của AB , bán kính $R = \frac{BC}{2}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB , ta có:

$$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow |2\overrightarrow{MI}| = |\overrightarrow{CB}| \Leftrightarrow MI = \frac{1}{2}BC.$$

Suy ra, tập hợp điểm M là đường tròn (C) , có tâm I là trung điểm của AB , bán kính $R = \frac{BC}{2}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

D

Câu 246. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm BC, CA, AB . Tìm tập hợp điểm M sao cho $2|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 3|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$.

- A. Tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng GI .
- B. Tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng AI .
- C. Tập hợp điểm M là đường vuông góc với IK tại K .
- D. Tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng GJ .

Lời giải.

Ta có: $2|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 3|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow 2|3\overrightarrow{MG}| = 3|2\overrightarrow{MI}| \Leftrightarrow MG = MI$.

Suy ra, tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng GI .

Chọn đáp án **(A)**

□

A

Câu 247. Cho hình bình hành $ABCD$ và điểm M thỏa mãn $4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$. Khẳng định nào sau là đúng?

- A. M là trung điểm AC .
- B. M trùng C .
- C. M là trung điểm AB .
- D. M là trung điểm AD .

Lời giải.

Áp dụng quy tắc hình bình ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC} \Rightarrow 2\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AM}$. Do đó M là trung điểm AC .

Chọn đáp án **(A)**

□

A

Câu 248. Cho tam giác ABC tùy ý. Hỏi có bao nhiêu điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 3$?

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. Vô số.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ với G là trọng tâm $\triangle ABC$. Từ giả thiết suy ra $MG = 1$.

Do đó ta phải chọn M thuộc vào đường tròn tâm G bán kính 1.

Chọn đáp án (D)

□

D

Câu 249. Cho tam giác ABC , trọng tâm G , gọi I là trung điểm BC , M là điểm thỏa mãn $2|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 3|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$. Khi đó, tập hợp điểm M thỏa là

A. Đường trung trực của BC .

B. Đường tròn tâm G , bán kính BC .

C. Đường trung trực của IG .

D. Đường tròn tâm I , bán kính BC .

Lời giải.

Ta có $2|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 3|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow 2|3\overrightarrow{MG}| = 3|2\overrightarrow{MI}| \Leftrightarrow MG = MI$.

Vậy G nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng IG .

Chọn đáp án (C)

□

C

Câu 250. Cho tam giác ABC có trọng tâm G , tập hợp các điểm M sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 6$ là

A. Đường thẳng qua G song song với AB .

B. Đường tròn tâm G bán kính 2.

C. Đường tròn tâm G bán kính 6.

D. Đường trung tuyến AG .

Lời giải.

Ta có $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 6 \Leftrightarrow 3|\overrightarrow{MG}| = 6 \Leftrightarrow MG = 2$.

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm G bán kính 2.

Chọn đáp án (B)

□

B

Câu 251. Cho hai lực $F_1 = F_2 = 100N$ có điểm đặt tại O và tạo với nhau góc 60° . Cường độ lực tổng hợp của hai lực ấy bằng bao nhiêu?

A. $100N$.

B. $50\sqrt{3}N$.

C. $100\sqrt{3}N$.

D. $200N$.

Lời giải.

Giả sử $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ lần lượt là hai véc-tơ biểu diễn cho hai lực F_1, F_2 .

Gọi M là trung điểm của AB .

Khi đó véc-tơ biểu diễn lực tổng hợp của hai lực F_1, F_2 là $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM}$.

Nên cường độ lực tổng hợp của hai lực trên bằng $2OM$.

Trong tam giác OAB có $OA = OB = 100$ và $\widehat{AOB} = 60^\circ$ suy ra tam giác OAB là tam giác đều.

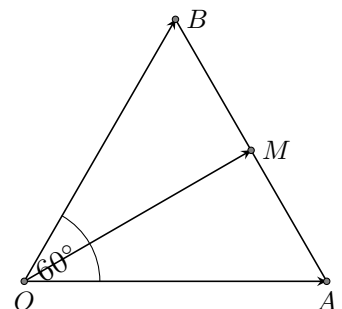
Do đó $OM = 50\sqrt{3}N$.

Vậy cường độ lực tổng hợp của hai lực đã cho bằng $2OM = 100\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (C)

□

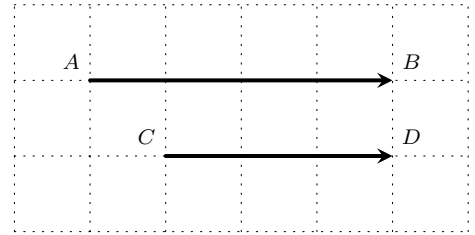
C



Câu 252.

Cho hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ như hình vẽ bên. Kết quả nào dưới đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$.
 B. $\overrightarrow{AB} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$.
 C. $\overrightarrow{AB} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{CD}$.
 D. $\overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{CD}$.



Lời giải.

Nhận thấy các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng, hơn nữa $AB = \frac{4}{3}CD$. Vậy $\overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{CD}$

Chọn đáp án **(D)**

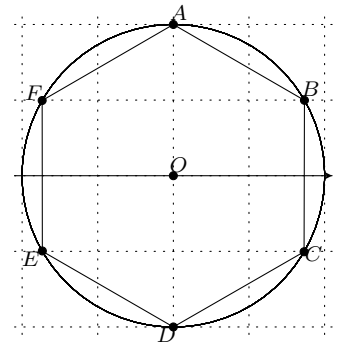
□

D

Câu 253.

Cho hình lục giác đều $ABCDEF$, tâm O . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$.
 B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$.
 C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FO}$.
 D. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{FC}$.



Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{FC} \\ AB = \frac{1}{2}FC \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FC}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

D

Câu 254. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $M(0; -2)$ và $N(1; 3)$. Khoảng cách giữa hai điểm M và N là

- A. $\sqrt{26}$.
 B. $\sqrt{2}$.
 C. 26.
 D. 2.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MN} = (1; 5) \Rightarrow MN = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

A

Câu 255. Trong hệ tọa độ Oxy , cho $A(2; -3)$, $B(4; 7)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .

- A. $I(2; 10)$.
 B. $I(6; 4)$.
 C. $I(8; -21)$.
 D. $I(3; 2)$.

Lời giải.

Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là $I(3; 2)$.

Chọn đáp án **(D)**

□

D

Câu 256. Cho tam giác ABC và I là trung điểm của cạnh BC . Điểm G có tính chất nào sau đây là điều kiện cần và đủ để G là trọng tâm của tam giác ABC ?

A. $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$.

B. $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$.

C. $AI = 3GI$.

D. $GA = 2GI$.

Lời giải.

G là trọng tâm tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ hay $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$.

Chọn đáp án **(A)** □

A

Câu 257. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (2; -4)$, $\vec{b} = (-5; 3)$. Véc-tơ $2\vec{a} - \vec{b}$ có tọa độ là

A. $(7; -7)$.

B. $(9; -5)$.

C. $(-1; 5)$.

D. $(9; -11)$.

Lời giải.

Ta có $2\vec{a} - \vec{b} = 2(2; -4) - (-5; 3) = (4 + 5; -8 - 3) = (9; -11)$.

Chọn đáp án **(D)** □

D

Câu 258. Nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

B. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

C. $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

D. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB . Khi đó $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI} = 2 \cdot \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$.

Suy ra $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

Chọn đáp án **(B)** □

B

Câu 259. Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Nếu $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$ thì đẳng thức nào dưới đây đúng?

A. $\overrightarrow{BC} = -4\overrightarrow{AC}$.

B. $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - (-3\overrightarrow{AC}) = 4\overrightarrow{AC}$.

Chọn đáp án **(D)** □

D

Câu 260. Cho hình bình hành $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$.

B. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$.

C. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{CD}$.

D. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD}$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + 2\overrightarrow{BC} = \vec{0} + 2\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BC}$.

Chọn đáp án **(A)** □

A

Câu 261. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O . Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$.

B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

C. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{CB}$ (với I là trung điểm của AB).

Chọn đáp án (B)

□

B

Câu 262. Cho G là trọng tâm tam giác ABC , gọi I là trung điểm của BC . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GI}$. B. $\overrightarrow{IG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$. C. $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$. D. $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$.

Lời giải.

Áp dụng quy tắc trung điểm: vì I là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$.

Chọn đáp án (C)

□

C

Câu 263. Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Hãy chọn hệ thức đúng

- A. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC}$. B. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.
C. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$. D. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} &= 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{CM} \\ &= 2(\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MB}) \\ &= 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (D)

□

D

Câu 264. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Tính $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.

- A. $\vec{u} = 3\overrightarrow{AC}$. B. $\vec{u} = 4\overrightarrow{AO}$. C. $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$. D. $\vec{u} = 2\overrightarrow{AO}$.

Lời giải.

Theo quy tắc hình bình hành, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. Suy ra $\vec{u} = 2\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AO}$.

Chọn đáp án (B)

□

B

Câu 265. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi M là trung điểm của BC . Kết quả nào dưới đây sai?

- A. $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM}$. B. $\overrightarrow{AM} = -3\overrightarrow{MG}$. C. $\overrightarrow{AM} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$. D. $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$.

Lời giải.

Ta có các đẳng thức tương đương sau: $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{GM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$.

Vậy, khẳng định sai là $\overrightarrow{AM} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$.

Chọn đáp án (C)

□

C

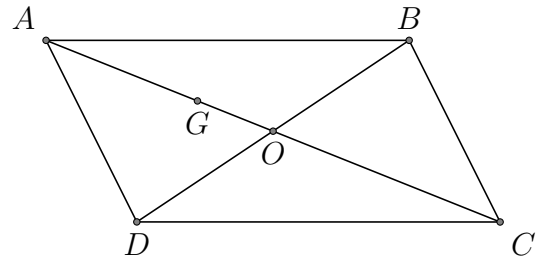
Câu 266. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O , gọi G là trọng tâm $\triangle ABD$. Tìm mệnh đề sai.

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$. C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BO}$. D. $\overrightarrow{GO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$.

Lời giải.

Ta có

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AO} = 3\overrightarrow{AG}$.
- $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{OB}$.
- $\overrightarrow{GO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$.



Chọn đáp án **C**

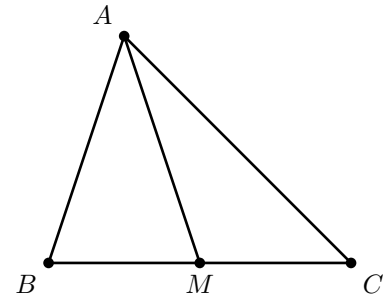
C

Câu 267. Cho tam giác ABC . Điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$. Chọn khẳng định đúng.

- A. M là trọng tâm tam giác ABC . B. M là trung điểm của BC .
C. M trùng với B hoặc C . D. M trùng với A .

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM} \Rightarrow M$ là trung điểm của BC .



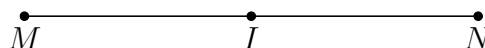
Chọn đáp án **B**

B

Câu 268. Cho I là trung điểm của đoạn MN . Mệnh đề nào là mệnh đề **sai**?

- A. $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{NI}$.
C. $\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{NI} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN}$. D. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AI}$.

Lời giải.



I là trung điểm của đoạn $MN \Rightarrow \overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IN}$ là hai véc-tơ đối $\Rightarrow \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \vec{0}$.

Tương tự $\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{NI} = \vec{0}$.

$\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NI}$ ngược chiều nhau, nên $\overrightarrow{MN} = -2\overrightarrow{NI}$.

Chọn đáp án **B**

B

Câu 269. Cho điểm A và véc-tơ $\vec{u}$. Có bao nhiêu điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$?

- A. Duy nhất một. B. Hai. C. Không có. D. Vô số.

Lời giải.

Có duy nhất điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$.

Chọn đáp án **A**

A

Câu 270. Cho hình bình hành $ABCD$, điểm M thỏa mãn $4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$. Khi đó M là

- A. trung điểm AC . B. điểm C . C. trung điểm AB . D. trung điểm AD .

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tam giác BCD . Khi đó $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$. Từ đó ta có

$$4\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AG} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG}.$$

Vậy điểm M là trung điểm của AC .

Chọn đáp án **A**

□

Câu 271. M là điểm nằm trên đoạn thẳng AB và thỏa điều kiện $AM = 4MB$. Tìm khẳng định sai.

- A. $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{MA}$. B. $\overrightarrow{AM} = 4\overrightarrow{MB}$. C. $\overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{MB}$. D. $\overrightarrow{AM} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{BA}$.

Lời giải.

Vì M nằm trên đoạn thẳng AB nên hai véc-tơ $\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{MA}$ là ngược hướng nên $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{MA}$ là sai.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 272. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. B. $2\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.
C. $2\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$. D. $2\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

Giả sử phương án **D** đúng. Ta có $2\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$, suy ra $2\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BC}$. Hơn nữa $2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BC}$. Từ đó suy ra $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}$. Mâu thuẫn với giả thiết M là trung điểm của BC .

Chọn đáp án **D**

□

Câu 273. Cho tam giác ABC có AK, BM là hai trung tuyến. Đặt $\overrightarrow{AK} = \vec{a}, \overrightarrow{BM} = \vec{b}$. Hãy biểu diễn $\overrightarrow{BC}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là

- A. $\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$. B. $\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b}$. C. $\overrightarrow{BC} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$. D. $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC .

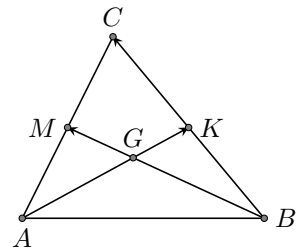
Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$ (1)

Do K là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AK} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = 2\vec{a} - \overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$.

Chọn đáp án **A**

□



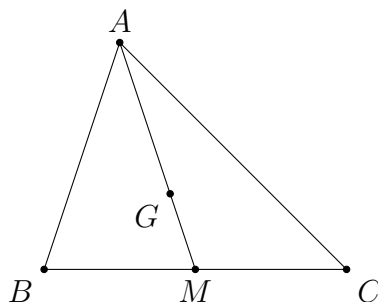
Câu 274. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Khẳng định nào sau đây là đúng ?

- A. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm cạnh BC . Có $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Chọn đáp án **B**

□

B

ĐÁP ÁN

1. A	2. C	3. C	4. C	5. B	6. A	7. B	8. C	9. D	10. C
11. B	12. A	13. C	14. C	15. A	16. C	17. C	18. C	19. D	20. C
21. C	22. B	23. C	24. C	25. C	26. A	27. D	28. D	29. B	30. B
31. C	32. B	33. A	34. A	35. A	36. B	37. D	38. A	39. D	40. D
41. D	42. D								

§4 HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

TRỤC VÀ ĐỘ DÀI ĐẠI SỐ TRÊN TRỤC

Trục tọa độ (còn gọi là *trục*) là một đường thẳng trên đó đã xác định một điểm O cố định và véc-tơ đơn vị $\vec{i}$ (véc-tơ có độ dài bằng 1).

Điểm O gọi là *gốc tọa độ*.

Hướng của véc-tơ đơn vị là *hướng của trục*.

Trục tọa độ như vậy ký hiệu là $(O; \vec{i})$.

Cho điểm tùy ý M nằm trên trục $(O; \vec{i})$. Khi đó, có duy nhất một số k xác định sao cho $\overrightarrow{OM} = k \cdot \vec{i}$.

Số k được gọi là *tọa độ* của điểm M đối với trục $(O; \vec{i})$.

Cho véc-tơ $\vec{a}$ nằm trên trục $(O; \vec{i})$. Khi đó có duy nhất số t xác định sao cho $\vec{a} = t \cdot \vec{i}$. Số t được gọi là *tọa độ* của véc-tơ $\vec{a}$ đối với trục $(O; \vec{i})$.

Như vậy tọa độ của điểm M là tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{OM}$.

Nếu hai điểm A, B nằm trên trục Ox . Khi đó có duy nhất một số t sao cho $\overrightarrow{AB} = t \cdot \vec{i}$. Ta gọi số t đó là *độ dài* của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ đối với trục đã cho, ký hiệu là $\overline{AB}$. Như vậy $\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cdot \vec{i}$.

Nếu $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\vec{i}$ thì $\overline{AB} = AB$.

! Nếu $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng với $\vec{i}$ thì $\overline{AB} = -AB$.

Nếu hai điểm A, B trên trục $(O; \vec{i})$ có tọa độ lần lượt là a, b thì $\overline{AB} = b - a$.

Định lý 1. Trên trục số

Với ba điểm bất kỳ trên trục, ta có $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

Hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ bằng nhau khi và chỉ khi $\overline{AB} = \overline{CD}$.

HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

Hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}, \vec{j})$ gồm hai trục $(O; \vec{i})$ và $(O; \vec{j})$ vuông góc với nhau, trong đó

Điểm O gọi là *gốc tọa độ*.

Trục $(O; \vec{i})$ gọi là *trục hoành*, ký hiệu là Ox .

Trục $(O; \vec{j})$ gọi là *trục tung*, ký hiệu là Oy .

Các véc-tơ $\vec{i}$ và $\vec{j}$ là các *véc-tơ đơn vị* trên trục Ox và Oy .

Hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}, \vec{j})$ còn được ký hiệu là Oxy .

! Mặt phẳng trên đó đã chọn một hệ trục tọa độ Oxy được gọi là *mặt phẳng tọa độ Oxy* hay *mặt phẳng Oxy* .

TỌA ĐỘ CỦA VEC-TƠ ĐỐI VỚI HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

Đối với hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}, \vec{j})$ nếu $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ thì cặp số $(x; y)$ được gọi là *tọa độ* của véc-tơ $\vec{u}$, ký hiệu $\vec{u} = (x; y)$ hay $\vec{u}(x; y)$.

Số x gọi là *hoành độ*, y gọi là *tung độ* của véc-tơ $\vec{u}$.

Định lí 2. Cho hai véc-tơ $\vec{a} = (x; y)$, $\vec{b} = (x'; y')$ và số thực k . khi đó

$$(i) \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

$$(ii) \vec{a} + \vec{b} = (x + x'; y + y') \text{ và } \vec{a} - \vec{b} = (x - x'; y - y')$$

$$(iii) k\vec{a} = (kx; ky)$$

$$(iv) \vec{a} \text{ cùng phương với } \vec{b} (\vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \text{ sao cho } \begin{cases} x = kx' \\ y = ky' \end{cases}$$

TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM

Trong mặt phẳng Oxy , tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là *tọa độ* của điểm M . Như vậy, $(x; y)$ là tọa độ của điểm M khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = (x; y)$, ký hiệu $M(x; y)$ hay $M = (x; y)$.

Số x được gọi là *hoành độ*, số y được gọi là *tung độ* của điểm M .

Nếu gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M trên Ox và Oy thì

!

$$M(x; y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK}.$$

Như vậy $\overrightarrow{OH} = x\vec{i}$ hay $x = \overline{OH}$ và $\overrightarrow{OK} = y\vec{j}$ hay $y = \overline{OK}$.

Định lí 3. Với hai điểm $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ ta có

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$$

TỌA ĐỘ TRUNG ĐIỂM CỦA ĐOẠN THẲNG VÀ TỌA ĐỘ TRỌNG TÂM CỦA TAM GIÁC

Định lí 4. Cho hai điểm $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$. Khi đó trung điểm I của đoạn thẳng AB có tọa độ

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

Định lí 5. Cho ba điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ và $C(x_C; y_C)$. Khi đó trọng tâm G của tam giác ABC

$$\text{có tọa độ } \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$$

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tìm tọa độ của một điểm và độ dài đại số của một véc-tơ trên trục

Căn cứ vào định nghĩa tọa độ của điểm, độ dài đại số của véc-tơ và các công thức tọa độ của véc-tơ $\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}, k\vec{u}$.

- Điểm M có tọa độ $a \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = a.\vec{e}$ với O là điểm gốc.
- Véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ có độ dài đại số là $m = \overline{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = m\vec{e}$.
- Nếu A và B có tọa độ lần lượt là a và b thì $\overline{AB} = b - a$.

- Tọa độ trung điểm I của đoạn AB : $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$.
- Nếu $\vec{u} = (u_1; u_2)$, $\vec{v} = (v_1; v_2)$ thì $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1; u_2 + v_2)$; $\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1; u_2 - v_2)$; $k\vec{u} = (ku_1; ku_2)$, $k \in \mathbb{R}$.

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 1 ❖❖❖

Ví dụ 1. Trên trục tọa độ $(O; \vec{e})$, cho ba điểm A, B, C với: $\overrightarrow{OA} = 4,5\vec{e}$, $\overrightarrow{OB} = -7,2\vec{e}$, $\overrightarrow{OC} = -3,6\vec{e}$.

- Xác định tọa độ các điểm A, B, C .
- Tìm tọa độ các trung điểm M, N, P theo thứ tự của các đoạn thẳng AB, BC, CA .
- Tính độ dài các đoạn thẳng AB, BC, CA .

Lời giải.



- $A(4,5), B(-7,2), C(-3,6)$.
- Vì M là trung điểm $AB \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = -1,35 \Rightarrow M(-1,35)$. Tương tự ta được $N(-5,4), P(0,45)$.
- $\overline{AB} = 11,7, \overline{BC} = 3,6, \overline{CA} = 8,1$.

□

Ví dụ 2. Trên trục tọa độ $(O, \vec{e})$, cho ba điểm $A(1), B(-2), C(7)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overline{AM} + 3\overline{BM} = 2\overline{CM}$.

Lời giải.



Gọi $M(x)$, ta có $\overline{AM} = x - 1, \overline{BM} = x + 2, \overline{CM} = x - 7$.

Theo giả thiết ta suy ra $x - 1 + 3(x + 2) = 2(x - 7) \Leftrightarrow x = -26$.

□

Ví dụ 3. Trên trục tọa độ $(O, \vec{e})$, cho các điểm $A(2), B(-3), C(-6)$. Tìm tọa độ của $D(x)$ sao cho $\overline{DA} + 4\overline{DB} \leq 3\overline{DC}$.

Lời giải.



Ta có: $\overline{DA} = 2 - x, 4\overline{DB} = -12 - 4x, 3\overline{DC} = -18 - 3x$.

Theo giả thiết ta suy ra $2 - x - 12 - 4x \leq -18 - 3x \Rightarrow x \geq 4$.

□

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng Oxy , cho $\vec{a} = (-4; 2)$, $\vec{b} = (5; 8)$. Tính tọa độ của các véc-tơ $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $3\vec{a}$, $5\vec{a} + 2\vec{b}$, $-(5\vec{a} - 2\vec{b})$.

Lời giải.

$$\vec{a} + \vec{b} = (1; 10), \quad \vec{a} - \vec{b} = (-9; -6), \quad 3\vec{a} = (-12; 6).$$

$$\text{Ta có: } 5\vec{a} = (-20; 10), \quad 2\vec{b} = (10; 16)$$

$$\text{Nên } 5\vec{a} + 2\vec{b} = (-10; 26) \text{ và } -(5\vec{a} - 2\vec{b}) = (30; 6). \quad \square$$

Ví dụ 5. Trong mặt phẳng Oxy , cho các véc-tơ $\vec{a} = (4; -2)$, $\vec{b} = (-1; -1)$, $\vec{c} = (2; 5)$. Hãy phân tích véc-tơ $\vec{b}$ theo hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{c}$.

Lời giải.

$$\text{Giả sử } \vec{b} = m\vec{a} + n\vec{c} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 4m + 2n \\ -1 = -2m + 5n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{8} \\ n = -\frac{1}{4} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } \vec{b} = -\frac{1}{8}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{c}. \quad \square$$

Ví dụ 6. Trong mặt phẳng Oxy , cho $\vec{a} = (x; 2)$, $\vec{b} = (-5; \frac{1}{3})$, $\vec{c} = (x; 7)$. Tìm véc-tơ $\vec{c} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \vec{c} = 4\vec{a} - 3\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4x - 3 \cdot (-5) \\ 7 = 4 \cdot 2 - 3 \cdot \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = -5. \quad \square$$

Ví dụ 7. Trong mặt phẳng Oxy , cho $\vec{a}(1; -2)$; $\vec{b}(-3; 0)$; $\vec{c}(4; 1)$. Tìm tọa độ của $\vec{t} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } 2\vec{a} = (2; -4); -3\vec{b} = (9; 0).$$

$$\text{Mà } \vec{t} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} = (15; -3) \Rightarrow \vec{t}(15; -3). \quad \square$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong mặt phẳng Oxy , cho $\vec{a} = (2; 1)$, $\vec{b} = (3; 4)$, $\vec{c} = (7; 2)$.

- Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.
- Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{v}$ sao cho $\vec{v} + \vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$.
- Tìm các số k, h để $\vec{c} = k\vec{a} + h\vec{b}$.

Lời giải.

$$\text{a. } \vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} = (4; 2) - (9; 12) + (7; 2) = (2; -8).$$

$$\text{b. } \vec{v} + \vec{a} = \vec{b} - \vec{c} \Leftrightarrow \vec{v} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = (-6; 1).$$

$$\text{c. } \vec{c} = k\vec{a} + h\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 2k + 7h \\ 2 = k + 4h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{22}{5} \\ h = -\frac{3}{5} \end{cases}. \text{ Suy ra } \vec{c} = \frac{22}{5}\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{b}.$$

□

Bài 2. Trong mặt phẳng Oxy , cho $\vec{a} = (-1; 3)$, $\vec{b} = (0; 5)$, $\vec{c} = (5; -2)$. Tính tọa độ của các véc-tơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ định bởi:

a) $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c}$.

b) $4\vec{a} + 2\vec{v} = 2\vec{b} - 3\vec{c}$.

Lời giải.

a) Ta có: $2\vec{a} = (-2; 6)$, $3\vec{b} = (0; 15)$, $4\vec{c} = (20; -8)$, $2\vec{a} + 3\vec{b} = (-2; 21)$.

$$\Rightarrow \vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c} = (-22; 29).$$

b) Ta có: $4\vec{a} + 2\vec{v} = 2\vec{b} - 3\vec{c} \Rightarrow \vec{v} = -2\vec{a} + \vec{b} - \frac{3}{2}\vec{c}$.

$$\text{mà } -2\vec{a} = (2; -6), \frac{3}{2}\vec{c} = \left(\frac{15}{2}; -3\right), -2\vec{a} + \vec{b} = (2; -1).$$

$$\Rightarrow \vec{v} = -2\vec{a} + \vec{b} - \frac{3}{2}\vec{c} = \left(-\frac{11}{2}; 2\right).$$

□

Bài 3. Trong mặt phẳng Oxy , cho $\vec{a} = (x; 2)$, $\vec{b} = (-5; 1)$, $\vec{c} = (x; 7)$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x + 3 \cdot (-5) \\ 7 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 15.$$

□

Bài 4. Trong mặt phẳng Oxy , cho $\vec{a} = (2; 1)$, $\vec{b} = (3; 4)$, $\vec{c} = (7; 2)$. Tìm tọa độ $\vec{c} = m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{b}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \vec{c} = m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 2m + 3n \\ 2 = m + 4n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{22}{5} \\ n = -\frac{3}{5} \end{cases}.$$

□

Bài 5. Trong mặt phẳng Oxy , cho $\vec{a} = (-2; 1)$, $\vec{b} = (3; 4)$ và $\vec{c} = (0; 8)$. Tìm tọa độ $\vec{x}$ thỏa $\vec{x} + \vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \vec{x} + \vec{a} = \vec{b} - \vec{c} \Leftrightarrow \vec{x} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} \Leftrightarrow \vec{x} = -(-2; 1) + (3; 4) - (0; 8) \Leftrightarrow \vec{x} = -(-2; 1) + (3; 4) - (0; 8) \Leftrightarrow \vec{x} = (5; -5).$$

□

Bài 6. Cho $\vec{a} = (0; 1)$, $\vec{b} = (-1; 2)$, $\vec{c} = (-3; -2)$. Tìm tọa độ của $\vec{u} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - 4\vec{c}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } 3\vec{a} = (0; 3), 2\vec{b} = (-2; 4), -4\vec{c} = (12; 8) \text{ nên } \vec{u} = (10; 15).$$

□

Bài 7. Trong mặt phẳng Oxy , cho $\vec{a} = (2; 1)$, $\vec{b} = (3; 4)$, $\vec{c} = (7; 2)$. Tìm m và n để $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } m\vec{a} + n\vec{b} = (2m + 3n; m + 4n).$$

$$\text{Mà: } \vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 3n = 7 \\ m + 4n = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{22}{5} \\ n = -\frac{3}{5} \end{cases}.$$

□

Bài 8. Trên trục Ox cho các điểm $A(2)$, $B(-2)$. Tìm điểm $M(x)$ thỏa mãn điều kiện $\overline{MA} \cdot \overline{MB} \leq \overline{AB}^2$.

Lời giải.

Ta có: $\overline{MA} = 2 - x$, $\overline{MB} = -2 - x$, $\overline{AB} = -4$.

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} \leq \overline{AB}^2 \Leftrightarrow (2 - x)(2 + x) \geq -16 \Leftrightarrow x^2 - 8 \leq 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{5} \leq x \leq 2\sqrt{5}. \quad \square$$

Bài 9. Trên trục tọa độ $(O; \vec{e})$, cho ba điểm $A(-4)$, $B(9)$, $C(-3)$.

- Tìm điểm $M(x)$ thỏa mãn điều kiện $\overline{AB} = 2\overline{CM}$.
- Tìm điểm $P(x)$ thỏa mãn điều kiện $\overline{PA} + 2\overline{PB} + 3\overline{PC} \leq 0$.
- Tìm điểm $Q(x)$ thỏa mãn điều kiện $\overline{QA} \cdot \overline{QB} \leq \overline{QC}^2$.

Lời giải.

a. $\overline{AB} = 13$, $2\overline{CM} = 2x + 6$. Theo giả thiết ta suy ra $13 = 2x + 6 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$.

b. $\overline{PA} = -4 - x$, $2\overline{PB} = 18 - 2x$, $3\overline{PC} = -9 - 3x$.

Theo giả thiết ta suy ra $-4 - x + 18 - 2x - 9 - 3x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{6}$.

c. $\overline{QA} = -4 - x$, $\overline{QB} = 9 - x$, $\overline{QC} = -3 - x$.

Theo giả thiết ta suy ra $(-4 - x)(9 - x) \leq (-3 - x)^2 \Leftrightarrow x \geq -\frac{45}{11}$. □

Bài 10. Trên trục tọa độ $x'Ox$ cho ba điểm A , B , C có tọa độ lần lượt là 9, -6, 2. Tìm các điểm đối xứng với điểm A và B qua C .

Lời giải.

Gọi A' , B' lần lượt là điểm đối xứng với điểm A và B qua C .

Vì C là trung điểm của đoạn AA' nên $x_C = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \Rightarrow x_{A'} = 2x_C - x_A = 4 - 9 = -5$.

Tương tự ta suy ra $x_{B'} = 4 + 6 = 10$. □

Dạng 2. Xác định tọa độ của một véc-tơ và một điểm trên mặt phẳng tọa độ Oxy

Trong mặt phẳng Oxy , với điểm M tùy ý, luôn tồn tại duy nhất hai số thực x, y sao cho $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Bộ hai số thực $(x; y)$ được gọi là *tọa độ* của véc-tơ $\overrightarrow{OM}$, ký hiệu $\overrightarrow{OM} = (x; y)$ hay $\overrightarrow{OM}(x; y)$.

- Tọa độ của véc-tơ đơn vị $\vec{i}$ là $(1; 0)$, tức là $\vec{i} = (1; 0)$.
- Tọa độ của véc-tơ đơn vị $\vec{j}$ là $(0; 1)$, tức là $\vec{j} = (0; 1)$.
- Tọa độ của véc-tơ-không là $(0; 0)$, tức là $\vec{0} = (0; 0)$.

Nếu biết tọa độ của hai điểm A, B thì ta tính tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ theo công thức

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A).$$

BÀI TẬP DẠNG 2

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ có $A(3; 2)$, $B(2; -1)$, $C(-2; -2)$. Tìm tọa độ điểm D .

Lời giải.

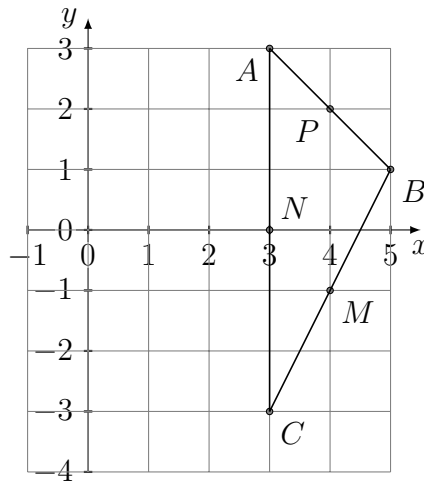
Gọi $D(x; y)$. Ta có $\overrightarrow{AD} = (x - 3; y - 2)$, $\overrightarrow{BC} = (-4; -1)$.

$$\text{Vì } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \text{ nên } \begin{cases} x - 3 = -4 \\ y - 2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1. \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm D là $(-1; 1)$. □

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC . Gọi $M(4; -1)$, $N(3; 0)$ và $P(4; 2)$ lần lượt là trung điểm các cạnh BC , CA và AB . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC .

Lời giải.



Ta có $\overrightarrow{NA} = (x_A - 3; y_A)$, $\overrightarrow{MP} = (0; 3)$.

Vì $NAPM$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{MP}$

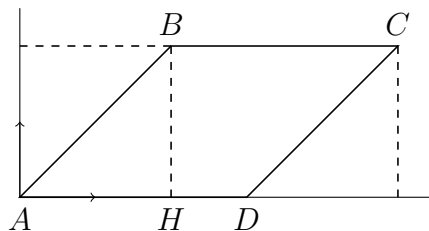
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A - 3 = 0 \\ y_A = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 3 \\ y_A = 3. \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm A là $(3; 3)$.

Tương tự, từ $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{NP}$ ta tính được $B(5; 1)$, $C(3; -3)$. □

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ có $AD = 3$ và chiều cao ứng với cạnh AD bằng 2 góc $\widehat{BAD} = 30^\circ$. Chọn hệ trục tọa độ $(A; \vec{i}, \vec{j})$ sao cho $\vec{i}$ và $\overrightarrow{AD}$ cùng hướng. Tìm tọa độ của các véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.



Kẻ $BH \perp AD$. Ta có $BH = 2$, $AB = 4$, $AH = 2\sqrt{3}$.

Do đó ta có $A(0; 0)$, $B(2; 2)$, $C(5; 2)$, $D(3; 0)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} = (2; 2)$, $\overrightarrow{BC} = (3; 0)$, $\overrightarrow{CD} = (-2; -2)$, $\overrightarrow{AC} = (5; 2)$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có $A(-1; 4)$, $B(2; 6)$, $C(1; 1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải.

Gọi $D(x; y)$. Ta có $\overrightarrow{AD} = (x + 1; y - 4)$, $\overrightarrow{BC} = (-1; -5)$.

$$\text{Vì } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \text{ nên } \begin{cases} x + 1 = -1 \\ y - 4 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1. \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm D là $(-2; -1)$. □

Bài 2. Trong mặt phẳng Oxy , cho bốn điểm $A(1; -1)$, $B(2; 2)$, $C(1; -5)$, $D(3; 1)$. Chứng minh rằng hai đường thẳng AB và CD song song với nhau.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 3)$, $\overrightarrow{CD} = (2; 6)$.

Suy ra $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$. Do đó hai đường thẳng AB và CD song song hoặc trùng nhau.

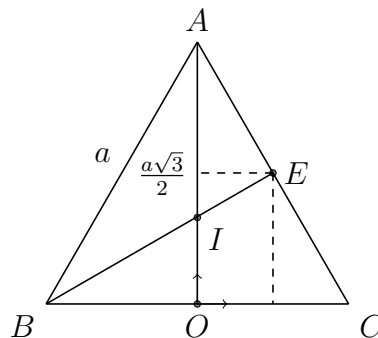
Ta có $\overrightarrow{AC} = (0; -4)$ và $\overrightarrow{AB} = (1; 3)$ không cùng phương vì $\frac{0}{1} \neq \frac{-4}{3}$.

Vậy $AB \parallel CD$. □

Bài 3. Cho tam giác đều ABC cạnh a . Chọn hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}, \vec{j})$, trong đó O là trung điểm của cạnh BC , $\vec{i}$ cùng hướng với $\overrightarrow{OC}$, $\vec{j}$ cùng hướng với $\overrightarrow{OA}$.

- Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC ;
- Tìm tọa độ trung điểm E của cạnh AC ;
- Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Lời giải.



- Ta có $B\left(-\frac{a}{2}; 0\right)$, $C\left(0; \frac{a}{2}\right)$.

Vì $\triangle ABC$ là tam giác đều nên $AO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $A\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

- $E\left(\frac{a}{4}; \frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$.

- Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Ta có $OI = \frac{1}{3}OA = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Suy ra $I\left(0; \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)$. □

Dạng 3. Tính tọa độ trung điểm - trọng tâm

Phương pháp giải, kinh nghiệm giải.

$$M \text{ là trung điểm } AB \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}.$$

$$G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}.$$

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 3 ❖❖❖

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(1;4)$, $B(-2;6)$. Tìm tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB .

Lời giải.

Gọi $M(x_M; y_M)$ là trung điểm AB , khi đó:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{1-2}{2} \\ y_M = \frac{4+6}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = -\frac{1}{2} \\ y_M = 5 \end{cases}.$$

Vậy $M\left(-\frac{1}{2}; 5\right)$. □

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(-1;2)$, $B(1;4)$, $C(-1;-2)$. Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác ABC .

Lời giải.

Gọi $G(x_G; y_G)$ là trọng tâm tam giác ABC , khi đó:

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{-1+1-1}{3} \\ y_G = \frac{2+4-2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{-1}{3} \\ y_G = \frac{4}{3} \end{cases}.$$

Vậy $G\left(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$. □

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng Oxy , cho ba điểm $A(3;1)$, $B(2;2)$, $G(2;-1)$. Tìm tọa độ điểm C biết G là trọng tâm tam giác ABC .

Lời giải.

Gọi $C(x_C; y_C)$.

Ta có:

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \frac{3+2+x_C}{3} \\ -1 = \frac{1+2+y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 1 \\ y_C = -6 \end{cases}.$$

Vậy $C(1; -6)$. □

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(-2; 0)$, $B(0; -4)$. Gọi M là trung điểm của AB , tìm tọa độ trọng tâm tam giác OBM .

Lời giải.

Gọi $G(x_G; y_G)$ là trọng tâm tam giác OBM , $M(x_M; y_M)$ là trung điểm AB .

Ta có:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = -1 \\ y_M = -2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_O + x_B + x_M}{3} \\ y_G = \frac{y_O + y_B + y_M}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{-1}{3} \\ y_G = \frac{-4 - 2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{-1}{3} \\ y_G = -2. \end{cases}$$

Vậy $G\left(\frac{-1}{3}; -2\right)$. □

Ví dụ 5. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC biết $A(1; 5)$, $B(-4; -3)$, $C(2; -1)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC , tìm tọa độ điểm G' là điểm đối xứng của G qua B .

Lời giải.

Gọi $G(x_G; y_G)$, $G'(x'_G; y'_G)$. Ta có:

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{1 - 4 + 2}{3} \\ y_G = \frac{5 - 3 - 1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{-1}{3} \\ y_G = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Vì G' là ảnh đối xứng của G qua B nên B là trung điểm của GG' . Ta có:

$$\begin{cases} x_{G'} = 2x_B - x_G \\ y_{G'} = 2y_B - y_G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{G'} = 2 \cdot (-4) - \frac{-1}{3} \\ y_{G'} = 2 \cdot (-3) - \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{G'} = \frac{-23}{3} \\ y_{G'} = \frac{-19}{3}. \end{cases}$$

Vậy $G\left(\frac{-23}{3}; \frac{-19}{3}\right)$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(0; 2)$, $B(-3; -2)$. Tìm tọa độ trung điểm của AB .

Lời giải.

Gọi $M(x_M; y_M)$ là trung điểm AB , khi đó:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{0 - 3}{2} \\ y_M = \frac{2 - 2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{-3}{2} \\ y_M = 0. \end{cases}$$

Vậy $M\left(\frac{-3}{2}; 0\right)$. □

Bài 2. Trong mặt phẳng Oxy , cho ba điểm $A(-1; 2)$, $B(5; -2)$, $C(-2; 1)$. Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác ABC .

Lời giải.

Gọi $G(x_G; y_G)$ là trọng tâm tam giác ABC , khi đó:

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{-1 + 5 - 2}{3} \\ y_G = \frac{2 - 2 + 1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{2}{3} \\ y_G = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Vậy $G\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$. □

Bài 3. Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(-1; 1)$, $D\left(-1; \frac{5}{2}\right)$.

- Tìm tọa độ điểm B biết D là trung điểm đoạn AB .
- Tìm tọa độ điểm M đối xứng với A qua B .

Lời giải.

- Gọi $B(x_B; y_B)$.

Ta có:

$$\begin{cases} x_D = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_D = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = \frac{-1 + x_B}{2} \\ \frac{5}{2} = \frac{1 + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = -1 \\ y_B = 4. \end{cases}$$

Vậy $B(-1; 4)$.

- Gọi $M(x_M; y_M)$ là điểm đối xứng với A qua B , khi đó B là trung điểm của MA .

Ta có:

$$\begin{cases} x_M = 2x_B - x_A \\ y_M = 2y_B - y_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 2 \cdot (-1) - (-1) \\ y_M = 2 \cdot 4 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = -1 \\ y_M = 7. \end{cases}$$

Vậy $M(-1; 7)$. □

Bài 4. Trọng tâm mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC biết $A(-3; 2)$, $B(4; 3)$ và điểm C nằm trên trục Ox . Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC và điểm C , biết G nằm trên trục Oy .

Lời giải.

Gọi $G(0; y_G)$, $C(x_C; 0)$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \frac{-3 + 4 + x_C}{3} \\ y_G = \frac{2 + 3 + 0}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = -1 \\ y_G = \frac{5}{3}. \end{cases}$$

Vậy $G\left(0; \frac{5}{3}\right)$, $C(-1; 0)$. □

Bài 5. Trong mặt phẳng Oxy , tìm tọa độ trọng tâm của tam giác ABC , biết trung điểm của các cạnh AB , BC , AC lần lượt là $M(2; 1)$, $N(2; 4)$, $P(-3; 0)$.

Lời giải.

Gọi $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$ là tọa độ ba đỉnh của tam giác ABC .

$G(x_G; y_G)$ là trọng tâm tam giác ABC .

Ta có:

$$\begin{cases} \frac{x_A + x_B}{2} = x_M \\ \frac{x_B + x_C}{2} = x_N \\ \frac{x_A + x_C}{2} = x_P \end{cases} \text{ và } \begin{cases} \frac{y_A + y_B}{2} = y_M \\ \frac{y_B + y_C}{2} = y_N \\ \frac{y_A + y_C}{2} = y_P \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_B + x_C = x_M + x_N + x_P \\ y_A + y_B + y_C = y_M + y_N + y_P. \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_M + x_N + x_P}{3} \\ y_G = \frac{y_M + y_N + y_P}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{2 + 2 + (-3)}{3} = \frac{1}{3} \\ y_G = \frac{1 + 4 + 0}{3} = \frac{5}{3}. \end{cases}$$

Vậy $G\left(\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$. □

Dạng 4. Chứng minh ba điểm thẳng hàng, điểm thuộc đường thẳng

Sử dụng các điều kiện cần và đủ sau:

- Hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b} \neq \vec{0}$ cùng phương khi và chỉ khi tồn tại số k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.
- Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.
- Điểm M thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi ba điểm M, A, B thẳng hàng.

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 4 ❖❖❖

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng Oxy , cho ba điểm $A(-1; 1)$, $B(1; 3)$, $C(2; 4)$.

- Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.
- Đường thẳng AB cắt trục Ox tại điểm M . Tìm tọa độ điểm M .

Lời giải.

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2; 2)$ và $\overrightarrow{AC} = (3; 3) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Suy ra hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương. Do đó, ba điểm A, B, C thẳng hàng.

b) Vì Đường thẳng AB cắt trục Ox tại điểm M nên ba điểm M, A, B thẳng hàng. Suy ra hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng phương.

Gọi $M(x; 0)$ thuộc trục Ox . Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2; 2)$ và $\overrightarrow{AM} = (x + 1; -1)$.

$$\overrightarrow{AB} \text{ và } \overrightarrow{AM} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \frac{x+1}{2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -2.$$

Vậy $M(-2; 0)$. □

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng Oxy , cho ba véc-tơ $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (-3; 1)$ và $\vec{c} = (6; 5)$. Tìm m để véc-tơ $\vec{u} = m\vec{a} + \vec{b}$ cùng phương với $\vec{c}$.

Lời giải.

Ta có: $\vec{u} = m\vec{a} + \vec{b} = (m - 3; 2m + 1)$.

$$\text{Suy ra: } \vec{u} \text{ cùng phương với } \vec{c} \Leftrightarrow \frac{m-3}{6} = \frac{2m+1}{5} \Leftrightarrow m = -3.$$

Vậy $m = -3$.

□

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng Oxy , cho ba điểm $A(5; 5)$, $B(6; -2)$, $C(-2; 4)$.

- a) Chứng minh ba điểm A , B , C là ba đỉnh của một tam giác.
b) Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải.

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1; -7)$ và $\overrightarrow{AC} = (-7; -1)$.

Vì $\frac{1}{-7} \neq \frac{-7}{-1}$ nên hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương.

Suy ra ba điểm A , B , C không thẳng hàng. Do đó A , B , C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Gọi $D(x; y)$. Ta có: $\overrightarrow{AD} = (x - 5; y - 5)$ và $\overrightarrow{BC} = (-8; 6)$.

$$ABCD \text{ là hình bình hành} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 = -8 \\ y - 5 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 11 \end{cases}$$

Vậy $D(-3; 11)$.

□

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(-2; 1)$ và $B(-4; 5)$.

- a) Tìm trên trục Ox điểm C sao cho $ABCO$ là hình thang có cạnh đáy là AO .
b) Tìm tọa độ giao điểm I của hai đường chéo của hình thang $ABCO$.

Lời giải.

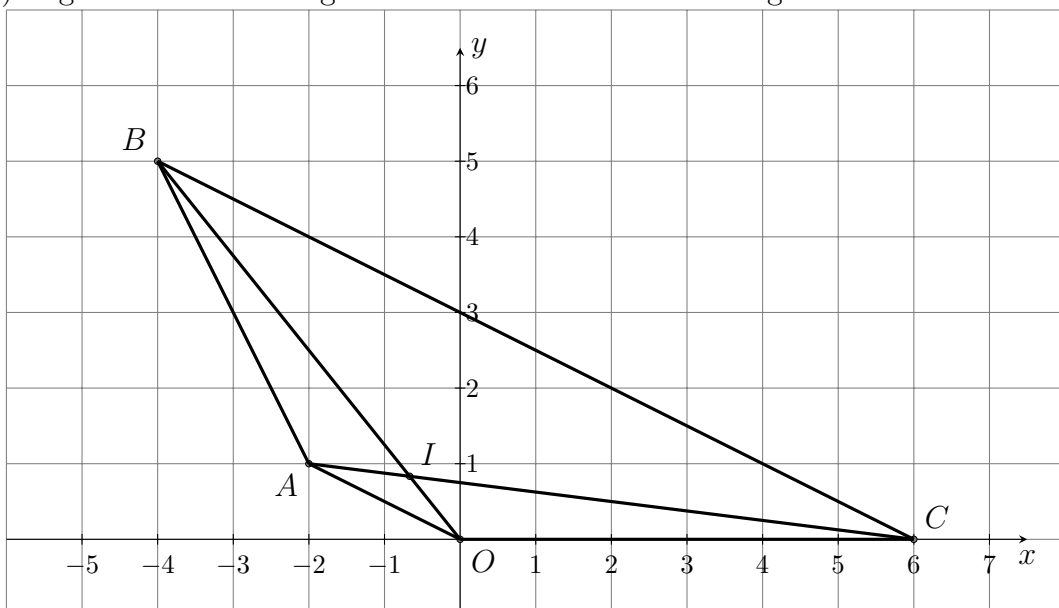
a) Gọi $C(x; 0)$ thuộc trục Ox . Vì $ABCO$ là hình thang có cạnh đáy là AO nên $AO \parallel BC$. Suy ra hai véc-tơ $\overrightarrow{AO}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương.

Ta có: $\overrightarrow{AO} = (2; -1)$ và $\overrightarrow{BC} = (x + 4; -5)$.

$$\overrightarrow{AO} \text{ và } \overrightarrow{BC} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \frac{x + 4}{2} = \frac{-5}{-1} \Leftrightarrow x = 6.$$

Vậy $C(6; 0)$.

b) Gọi $I(x; y)$ là giao điểm hai đường chéo OB và AC của hình thang $ABCO$.



Ta có: $\overrightarrow{OI} = (x; y)$, $\overrightarrow{OB} = (-4; 5)$, $\overrightarrow{AI} = (x + 2; y - 1)$, $\overrightarrow{AC} = (8; -1)$.

Ta có: O, I, B thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{OI}$ và $\overrightarrow{OB}$ cùng phương $\frac{x}{-4} = \frac{y}{5} \Leftrightarrow 5x + 4y = 0$ (1).

Lại có: A, I, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương $\frac{x+2}{8} = \frac{y-1}{-1} \Leftrightarrow x+8y=6$ (2).

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} 5x+4y=0 \\ x+8y=6. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{2}{3} \\ y=\frac{5}{6}. \end{cases}$$

Vậy $I\left(-\frac{2}{3}; \frac{5}{6}\right)$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm phân biệt $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$. Ta nói điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $k \neq 1$ nếu $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$. Chứng minh rằng:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A - kx_B}{1 - k} \\ y_M = \frac{y_A - ky_B}{1 - k}. \end{cases}$$

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A - x_M = k(x_B - x_M) \\ y_A - y_M = k(y_B - y_M). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A - kx_B}{1 - k} \\ y_M = \frac{y_A - ky_B}{1 - k}. \end{cases}$$

$$\text{Khi } k = -1 \text{ thì } \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}, M \text{ là trung điểm của đoạn thẳng } AB.$$

□

Bài 2. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC với $A(0; 2)$, $B(1; 1)$ và $C(-1; -2)$. Các điểm A' , B' , C' lần lượt chia các đoạn thẳng BC , CA , AB theo các tỉ số $\frac{1}{2}$, -2 , -1 .

- Tìm tọa độ các điểm A' , B' , C' .
- Chứng minh ba điểm A' , B' , C' thẳng hàng.

Lời giải.

a) Ta có:

$$\overrightarrow{A'B} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'C} \Rightarrow A'(3; 4).$$

$$\overrightarrow{B'C} = -2\overrightarrow{B'A} \Rightarrow B'\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

$$\overrightarrow{C'A} = -\overrightarrow{C'B} \Rightarrow C'\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

$$\text{b) Ta có: } \overrightarrow{A'B'} = \left(-\frac{10}{3}; -\frac{10}{3}\right) \text{ và } \overrightarrow{A'C'} = \left(-\frac{5}{2}; -\frac{5}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = \frac{4}{3}\overrightarrow{A'C'}.$$

Suy ra hai véc-tơ $\overrightarrow{A'B'}$ và $\overrightarrow{A'C'}$ cùng phương. Do đó, ba điểm A' , B' , C' thẳng hàng.

□

Bài 3. Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(5; 0)$, $B(3; -2)$. Đường thẳng AB cắt trục Oy tại điểm M . Trong ba điểm A , B , M , điểm nào nằm giữa hai điểm còn lại?

Lời giải.

Vì Đường thẳng AB cắt trục Oy tại điểm M nên ba điểm M, A, B thẳng hàng. Suy ra hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng phương.

Gọi $M(0; m)$ thuộc trục Oy . Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2; -2)$ và $\overrightarrow{AM} = (-5; m)$.

$\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{-5}{-2} = \frac{m}{-2} \Leftrightarrow m = -5$.

Suy ra $M(-2; 0)$. Khi đó, ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2; -2)$ và $\overrightarrow{AM} = (-5; -5)$, suy ra $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AM}$.

Vậy điểm B nằm giữa hai điểm A và M . □

Bài 4. Trong mặt phẳng Oxy , cho ba điểm $A(6; 4)$, $B(3; -2)$, $C\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

a) Tìm trên trục hoành điểm M sao cho $MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Tìm trên trục hoành điểm N sao cho $NA + NC$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

a)

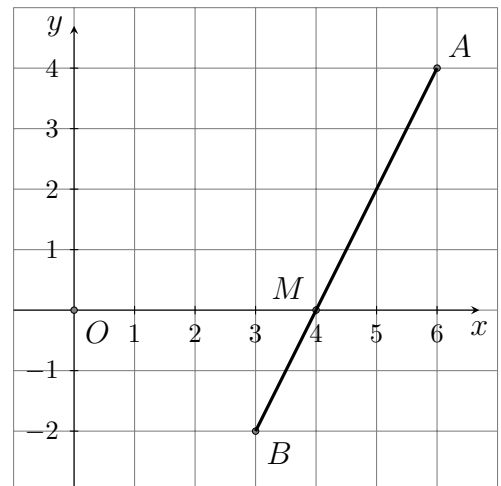
Ta có hai điểm A và B nằm về hai phía đối với trục hoành. Với mọi $M \in Ox$, ta có $MA + MB \geq AB$ và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi ba điểm A, M, B thẳng hàng.

Vậy $MA + MB$ có giá trị nhỏ nhất là bằng AB , đạt được khi M là giao điểm của của đường thẳng AB và trục hoành. Vì M là giao điểm của của đường thẳng AB và trục hoành nên ba điểm M, A, B thẳng hàng. Suy ra hai véc-tơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương.

Gọi $M(x; 0)$ thuộc trục Ox . Ta có: $\overrightarrow{AM} = (x - 6; -4)$ và $\overrightarrow{AB} = (-3; -6)$.

$\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{x - 6}{-3} = \frac{-4}{-6} \Leftrightarrow x = 4$.

Vậy $M(4; 0)$.



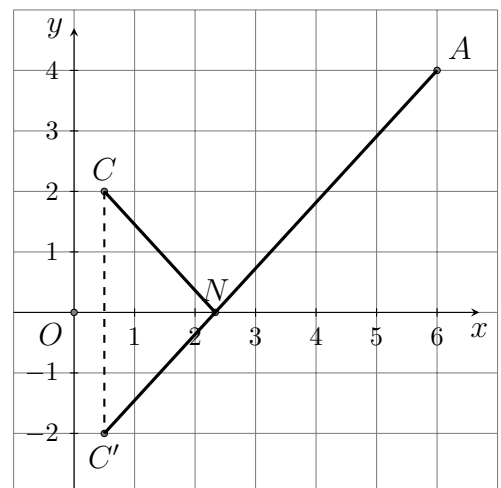
b)

Ta có hai điểm A và C nằm về một phía đối với trục hoành. Gọi C' là điểm đối xứng với C qua trục hoành. Khi đó, ta có $C'\left(\frac{1}{2}; -2\right)$.

Với mọi $N \in Ox$, ta có $NA + NC = NA + NC' \geq AC'$ và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi ba điểm A, N, C' thẳng hàng.

Vậy $NA + NC$ có giá trị nhỏ nhất là bằng AC' , đạt được khi N là giao điểm của của đường thẳng AC' và trục hoành. Vì N là giao điểm của của đường thẳng AC' và trục hoành nên ba điểm N, A, C' thẳng hàng. Suy ra hai véc-tơ $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{AC'}$ cùng phương.

Gọi $N(x; 0)$ thuộc trục Ox . Ta có: $\overrightarrow{AN} = (x - 6; -4)$ và $\overrightarrow{AC'} = \left(-\frac{11}{2}; -6\right)$.



$$\overrightarrow{AN} \text{ và } \overrightarrow{AC'} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \frac{-2(x-6)}{11} = \frac{-4}{-6} \Leftrightarrow x = \frac{7}{3}.$$

Vậy $N\left(\frac{7}{3}; 0\right)$.

□

Bài 5. Trong mặt phẳng Oxy , cho ba điểm $A(6; 4)$, $B(2; 3)$, $C(-2; 1)$.

- a) Tìm trên trục tung điểm M sao cho $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất.
 b) Tìm trên trục tung điểm N sao cho $|NA - NC|$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.

a)

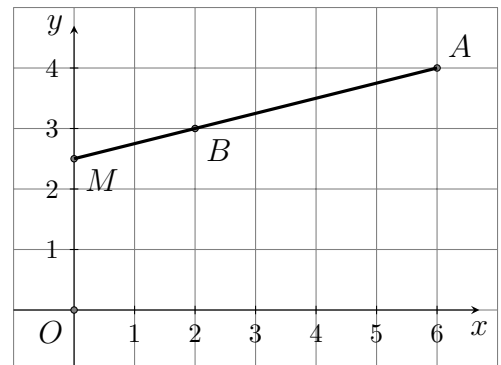
Ta có hai điểm A và B nằm về một phía đối với trục tung. Với mọi $M \in Oy$, ta có $|MA - MB| \leq AB$ và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi ba điểm A, M, B thẳng hàng.

Vậy $|MA - MB|$ có giá trị lớn nhất là bằng AB , đạt được khi M là giao điểm của của đường thẳng AB và trục tung. Vì M là giao điểm của của đường thẳng AB và trục tung nên ba điểm M, A, B thẳng hàng. Suy ra hai véc-tơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương.

Gọi $M(0; y)$ thuộc trục Oy . Ta có: $\overrightarrow{AM} = (-6; y - 4)$ và $\overrightarrow{AB} = (-4; -1)$.

$$\overrightarrow{AM} \text{ và } \overrightarrow{AB} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \frac{-6}{-4} = \frac{y-4}{-1} \Leftrightarrow y = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Vậy } M\left(0; \frac{5}{2}\right).$$



b)

Ta có hai điểm A và C nằm về hai phía đối với trục hoành.

Gọi C' là điểm đối xứng với C qua trục tung. Khi đó, ta có $C'(2; 1)$.

Với mọi $N \in Oy$, ta có $|NA - NC| = |NA - NC'| \leq AC'$ và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi ba điểm A, N, C' thẳng hàng.

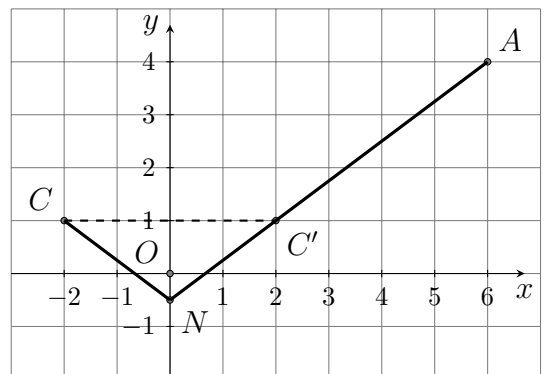
Vậy $|NA - NC|$ có giá trị lớn nhất là bằng AC' , đạt được khi N là giao điểm của của đường thẳng AC' và trục tung.

Vì N là giao điểm của của đường thẳng AC' và trục tung nên ba điểm N, A, C' thẳng hàng. Suy ra hai véc-tơ $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{AC'}$ cùng phương.

Gọi $N(0; y)$ thuộc trục Oy . Ta có: $\overrightarrow{AN} = (-6; y - 4)$ và $\overrightarrow{AC'} = (-4; -3)$.

$$\overrightarrow{AN} \text{ và } \overrightarrow{AC'} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \frac{-6}{-4} = \frac{y-4}{-3} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } N\left(0; -\frac{1}{2}\right).$$



□

C BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 1. Trong mặt phẳng Oxy , tìm tọa độ của các véc-tơ sau:

- $\vec{a} = -5\vec{i}$;
- $\vec{b} = 7\vec{j}$;
- $\vec{c} = -3\vec{i} + 8\vec{j}$;
- $\vec{d} = 0,5\vec{i} - \sqrt{11}\vec{j}$.

Lời giải.

- $\vec{a} = -5\vec{i} = (-5; 0)$;
- $\vec{b} = 7\vec{j} = (0; 7)$;
- $\vec{c} = -3\vec{i} + 8\vec{j} = (-3; 8)$;
- $\vec{d} = 0,5\vec{i} - \sqrt{11}\vec{j} = (0,5; -\sqrt{11})$.

□

Bài 2. Trong mặt phẳng Oxy , cho ba điểm $A(-3; -1)$, $B(1; 1)$ và $C(7; 4)$.

- Tìm tọa độ của $\vec{AB}$, $\vec{BC}$. Chứng minh A, B, C thẳng hàng.
- Chứng minh A, B, O không thẳng hàng. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABO .
- Tìm tọa độ điểm D trên trục hoành để A, B, D thẳng hàng.

Lời giải.

- Ta có $\vec{AB} = (4; 2)$, $\vec{BC} = (6; 3)$.

$$\text{Suy ra } \vec{AB} = \frac{2}{3}\vec{BC}.$$

Do đó hai véc-tơ $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ cùng phương.

Vậy A, B, C thẳng hàng.

- Ta có $\vec{AO} = (3; 1)$. Suy ra $\vec{AB}$ và $\vec{AO}$ là hai véc-tơ không cùng phương.

Do đó A, B, O không thẳng hàng.

Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABO

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_O}{3} = \frac{-3 + 1 + 0}{3} = \frac{-2}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_O}{3} = \frac{-1 + 1 + 0}{3} = 0. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } G\left(-\frac{2}{3}; 0\right).$$

- Vì $D \in Ox$ nên $D(x; 0)$ và $\vec{AD} = (x + 3; 1)$

Do A, B, D thẳng hàng nên $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ cùng phương

$$\Leftrightarrow \frac{x+3}{4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -1.$$

Vậy $D(-1; 0)$.

□

Bài 3. Trong mặt phẳng Oxy , cho ba điểm $A(-2; 3)$, $B(2; 4)$ và $C(1; -2)$.

- Chứng minh A, B, C là ba đỉnh của tam giác.
- Tính tọa độ véc-tơ $\vec{AM}$ với M là trung điểm của BC .
- Tính tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

Lời giải.

- Ta có $\vec{AB} = (4; 1)$ và $\vec{AC} = (3; -5)$.

Vì $\frac{4}{3} \neq \frac{1}{-5}$ nên $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$ không cùng phương.

Suy ra A, B, C không thẳng hàng.

Vậy A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Gọi $M(x; y)$ là trung điểm của BC . Ta có

$$\begin{cases} x = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} \\ y = \frac{4-2}{2} = 1. \end{cases}$$

Do đó $M\left(\frac{3}{2}; 1\right)$.

Vậy $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{7}{2}; -2\right)$.

c) Gọi $G(x; y)$ là trọng tâm tam giác ABC . Ta có

$$\begin{cases} x = \frac{-2+2+1}{3} = \frac{1}{3} \\ y = \frac{3+4-2}{3} = \frac{5}{3}. \end{cases}$$

Vậy $G\left(\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$. □

Bài 4. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có $A(-2; 2)$, $B(1; 4)$, $C(5; 1)$.

a) Tìm tọa độ trung điểm I của AC .

b) Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải.

a) Gọi $I(x; y)$ là trung điểm của AC . Ta có

$$\begin{cases} x = \frac{-2+5}{2} = \frac{3}{2} \\ y = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Vậy $I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

b) Vì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên I là trung điểm của BD .

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \frac{x_D+1}{2} = \frac{3}{2} \\ \frac{y_D+4}{2} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D+1=3 \\ y_D+4=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D=2 \\ x_D=-1. \end{cases}$$

Vậy $D(2; -1)$. □

Bài 5. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có $A(2; -1)$, $B(-3; 5)$, $C(4; -7)$.

a) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

b) Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $BGCD$ là hình bình hành.

Lời giải.

a) Gọi $G(x; y)$ là trọng tâm tam giác ABC . Ta có

$$\begin{cases} x = \frac{2-3+4}{3} = 1 \\ y = \frac{-1+5-7}{3} = -1 \end{cases}.$$

Vậy $G(1; -1)$.

b) Ta có $\overrightarrow{CD} = (x_D - 4; y_D + 7)$, $\overrightarrow{GB} = (-4; 6)$.

Vì $BGCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{GB}$

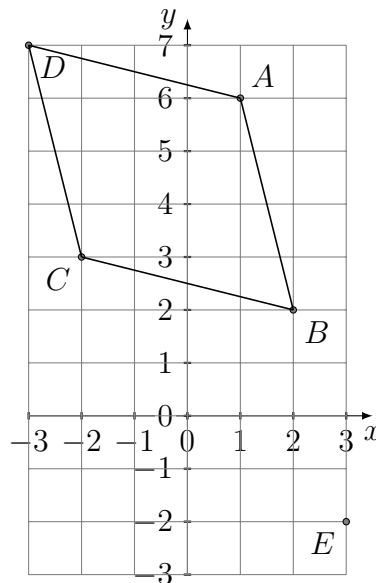
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 4 = -4 \\ y_D + 7 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 0 \\ y_D = -1. \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm D là $(0; -1)$. □

Bài 6. Trong mặt phẳng Oxy , cho $A(1; 6)$, $B(2; 2)$ và $C(-2; 3)$.

- Chứng minh ba điểm A, B, C tạo thành một tam giác.
- Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là một hình bình hành.
- Tìm tọa độ điểm $E(x; -2)$ sao cho A, B, E thẳng hàng.

Lời giải.



a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -4)$ và $\overrightarrow{AC} = (-3; -3)$.

Vì $\frac{1}{-3} \neq \frac{-4}{-3}$ nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương.

Suy ra A, B, C không thẳng hàng.

Vậy A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Gọi $D(x; y)$. Ta có $\overrightarrow{CD} = (x + 2; y - 3)$, $\overrightarrow{BA} = (-1; 4)$.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = -1 \\ y - 3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 7. \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm D là $(-3; 7)$.

c) Ta có $\overrightarrow{AE} = (x - 1; -8)$, $\overrightarrow{AB} = (1; -4)$.

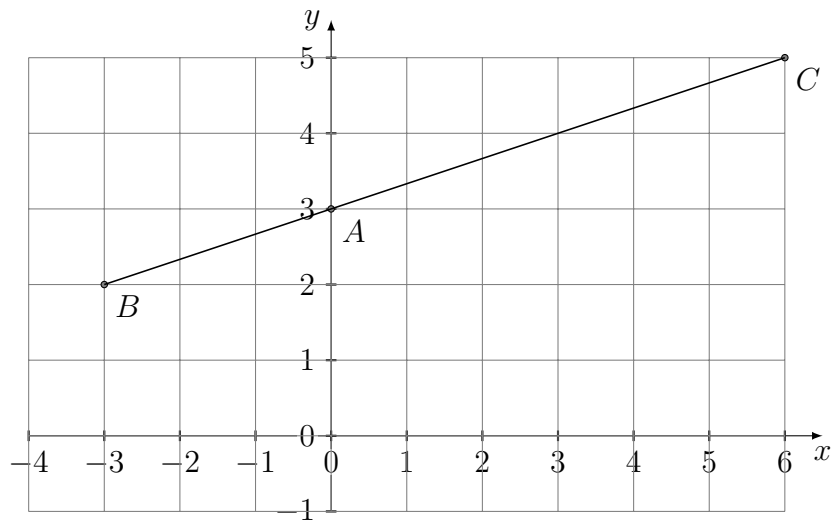
Vì A, B, E thẳng hàng nên $\frac{x - 1}{1} = \frac{-8}{-4}$.

Suy ra $x = 3$.

Vậy $E(3; -2)$. □

Bài 7. Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $B(-3; 2)$ và $C(6; 5)$. Tìm tọa độ điểm A thuộc trục tung sao cho $AB + AC$ bé nhất.

Lời giải.



Vì A thuộc trục tung nên $A(0; y)$.

Ta có $\overrightarrow{BA} = (3; y - 2)$, $\overrightarrow{BC} = (9; 3)$.

Vì $x_B = -3 < 0$ và $x_C = 6 > 0$ nên B và C nằm về hai phía đối với trục tung.

Do đó $AB + AC$ bé nhất khi và chỉ khi A, B, C thẳng hàng.

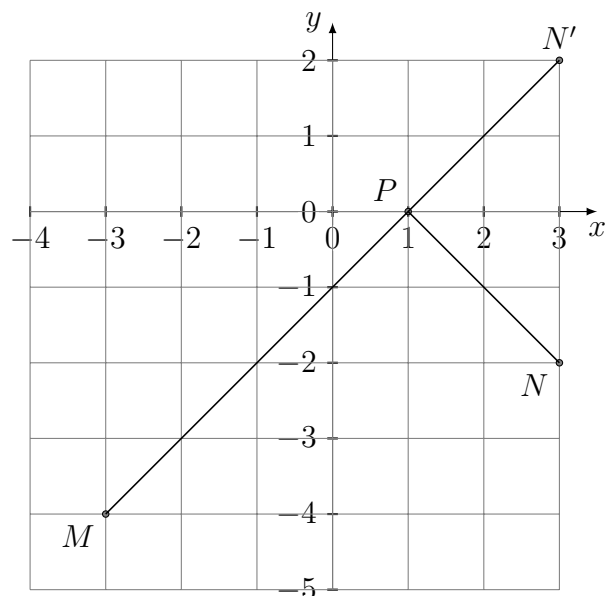
Suy ra hai véc-tơ $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ cùng phương.

Tức là $\frac{3}{9} = \frac{y-2}{3} \Leftrightarrow y = 3$.

Vậy $A(0; 3)$. □

Bài 8. Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $M(-3; -4)$ và $N(3; -2)$. Tìm tọa độ điểm P thuộc trục Ox sao cho $PM + PN$ bé nhất.

Lời giải.



Vì $P \in Ox$ nên $P(x; 0)$.

Vì $y_M = -4 < 0$ và $y_N = -2 < 0$ nên M, N nằm cùng phía đối với Ox .

Gọi N' là điểm đối xứng với N qua Ox .

Suy ra $N'(3; 2)$ và $\overrightarrow{MN'} = (6; 6)$, $\overrightarrow{MP} = (x + 3; 4)$.

Ta có $PM + PN = PM + PN'$. Do đó $PM + PN$ bé nhất khi và chỉ khi $PM + PN'$ bé nhất.

$PM + PN'$ bé nhất

$\Leftrightarrow P, M, N'$ thẳng hàng

$\Leftrightarrow$ Hai véc-tơ $\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MN'}$ cùng phương

$$\Leftrightarrow \frac{x+3}{6} = \frac{4}{6} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy $P(1; 0)$. □

Bài 9. Trong mặt phẳng Oxy , cho ba điểm $A(1; -2)$, $B(0; 4)$, $C(3; 2)$. Tìm điểm D sao cho $D \in Ox$ và $ABCD$ là hình thang đáy là AB .

Lời giải.

Gọi $D(x_D; 0)$ là điểm cần tìm.

$$\text{Để } ABCD \text{ là hình thang thì } \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC} \ (k > 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - x_A = k(x_C - x_D) \\ y_B - y_A = k(y_C - y_D) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 - 1 = 3k - k.x_D \\ 4 - (-2) = 2k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} k = 3 \\ x_D = \frac{10}{3} \end{cases} \quad (\text{nhận})$$

Vậy $D\left(\frac{10}{3}; 0\right)$. □

Bài 10. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC . Gọi G, I, H lần lượt là trọng tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, trực tâm của tam giác ABC . Tìm tọa độ trọng tâm G biết $I(0; 2)$, $H(3; 5)$.

Lời giải.

Kéo dài AI cắt đường tròn tại D .

Ta có: $\widehat{ACD} = 90^\circ \Rightarrow CD \perp AC$ mà $BH \perp AC \Rightarrow BH$ song song CD .

Tương tự ta cũng có BD song song HC .

$\Rightarrow HCDB$ là hình bình hành.

Ta có: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Chèn điểm H vào ta suy ra $3\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$.

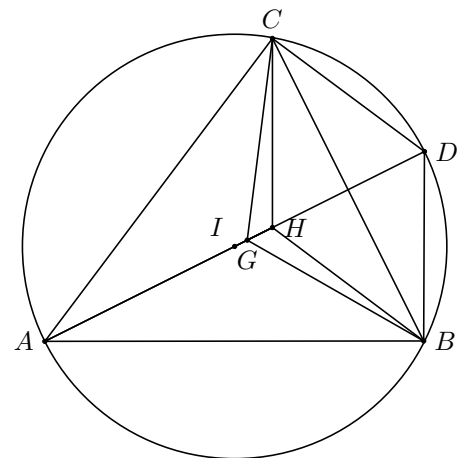
Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD}$.

Ta suy ra được $3\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GH} = 2\overrightarrow{HI}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(x_H - x_G) = 2(x_I - x_H) \\ 3(y_H - y_G) = 2(y_I - y_H) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = 5 \\ y_G = 7 \end{cases}$$

Vậy $G(5; 7)$. □



Bài 11. Trong mặt phẳng Oxy , cho ba điểm $A(5; 3)$, $B(2; -3)$, $C(-2; 1)$.

a) Chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Tìm trên trục hoành điểm M sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

c) Tìm trên trục tung điểm N sao cho $|\overrightarrow{NA} - 4\overrightarrow{NB} + 9\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-3; -6)$ và $\overrightarrow{AC} = (-7; -2)$.

Vì $\frac{-3}{-7} \neq \frac{-6}{-2}$ nên hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương.

Suy ra ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Do đó A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , ta có: $G\left(\frac{5}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Ta có: $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |3\overrightarrow{MG}| = 3MG$.

Do đó, $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MG$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của G trên trục hoành.

Suy ra $M\left(\frac{5}{3}; 0\right)$.

c) Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} - 4\overrightarrow{IB} + 9\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Gọi $I(x; y)$, ta có:

$$\overrightarrow{IA} - 4\overrightarrow{IB} + 9\overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 - 4(x - 2) + 9(x + 2) = 0 \\ y - 3 - 4(y + 3) + 9(y - 1) = 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 21 = 0 \\ 6y - 24 = 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{7}{6} \\ y = 4. \end{cases}$$

Suy ra $I\left(-\frac{7}{6}; 4\right)$.

Ta có:

$$\begin{aligned} & |\overrightarrow{NA} - 4\overrightarrow{NB} + 9\overrightarrow{NC}| \\ &= |\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{IA} - 4(\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{IB}) + 9(\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{IC})| \\ &= |6\overrightarrow{NI} + (\overrightarrow{IA} - 4\overrightarrow{IB} + 9\overrightarrow{IC})| \\ &= |6\overrightarrow{NI}| = 6NI. \end{aligned}$$

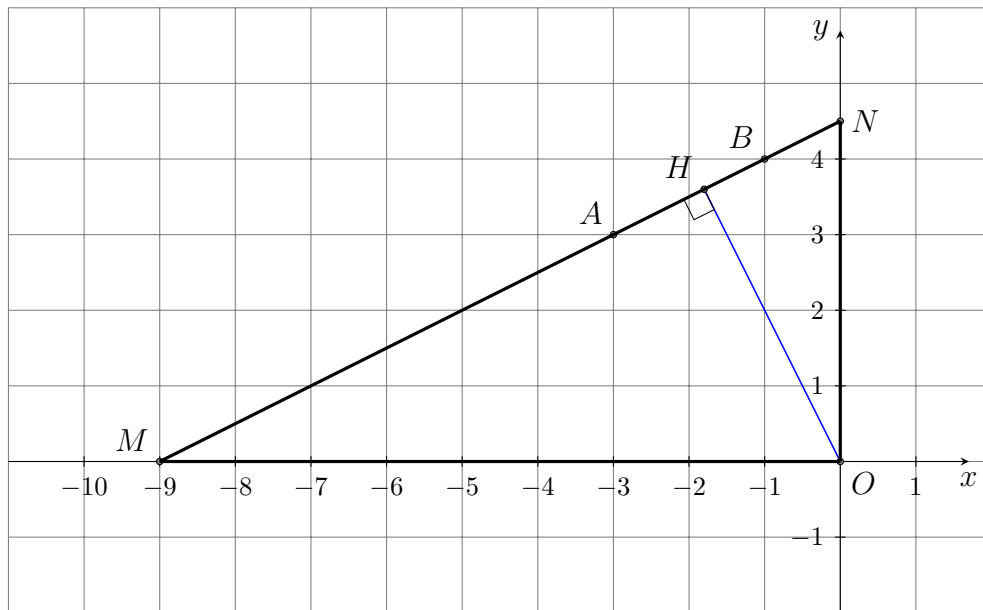
Do đó, $|\overrightarrow{NA} - 4\overrightarrow{NB} + 9\overrightarrow{NC}|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow NI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow N$ là hình chiếu của I trên trục tung.

Suy ra $N(0; 4)$.

□

Bài 12. Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(-3; 3)$, $B(-1; 4)$. Đường thẳng đi qua hai điểm A và B cắt trục hoành tại M và cắt trục tung tại N . Tính diện tích tam giác OMN và độ dài đường cao của tam giác OMN kẻ từ O .

Lời giải.



Vì Đường thẳng AB cắt trục Ox tại điểm M nên ba điểm M, A, B thẳng hàng. Suy ra hai véc-tơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương.

Gọi $M(x; 0)$ thuộc trục Ox . Ta có: $\overrightarrow{AM} = (x + 3; -3)$ và $\overrightarrow{AB} = (2; 1)$.

$\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{x+3}{2} = \frac{-3}{1} \Leftrightarrow x = -9$.

Vậy $M(-9; 0)$.

Vì Đường thẳng AB cắt trục Oy tại điểm N nên ba điểm N, A, B thẳng hàng. Suy ra hai véc-tơ $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương.

Gọi $N(0; y)$ thuộc trục Oy . Ta có: $\overrightarrow{AN} = (3; y - 3)$ và $\overrightarrow{AB} = (2; 1)$.

$\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{y-3}{1} \Leftrightarrow y = \frac{9}{2}$.

Vậy $N\left(0; \frac{9}{2}\right)$.

Vì tam giác OMN vuông tại O nên tam giác OMN có diện tích là:

$$S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2} OM \cdot ON = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \frac{9}{2} = \frac{81}{4}.$$

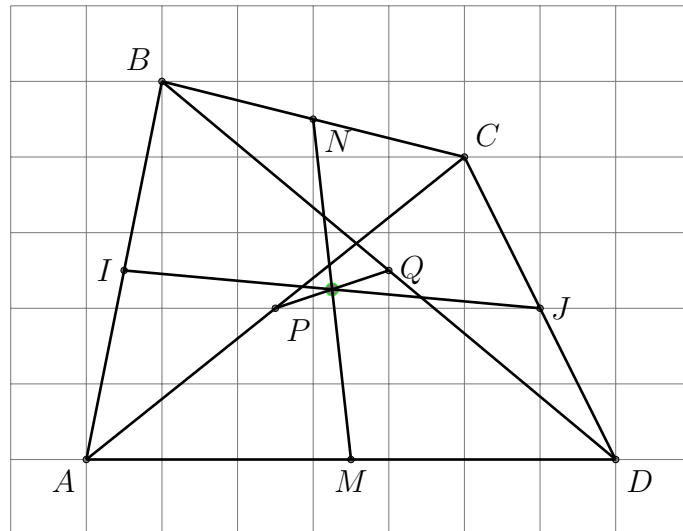
Gọi H là chân đường cao kẻ từ O của tam giác vuông OMN . Khi đó, ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{1}{81} + \frac{4}{91} = \frac{5}{81}.$$

Do đó, ta có: $OH^2 = \frac{81}{5} \Rightarrow OH = \frac{9\sqrt{5}}{5}$. □

Bài 13. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D . Gọi I và J lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB và CD ; P và Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AC và BD ; M và N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AD và BC . Chứng minh rằng ba đoạn thẳng IJ, PQ và MN có cùng trung điểm.

Lời giải.



Xét mặt phẳng tọa độ Oxy . Giả sử $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$, $C(c_1; c_2)$ và $D(d_1; d_2)$. Ta có:

- $I\left(\frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$, $J\left(\frac{c_1 + d_1}{2}; \frac{c_2 + d_2}{2}\right)$. Suy ra trung điểm của đoạn thẳng IJ có tọa độ là $\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1 + d_1}{4}; \frac{a_2 + b_2 + c_2 + d_2}{4}\right)$ (1).
- $P\left(\frac{a_1 + c_1}{2}; \frac{a_2 + c_2}{2}\right)$, $Q\left(\frac{b_1 + d_1}{2}; \frac{b_2 + d_2}{2}\right)$. Suy ra trung điểm của đoạn thẳng PQ có tọa độ là $\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1 + d_1}{4}; \frac{a_2 + b_2 + c_2 + d_2}{4}\right)$ (2).
- $M\left(\frac{a_1 + d_1}{2}; \frac{a_2 + d_2}{2}\right)$, $N\left(\frac{b_1 + c_1}{2}; \frac{b_2 + c_2}{2}\right)$. Suy ra trung điểm của đoạn thẳng MN có tọa độ là $\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1 + d_1}{4}; \frac{a_2 + b_2 + c_2 + d_2}{4}\right)$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra ba đoạn thẳng IJ , PQ và MN có cùng trung điểm. □

D CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\vec{a} = (-5; 0)$, $\vec{b} = (-4; 0)$ cùng hướng.
 C. $\vec{u} = (4; 2)$, $\vec{v} = (8; 3)$ cùng phương.

- B. $\vec{c} = (7; 3)$ là véc-tơ đối của $\vec{d} = (-7; 3)$.
 D. $\vec{a} = (6; 3)$, $\vec{b} = (2; 1)$ ngược hướng.

Lời giải.

Ta có $\vec{a} = \frac{5}{4}\vec{b} \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 2. Cho $\vec{a} = (2; -4)$, $\vec{b} = (-5; 3)$. Tìm tọa độ của $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$.

- A. $\vec{u} = (7; -7)$. B. $\vec{u} = (9; -11)$. C. $\vec{u} = (9; -5)$. D. $\vec{u} = (-1; 5)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} 2\vec{a} = (4; -8) \\ -\vec{b} = (5; -3) \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b} = (4 + 5; -8 - 3) = (9; -11)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 3. Cho $\vec{a} = (3; -4)$, $\vec{b} = (-1; 2)$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{a} + \vec{b}$.

- A. $(-4; 6)$. B. $(2; -2)$. C. $(4; -6)$. D. $(-3; -8)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a} + \vec{b} = (3 + (-1); -4 + 2) = (2; -2)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 4. Cho $\vec{a} = (-1; 2)$, $\vec{b} = (5; -7)$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{a} - \vec{b}$.

- A. $(6; -9)$. B. $(4; -5)$. C. $(-6; 9)$. D. $(-5; -14)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a} - \vec{b} = (-1 - 5; 2 - (-7)) = (-6; 9)$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 5. Trong hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j})$, tọa độ của véc-tơ $\vec{i} + \vec{j}$ là

- A. $(0; 1)$. B. $(1; -1)$. C. $(-1; 1)$. D. $(1; 1)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \vec{i} = (1; 0) \\ \vec{j} = (0; 1) \end{cases} \Rightarrow \vec{i} + \vec{j} = (1; 1)$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 6. Cho $\vec{u} = (3; -2)$, $\vec{v} = (1; 6)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\vec{u} + \vec{v}$ và $\vec{a} = (-4; 4)$ ngược hướng. B. $\vec{u}, \vec{v}$ cùng phương.
 C. $\vec{u} - \vec{v}$ và $\vec{b} = (6; -24)$ cùng hướng. D. $2\vec{u} + \vec{v}, \vec{v}$ cùng phương.

Lời giải.

Ta có $\vec{u} + \vec{v} = (4; 4)$ và $\vec{u} - \vec{v} = (2; -8)$.

- Xét tỉ số $\frac{4}{-4} \neq \frac{4}{4} \Rightarrow \vec{u} + \vec{v}$ và $\vec{a} = (-4; 4)$ không cùng phương.
- Xét tỉ số $\frac{3}{1} \neq \frac{-2}{6} \Rightarrow \vec{u}, \vec{v}$ không cùng phương.
- Xét tỉ số $\frac{2}{6} = \frac{-8}{-24} = \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow \vec{u} - \vec{v}$ và $\vec{b} = (6; -24)$ cùng hướng.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 7. Cho $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$ và $\vec{v} = \vec{i} + x\vec{j}$. Xác định x sao cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

- A. $x = -1$. B. $x = -\frac{1}{2}$. C. $x = \frac{1}{4}$. D. $x = 2$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} \Rightarrow \vec{u} = (2; 1) \\ \vec{v} = \vec{i} + x\vec{j} \Rightarrow \vec{v} = (1; x) \end{cases}$$

$$\text{Để } \vec{u} \text{ và } \vec{v} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{-1} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 8. Cho $\vec{a} = (-5; 0)$, $\vec{b} = (4; x)$. Tìm x để hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương.

- A. $x = -5$. B. $x = 4$. C. $x = 0$. D. $x = -1$.

Lời giải.

$$\text{Hai véc-tơ } \vec{a}, \vec{b} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow -5 \cdot x = 0 \cdot 4 \Rightarrow x = 0.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 9. Cho $\vec{a} = (x; 2)$, $\vec{b} = (-5; 1)$, $\vec{c} = (x; 7)$. Tìm x biết $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$.

- A. $x = -15$. B. $x = 3$. C. $x = 15$. D. $x = 5$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} 2\vec{a} = (2x; 4) \\ 3\vec{b} = (-15; 3) \end{cases} \Rightarrow 2\vec{a} + 3\vec{b} = (2x - 15; 7).$$

$$\text{Để } \vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x - 15 \\ 7 = 7 \end{cases} \Rightarrow x = 15.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 10. Cho ba véc-tơ $\vec{a} = (2; 1)$, $\vec{b} = (3; 4)$, $\vec{c} = (7; 2)$. Giá trị của k, h để $\vec{c} = k \cdot \vec{a} + h \cdot \vec{b}$ là

- A. $k = 2, 5; h = -1, 3$. B. $k = 4, 6; h = -5, 1$. C. $k = 4, 4; h = -0, 6$. D. $k = 3, 4; h = -0, 2$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} k \cdot \vec{a} = (2k; k) \\ h \cdot \vec{b} = (3h; 4h) \end{cases} \Rightarrow k \cdot \vec{a} + h \cdot \vec{b} = (2k + 3h; k + 4h).$$

$$\text{Theo đề bài } \vec{c} = k \cdot \vec{a} + h \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 = 2k + 3h \\ 2 = k + 4h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 4, 4 \\ h = -0, 6 \end{cases}$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 11. Trong hệ tọa độ Oxy , cho $A(5; 2)$, $B(10; 8)$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$.

- A. $\overrightarrow{AB} = (15; 10)$. B. $\overrightarrow{AB} = (2; 4)$. C. $\overrightarrow{AB} = (5; 6)$. D. $\overrightarrow{AB} = (50; 16)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (5; 6).$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 12. Trong hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(1; 3)$, $B(-1; 2)$, $C(-2; 1)$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

- A. $(-5; -3)$. B. $(1; 1)$. C. $(-1; 2)$. D. $(-1; 1)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-2; -1) \\ \overrightarrow{AC} = (-3; -2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = (-2 - (-3); -1 - (-2)) = (1; 1).$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 13. Trong hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(2; -3)$, $B(4; 7)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .

- A. $I(6; 4)$. B. $I(2; 10)$. C. $I(3; 2)$. D. $I(8; -21)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_I = \frac{2+4}{2} = 3 \\ y_I = \frac{-3+7}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow I(3; 2).$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 14. Trong hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(3; 5)$, $B(1; 2)$, $C(5; 2)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

- A. $G(-3; -3)$. B. $G\left(\frac{9}{2}; \frac{9}{2}\right)$. C. $G(9; 9)$. D. $G(3; 3)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_G = \frac{3+1+5}{3} = 3 \\ y_G = \frac{5+2+2}{3} = 3 \end{cases} \Rightarrow G(3; 3).$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 15. Trong hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(6; 1)$, $B(-3; 5)$ và trọng tâm $G(-1; 1)$. Tìm tọa độ đỉnh C .

- A. $C(6; -3)$. B. $C(-6; 3)$. C. $C(-6; -3)$. D. $C(-3; 6)$.

Lời giải.

Gọi $C(x; y)$.

$$\text{Vì } G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \text{ nên } \begin{cases} \frac{6+(-3)+x}{3} = -1 \\ \frac{1+5+y}{3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = -3. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 16. Trong hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-2; 2)$, $B(3; 5)$ và trọng tâm là gốc tọa độ $O(0; 0)$. Tìm tọa độ đỉnh C .

- A. $C(-1; -7)$. B. $C(2; -2)$. C. $C(-3; -5)$. D. $C(1; 7)$.

Lời giải.

Gọi $C(x; y)$.

$$\text{Vì } O \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \text{ nên } \begin{cases} \frac{-2+3+x}{3} = 0 \\ \frac{2+5+y}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -7. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 17. Trong hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(1; -1)$, $N(5; -3)$ và C thuộc trục Oy , trọng tâm G của tam giác thuộc trục Ox . Tìm tọa độ điểm C .

A. $C(0; 4)$.B. $C(2; 4)$.C. $C(0; 2)$.D. $C(0; -4)$.**Lời giải.**

- Vì C thuộc trục $Oy \Rightarrow C$ có hoành độ bằng 0.
- Trọng tâm G thuộc trục $Ox \Rightarrow G$ có tung độ bằng 0.

$$\text{Ta có } \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = 0 \Rightarrow y_C = 4.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 18. Trong hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $C(-2; -4)$, trọng tâm $G(0; 4)$ và trung điểm cạnh BC là $M(2; 0)$. Tổng hoành độ của điểm A và B là

A. -2 .B. 2 .C. 4 .D. 8 .**Lời giải.**

$$\text{Vì } M \text{ là trung điểm } BC \text{ nên } \begin{cases} x_B = 2x_M - x_C = 2 \cdot 2 - (-2) = 6 \\ y_B = 2y_M - y_C = 2 \cdot 0 - (-4) = 4 \end{cases} \Rightarrow B(6; 4).$$

$$\text{Vì } G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \text{ nên } \begin{cases} x_A = 3x_G - x_B - x_C = -4 \\ y_A = 3y_G - y_B - y_C = 12 \end{cases} \Rightarrow A(-4; 12).$$

Suy ra $x_A + x_B = 2$.Chọn đáp án **(B)** □

Câu 19. Trong hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(-1; 1)$, $B(1; 3)$, $C(-2; 0)$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$.B. A, B, C thẳng hàng.C. $\overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.D. $\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CA} = \vec{0}$.**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2; 2) \\ \overrightarrow{AC} = (-1; -1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC}.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 20. Trong hệ tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(3; -2)$, $B(7; 1)$, $C(0; 1)$, $D(-8; -5)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ là hai véc-tơ đối nhau.B. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ ngược hướng.C. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ cùng hướng.D. A, B, C, D thẳng hàng.**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (4; 3) \\ \overrightarrow{CD} = (-8; -6) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \text{ ngược hướng.}$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 21. Trong hệ tọa độ Oxy , cho $A(-1; 5)$, $B(5; 5)$, $C(-1; 11)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. A, B, C thẳng hàng.B. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương.C. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương.D. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng hướng.**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (6; 0) \\ \overrightarrow{AC} = (0; 6) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \text{ không cùng phương.}$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 22. Trong hệ tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(1; 1)$, $B(2; -1)$, $C(4; 3)$, $D(3; 5)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành. B. $G(9; 7)$ là trọng tâm tam giác BCD .
 C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. D. $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ cùng phương.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1; -2) \\ \overrightarrow{DC} = (1; -2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow ABCD$ là hình bình hành.

Chọn đáp án **A** □

Câu 23. Trong hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(1; 1)$, $B(-2; -2)$, $C(7; 7)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $G(2; 2)$ là trọng tâm tam giác ABC . B. B ở giữa hai điểm A và C .
 C. A ở giữa hai điểm B và C . D. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-3; -3) \\ \overrightarrow{AC} = (6; 6) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB}$. Đẳng thức này chứng tỏ A ở giữa hai điểm B và C .

Chọn đáp án **C** □

Câu 24. Trong hệ tọa độ Oxy , cho điểm $M(3; -4)$. Gọi M_1 , M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên Ox , Oy . Khẳng định nào đúng?

- A. $\overline{OM_1} = -3$. B. $\overline{OM_2} = 4$.
 C. $\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2} = (-3; -4)$. D. $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = (3; -4)$.

Lời giải.

Cách 1.

Từ giả thiết, suy ra $M_1 = (3; 0)$, $M_2 = (0; -4)$.

- $\overline{OM_1} = 3$. sai
- $\overline{OM_2} = -4$. sai
- $\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{M_2M_1} = (3; 4)$. sai

Cách 2. Gọi I là trung điểm $M_1M_2 \Rightarrow I\left(\frac{3}{2}; -2\right)$.

Ta có $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = 2\overrightarrow{OI} = \left(2 \cdot \frac{3}{2}; 2 \cdot (-2)\right) = (3; -4)$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 25. Trong hệ tọa độ Oxy , cho hình bình hành $OABC$, điểm C thuộc trục hoành. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB}$ có tung độ khác 0. B. Hai điểm A , B có tung độ khác nhau.
 C. C có hoành độ bằng 0. D. $x_A + x_C - x_B = 0$.

Lời giải.

Cách 1.

- Từ giả thiết suy ra cạnh OC thuộc trục hoành $\Rightarrow$ cạnh AB song song với trục hoành nên $y_A = y_B \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; 0)$.

- Nếu C có hoành độ bằng 0 $\Rightarrow C(0; 0) \equiv O$ suy ra mâu thuẫn với giả thiết $OABC$ là hình bình hành.
- Suy ra $x_A + x_C - x_B = 0$.

Cách 2.

Gọi I là tâm của hình bình hành $OABC$. Ta có

I là trung điểm $AC \Rightarrow I\left(\frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + 0}{2}\right)$.

$$I \text{ là trung điểm } OB \Rightarrow I \left(\frac{0 + x_B}{2}; \frac{0 + y_B}{2} \right).$$

Từ đó suy ra $\frac{x_A + x_C}{2} = \frac{0 + x_B}{2} \Rightarrow x_A + x_C - x_B = 0$.

Chọn đáp án **D**

☐

Câu 26. Trong hệ tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(-5; -2)$, $B(-5; 3)$, $C(3; 3)$, $D(3; -2)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ cùng hướng.
B. $ABCD$ là hình chữ nhật.
C. $I(-1; 1)$ là trung điểm AC .
D. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$.

Lời giải.

- Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0; 5) \\ \overrightarrow{CD} = (0; -5) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ suy ra $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ ngược hướng.
- Tọa độ trung điểm của AC là $\begin{cases} x = \frac{-5+3}{2} = -1 \\ y = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$.
- $\overrightarrow{OC} = (3; 3); \begin{cases} \overrightarrow{OA} = (-5; -2) \\ \overrightarrow{OB} = (-5; 3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (-10; 1) \neq \overrightarrow{OC}$.

Chọn đáp án **B**

☐

Câu 27. Trong hệ tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(2; 1)$, $B(2; -1)$, $C(-2; -3)$, $D(-2; -1)$. Xét hai mệnh đề

- I. $ABCD$ là hình bình hành. II. AC cắt BD tại $M(0; -1)$.

Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** Chỉ (I) đúng. **B.** Chỉ (II) đúng.
C. Cả (I) và (II) đều đúng. **D.** Cả (I) và (II) đều sai.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (0; -2)$, $\overrightarrow{DC} = (0; -2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow ABCD$ là hình bình hành.

Khi đó tọa độ trung điểm của AC là $(0; -1)$ và cũng là tọa độ trung điểm của BD .

Chọn đáp án **C**

☐

Câu 28. Trong hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(1;1)$, $B(3;2)$, $C(6;5)$. Tìm tọa độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

- A.** $D(4;3)$. **B.** $D(3;4)$. **C.** $D(4;4)$. **D.** $D(8;6)$.

Lời giải.

Gọi $D(x; y)$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; 1)$, $\overrightarrow{DC} = (6 - x; 5 - y)$.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 6 - x \\ 1 = 5 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow D(4; 4).$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 29. Trong hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(0; -3)$, $B(2; 1)$, $D(5; 5)$ Tìm tọa độ điểm C để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

- A. $C(3; 1)$. B. $C(-3; -1)$. C. $C(7; 9)$. D. $C(-7; -9)$.

Lời giải.

Gọi $C(x; y)$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; 4)$, $\overrightarrow{DC} = (x - 5; y - 5)$.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = x - 5 \\ 4 = y - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 9 \end{cases} \Rightarrow C(7; 9).$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 30. Trong hệ tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có $A(0; 3)$, $D(2; 1)$ và $I(-1; 0)$ là tâm của hình chữ nhật. Tìm tọa độ trung điểm của cạnh BC .

- A. $(1; 2)$. B. $(-2; -3)$. C. $(-3; -2)$. D. $(-4; -1)$.

Lời giải.

Gọi M là tọa độ trung điểm của cạnh $AD \Rightarrow M(1; 2)$.

Gọi $N(x_N; y_N)$ là tọa độ trung điểm của cạnh BC .

Do I là tâm của hình chữ nhật $\Rightarrow I$ là trung điểm của MN .

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x_N = 2x_I - x_M = -3 \\ y_N = 2y_I - y_M = -2 \end{cases} \Rightarrow N(-3; -2).$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 31. Trong hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $B(9; 7)$, $C(11; -1)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Tìm tọa độ véc-tơ $\overrightarrow{MN}$.

- A. $\overrightarrow{MN} = (2; -8)$. B. $\overrightarrow{MN} = (1; -4)$. C. $\overrightarrow{MN} = (10; 6)$. D. $\overrightarrow{MN} = (5; 3)$.

Lời giải.

$$\overrightarrow{BC} = (2; -8).$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = (1; -4).$$

Chọn đáp án **B** □

Câu 32. Trong hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $M(2; 3)$, $N(0; -4)$, $P(-1; 6)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . Tìm tọa độ đỉnh A .

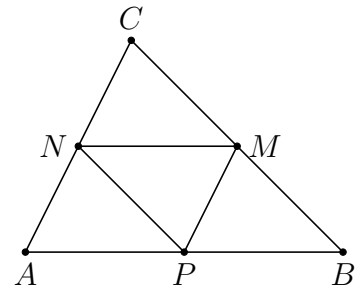
- A. $A(1; 5)$. B. $A(-3; -1)$. C. $A(-2; -7)$. D. $A(1; -10)$.

Lời giải.

Gọi $A(x; y)$. Ta có $\overrightarrow{PA} = (x + 1; y - 6)$ và $\overrightarrow{MN} = (-2; -7)$.

Tứ giác $APMN$ là hình bình hành nên ta có

$$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = -2 \\ y - 6 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow A(-3; -1).$$



Chọn đáp án **(B)** □

Câu 33. Trong hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1; 2)$, $B(-2; 3)$. Tìm tọa độ điểm I sao cho $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

- A. $I(1; 2)$. B. $I\left(1; \frac{2}{5}\right)$. C. $I\left(-1; \frac{8}{3}\right)$. D. $I(2; -2)$.

Lời giải.

Gọi $I(x; y)$. Ta có

$$\overrightarrow{IA} = (1 - x; 2 - y).$$

$$\overrightarrow{IB} = (-2 - x; 3 - y) \Rightarrow 2\overrightarrow{IB} = (-4 - 2x; 6 - 2y)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = (-3 - 3x; 8 - 3y).$$

$$\text{Do đó từ giả thiết } \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 - 3x = 0 \\ 8 - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{8}{3} \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 34. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(3; -5)$, $B(-3; 3)$, $C(-1; -2)$, $D(5; -10)$. Hỏi $G\left(\frac{1}{3}; -3\right)$ là trọng tâm của tam giác nào dưới đây?

- A. ABC . B. BCD . C. ACD . D. ABD .

Lời giải.

Nhận thấy $x_G = \frac{x_B + x_C + x_D}{3}$, $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$ nên G là trọng tâm của tam giác BCD .

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 35. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $D(3; 4)$, $E(6; 1)$, $F(7; 3)$ lần lượt là trung điểm các cạnh AB , BC , CA . Tính tổng tung độ của ba đỉnh tam giác ABC .

- A. $\frac{16}{3}$. B. $\frac{8}{3}$. C. 8. D. 16.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} y_A + y_B = 2y_D \\ y_B + y_C = 2y_E \Rightarrow 2(y_A + y_B + y_C) = 2(y_D + y_E + y_F) \\ y_C + y_A = 2y_F \end{cases}$$

Suy ra, $y_A + y_B + y_C = y_D + y_E + y_F = 4 + 1 + 3 = 8$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 36. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có $A(2; 1)$, $B(-1; 2)$, $C(3; 0)$. Tứ giác $ABCE$ là hình bình hành khi tọa độ E là cặp số nào sau đây?

- A. $(6; -1)$. B. $(0; 1)$. C. $(1; 6)$. D. $(6; 1)$.

Lời giải.

Tứ giác $ABCE$ là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - x_A = x_C - x_E \\ y_B - y_A = y_C - y_E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = 6 \\ y_E = -1. \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm E là cặp số $(6; -1)$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 37. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ biết $A(-2; 0)$, $B(2; 5)$, $C(6; 2)$. Tìm tọa độ điểm D .

- A. $D(2; -3)$. B. $D(2; 3)$. C. $D(-2; -3)$. D. $D(-2; 3)$.

Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x_B - x_A = x_C - x_D \\ y_B - y_A = y_C - y_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = x_A + x_C - x_B = -2 + 6 - 2 = 2 \\ y_D = y_A + y_C - y_B = 0 + 2 - 5 = -3. \end{cases}$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 38. Trong mặt phẳng Oxy , cho các điểm $A(1; 3)$, $B(4; 0)$, $C(2; -5)$. Tọa độ điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ là:

- A. $M(1; 18)$. B. $M(-1; 18)$. C. $M(1; -18)$. D. $M(-18; 1)$.

Lời giải.

Phương pháp

$$\text{Sử dụng các công thức : } \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A), (a; a_2) + (b_1; b_2) = (a_1 + b_1; a_2 + b_2), (a; a_2) = (b_1; b_2) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}.$$

Cách giải:

$$\text{Gọi } M(x_0; y_0) \text{ ta có } \overrightarrow{MA} = (4 - x_0; -y_0); \overrightarrow{MC} = (2 - x_0; -5 - y_0)$$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow (-1 + x_0; 18 + y_0) = (0; 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 + x_0 = 0 \\ 18 + y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -18 \end{cases} \Rightarrow M(1; -18)$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 39. Cho tam giác ABC có $A(1; -2)$, đường cao $CH : x^y + 1 = 0$, đường thẳng chứa cạnh BC có phương trình $2x + y + 5 = 0$. Tọa độ điểm B là:

- A. $B(4; 3)$. B. $B(4; -3)$. C. $B(-4; 3)$. D. $B(-4; -3)$.

Lời giải.

Phương pháp

Ta có: $CH \perp AB \Rightarrow$ lập được phương trình đường thẳng đi qua A và vuông góc với CH .

Khi đó tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình gồm phương trình đường thẳng BC và AB .

Cách giải:

Ta có: $CH \perp AB \Rightarrow$ lập được phương trình đường thẳng AB đi qua A và vuông góc với CH là: $x - 1 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow x + y + 1 = 0$

$B = AB \cap BC \Rightarrow$

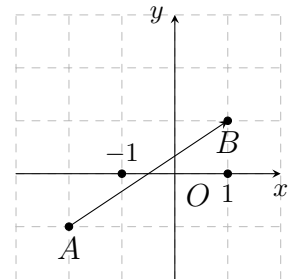
tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x + y + 5 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 40.

Cho véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ như hình vẽ. Tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ là



A. $(3; 2)$.

B. $(-2; 3)$.

C. $(-3; -2)$.

D. $(-1; 0)$.

Lời giải.

Ta có $A(-2; -1), B(1; 1)$.

Vậy $\overrightarrow{AB} = (3; 2)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 41. Cho hai điểm $A(-1; 3), B(1; 0)$. Véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

A. $(2; -3)$.

B. $(-2; 3)$.

C. $(-1; 4)$.

D. $(1; -4)$.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB} = (2; -3)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 42. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có $A(2; -3), B(-4; 1)$, đỉnh C nằm trên trục Ox và trọng tâm G của tam giác ABC nằm trên trục Oy . Tọa độ điểm C là

A. $(2; 2)$.

B. $(0; 2)$.

C. $(2; 0)$.

D. $(0; 0)$.

Lời giải.

Do đỉnh $C(x_C; y_C)$ nằm trên Ox nên $y_C = 0$, trọng tâm $G(x_G; y_G)$ nằm trên Oy nên $x_G = 0$.

Theo hệ thức trọng tâm, ta có

$$\begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3x_G \\ y_A + y_B + y_C = 3y_G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 4 + x_C = 0 \\ -3 + 1 = 3y_G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 2 \\ y_G = -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C(2; 0) \\ G\left(0; -\frac{2}{3}\right) \end{cases}.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 43. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Biết $A(1; 3), B(-3; 3), C(8; 0)$. Giá trị của $x_M + x_N + x_P$ bằng

A. 1.

B. 6.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

Ta có $x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-3 + 8}{2} = \frac{5}{2}, x_N = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{1 + 8}{2} = \frac{9}{2}, x_P = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 - 3}{2} = -1$.

Vậy $x_M + x_N + x_P = \frac{5}{2} + \frac{9}{2} - 1 = 6$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 44. Cho tam giác ABC với $A(-3; 6), B(9; -10)$ và $G\left(\frac{1}{3}; 0\right)$ là trọng tâm. Tìm tọa độ điểm C .

A. $C(-5; 4)$.B. $C(-5; -4)$.C. $C(5; -4)$.D. $C(5; 4)$.

Lời giải.

$$G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 3x_G - x_A - x_B \\ y_C = 3y_G - y_A - y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = -5 \\ y_C = 4 \end{cases}$$

Vậy $C(-5; 4)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 45. Trong hệ tọa độ Oxy , cho điểm $A(-1; 1), B(1; 3), C(-2; 0)$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CA} = \vec{0}$.B. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$.C. A, B, C thẳng hàng.D. $\overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BA} = (-2; -2), \overrightarrow{AC} = (-1; -1), \overrightarrow{BC} = (-3; -3)$.

Ta thấy $\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{AC}$ nên

- Mệnh đề " $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$ " là mệnh đề **sai**.
- Mệnh đề " A, B, C thẳng hàng" là mệnh đề đúng.
- Mệnh đề " $\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{CA} = \vec{0}$ " là mệnh đề đúng.
- Mệnh đề " $\overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ " là mệnh đề đúng.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 46. Cho ba véc-tơ $\vec{a} = (2; 1), \vec{b} = (3; 4), \vec{c} = (7; 2)$. Giá trị của k, h để $\vec{c} = k\vec{a} + h\vec{b}$ là

A. $k = 4,6; h = -5,1$.B. $k = 4,4; h = -0,6$.C. $k = 3,4; h = -0,2$.D. $k = 2,5; h = -1,3$.

Lời giải.

Ta có hệ

$$\begin{cases} 2k + 3h = 7 \\ k + 4h = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 4,4 \\ h = -0,6 \end{cases}$$

Vậy $k = 4,4; h = -0,6$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 47. Cho $A(3; -2)$, $B(-5; 4)$ và $C\left(\frac{1}{3}; 0\right)$. Ta có $\overrightarrow{AB} = n\overrightarrow{AC}$ khi và chỉ khi n bằng

A. 3. B. -3. C. 2. D. -4.

Lời giải.

Ta có

$$\overrightarrow{AB} = n\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 - 3 = \left(\frac{1}{3} - 3\right)n \\ 4 + 2 = (0 + 2)n \end{cases} \Leftrightarrow n = 3.$$

Vậy $n = 3$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 48. Trong mặt phẳng Oxy , cho $A(5; 2)$, $B(10; 8)$. Tọa độ của $\overrightarrow{AB}$ là

A. $(2; 4)$. B. $(15; 10)$. C. $(50; 16)$. D. $(5; 6)$.

Lời giải.

$$\overrightarrow{AB} = (10 - 5; 8 - 2) = (5; 6).$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 49. Trong mặt phẳng Oxy , cho $\vec{a} = (-1; 2)$, $\vec{b} = (5; -7)$. Tọa độ của $\vec{a} + \vec{b}$ là

A. $(-6; 9)$. B. $(4; -5)$. C. $(6; -9)$. D. $(-5; -14)$.

Lời giải.

$$\vec{a} + \vec{b} = (-1 + 5; 2 - 7) = (4; -5).$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 50. Trong mặt phẳng Oxy , cho $A(2; 1)$, $B(0; -3)$, $C(3; 1)$. Tọa độ của điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành là

A. $(5; -2)$. B. $\left(-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$. C. $(5; 5)$. D. $(-1; -4)$.

Lời giải.

$ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (-2; -4), \overrightarrow{DC} = (3 - x_D; 1 - y_D). \text{ Suy ra } \begin{cases} 3 - x_D = -2 \\ 1 - y_D = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = 5 \\ y_D = 5 \end{cases} \Rightarrow D(5; 5).$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 51. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có trọng tâm $G(1; 2)$. Biết $A(2; 2)$, $B(0; -1)$, tìm tọa độ điểm C .

A. $C(5; 1)$. B. $C(-1; 3)$. C. $C(-3; 2)$. D. $C(1; 5)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_C = 3x_G - x_A - x_B = 3 \cdot 1 - 2 - 0 = 1 \\ y_C = 3y_G - y_A - y_B = 3 \cdot 2 - 2 - (-1) = 5. \end{cases}$$

Vậy, tọa độ điểm $C(1; 5)$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 52. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có trục tâm H . Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết $A(1; 0)$, $H(3; 2)$ và trung điểm BC là $M(1; 3)$.

A. $I(1; 3)$. B. $I(3; 1)$. C. $I(2; 0)$. D. $I(0; 2)$.

Lời giải.

Gọi $I(x; y)$ ta có $\overrightarrow{AH} = (2; 2)$, $\overrightarrow{IM} = (1 - x; 3 - y)$.

Do $\begin{cases} CD \perp AC & (\text{góc } \widehat{ACD} \text{ chắn nửa đường tròn}) \\ BH \perp AC & (H \text{ là trực tâm của } \triangle ABC) \end{cases}$

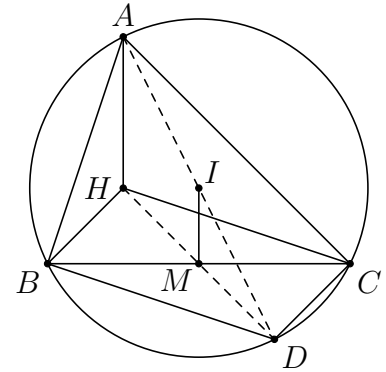
nên $BH \parallel CD$.

Tương tự $CH \parallel BD \Rightarrow BHCD$ là hình bình hành.

Suy ra M là trung điểm của HD

$\Rightarrow IM$ là đường trung bình của tam giác AHD .

Từ đó $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 2(1 - x) \\ 2 = 2(3 - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2. \end{cases}$



Chọn đáp án **(D)** □

Câu 53. Trong mặt phẳng Oxy , cho $A(3; 1)$, $B(-1; 1)$. Tìm tọa độ vectơ $\overrightarrow{BA}$.

- A. $(2; 0)$. B. $(4; 0)$. C. $(-4; -2)$. D. $(-4; 0)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BA} = (4; 0)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 54. Tìm độ dài của $\vec{a}$ biết $\vec{a} = (1; 2)$.

- A. $|\vec{a}| = 5$. B. $|\vec{a}| = \sqrt{3}$. C. $|\vec{a}| = 3$. D. $|\vec{a}| = \sqrt{5}$.

Lời giải.

Do $\vec{a} = (1; 2)$ nên $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 55. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $K(1; -3)$. Điểm $A \in Ox$, $B \in Oy$ sao cho A là trung điểm KB . Tìm tọa độ điểm B .

- A. $(4; 2)$. B. $(0; 2)$. C. $(0; 3)$. D. $\left(\frac{1}{3}; 0\right)$.

Lời giải.

Gọi $A(a; 0) \in Ox$, $B(0; b) \in Oy$.

Do A là trung điểm KB nên $\begin{cases} a = \frac{1+0}{2} \\ 0 = \frac{-3+b}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 3. \end{cases}$

Vậy $B(0; 3)$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 56. Trong mặt phẳng Oxy , cho $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là

- A. $I\left(\frac{x_1 + y_1}{2}; \frac{x_2 + y_2}{2}\right)$. B. $I\left(\frac{x_1 + x_2}{3}; \frac{y_1 + y_2}{3}\right)$.
C. $I\left(\frac{x_2 - x_1}{2}; \frac{y_2 - y_1}{2}\right)$. D. $I\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

Lời giải.

Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB với $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ là $I\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 57. Trong mặt phẳng Oxy , cho $A(2; 4)$, $B(4; -1)$. Khi đó, tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ là

- A. $\overrightarrow{AB} = (-2; 5)$. B. $\overrightarrow{AB} = (6; 3)$. C. $\overrightarrow{AB} = (2; 5)$. D. $\overrightarrow{AB} = (2; -5)$.

Lời giải.

Ta có $A(2; 4)$, $B(4; -1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (4 - 2; -1 - 4) = (2; -5)$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 58. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $\triangle ABC$ có $A(1; -5)$, $B(3; 0)$, $C(-3; 4)$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AB , AC . Tìm tọa độ véc-tơ $\overrightarrow{MN}$.

- A. $\overrightarrow{MN} = (-3; 2)$. B. $\overrightarrow{MN} = (3; -2)$. C. $\overrightarrow{MN} = (-6; 4)$. D. $\overrightarrow{MN} = (1; 0)$.

Lời giải.

Vì M là trung điểm của AB nên $M\left(2; -\frac{5}{2}\right)$. Vì N là trung điểm của AC nên $N\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$.

Vậy $\overrightarrow{MN} = (-3; 2)$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 59. Trong mặt phẳng Oxy cho $A(2; -3)$, $B(3; 4)$. Tọa độ điểm M nằm trên trục hoành sao cho ba điểm A , B , M thẳng hàng là

- A. $M(1; 0)$. B. $M(4; 0)$. C. $M\left(-\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right)$. D. $M\left(\frac{17}{7}; 0\right)$.

Lời giải.

Vì $M \in Ox$ nên $M(x_M; 0)$.

Ba điểm A , B , M thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AM}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$. (*)

Mặt khác, $\overrightarrow{AM} = (x_M - 2; 3)$ và $\overrightarrow{AB} = (1; 7)$.

Do đó, (*) $\Leftrightarrow (x_M - 2) \cdot 7 = 1 \cdot 3 \Leftrightarrow x_M = \frac{17}{7}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 60. Trong mặt phẳng Oxy , cho $\triangle MNP$ có $M(1; -1)$, $N(5; -3)$ và P thuộc trục Oy , trọng tâm G của $\triangle MNP$ nằm trên trục Ox . Tọa độ điểm P là

- A. $(2; 4)$. B. $(0; 4)$. C. $(0; 2)$. D. $(2; 0)$.

Lời giải.

Vì $P \in Oy$, $G \in Ox$ nên $P(0; y_P)$, $G(x_G; 0)$. Mặt khác G là trọng tâm $\triangle MNP$ nên ta có

$$\begin{cases} x_G = \frac{1 + 5 + 0}{3} \\ 0 = \frac{-1 + (-3) + x_P}{3} \end{cases} \Rightarrow x_P = 4. \text{ Vậy } P(0; 4) \text{ là điểm cần tìm.}$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 61. Cho $\vec{a} = (2; 1)$, $\vec{b} = (-3; 4)$, $\vec{c} = (-4; 9)$. Hai số thực m , n thỏa mãn $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{c}$. Tính $m^2 + n^2$.

- A. 5. B. 3. C. 4. D. 1.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} m\vec{a} = (2m; m) \\ n\vec{b} = (-3n; 4n) \end{cases} \Rightarrow m\vec{a} + n\vec{b} = (2m - 3n; m + 4n).$$

$$\text{Do đó } m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{c} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 3n = -4 \\ m + 4n = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 2. \end{cases}$$

Vậy $m^2 + n^2 = (1)^2 + (2)^2 = 5$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 62. Trong mặt phẳng Oxy , cho $\triangle ABC$ có $M\left(-\frac{5}{2}; -1\right)$, $N\left(-\frac{3}{2}; -\frac{7}{2}\right)$, $P\left(0; \frac{1}{2}\right)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh BC , CA , AB . Tọa độ trọng tâm G của $\triangle ABC$ là

- A. $G\left(-\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right)$. B. $G(-4; -4)$. C. $G\left(\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right)$. D. $G(4; -4)$.

Lời giải.

Theo giả thiết, ta dễ dàng chứng minh được G cũng là trọng tâm của $\triangle MNP$. Do đó

$$\begin{cases} x_G = \frac{-\frac{5}{2} - \frac{3}{2} + 0}{3} = -\frac{4}{3} \\ y_G = \frac{-1 - \frac{7}{2} + \frac{1}{2}}{3} = -\frac{4}{3}. \end{cases}$$

Vậy $G\left(-\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right)$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 63. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(-2; 1)$ và $B(10; -2)$. Tìm tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất?

- A. $M(4; 0)$. B. $M(2; 0)$. C. $M(-4; 0)$. D. $M(-14; 0)$.

Lời giải.

A, B nằm về hai phía của trục hoành.

Vì $M \in Ox$ nên $M(x; 0)$. $\overrightarrow{AB} = (12; -3)$, $\overrightarrow{AM} = (x + 2; -1)$.

Ta có $MA + MB \geq AB$ nên $MA + MB$ nhỏ nhất bằng AB khi M, A, B thẳng hàng.

$$\text{Gọi } k \in \mathbb{R} \text{ sao cho } \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 12k \\ -1 = -3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ k = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Vậy $M(2; 0)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 64. Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(-1; 2)$, $B(1; -3)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho B là trung điểm của AD .

- A. $D(3; -8)$. B. $D(-1; 4)$. C. $D(-3; 8)$. D. $D(3; -4)$.

Lời giải.

$$B \text{ là trung điểm của } AD \text{ nên } \begin{cases} x_B = \frac{x_A + x_D}{2} \\ y_B = \frac{y_A + y_D}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 2x_B - x_A \\ y_D = 2y_B - y_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 3 \\ y_D = -8. \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm $D(3; -8)$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 65. Cho tam giác ABC có trọng tâm $G(0; 7)$, $B(-1; 4)$, $B(2; 5)$. Tìm tọa độ đỉnh C .

- A. $(1; 12)$. B. $(-1; 12)$. C. $(3; 1)$. D. $(2; 12)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 3x_G - x_A - x_B \\ y_C = 3y_G - y_A - y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = -1 \\ y_C = 12. \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm C là $(-1; 12)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 66. Cho hai điểm $A(1; -2), B(-3; 4)$. Khoảng cách giữa hai điểm A và B là

- A. 4. B. 6. C. $3\sqrt{6}$. D. $2\sqrt{13}$.

Lời giải.

Khoảng cách giữa hai điểm A và B là $AB = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 67. Cho $\vec{a}(1; 2), \vec{b}(2; 3), \vec{c}(-6; -10)$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- A. $\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{c}$ cùng hướng. B. $\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{a} - \vec{b}$ cùng phương.
C. $\vec{a} - \vec{b}$ và $\vec{c}$ cùng hướng. D. $\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{c}$ ngược hướng.

Lời giải.

Ta có $\vec{a} + \vec{b} = (3; 5)$ và $\vec{a} - \vec{b} = (-1; -1), \vec{c} = (-6; -10) = -2(3; 5)$.

Khi đó $\vec{c} = -2(\vec{a} + \vec{b})$ nên suy ra $\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{c}$ ngược hướng.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 68. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC . Biết $A(1; -1), B(5; -3)$ và $C \in Oy$, trọng tâm $G \in Ox$. Tọa độ điểm C là

- A. $(0; 2)$. B. $(2; 0)$. C. $(0; -4)$. D. $(0; 4)$.

Lời giải.

Gọi $C(0; m)$ và $G(n; 0)$.

Do G là trọng tâm tam giác ABC nên $\begin{cases} 1 + 5 + 0 = 3n \\ -1 - 3 + m = 3 \cdot 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ n = 2. \end{cases}$

Vậy $C(0; 4)$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 69. Trong mặt phẳng Oxy , cho các véc-tơ $\vec{OA} = (1; 2)$ và $\vec{OB} = (2; 1)$, biết $\vec{MA} = 2\vec{MB}$. Khi đó độ dài véc-tơ $\vec{OM}$ là

- A. 4. B. 1. C. 3. D. 2.

Lời giải.

$\vec{OA} = (1; 2) \Rightarrow A(1; 2); \vec{OB} = (2; 1) \Rightarrow B(2; 1)$.

Từ đẳng thức $\vec{MA} = 2\vec{MB}$, suy ra B là trung điểm của đoạn MA nên $M(3; 0)$.

Vậy $|\vec{OM}| = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 70. Trong hệ trục $(O; \vec{i}; \vec{j})$, tọa độ của véc-tơ $\vec{u} = 3\vec{j} + 2\vec{i}$ là

- A. $(-2; -3)$. B. $(3; 2)$. C. $(2; 3)$. D. $(-3; 2)$.

Lời giải.

Nếu $\vec{u} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j}$ thì $\vec{u} = (a; b)$. Vậy từ $\vec{u} = 3\vec{j} + 2\vec{i}$, suy ra $\vec{u} = (2; 3)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 71. Trong mặt phẳng Oxy , với $A(4; 3)$, $B(-5; 6)$, $C(-4; -1)$. Tọa độ trực tâm H của tam giác ABC là

- A. $H(-3; 2)$. B. $H(-3; -2)$. C. $H(3; -2)$. D. $H(3; 2)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BC} = (1; -7)$, $\overrightarrow{AC} = (-8; -4)$.

Gọi $H(x; y)$ là trực tâm của $\triangle ABC$.

Ta có $\overrightarrow{AH} = (x - 4; y - 3)$, $\overrightarrow{BH} = (x + 5; y - 6)$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 - 7(y - 3) = 0 \\ -8(x + 5) - 4(y - 6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 7y + 17 = 0 \\ -8x - 4y - 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 2. \end{cases}$$

Vậy $H(-3; 2)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 72. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , các véc-tơ đơn vị là $\vec{i}$ và $\vec{j}$. Tập hợp điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = (2 \cos t + 3) \vec{i} + (2 - \cos t) \vec{j}$ là

- A. đoạn thẳng IJ của đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ với $I(1; 3)$, $J(5; 1)$.
 B. đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.
 C. phần đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ trừ điểm $J(5; 1)$.
 D. phần đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ trừ điểm $I(1; 3)$.

Lời giải.

Tọa độ điểm M là $(2 \cos t + 3; 2 - \cos t)$.

$$\text{Vậy } \begin{cases} x = 2 \cos t + 3 \\ y = 2 - \cos t \end{cases}, \text{ suy ra } 1 \leq x \leq 5 \text{ và } 1 \leq y \leq 3.$$

$$\text{Ta có } x + 2y = 2 \cos t + 3 + 4 - 2 \cos t = 7 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}.$$

Vậy tập hợp điểm M là đoạn thẳng IJ của đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ với $I(1; 3)$, $J(5; 1)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 73. Cho $A(1; 2)$ và $B(3; 7)$. Tọa độ của $\overrightarrow{AB}$ là

- A. $(2; -1)$. B. $(2; 1)$. C. $(4; -3)$. D. $(2; 5)$.

Lời giải.

Tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{AB} = (3 - 1; 7 - 2) = (2; 5)$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 74. Trong mặt phẳng Oxy , nếu véc-tơ $\vec{a} = 26\vec{i} + 12\vec{j}$ thì

- A. $\vec{a} = 38$. B. $\vec{a} = (26; 12)$. C. $\vec{a} = (12; 26)$. D. $\vec{a} = (26; 2017)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a} = 26\vec{i} + 12\vec{j} = (26; 12)$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 75. Trong hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $M(-1; 0)$, $N(2; -3)$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{NM}$.

- A. $\overrightarrow{NM} = (-3; 3)$. B. $\overrightarrow{NM} = (3; -3)$. C. $\overrightarrow{NM} = (-2; 0)$. D. $\overrightarrow{NM} = (1; -3)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{NM} = (-3; 3)$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 76. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC với $A(1; 1)$, $B(-1; 0)$, $C(-2; 3)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

- A. $G(-2; 4)$. B. $G(-2; 2)$. C. $G\left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$. D. $G\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$.

Lời giải.

$$\text{Giả sử } G(x_M; y_M), \text{ khi đó ta có } \begin{cases} x_M = \frac{1 + (-1) + (-2)}{3} = -\frac{2}{3} \\ y_M = \frac{1 + 0 + 3}{3} = \frac{4}{3}. \end{cases}$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 77. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các véc-tơ $\vec{a} = (-2; 1)$, $\vec{b} = (1; -3)$ và $\vec{c} = (0; 2)$. Tính tọa độ của véc-tơ $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

- A. $\vec{u} = (-1; 6)$. B. $\vec{u} = (3; 0)$. C. $\vec{u} = (-1; 0)$. D. $\vec{u} = (3; 6)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (-2 + 1 + 0; 1 - 3 + 2) \Rightarrow \vec{u} = (-1; 0)$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 78. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho $I(-3; 2)$, $J(-1; 3)$, $K(4; -3)$. Tìm tọa độ điểm L để tứ giác $IJKL$ là hình bình hành.

- A. $L(2; -4)$. B. $L(0; 2)$. C. $L(6; -2)$. D. $L(-8; 8)$.

Lời giải.

Gọi tọa độ điểm $L(x; y)$.

$$\text{Để tứ giác } IJKL \text{ là hình bình hành thì } \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 4 - x \\ 1 = -3 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -4. \end{cases}$$

Kiểm tra lại ta có $L(2; -4)$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 79. Trong mặt phẳng tọa độ với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC với $A(3; 4)$, $B(4; 1)$, $C(2; -3)$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- A. $\left(3; \frac{2}{3}\right)$. B. $(7; 2)$. C. $(9; 2)$. D. $(-1; 1)$.

Lời giải.

Gọi $I(x; y)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , khi đó ta có

$$\begin{cases} AI = BI \\ AI = CI \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2} \\ \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 6y = -8 \\ 2x + 14y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1. \end{cases}$$

Vậy ta có $I(-1; 1)$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 80. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho các điểm $E(3; -2)$, $F(-1; -3)$. Tìm tọa độ điểm G thuộc trục hoành sao cho G thuộc đường thẳng EF .

- A. $G\left(-\frac{11}{5}; 0\right)$. B. $G(11; 0)$. C. $G\left(0; -\frac{11}{4}\right)$. D. $G\left(0; -\frac{11}{2}\right)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{EF} = (-4; -1)$.

Lấy $G(x; 0) \in Ox$.

Để $G \in EF$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{EG} = (x - 3; 2)$ và $\overrightarrow{EF}$ cùng phương, khi đó ta có

$$\frac{x - 3}{-4} = \frac{2}{-1} \Leftrightarrow -x + 3 = -8 \Leftrightarrow x = 11.$$

Vậy ta có $G(11; 0)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 81. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC với trọng tâm G . Biết rằng $A(1; -2)$, $B(5; 0)$, $G(2; 1)$. Tìm tọa độ của C .

- A. $C(0; 5)$. B. $C(0; -1)$. C. $C\left(\frac{8}{3}; -\frac{1}{3}\right)$. D. $C(8; 5)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} x_C = 3x_G - x_A - x_B = 6 - 1 - 5 = 0 \\ y_C = 3y_G - y_A - y_B = 3 + 2 - 0 = 5. \end{cases}$$

Vậy $C(0; 5)$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 82. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $M(1; -2)$ và $N(-1; 0)$. Tìm tọa độ điểm P sao cho $\overrightarrow{PM} = 3\overrightarrow{PN}$.

- A. $P(-2; 0)$. B. $P(2; -3)$. C. $P(-2; 1)$. D. $P(2; 1)$.

Lời giải.

Giả sử $P(x; y)$. Khi đó, ta có

$$\overrightarrow{PM} = 3\overrightarrow{PN} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x = 3(-1 - x) \\ -2 - y = 3(0 - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1. \end{cases}$$

Vậy $P(-2; 1)$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 83. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(-2; 2)$, $B(5; 3)$ và $C(1; 6)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

- A. $D(8; 7)$. B. $D(2; -1)$. C. $D(-6; 5)$. D. $D(-8; 7)$.

Lời giải.

Giả sử $D(x; y)$. Khi đó, ta có

$$ABCD \text{ là hình bình hành} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 5 - 2 \\ y - 2 = 6 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5. \end{cases}$$

Vậy $D(-6; 5)$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 84. Tam giác ABC với $A(-5; 6)$; $B(-4; -1)$ và $C(3; 4)$. Trọng tâm G của tam giác ABC là
 A. $(2; 3)$. B. $(-2; 3)$. C. $(-2; -3)$. D. $(2; -3)$.

Lời giải.

$$\text{Vì } G \text{ là trọng tâm } \triangle ABC \text{ nên ta có } \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = -2 \\ y_G = 3. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 85. Cho điểm $A(-2; 4)$ và $B(4; 0)$. Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là
 A. $(1; 2)$. B. $(3; 2)$. C. $(-1; 2)$. D. $(1; -2)$.

Lời giải.

$$\text{Vì } M \text{ là trung điểm của đoạn thẳng } AB \text{ nên ta có } \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 1 \\ y_M = 2. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 86. Cho các vectơ $\vec{a} = (4; -2)$, $\vec{b} = (-1; -1)$, $\vec{c} = (2; 5)$. Phân tích vectơ $\vec{b}$ theo hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{c}$, ta được:

$$\text{A. } \vec{b} = -\frac{1}{8}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{c}. \quad \text{B. } \vec{b} = \frac{1}{8}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{c}. \quad \text{C. } \vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{a} - 4\vec{c}. \quad \text{D. } \vec{b} = -\frac{1}{8}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{c}.$$

Lời giải.

$$\text{Giả sử } \vec{b} = k\vec{a} + m\vec{c} \quad (k, m \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 4k + 2m \\ -1 = -2k + 5m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{8} \\ m = -\frac{1}{4}. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 87. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(1; 3)$, $B(-1; 2)$, $C(-2; 1)$. Tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ là

$$\text{A. } (-5; -3). \quad \text{B. } (1; 1). \quad \text{C. } (-1; 2). \quad \text{D. } (4; 0).$$

Lời giải.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} = (1; 1).$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 88. Trong mặt phẳng tọa độ $(O; \vec{i}, \vec{j})$, cho $\vec{a} = (-1; 2)$, $\vec{b} = (3; -5)$. Tìm cặp số $(m; n)$ sao cho $\vec{i} + \vec{j} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

$$\text{A. } (m; n) = (4; 7). \quad \text{B. } (m; n) = (8; 3). \quad \text{C. } (m; n) = (7; 4). \quad \text{D. } (m; n) = (3; 8).$$

Lời giải.

$$\vec{i} + \vec{j} = m\vec{a} + n\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} -m + 3n = 1 \\ 2m - 5n = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 8 \\ n = 3 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 89. Các điểm $M(-3; 5)$, $N(5; -6)$ và $P(1; 0)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh BC , CA và AB . Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

A. $G\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$. B. $G\left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$. C. $G\left(1; \frac{1}{3}\right)$. D. $G\left(1; -\frac{1}{3}\right)$.

Lời giải.

G chính là trọng tâm của tam giác MNP nên ta có $G\left(1; -\frac{1}{3}\right)$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 90. Trong mặt phẳng tọa độ với hệ trục tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có tọa độ các đỉnh $A(2; 1)$, $B(0; -3)$, $C(3; 1)$. Tìm tọa độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

A. $(5; 5)$. B. $(5; -2)$. C. $(5; -4)$. D. $(-1; -4)$.

Lời giải.

Gọi tọa độ điểm $D(x; y)$. Ta có $\overrightarrow{AD} = (x - 2; y - 1)$, $\overrightarrow{BC} = (3; 4)$.

$$\text{Vì } ABCD \text{ là hình bình hành nên } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 3 \\ y - 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 5. \end{cases}$$

Vậy $D(5; 5)$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 91. Trong mặt phẳng tọa độ với hệ trục tọa độ Oxy , cho các điểm $A(2; 5)$, $B(1; 1)$, $C(3; 3)$. Tìm tọa độ điểm E thỏa $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.

A. $(3; -3)$. B. $(-3; 3)$. C. $(-3; -3)$. D. $(-2; -3)$.

Lời giải.

Gọi tọa độ điểm $E(x; y)$. Ta có $\overrightarrow{AE} = (x - 2; y - 5)$, $\overrightarrow{AB} = (-1; -4)$, $\overrightarrow{AC} = (1; -2)$. Khi đó

$$\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = -5 \\ y - 5 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -3. \end{cases}$$

Vậy $E(-3; -3)$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 92. Trong mặt phẳng tọa độ với hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j})$, mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $M(x; y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$. B. $\vec{u} = (2; -3) \Leftrightarrow \vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$.
C. $\vec{i} + \vec{j} = \vec{0}$. D. $|\vec{i}| = |\vec{j}|$.

Lời giải.

Hai véc-tơ đơn vị $\vec{i}$, $\vec{j}$ không cùng phương nên $\vec{i} + \vec{j} \neq \vec{0}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 93. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các điểm $A(2017; 12)$ và $B(12; 2017)$. Tìm điểm C trên trục tung sao cho A, B, C thẳng hàng.

A. $C(0; 2018)$. B. $C(0; 2029)$. C. $C(0; 2017)$. D. $C(2019; 0)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2005; 2005)$, $C(0; b)$ trên trục tung, $\overrightarrow{AC} = (-2017; b - 12)$. Ba điểm A, B và C thẳng hàng khi $\overrightarrow{AC}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \frac{-2017}{-2005} = \frac{b - 12}{2005} \Leftrightarrow b = 2029$.

Vậy $C(0; 2029)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 94. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1; 0)$ và $B(0; -2)$. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là

- A. $\left(\frac{1}{2}; -1\right)$. B. $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$. C. $\left(\frac{1}{2}; -2\right)$. D. $(1; -1)$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của AB . Ta có
$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = -1. \end{cases}$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 95. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có trọng tâm là gốc tọa độ O , hai đỉnh $A(-2; 2)$ và $B(3; 5)$. Tọa độ đỉnh C là

- A. $(-1; -7)$. B. $(2; -2)$. C. $(-3; -5)$. D. $(1; 7)$.

Lời giải.

Vì O là trọng tâm nên
$$\begin{cases} x_O = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_O = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \frac{-2 + 3 + x_C}{3} \\ 0 = \frac{2 + 5 + y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = -1 \\ y_C = -7. \end{cases}$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 96. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1; 2)$ và $B(3; 4)$. Điểm $P\left(\frac{a}{b}; 0\right)$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, trên trục hoành thỏa mãn tổng khoảng cách từ P đến hai điểm A và B là nhỏ nhất. Tính $S = a + b$.

- A. $S = -2$. B. $S = 8$. C. $S = 7$. D. $S = 4$.

Lời giải.

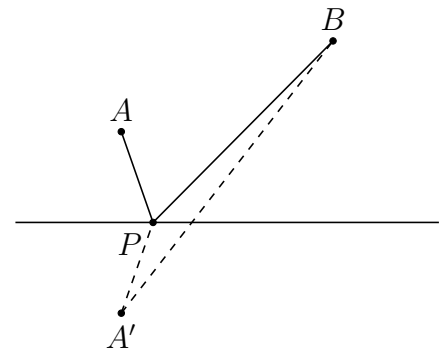
Lấy điểm A' đối xứng với A qua Ox . Khi đó A' có tọa độ là $(1; -2)$.

Ta có $PA + PB = PA' + PB \geq A'B$.

Do đó $PA + PB$ nhỏ nhất bằng $A'B$ khi P, A', B thẳng hàng.

Suy ra $\overrightarrow{PB} = k \cdot \overrightarrow{A'B} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - \frac{a}{b} = 2k \\ 4 = 6k \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{5}{3}.$

Do đó $S = 5 + 3 = 8$.



Chọn đáp án **B** □

Câu 97. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\triangle ABC$ có $A(4; 1), B(-1; 2), C(3; 0)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của $\triangle ABC$.

- A. $(2; 1)$. B. $(2; 4)$. C. $(6; 1)$. D. $(6; 3)$.

Lời giải.

$G(x_G; y_G)$ là trọng tâm của $\triangle ABC$ nên
$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{4 + (-1) + 3}{3} = 2 \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{1 + 2 + 0}{3} = 1 \end{cases} \Rightarrow G(2; 1).$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 98. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1; 2), B(-2; 3)$. Tìm tọa độ của $\overrightarrow{AB}$.

A. (1; 2).

B. (-3; 1).

C. (1; -3).

D. (3; -1).

Lời giải.

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A) = (-3; 1).$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 99. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(-2; -3)$, $B(1; 4)$, $C(3; 1)$. Đặt $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Hỏi tọa độ $\vec{v}$ là cặp số nào?

A. (6; 0).

B. (0; -1).

C. (-8; 11).

D. (8; 11).

Lời giải.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (3; 7) \text{ và } \overrightarrow{AC} = (5; 4).$$

$$\text{Do đó } \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (8; 11).$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 100. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác $\triangle ABC$ có $M(1; 0)$, $N(2; 2)$, $P(-1; 3)$ lần lượt là trung điểm các cạnh BC , CA , AB . Tọa độ của đỉnh A là

A. (4; -1).

B. (0; 1).

C. (0; 5).

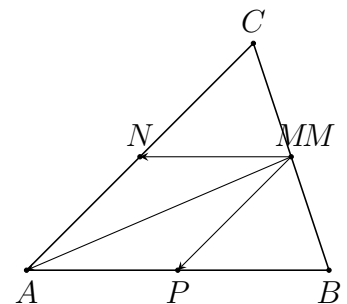
D. (-2; 1).

Lời giải.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MN} = (1; 2), \overrightarrow{MP} = (-2; 3). \text{ Do đó } \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP} = (-1; 5).$$

Vì $PMNA$ là hình bình hành nên

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} &= \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP} \Rightarrow \overrightarrow{MA} = (-1; 5) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_A - 1 = -1 \\ y_A - 0 = 5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 5. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $A(0; 5)$.Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 101. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(2; 1)$ và $B(0; -1)$. Tìm tọa độ điểm E thỏa mãn đẳng thức vec-tơ $\overrightarrow{BE} + 2\overrightarrow{AO} = \vec{0}$.

A. (6; -5).

B. (4; 1).

C. (2; 5).

D. (-4; 1).

Lời giải.

$$\text{Gọi } E(x; y) \text{ thì ta được } \overrightarrow{BE} = (x; y + 1), 2\overrightarrow{AO} = (4; 2).$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{BE} + 2\overrightarrow{AO} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BE} - 2\overrightarrow{AO} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x - 4 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow E(4; 1).$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 102. Cho $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (2; 3)$, $\vec{c} = (-6; -10)$. Hãy chọn câu **đúng**.

A. $\vec{a} - \vec{b}$ và $\vec{c}$ cùng hướng.B. $\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{c}$ cùng hướng.C. $\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{a} - \vec{b}$ cùng phương.D. $\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{c}$ ngược hướng.**Lời giải.**

$$\vec{a} + \vec{b} = (3; 5) \Rightarrow \vec{c} = -2(\vec{a} + \vec{b}).$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 103. Cho $\vec{a} = (m; 3)$ và $\vec{b} = (2; -1)$. Tìm các giá trị của m để hai vec-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

A. $m = -6$.

B. $m = 12$.

C. $m = \frac{3}{4}$.

D. $m = \frac{1}{4}$.

Lời giải.

Để $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}$ thì $\frac{m}{2} = \frac{3}{-1} \Leftrightarrow m = -6$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 104. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\triangle ABC$ có $A(6; 5), B(14; 10), C(-6; 3)$. Các đường thẳng AB, AC lần lượt cắt các trục Ox, Oy tại M, N . Tìm tọa độ trung điểm của đoạn thẳng MN .

A. $(-2; 1)$.

B. $(1; -2)$.

C. $(2; -1)$.

D. $(-1; 2)$.

Lời giải.

Gọi $M(a; 0) \in Ox$ và $N(0; b) \in Oy$.

$$\overrightarrow{AB} = (8; 5); \overrightarrow{AC} = (-12; -2); \overrightarrow{AM} = (a - 6; -5); \overrightarrow{AN} = (-6; b - 5).$$

Các đường thẳng AB, AC lần lượt cắt các trục Ox, Oy tại M, N nên $\begin{cases} A, B, M \text{ thẳng hàng} \\ A, C, N \text{ thẳng hàng} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM} \text{ cùng phương } \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AN} \text{ cùng phương } \overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a-6}{8} = \frac{-5}{5} \\ \frac{-6}{-12} = \frac{b-5}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(-2; 0) \\ N(0; 4) \end{cases}$$

Suy ra trung điểm của MN có tọa độ là $(-1; 2)$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 105. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $A(-1; 2)$ và $B(3; -1)$. Tọa độ của vec-tơ $\overrightarrow{BA}$ là

A. $(4; -3)$.

B. $(2; 1)$.

C. $(-4; 3)$.

D. $(2; -1)$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{BA} = (-4; 3)$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 106. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba điểm $A(1; 2), B(-2; 1), C(2; 3)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

A. $\left(\frac{1}{3}; -2\right)$.

B. $\left(-\frac{1}{3}; -2\right)$.

C. $\left(-\frac{1}{3}; 2\right)$.

D. $\left(\frac{1}{3}; 2\right)$.

Lời giải.

$$\text{Vì } G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \text{ ta có } \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{1}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = 2. \end{cases}$$

Vậy $G\left(\frac{1}{3}; 2\right)$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 107. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $A(2; -4)$ và $B(-4; 2)$. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là

A. $I(-2; -2)$.

B. $I(-1; -1)$.

C. $I(2; 2)$.

D. $I(1; 1)$.

Lời giải.

Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là $\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2 + (-4)}{2} = -1 \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-4 + 2}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow I(-1; -1).$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 108. Cho tam giác ABC . Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}, \overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Lấy các điểm A', B' sao cho $\overrightarrow{CA'} = -2\vec{a}, \overrightarrow{CB'} = 2\vec{b}$. Gọi I là giao điểm của $A'B$ và $B'A$. Giả sử $\overrightarrow{CI} = m\vec{a} + n\vec{b}$. Khi đó $\frac{m}{n}$ bằng

A. $\frac{1}{3}.$

B. $\frac{2}{3}.$

C. $\frac{1}{5}.$

D. $\frac{2}{5}.$

Lời giải.

Từ C kẻ đường thẳng song song với $A'B$, cắt AB' tại M . Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CB'} = 2\vec{b} = 2\overrightarrow{CB} &\Rightarrow CB' = 2CB \Rightarrow \frac{BB'}{BC} = 1, \\ \overrightarrow{CA'} = -2\vec{a} = -2\overrightarrow{CA} &\Rightarrow CA' = 2CA \Rightarrow \frac{AC}{AA'} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Tam giác IAA' có $CM \parallel IA'$ nên

$$\frac{M}{AI} = \frac{AC}{AA'} = \frac{1}{3}.$$

Suy ra $\frac{IM}{AI} = \frac{2}{3}$ hay $3IM = 2AI$. (1)

Tam giác $B'CM$ có $BI \parallel CM$ nên

$$\frac{B'I}{IM} = \frac{BB'}{BC} = 1.$$

Suy ra $IB' = IM$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $3IB' = 2IA$. Suy ra $3\overrightarrow{IB'} + 2\overrightarrow{IA} = 0$ hay

$$\begin{aligned} 3(\overrightarrow{CB'} - \overrightarrow{CI}) + 2(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CI}) &= 0 \\ \Leftrightarrow 3\overrightarrow{CB'} + 2\overrightarrow{CA} - 5\overrightarrow{CI} &= 0 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{CI} &= \frac{3}{5}\overrightarrow{CB'} + \frac{2}{5}\overrightarrow{CA}. \end{aligned}$$

Suy ra $\overrightarrow{CI} = \frac{3}{5} \cdot 2\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{a} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{6}{5}\vec{b}$. Vậy $m = \frac{2}{5}$ và $n = \frac{6}{5}$. Do đó $\frac{m}{n} = \frac{1}{3}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 109. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai véc-tơ $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (-3; 5)$. Tìm tọa độ của véc-tơ $\vec{u} = \vec{a} - \vec{b}$.

A. $\vec{u} = (-4; 3).$

B. $\vec{u} = (-2; 7).$

C. $\vec{u} = (-3; 5).$

D. $\vec{u} = (4; -3).$

Lời giải.

Ta có

$$\vec{u} = \vec{a} - \vec{b} = (1 - (-3); 2 - 5) = (4; -3).$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 110. Trong mặt phẳng Oxy , cho $A(2; -3)$, $B(0; 1)$. Tìm tọa độ véc-tơ $\overrightarrow{AB}$.

- A. $\overrightarrow{AB} = (4; 2)$. B. $\overrightarrow{AB} = (2; -4)$. C. $\overrightarrow{AB} = (-2; 4)$. D. $\overrightarrow{AB} = (-2; -4)$.

Lời giải.

Tọa độ véc-tơ $\overrightarrow{AB} = (0 - 2; 1 - (-3)) = (-2; 4)$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 111. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(1; -1)$, $B(2; -3)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB}$.

- A. $D = (4; -7)$. B. $D = (-4; -1)$. C. $D = (4; -1)$. D. $D = (-4; 1)$.

Lời giải.

Gọi $D(x; y)$. Ta có $\overrightarrow{AD} = (x - 1; y + 1)$, $\overrightarrow{AB} = (1; -2) \Rightarrow 3\overrightarrow{AB} = (3; -6)$. Theo đề bài $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB}$ nên

$$\begin{cases} x - 1 = 3 \\ y + 1 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -7. \end{cases}$$

Vậy $D(4; -7)$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 112. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(4; -3)$, $B(2; -1)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .

- A. $I(2; -2)$. B. $I(6; -4)$. C. $I(-2; 2)$. D. $I(3; -2)$.

Lời giải.

Vì I là trung điểm AB nên có tọa độ

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = 3 \\ y_I = -2. \end{cases}$$

Vậy trung điểm I của AB có tọa độ $(3; -2)$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 113. Cho các véc-tơ $\vec{a} = (2; -4)$, $\vec{b} = (-5; 3)$. Tọa độ véc-tơ $\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}$ là

- A. $(9; 5)$. B. $(7; -7)$. C. $(-1; 5)$. D. $(9; -11)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b} = (9; -11)$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 114. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho tam giác ABC với $A(2; 1)$, $B(-1; 2)$, $C(3; 0)$. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi tọa độ đỉnh D là cặp số nào dưới đây?

- A. $(0; -1)$. B. $(6; -1)$. C. $(1; 6)$. D. $(-6; 1)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BC} = (4; -2)$, $\overrightarrow{AD} = (x_D - 2; y_D - 1)$. Vì $ABCD$ là hình bình hành nên

$$\begin{cases} x_D - 2 = 4 \\ y_D - 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 6 \\ y_D = -1. \end{cases}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 115. Cho các véc-tơ $\vec{a} = (0; 1)$, $\vec{b} = (-1; 2)$, $\vec{c} = (-3; -2)$. Tọa độ véc-tơ $\vec{u} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - 4\vec{c}$ là

- A. (15; 10). B. (-10; 15). C. (10; -15). D. (10; 15).

Lời giải.

Ta có $\vec{u} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - 4\vec{c} = (10; 15)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 116. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(-3; 2)$, $B(1; 4)$. Tìm tọa độ điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{AB}$.

- A. (6; -2). B. (-11; -2). C. (3; 8). D. (8; -4).

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; 2)$, $\overrightarrow{AM} = (x_M + 3; y_M - 2)$. Vì $\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{AB}$ nên

$$\begin{cases} x_M + 3 = -2 \cdot 4 \\ y_M - 2 = -2 \cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = -11 \\ y_M = -2. \end{cases}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 117. Trong hệ trục $(O, \vec{i}, \vec{j})$, tọa độ của véc-tơ $\vec{i} + \vec{j}$ là

- A. (-1; 1). B. (0; 1). C. (1; 0). D. (1; 1).

Lời giải.

Do $\vec{i} + \vec{j} = 1 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j}$ nên $\vec{i} + \vec{j} = (1; 1)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 118. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(5; 2)$, $B(10; 8)$. Tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ là

- A. (2; 4). B. (5; 6). C. (5; 10). D. (-5; -6).

Lời giải.

Với $A(5; 2)$, $B(10; 8)$, ta có $\overrightarrow{AB} = (10 - 5; 8 - 2) = (5; 6)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 119. Cho $ABCD$ là hình bình hành có $A(1; 3)$, $B(-2; 0)$, $C(2; -1)$. Tọa độ điểm D là

- A. (5; 2). B. (4; -17). C. (4; -1). D. (2; 2).

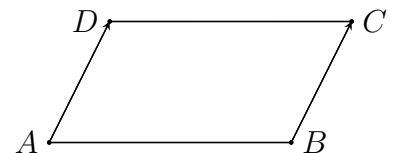
Lời giải.

Ta có $ABCD$ là hình bình hành

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 1 = 4 \\ y_D - 3 = -1. \end{cases}$$

Vậy $D(5; 2)$.

Chọn đáp án (A) □



Câu 120. Trong mặt phẳng Oxy , cho $\vec{a} = (1; -2)$, $\vec{b} = (3; 4)$, $\vec{c} = (5; -1)$. Tọa độ véc-tơ $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ là

- A. (0; -1). B. (-1; 0). C. (1; 0). D. (0; 1).

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} 2\vec{a} = (2; -4) \\ \vec{b} = (3; 4) \\ -\vec{c} = (-5; 1) \end{cases} \Rightarrow 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = (2 + 3 - 5; -4 + 4 + 1) = (0; 1).$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 121. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có $A(2; -3), B(4; 1)$, trọng tâm $G(-4; 2)$. Khi đó tọa độ điểm C là

- A. $\left(\frac{2}{3}; 0\right)$. B. $(-18; 8)$. C. $(-6; 4)$. D. $(-10; 10)$.

Lời giải.

$$\text{Đặt } C(x_C; y_C). \text{ Do } G \text{ là trọng tâm } \triangle ABC \text{ nên } \begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3x_G \\ y_A + y_B + y_C = 3y_G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 3x_G - x_A - x_B \\ y_C = 3y_G - y_A - y_B. \end{cases}$$

Vậy $C(-18; 8)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 122. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(2; -3), B(4; 7)$. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là

- A. $(6; 4)$. B. $(3; 2)$. C. $(2; 10)$. D. $(8; -21)$.

Lời giải.

Với $A(2; -3), B(4; 7)$, trung điểm đoạn AB là điểm $I\left(\frac{2+4}{2}; \frac{-3+7}{2}\right)$ hay $I(3; 2)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 123. Trong mặt phẳng Oxy , cho $A(1; -3), B(2; 1), C(3; -4)$. Gọi M là trung điểm của BC . Tọa độ của điểm E sao cho $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CB}$ là

- A. $(1; 11)$. B. $(3; 5)$. C. $(-3; 5)$. D. $(3; 11)$.

Lời giải.

Do M là trung điểm của BC nên $M\left(\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E - x_A = 2(x_M - x_A) + x_B - x_C \\ y_E - y_A = 2(y_M - y_A) + y_B - y_C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = 2x_M - x_A + x_B - x_C \\ y_E = 2y_M - y_A + y_B - y_C. \end{cases}$$

Vậy $E(3; 5)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

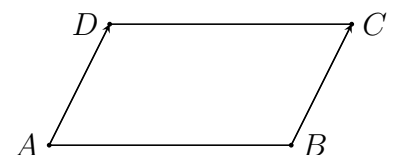
Câu 124. Cho hình bình hành $ABCD$ có $A(-1; -2), B(3; 2), D(4; -1)$. Tọa độ đỉnh C là

- A. $C(8; 3)$. B. $C(-8; -3)$. C. $C(-8; 3)$. D. $C(8; -3)$.

Lời giải.

Ta có $ABCD$ là hình bình hành

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C - 3 = 5 \\ y_C - 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow C(8; 3).$$



Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 125. Trong mặt phẳng Oxy , cho $\vec{a} = (2; -2), \vec{b} = (1; 4)$. Véc-tơ $\vec{c} = (5; 0)$ được biểu diễn theo hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là

A. $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$. B. $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$. C. $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$. D. $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$.

Lời giải.

$$\text{Giả sử } \vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 2x + y \\ 0 = -2x + 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$$

Vậy $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 126. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(1;0)$, $B(0;3)$, $C(-3;-5)$. Tọa độ của điểm M thuộc trục Ox sao cho $|2\vec{MA} - 3\vec{MB} + 2\vec{MC}|$ nhỏ nhất là

A. $M(4;5)$. B. $M(0;4)$. C. $M(-4;0)$. D. $M(2;3)$.

Lời giải.

Xét điểm $I(a;b)$ thỏa mãn $2\vec{IA} - 3\vec{IB} + 2\vec{IC} = \vec{0}$ ta có $\begin{cases} x_I = 2x_A - 3x_B + 2x_C \\ y_I = 2y_A - 3y_B + 2y_C \end{cases}$ nên $I(-4;-19)$.

Ta có $2\vec{MA} - 3\vec{MB} + 2\vec{MC} = 2(\vec{MI} + \vec{IA}) - 3(\vec{MI} + \vec{IB}) + 2(\vec{MI} + \vec{IC}) = \vec{MI}$.

Do đó $|2\vec{MA} - 3\vec{MB} + 2\vec{MC}| = |\vec{MI}| = MI$.

Như vậy $|2\vec{MA} - 3\vec{MB} + 2\vec{MC}|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I lên trục hoành $\Leftrightarrow M(-4;0)$.

Chọn đáp án **(C)**

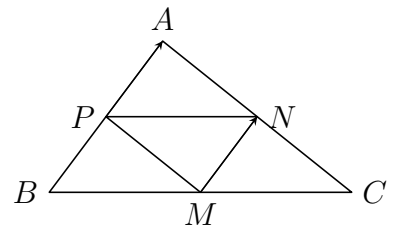
□

Câu 127. Các điểm $M(2;3)$, $N(0;-4)$, $P(-1;6)$ lần lượt là trung điểm các cạnh BC , CA , AB của tam giác ABC . Tọa độ đỉnh A của tam giác là

A. $(1;-10)$. B. $(-3;1)$. C. $(-2;-7)$. D. $(-3;-1)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{PA} = \vec{MN} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A + 1 = -2 \\ y_A - 6 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow A(-3;-1)$.



Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 128. Cho điểm $M(1-2t; 1+t)$. Tọa độ điểm M sao cho $x_M^2 + y_M^2$ nhỏ nhất là

A. $M\left(\frac{3}{5}; -\frac{6}{5}\right)$. B. $M\left(-\frac{3}{5}; -\frac{6}{5}\right)$. C. $M\left(\frac{3}{5}; \frac{6}{5}\right)$. D. $M\left(-\frac{3}{5}; \frac{6}{5}\right)$.

Lời giải.

Ta có $M(1-2t; 1+t) \Rightarrow x_M^2 + y_M^2 = (1-2t)^2 + (1+t)^2 = 5t^2 - 2t + 2 = 5\left(t - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{9}{5} \geq \frac{9}{5}$.

Như vậy $x_M^2 + y_M^2$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{9}{5}$ khi và chỉ khi $t - \frac{1}{5} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{5} \Leftrightarrow M\left(\frac{3}{5}; \frac{6}{5}\right)$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 129. Trong hệ tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (-1;2)$, $\vec{b} = (5;-7)$. Tọa độ của $\vec{a} - \vec{b}$ là

A. $(6;-9)$. B. $(-6;9)$. C. $(-5;-14)$. D. $(4;5)$.

Lời giải.

$$\vec{a} - \vec{b} = (-6; 9).$$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 130. Trong hệ tọa độ Oxy , cho $A(3; 3)$, $B(5; 5)$, $C(6; 9)$. Tìm tọa độ trọng tâm tam giác ABC .

- A. $(4; 5)$. B. $(14; 17)$. C. $\left(\frac{14}{3}; \frac{17}{3}\right)$. D. $\left(\frac{14}{3}; 5\right)$.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC , ta có
$$\begin{cases} x_G = \frac{3+5+6}{3} = \frac{14}{3} \\ y_G = \frac{3+5+9}{3} = \frac{17}{3} \end{cases}$$

Suy ra $G\left(\frac{14}{3}; \frac{17}{3}\right)$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 131. Trong hệ tọa độ Oxy , cho $A(3; 3)$, $B(5; 5)$, $C(6; 9)$. Tìm tọa độ D sao cho A là trọng tâm tam giác BCD .

- A. $(-2; -4)$. B. $(-1; -5)$. C. $(2; 5)$. D. $(-2; -5)$.

Lời giải.

Do A là trọng tâm của tam giác BCD nên

$$\begin{cases} 3 = \frac{5+6+x_D}{3} \\ 3 = \frac{5+9+y_D}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -2 \\ y_D = -5 \end{cases} \Rightarrow D(-2; -5).$$

Chọn đáp án (D)

□

Câu 132. Trong hệ tọa độ Oxy , cho $A(4; 1)$, $B(3; 2)$. Tìm tọa độ M sao cho B là trung điểm của AM .

- A. $(2; 3)$. B. $(3; 2)$. C. $(5; 0)$. D. $(2; 1)$.

Lời giải.

Do B là trung điểm của AM nên
$$\begin{cases} 3 = \frac{x_M + 4}{2} \\ 2 = \frac{y_M + 1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 2 \\ y_M = 3 \end{cases}$$

Suy ra $M(2; 3)$.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 133. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(-1; 2)$ và $B(3; 5)$. Tọa độ của $\overrightarrow{AB}$ là

- A. $(4; 3)$. B. $(2; 7)$. C. $\left(1; \frac{7}{2}\right)$. D. $\left(2; -\frac{3}{2}\right)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; 3)$.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 134. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba véc-tơ $\vec{a} = (3; -7)$, $\vec{b} = (-5; 4)$, $\vec{c} = (1; 2)$. Giá trị của m, n để $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$ là

- A. $m = -\frac{13}{14}, n = -\frac{23}{24}$. B. $m = -\frac{23}{14}, n = -\frac{13}{24}$.
C. $m = \frac{13}{14}, n = -\frac{23}{24}$. D. $m = -\frac{13}{14}, n = -\frac{13}{14}$.

Lời giải.

Ta có

$$\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c} \Leftrightarrow \begin{cases} -5m + n = 3 \\ 4m + 2n = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{13}{14} \\ n = -\frac{23}{14} \end{cases}.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 135. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(-1; 1)$, $B(1; 3)$ và $C(5; 2)$. Gọi D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCD$. Tìm tọa độ D .

- A. $(3; -2)$. B. $(5; 0)$. C. $(3; 0)$. D. $(5; -2)$.

Lời giải.

Gọi tọa độ $D(x; y)$. Ta có $ABCD$ là hình bình hành khi

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 4 \\ y - 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}.$$

Vậy tọa độ $D(3; -2)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 136. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $I(1; -2)$ là trung điểm của AB với $A \in Ox$ và $B \in Oy$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $A(0; 2)$. B. $B(0; 4)$. C. $B(-4; 0)$. D. $A(2; 0)$.

Lời giải.

Gọi tọa độ $A(a; 0) \in Ox$, $B(0; b) \in Oy$. Vì $I(1; -2)$ là trung điểm của AB nên ta có

$$\begin{cases} \frac{a}{2} = 1 \\ \frac{b}{2} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \end{cases}.$$

Do đó ta có $A(2; 0)$, $B(0; -4)$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 137. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(1; 1)$, $B(3; 2)$, $C(m + 4; 2m + 1)$. Tìm m để ba điểm A , B , C thẳng hàng.

- A. $m = 1$. B. $m = 0$. C. $m = -1$. D. $m = -2$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (m + 3; 2m)$.

Ba điểm A , B , C thẳng hàng khi hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương

$$\Leftrightarrow \frac{m + 3}{2} = \frac{2m}{1} \Leftrightarrow 3m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 138. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$. Tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ là

- A. $\overrightarrow{AB} = (y_A - x_A; y_B - x_B)$. B. $\overrightarrow{AB} = (x_A + x_B; y_A + y_B)$.

C. $\overrightarrow{AB} = (x_A - x_B; y_A - y_B).$

D. $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A).$

Lời giải.

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A).$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 139. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1; 0)$ và B , với $I\left(\frac{1}{2}; -1\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB . Khi đó tọa độ điểm B là

A. $\left(-1; \frac{1}{2}\right).$

B. $(0; -2).$

C. $\left(\frac{1}{2}; -2\right).$

D. $(1; -1).$

Lời giải.

Ta có
$$\begin{cases} x_B = 2x_I - x_A = 0 \\ y_B = 2y_I - y_A = -2 \end{cases}.$$
 Vậy $B(0; -2).$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 140. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (1; -2)$, $\vec{b} = (3; 4)$, $\vec{c} = (5; -1)$. Tọa độ véc-tơ $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ là

A. $(-1; 0).$

B. $(0; 1).$

C. $(0; -1).$

D. $(1; 0).$

Lời giải.

Ta có tọa độ véc-tơ $\vec{u} = (x; y)$ thỏa hệ

$$\begin{cases} x = 2 \cdot 1 + 3 - 5 \\ y = 2 \cdot (-2) + 4 - (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = (0; 1).$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 141. Cho 4 điểm $A(3; 0)$, $B(0; 4)$, $C(4; 2)$, $D(1; 1)$. Tìm hai số m, n thỏa mãn $\overrightarrow{DC} = m\overrightarrow{DA} + n\overrightarrow{DB}$.

A. $m = -2, n = -1.$

B. $m = 2, n = 1.$

C. $m = -1, n = -2.$

D. $m = 1, n = 2.$

Lời giải.

Ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x_C - x_D = m(x_A - x_D) + n(x_B - x_D) \\ y_C - y_D = m(y_A - y_D) + n(y_B - y_D) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - n = 3 \\ -m + 3n = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 1. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 142. Cho $\triangle ABC$ có $A(-1; 6)$, $B(5; -1)$, $C(2; 7)$. Tọa độ trọng tâm G của $\triangle ABC$ là

A. $G(2; 4).$

B. $G(2; 3).$

C. $G(-2; 4).$

D. $G(-2; -4).$

Lời giải.

Áp dụng công thức trọng tâm trong tam giác ta có

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = 2 \\ y_G = 4 \end{cases} \Rightarrow G(2; 4).$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 143. Cho $\triangle ABC$ có $B(8; 6)$, $C(6; -2)$. M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC . Tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{MN}$ là

- A. $(1; 4)$. B. $(-2; -8)$. C. $(-1; -4)$. D. $(2; 8)$.

Lời giải.

Ta có MN là đường trung bình của tam giác ABC suy ra $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = (-1; -4)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 144. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(1; -3)$, $B(4; 5)$, $C(2; -3)$. Xét các mệnh đề

I. $\overrightarrow{AB} = (3; 8)$.

II. M là trung điểm BC thì $M(6; 2)$.

III. Tam giác ABC có trọng tâm $G\left(\frac{7}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Chỉ I và II. B. Chỉ I và III. C. Chỉ II và III. D. Cả I, II và III.

Lời giải.

M là trung điểm của BC thì $M(3; 1)$, nên câu II sai.

I và III đều đúng.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 145. Trong mặt phẳng Oxy cho hình bình hành $ABCD$ có $A(-1; 3)$, $B(2; 4)$ và $G\left(-\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)$ là trọng tâm của tam giác ABD . Tìm tọa độ đỉnh C ?

- A. $C(-1; 0)$. B. $C(0; -1)$. C. $C(1; 0)$. D. $C(0; 1)$.

Lời giải.

Gọi $C(x; y)$.

Ta có $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(x+1) \\ -\frac{2}{3} = \frac{1}{3}(y-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1. \end{cases}$$

Vậy $C(1; 0)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 146. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có $A(6; -6)$, $B(-1; -5)$, $C(3; 3)$. Gọi $I(a; b)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tính $a + b$?

- A. $a + b = 1$. B. $a + b = -1$. C. $a + b = 0$. D. $a + b = 6$.

Lời giải.

Do I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên $IA = IB = IC$.

$$\text{Ta có hệ: } \begin{cases} (a-6)^2 + (b+6)^2 = (a+1)^2 + (b+5)^2 \\ (a+1)^2 + (b+5)^2 = (a-3)^2 + (b-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14a - 2b = 46 \\ 8a + 16b = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2. \end{cases}$$

Vậy $a + b = 1$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 147. Trong mặt phẳng Oxy , cho $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$. Tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ là

- A. $\overrightarrow{AB} = (y_A - x_A; y_B - x_B)$. B. $\overrightarrow{AB} = (x_A + x_B; y_A + y_B)$.

C. $\overrightarrow{AB} = (x_A - x_B; y_A - y_B).$

D. $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A).$

Lời giải.

Câu hỏi lý thuyết.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 148. Cho hai điểm $A(1; 0)$ và $B(0; -2)$. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là

A. $\left(\frac{1}{2}; -1\right).$ B. $\left(-1; \frac{1}{2}\right).$ C. $\left(\frac{1}{2}; -2\right).$ D. $(1; -1).$

Lời giải.

M là trung điểm của đoạn $AB \Leftrightarrow M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right).$

Áp dụng, ta được trung điểm của AB có tọa độ là $\left(\frac{1}{2}; -1\right).$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 149. Trong mặt phẳng Oxy , cho ba điểm $A(m - 1; 2)$, $B(2; 5 - 2m)$, $C(m - 3; 4)$. Tìm m để ba điểm A, B, C thẳng hàng.

A. $m = 2.$ B. $m = 1.$ C. $m = -2.$ D. $m = 3.$

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (3 - m; 3 - 2m)$ và $\overrightarrow{AC} = (-2; 2).$

Ba điểm A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi

$$\exists k \neq 0: \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \frac{3 - m}{-2} = \frac{3 - 2m}{2} \Leftrightarrow m = 2.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 150. Cho $\vec{a} = (-3; 4)$. Giá trị của y để $\vec{b} = (6; y)$ cùng phương với $\vec{a}$ là

A. $y = 9.$ B. $y = -8.$ C. $y = 7.$ D. $y = -4.$

Lời giải.

Hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương khi $\frac{6}{-3} = \frac{y}{4} \Leftrightarrow y = -8.$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 151. Cho hai điểm $A(1; 0)$ và $B(0; -2)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $\overrightarrow{AD} = -3\overrightarrow{AB}.$

A. $D(4; -6).$ B. $D(2; 0).$ C. $D(0; 4).$ D. $D(4; 6).$

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AD} = -3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 1 = -3(0 - 1) \\ y_D - 0 = -3(-2 - 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 4 \\ y_D = 6 \end{cases} \Rightarrow D(4; 6).$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 152. Khẳng định nào trong các khẳng định sau là đúng?

- A. Véc-tơ $\vec{u} = (-2; 5)$ là véc-tơ đối của véc-tơ $\vec{v} = (5; -2).$
 B. Hai véc-tơ $\vec{c} = (6; -3)$, $\vec{d} = (-2; 9)$ ngược hướng.
 C. Hai véc-tơ $\vec{x} = (2017; 1)$, $\vec{y} = (2018; 0)$ cùng phương.
 D. Hai véc-tơ $\vec{a} = (-\sqrt{2}; 0)$, $\vec{b} = (-1; 0)$ cùng hướng.

Lời giải.

Ta có $\vec{a} = \sqrt{2}\vec{b}$ nên hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 153. Cho hình bình hành $ABCD$ có tọa độ tâm $I(3; 2)$ và hai đỉnh $B(-1; 3)$, $C(8; -1)$. Tìm tọa độ hai đỉnh A , D .

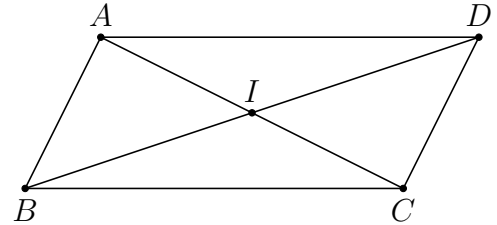
- A. $A(7; 1)$, $D(-2; 5)$. B. $A(-2; 5)$, $D(7; 1)$. C. $A(7; 5)$, $D(-2; 1)$. D. $A(-2; 1)$, $D(7; 5)$.

Lời giải.

Do $ABCD$ là hình bình hành tâm I nên I là trung điểm của AC và BD .

$$\text{Do đó } \begin{cases} \frac{x_A + x_C}{2} = 3 \\ \frac{y_A + y_C}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -2 \\ y_A = 5 \end{cases} \Rightarrow A(-2; 5).$$

$$\text{Tương tự } \begin{cases} \frac{x_B + x_D}{2} = 3 \\ \frac{y_B + y_D}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 7 \\ y_D = 1 \end{cases} \Rightarrow D(7; 1).$$



Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 154. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}, \vec{j})$ cho điểm $M(-1; 4)$. Gọi H , K lần lượt là hình chiếu của M lên các trục Ox , Oy . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. $\overrightarrow{OH} = -\vec{i}$. B. $\overrightarrow{OK} = 4\vec{j}$.
C. $\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OH} = (1; -4)$. D. $\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OH} = (1; -4)$.

Lời giải.

Ta có $H(-1; 0)$ và $K(0; 4)$. Do đó $\overrightarrow{OH} = (-1; 0)$ và $\overrightarrow{OK} = (0; 4)$.

Vậy $\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OH} = (1; 4)$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 155. Cho hai véc-tơ $\vec{a} = (2; -2)$ và $\vec{b} = (1; 4)$. Hãy biểu diễn véc-tơ $\vec{c} = (5; 0)$ theo hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$.

- A. $\vec{c} = -\frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$. B. $\vec{c} = 2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$. C. $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$. D. $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$.

Lời giải.

Giả sử $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$. Khi đó, ta có hệ phương trình sau $\begin{cases} 2m + n = 5 \\ -2m + 4n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 1. \end{cases}$

Vậy $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 156. Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm $M(-1; 3)$, $N(4; 2)$. Tìm tọa độ điểm P sao cho O là trọng tâm $\triangle MNP$.

- A. $P(-3; -5)$. B. $P(-5; -3)$. C. $P(3; -5)$. D. $P(-3; 5)$.

Lời giải.

Vì O là trọng tâm tam giác $\triangle MNP$ nên $\begin{cases} x_P = 3x_O - x_M - x_N \\ y_P = 3y_O - y_M - y_N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_P = -3 \\ y_P = -5. \end{cases}$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 157. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $M(2; -3)$, $N(-1; 2)$, $P(3; -2)$. Gọi Q là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{QN} - 4\overrightarrow{MQ} = \vec{0}$. Tìm tọa độ điểm Q .

- A. $Q\left(-\frac{5}{2}; 2\right)$. B. $Q\left(\frac{5}{3}; -2\right)$. C. $Q\left(\frac{3}{5}; 2\right)$. D. $Q\left(\frac{3}{5}; -2\right)$.

Lời giải.

Gọi $Q(x; y)$. Ta có
$$\begin{cases} \overrightarrow{QP} = (3 - x; -2 - y) \\ \overrightarrow{QN} = (-1 - x; 2 - y) \\ 4\overrightarrow{MQ} = 4(x - 2; y + 3). \end{cases}$$

Theo giả thiết $\overrightarrow{QP} + \overrightarrow{QN} - 4\overrightarrow{MQ} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} (3 - x) + (-1 - x) - 4(x - 2) = 0 \\ (-2 - y) + (2 - y) - 4(y + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = -2. \end{cases}$

Chọn đáp án **(B)** □**Câu 158.** Cho hai điểm $M(-1; 5)$, $N(0; 7)$. Tính tọa độ véc-tơ $\overrightarrow{NM}$.

- A. $(-1; -2)$. B. $(1; 2)$. C. $(1; -2)$. D. $(-1; 2)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{NM} = (-1; -2)$.

Chọn đáp án **(A)** □**Câu 159.** Tìm m để hai véc-tơ $\vec{a} = (m^2 - 1; 5)$, $\vec{b} = (m + 1; 7)$ cùng phương với nhau.

- A. $m \in \{-1\}$. B. $m \in \left\{\frac{12}{7}\right\}$. C. $m \in \left\{-1; \frac{12}{7}\right\}$. D. $m \in \left\{1; \frac{12}{7}\right\}$.

Lời giải.

Do $\vec{b} \neq \vec{0}$ với mọi $m \in \mathbb{R}$ nên hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi tồn tại số thực k thỏa $\vec{a} = k\vec{b}$.

Suy ra
$$\begin{cases} m^2 - 1 = k \cdot (m + 1) \\ 5 = k \cdot 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - \frac{5}{7}m - \frac{12}{7} = 0 \\ k = \frac{5}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = \frac{12}{7} \\ k = \frac{5}{7} \end{cases}$$

Chọn đáp án **(C)** □**Câu 160.** Cho các điểm $A(3; 1)$, $B(2; 2)$, $C(1; 6)$, $D(1; -6)$. Điểm $G(2; -1)$ là trọng tâm tam giác nào sau đây?

- A. $\triangle ABC$. B. $\triangle ABD$. C. $\triangle ACD$. D. $\triangle BCD$.

Lời giải.

Ta có
$$\begin{cases} \frac{x_A + x_B + x_D}{3} = \frac{3 + 2 + 1}{3} = 2 = x_G \\ \frac{y_A + y_B + y_D}{3} = \frac{1 + 2 - 6}{3} = -1 = y_G \end{cases}$$
. Vậy G là trọng tâm tam giác ABD .

Chọn đáp án **(B)** □**Câu 161.** Cho các điểm $A(4; 1)$, $B(3; -2)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho B là trung điểm AM .

- A. $M(2; -5)$. B. $M\left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. C. $M(2; 5)$. D. $M(-2; 5)$.

Lời giải.

B là trung điểm AM khi và chỉ khi
$$\begin{cases} x_B = \frac{x_A + x_M}{2} \\ y_B = \frac{y_A + y_M}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = \frac{4 + x_M}{2} \\ -2 = \frac{1 + y_M}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 2 \\ y_M = -5. \end{cases}$$

Vậy $M(2; -5)$.Chọn đáp án **(A)** □

Câu 162. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , biết $A(2; 2)$, $B(-5; 1)$, $C(3; -5)$.

- A. $I(-1; -2)$, $R = 5$. B. $I(-1; 2)$, $R = 3$. C. $I(1; 2)$, $R = 1$. D. $I(1; -2)$, $R = \sqrt{17}$.

Lời giải.

Gọi $I(a; b)$ là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-a)^2 + (2-b)^2 = (-5-a)^2 + (1-b)^2 \\ (2-a)^2 + (2-b)^2 = (3-a)^2 + (-5-b)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 4a + 4 - 4b = 25 + 10a + 1 - 2b \\ 4 - 4a + 4 - 4b = 9 - 6a + 25 + 10b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -14a - 2b = 18 \\ 2a - 14b = 26 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow I(-1; -2). \end{aligned}$$

Bán kính $R = IA = \sqrt{(2+1)^2 + (2+2)^2} = 5$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 163. Cho hình bình hành $ABCD$, có G là trọng tâm tam giác ABD . Lấy điểm M thuộc cạnh AB và N là giao điểm của MG và CD . Biết đỉnh $G(-3; 1)$, $M(-1; 4)$. Tìm tọa độ điểm N .

- A. $N(-7; 5)$. B. $N(7; 5)$. C. $N(-5; -7)$. D. $N(-7; -5)$.

Lời giải.

Gọi O là trung điểm AC . Ta có G là trọng tâm tam giác ABD

nên $AG = \frac{2}{3}AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}AC = \frac{1}{3}AC$ và $CG = \frac{2}{3}AC$, suy ra

$$\frac{CG}{AG} = 2.$$

Khi đó $\triangle CGN$ đồng dạng $\triangle AGM$ nên

$$\begin{aligned} \frac{GN}{MG} = \frac{CG}{AG} = 2 &\Rightarrow \overrightarrow{GN} = 2\overrightarrow{MG} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_N + 3 = 2(-3 + 1) \\ y_N - 1 = 2(1 - 4) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_N = -7 \\ y_N = -5. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $N(-7; -5)$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 164. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(1; -2)$, $B(0; 3)$, $C(5; -1)$. Trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ là

- A. $G(6; 0)$. B. $G(2; 0)$. C. $G(3; 0)$. D. $G\left(-\frac{4}{3}; 1\right)$.

Lời giải.

Trọng tâm G của tam giác ABC là $G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right) = (2; 0)$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 165. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(4; -4)$, $B(6; 6)$. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là

- A. $(5; 1)$. B. $(-1; 5)$. C. $(2; 10)$. D. $(-2; -5)$.

Lời giải.

Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là $(5; 1)$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 166. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(5; 2)$ và $B(10; 8)$. Độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ là

- A. $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{61}$. B. $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{62}$. C. $|\overrightarrow{AB}| = 5\sqrt{13}$. D. $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{60}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (5; 6) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{61}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 167. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ biết $A(1; 3)$, $B(-2; 0)$, $C(2; -1)$. Khi đó tọa độ điểm D là

- A. $D(2; 2)$. B. $D(5; 2)$. C. $D(4; -1)$. D. $D(2; 5)$.

Lời giải.

Gọi $D(x; y)$, ta có $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 4 \\ y - 3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$.

Vậy $D(5; 2)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 168. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (2; -2)$, $\vec{b} = (-3; 1)$, $\vec{c} = (3; -5)$. Cặp số h, k để $\vec{c} = h\vec{a} + k\vec{b}$ là

- A. $h = 4; k = 4$. B. $h = 3; k = 1$. C. $h = 3; k = 2$. D. $h = 5; k = -2$.

Lời giải.

Ta có $\vec{c} = h\vec{a} + k\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 2h - 3k = 3 \\ -2h + k = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = 3 \\ k = 1 \end{cases}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 169. Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $A(1; -2)$, $B(0; 4)$, $C(4; 3)$. Tìm tọa độ điểm M thỏa $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.

- A. $(7; 27)$. B. $(11; 30)$. C. $(-7; 0)$. D. $(15; 6)$.

Lời giải.

Giả sử $M(x; y)$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; 6)$, $\overrightarrow{AC} = (3; 5) \Rightarrow 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = (-11; -3)$ và $\overrightarrow{CM} = (x - 4; y - 3)$. Do đó $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 = -11 \\ y - 3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = 0 \end{cases}$. Vậy $M(-7; 0)$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 170. Cho $A(2; -3)$, $B(3; 4)$. Tìm tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho A, B, M thẳng hàng.

- A. $M(0; -17)$. B. $M(4; 0)$. C. $M\left(-\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right)$. D. $M\left(\frac{17}{7}; 0\right)$.

Lời giải.

Giả sử $M(x; 0)$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 7)$, $\overrightarrow{AM} = (x - 2; 3)$.

Vì A, B, M thẳng hàng nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{x - 2}{1} = \frac{3}{7} \Leftrightarrow x = \frac{17}{7}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 171. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $M(-3; 1)$, $N(1; 4)$, $P(5; 3)$. Tọa độ điểm (Q) sao cho $MNPQ$ là hình bình hành là

- A. $(9; 6)$. B. $(1; 0)$. C. $(0; -1)$. D. $(0; 1)$.

Lời giải.

Giả sử $Q(x; y)$. Ta có $\overrightarrow{MN} = (4; 3)$ và $\overrightarrow{QP} = (5 - x; 3 - y)$.

Tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - x = 4 \\ 3 - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$.

Vậy $Q(1; 0)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 172. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có $A(6; 1)$, $B(-3; 5)$ và trọng tâm $G(-1; 1)$. Tìm tọa độ đỉnh C của tam giác ABC .

- A. $(6; -3)$. B. $(-6; 3)$. C. $(-6; -3)$. D. $(-3; 6)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} x_C = 3x_G - x_A - x_B \\ y_C = 3y_G - y_A - y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 3 \cdot (-1) - 6 - (-3) = -6 \\ y_C = 3 \cdot 1 - 1 - 5 = -3 \end{cases}$. Vậy $C(-6; -3)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 173. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(5; 2)$, $B(10; 8)$. Tìm tọa độ của vectơ $\overrightarrow{BA}$.

- A. $\overrightarrow{BA} = (5; 6)$. B. $\overrightarrow{BA} = (2; 4)$. C. $\overrightarrow{BA} = (-5; -6)$. D. $\overrightarrow{BA} = (15; 10)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BA} = (5 - 10; 2 - 8) = (-5; -6)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 174. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $A(-5; 2)$, $B(1; 2)$. Tìm tọa độ của điểm C đối xứng với điểm A qua B .

- A. $C(-3; 6)$. B. $(7; 2)$. C. $(6; 0)$. D. $(-4; 4)$.

Lời giải.

Do C đối xứng với A qua B nên B là trung điểm của AC . Theo công thức trung điểm ta có

$$\begin{cases} x_B = \frac{x_A + x_C}{2} \\ y_B = \frac{y_A + y_C}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 2 \cdot 1 + 5 \\ y_C = 2 \cdot 2 - 2 \end{cases} \Rightarrow D(7; 2).$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 175. Trong mặt phẳng Oxy cho $\vec{a} = (-2; 1)$, $\vec{b} = (3; 4)$ và $\vec{c} = (0; 8)$. Vectơ $\vec{x}$ thỏa $\vec{x} + \vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{x}$.

- A. $\vec{x} = (1; -3)$. B. $\vec{x} = (5; -5)$. C. $\vec{x} = (1; 13)$. D. $\vec{x} = (5; 11)$.

Lời giải.

$\vec{x} = \vec{b} - \vec{c} - \vec{a} = (5; -5)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 176. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC với $A(3; -1)$, $B(-4; 2)$, $C(4; 3)$. Tìm tọa độ của điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

- A. $D(-3; 6)$. B. $D(11; 0)$. C. $D(-11; -6)$. D. $D(0; -6)$.

Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Từ đó ta suy ra $\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + 4 = -4 + x_D \\ -1 + 3 = 2 + y_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 11 \\ y_D = 0 \end{cases}$. Vậy $D(11; 0)$.

Chọn đáp án **B** □

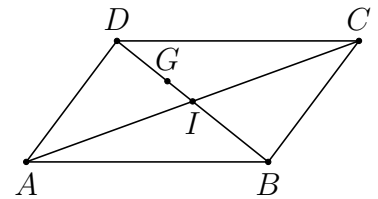
Câu 177. Trong mặt phẳng Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ có $A(2; -3)$, $B(4; 5)$ và $G\left(0; -\frac{13}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác ADC . Tọa độ đỉnh D là

- A. $D(2; 1)$. B. $D(-1; 2)$. C. $D(-2; -9)$. D. $D(2; 9)$.

Lời giải.

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB}$ mà $\overrightarrow{DB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{GB} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{GB} = (-4; -6)$. Gọi

$D(x; y)$, từ $\overrightarrow{AD} = (-4; -6) \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = -4 \\ y + 3 = -6 \end{cases} \Rightarrow D(-2; -9)$.



Chọn đáp án **C** □

Câu 178. Trong mặt phẳng Oxy , cho $A(3; 5)$, $B(1; 3)$. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là

- A. $(2; 4)$. B. $(4; 2)$. C. $(2; 5)$. D. $(5; 1)$.

Lời giải.

Áp dụng công thức trung điểm ta có

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = 2 \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = 4. \end{cases}$$

Vậy $I(2; 4)$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 179. Cho hai điểm $M(1; 5)$, $N(4; 2)$. Độ dài đoạn MN bằng

- A. 18. B. $2\sqrt{3}$. C. $3\sqrt{5}$. D. $3\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MN} = (3; -3)$. Suy ra $MN = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 180. Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm $A(-2; 1)$, $B(7; 4)$. Tìm tọa độ điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{BM}$.

- A. $M(4; 3)$. B. $M(-4; -3)$. C. $M(3; 4)$. D. $M(-4; 3)$.

Lời giải.

Gọi $M(a; b)$. Khi đó $\overrightarrow{AM} = (a + 2; b - 1)$; $\overrightarrow{BM} = (a - 7; b - 4)$.

$\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2 = -2(a - 7) \\ b - 1 = -2(b - 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$. Vậy $M(4; 3)$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 181. Trong hệ tọa độ Oxy cho hình bình hành $ABCD$, biết $A(1; 3)$, $B(-2; 0)$, $C(2; -1)$. Tìm tọa độ điểm D .

- A. $(4; -1)$. B. $(2; 4)$. C. $(5; 2)$. D. $(3; 2)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3; -3)$. Gọi $D(a; b)$ thì $\overrightarrow{DC} = (2 - a; -1 - b)$.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \begin{cases} -3 = 2 - a \\ -3 = -1 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 2 \end{cases}.$$

Vậy $D(5; 2)$

Chọn đáp án **C** □

Câu 182. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(-2; 3)$, $B(2; 5)$. Tọa độ trung điểm của đoạn BA là

- A. $(0; 4)$. B. $(-1; 2)$. C. $(0; 2)$. D. $(2; -1)$.

Lời giải.

$$\text{Gọi } M \text{ là trung điểm } BA, \text{ ta có } \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-2 + 2}{2} = 0 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3 + 5}{2} = 4. \end{cases}$$

Vậy $M(0; 4)$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 183. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(-1; 1)$, $B(-1; -1)$, $C(-2; 3)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AC}$.

- A. $(-7; 3)$. B. $(7; -5)$. C. $(7; 3)$. D. $(-3; 3)$.

Lời giải.

- Gọi $D(x; y)$. Có $\overrightarrow{BD} = (x + 1; y + 1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1; 2)$.
- $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 2 \cdot (-1) \\ y + 1 = 2 \cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 3. \end{cases}$

Vậy $D(-3; 3)$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 184. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $B(8; 1)$, $C(-5; 3)$. Tọa độ trọng tâm của tam giác OBC là

- A. $\left(1; \frac{4}{3}\right)$. B. $\left(-1; \frac{4}{3}\right)$. C. $\left(-1; -\frac{4}{3}\right)$. D. $(9; -1)$.

Lời giải.

$$\text{Gọi } G \text{ là trọng tâm } \triangle OBC, \text{ ta có } \begin{cases} x_G = \frac{x_O + x_B + x_C}{3} = \frac{0 + 8 - 5}{3} = 1 \\ y_G = \frac{y_O + y_B + y_C}{3} = \frac{0 + 1 + 3}{3} = \frac{4}{3} \end{cases}. \text{ Vậy } G\left(1; \frac{4}{3}\right).$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 185. Trên trục $(O; \vec{e})$ cho hai điểm A, B có tọa độ lần lượt là $3; -2$. Tính độ dài đại số của véc-tơ $\overrightarrow{AB}$.

A. $\overline{AB} = -5$.

B. $\overline{AB} = 5$.

C. $\overline{AB} = 1$.

D. $\overline{AB} = 2$.

Lời giải.Ta có $\overline{AB} = x_B - x_A = -2 - 3 = -5$.Chọn đáp án (A) □**Câu 186.** Trên trục tọa độ $(O; \vec{e})$, cho điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = 2\vec{e}$ và điểm N sao cho $\overline{MN} = -3$. Tọa độ của điểm N là bao nhiêu?

A. -5 .

B. -1 .

C. 5 .

D. 1 .

Lời giải.Gọi tọa độ $N(n)$. Vì $\overrightarrow{OM} = 2\vec{e}$ nên $M(2)$. Khi đó

$$\overline{MN} = -3 \Leftrightarrow n - 2 = -3 \Leftrightarrow n = -1 \Rightarrow N(-1).$$

Chọn đáp án (B) □**Câu 187.** Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $A(-2; 5), B(1; -1)$. Điểm M thỏa $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}$ có tọa độ là

A. $M(1; 0)$.

B. $M(0; -1)$.

C. $M(-1; 0)$.

D. $M(0; 1)$.

Lời giải.Ta có $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM} = -2(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}) = \frac{1}{3}(0; 3) = (0; 1).$$

Vậy $M(0; 1)$. □**Câu 188.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (3; 4)$ và $\vec{c} = (1; 4)$. Tìm giá trị của k thỏa mãn $\vec{c} = k\vec{a} - \vec{b}$.

A. $k = -4$.

B. $k = 4$.

C. $k = -2$.

D. $k = 2$.

Lời giải.

$$\vec{c} = k\vec{a} - \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} k - 3 = 1 \\ 2k - 4 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow k = 4.$$

Chọn đáp án (B) □**Câu 189.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (2; 1)$, $\vec{b} = (3; 4)$, $\vec{c} = (7; 2)$. Tìm giá trị của k, h để $\vec{c} = k\vec{a} + h\vec{b}$.

A. $k = \frac{5}{2}, h = -\frac{13}{10}$.

B. $k = \frac{23}{5}, h = -\frac{51}{10}$.

C. $k = \frac{22}{5}, h = -\frac{3}{5}$.

D. $k = \frac{17}{5}, h = -\frac{1}{5}$.

Lời giải.

$$\vec{c} = k\vec{a} + h\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k + 3h = 7 \\ k + 4h = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{22}{5} \\ h = -\frac{3}{5} \end{cases}.$$

Chọn đáp án (C) □**Câu 190.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các véc-tơ $\vec{a} = (2; -1)$, $\vec{b} = (-5; 3)$ và $\vec{c} = (-17; 10)$. Tìm các số λ, μ để $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$.

A. $\lambda = -1, \mu = 3$.

B. $\lambda = 1, \mu = -3$.

C. $\lambda = -6, \mu = 3$.

D. $\lambda = -1, \mu = -7$.

Lời giải.

$$\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda - 5\mu = -17 \\ -\lambda + 3\mu = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = 3. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 191. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba véc-tơ $\vec{a} = (2; 1)$, $\vec{b} = (3; 4)$, $\vec{c} = (7; 2)$. Tìm giá trị của k và h để $\vec{c} = k\vec{a} + h\vec{b}$.

A. $k = \frac{5}{2}$ và $h = -\frac{13}{10}$.

B. $k = \frac{23}{5}$ và $h = -\frac{51}{10}$.

C. $k = \frac{22}{5}$ và $h = -\frac{3}{5}$.

D. $k = \frac{17}{5}$ và $h = -\frac{1}{5}$.

Lời giải.

Ta có $k\vec{a} + h\vec{b} = (2k + 3h; k + 4h)$.

Từ đó ta có hệ $\begin{cases} 2k + 3h = 7 \\ k + 4h = 2 \end{cases} \Leftrightarrow k = \frac{22}{5}, h = -\frac{3}{5}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 192. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $\vec{a} = (-2; -1)$, $\vec{b} = (3; 2)$, $\vec{c} = (4; -2)$. Để véc-tơ $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$ thì giá trị của m, n là

A. $m = \frac{4}{7}, n = \frac{1}{14}$.

B. $m = -\frac{4}{7}, n = -\frac{1}{14}$.

C. $m = -\frac{4}{7}, n = \frac{1}{14}$.

D. $m = \frac{4}{7}, n = -\frac{1}{14}$.

Lời giải.

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -2 = 3m + 4n \\ -1 = 2m - 2n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{4}{7} \\ n = -\frac{1}{14} \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 193. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các véc-tơ $\vec{u} = (2; -4)$, $\vec{a} = (-1; -2)$, $\vec{b} = (1; -3)$. Biết $\vec{u} = m\vec{a} + n\vec{b}$, tính $m - n$.

A. 5.

B. -2.

C. -5.

D. 2.

Lời giải.

Ta có $\vec{u} = m\vec{a} + n\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} -m + n = 2 \\ -2m - 3n = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{2}{5} \\ n = \frac{8}{5} \end{cases}$.

Vậy $m - n = -2$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 194. Cho $\vec{a} = (2; 1)$, $\vec{b} = (-3; 4)$, $\vec{c} = (-4; 9)$. Hai số thực m, n thỏa mãn $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{c}$. Tính $m^2 + n^2$.

A. 5.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

Lời giải.

Ta có $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{c} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 3n = -4 \\ m + 4n = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 2 \end{cases}$.

Vậy $m^2 + n^2 = 1^2 + 2^2 = 5$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 195. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho bốn điểm $A(3; -2)$, $B(7; 1)$, $C(0; 1)$, $D(-8; -5)$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- A. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ là hai véc-tơ đối. B. Hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ ngược hướng.
 C. Hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng. D. Bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; 3)$, $\overrightarrow{CD} = (-8; -6) \Rightarrow \overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$.

Suy ra hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ ngược hướng.

Mà $\overrightarrow{AC} = (-3; 3)$, suy ra $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương, do đó mệnh đề "hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ ngược hướng" là mệnh đề đúng.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 196. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(-1; 5)$, $B(5; 5)$, $C(-1; 11)$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- A. Ba điểm A, B, C thẳng hàng. B. Hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng.
 C. Hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương. D. Hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (6; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (0; 6)$, suy ra $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên mệnh đề "Hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương" là mệnh đề đúng.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 197. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , mệnh đề nào trong các mệnh đề dưới đây là mệnh đề đúng?

- A. Hai véc-tơ $\vec{a} = (-5; 0)$ và $\vec{b} = (-4; 0)$ cùng phương.
 B. Véc-tơ $\vec{c} = (7; 3)$ là véc-tơ đối của $\vec{d} = (-7; 3)$.
 C. Hai véc-tơ $\vec{a} = (4; 2)$ và $\vec{b} = (8; 3)$ cùng phương.
 D. Hai véc-tơ $\vec{a} = (6; 3)$ và $\vec{b} = (2; 1)$ ngược hướng.

Lời giải.

Mệnh đề "Hai véc-tơ $\vec{a} = (-5; 0)$ và $\vec{b} = (-4; 0)$ cùng phương" là đúng vì $\vec{a} = \frac{5}{4}\vec{b}$.

Mệnh đề "Véc-tơ $\vec{c} = (7; 3)$ là véc-tơ đối của $\vec{d} = (-7; 3)$ " là sai vì hai véc-tơ này không cùng phương.

Mệnh đề "Hai véc-tơ $\vec{a} = (4; 2)$ và $\vec{b} = (8; 3)$ cùng phương" là sai vì hai véc-tơ này không cùng phương.

Mệnh đề "Hai véc-tơ $\vec{a} = (6; 3)$ và $\vec{b} = (2; 1)$ ngược hướng" là sai vì hai véc-tơ này cùng hướng.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 198. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai véc-tơ $\vec{a} = (m; 0)$ và $\vec{b} = (3; 3m - 1)$. Tìm $m \neq 0$ để hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương.

- A. $m = 1$. B. $m = \frac{4}{3}$. C. $m = \frac{1}{2}$. D. $m = \frac{1}{3}$.

Lời giải.

Chú ý: Hai véc-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2)$ cùng phương khi và chỉ khi $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$.

Hai véc-tơ đã cho cùng phương khi và chỉ khi $m(3m - 1) - 0 \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{1}{3} \end{cases}$. Vì $m \neq 0$ nên ta được

$$m = \frac{1}{3}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 199. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho véc-tơ $\vec{a} = (-5; 0)$, $\vec{b} = (4; m)$. Tìm m sao cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

- A. $m = -5$. B. $m = 4$. C. $m = 0$. D. $m = -1$.

Lời giải.

Hai véc-tơ đã cho cùng phương khi và chỉ khi $-5 \cdot m - 0 \cdot 4 = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 200. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(3; -2)$, $B(-5; 4)$ và $C\left(\frac{1}{3}; 0\right)$. Tìm giá trị của k thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

- A. $k = 3$. B. $k = -3$. C. $k = 2$. D. $k = -2$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-8; 6)$, $\overrightarrow{AC} = \left(-\frac{8}{3}; 2\right)$. Ta có $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$. Vậy $k = 3$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 201. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(1; -2)$, $B(0; 3)$, $C(-3; 4)$, $D(-1; 8)$. Ba điểm nào trong bốn điểm đã cho là thẳng hàng?

- A. A, B, C . B. B, C, D . C. A, B, D . D. A, C, D .

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; 5)$, $\overrightarrow{AC} = (-4; 6)$, $\overrightarrow{AD} = (-2; 10)$. Ta thấy $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$. Vậy 3 điểm A, B, D thẳng hàng.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 202. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $M(1; -2)$, $N(3; 0)$. Điểm nào sau đây cùng với M, N lập thành ba điểm thẳng hàng?

- A. $P(2; -2)$. B. $Q(1; 3)$. C. $K(2; -1)$. D. $L(0; 1)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MN} = (2; 2)$.

- Với điểm $P(2; -2)$, ta có $\overrightarrow{MP} = (1; 0)$ không cùng phương với $\overrightarrow{MN} = (2; 2)$ nên M, N, P không thẳng hàng.
- Với điểm $Q(1; 3)$, ta có $\overrightarrow{MQ} = (0; 5)$ không cùng phương với $\overrightarrow{MN} = (2; 2)$ nên M, N, Q không thẳng hàng.
- Với điểm $K(2; -1)$, ta có $\overrightarrow{MK} = (1; 1)$ cùng phương với $\overrightarrow{MN} = (2; 2)$ nên M, N, K thẳng hàng.
- Với điểm $L(0; 1)$, ta có $\overrightarrow{ML} = (-1; 3)$ không cùng phương với $\overrightarrow{MN} = (2; 2)$ nên M, N, L không thẳng hàng.

Vậy điểm $K(2; -1)$ cùng với M, N lập thành ba điểm thẳng hàng.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 203. Cho ba điểm $A(-1; 5)$, $B(5; 5)$, $C(-1; 11)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Điểm A nằm giữa B và C . B. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.
C. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương. D. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (6; 0)$ và $\overrightarrow{AC} = (0; 6)$. Vì $\overrightarrow{AB} = 6\vec{i}$ và $\overrightarrow{AC} = 6\vec{j}$ nên hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương.

Chọn đáp án **C** □

Câu 204. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho các điểm $A(1; -2)$, $B(0; 3)$, $C(-3; 4)$, $D(-1; 8)$. Hỏi ba trong bốn điểm đã cho nào thẳng hàng?

- A. A, B, C . B. B, C, D . C. A, B, D . D. A, C, D .

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-1; 5) \\ \overrightarrow{AD} = (-2; 10) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$. Do đó ba điểm A, B, D thẳng hàng.

Chọn đáp án **C** □

Câu 205. Trong mặt phẳng Oxy cho ba điểm $A(1; -2)$, $B(-3; 1)$, $C(2; 2)$. Tìm khẳng định đúng.

- A. Ba điểm A, B, C tạo thành một tam giác. B. $\overrightarrow{AC}$ cùng phương $\overrightarrow{BC}$.
C. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$. D. B là trung điểm AC .

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AC} = (1; 4)$, $\overrightarrow{AB} = (-4; 3)$ mà $\frac{1}{-4} \neq \frac{4}{3}$ nên A, B, C là một tam giác.

Chọn đáp án **A** □

Câu 206. Cho 4 điểm $M(1; -2)$, $N(0; 3)$, $P(-3; 4)$, $Q(-1; 8)$. Ba điểm nào trong 4 điểm đã cho là thẳng hàng?

- A. M, P, Q . B. M, N, P . C. N, P, Q . D. M, N, Q .

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MN} = (-1; 5)$, $\overrightarrow{MP} = (-4; 6)$, $\overrightarrow{MQ} = (-2; 10)$, $\overrightarrow{NP} = (-3; 1)$, $\overrightarrow{NQ} = (-1; 5)$.

Suy ra $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NQ}$ hay M, N, Q thẳng hàng.

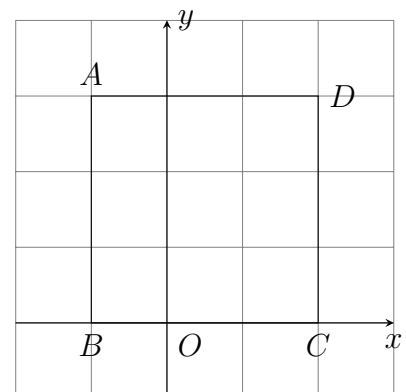
Chọn đáp án **D** □

Câu 207. Trong hệ trục tọa độ $(O; \vec{i}, \vec{j})$, cho hình vuông $ABCD$ có $A(-1; 3)$. Biết điểm B thuộc trục $(O; \vec{i})$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng với $\vec{i}$. Tìm tọa độ véc-tơ $\overrightarrow{AC}$.

- A. $\overrightarrow{AC} = (3; -3)$. B. $\overrightarrow{AC} = (1; -1)$. C. $\overrightarrow{AC} = (4; -3)$. D. $\overrightarrow{AC} = (-3; 3)$.

Lời giải.

B thuộc trục $(O; \vec{i})$ hay B thuộc trục hoành. $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng với $\vec{i}$ nên C cũng thuộc trục hoành. Mà $AB \perp BC$, suy ra B là hình chiếu của A trên trục hoành, ta được $B(-1; 0)$. Ta có $AB = 3$, $\overrightarrow{BC}$ có độ dài bằng AB và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng với $\vec{i}$ nên suy ra $C(2; 0)$. Từ đó ta tính được $\overrightarrow{AC} = (3; -3)$.



Chọn đáp án **A** □

Câu 208. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ có $A(5; -11)$, $C(17; 15)$, điểm $B(x_B; y_B)$ thuộc trục hoành và điểm $D(x_D; y_D)$ thuộc trục tung. Vậy $x_B + y_D$ bằng

A. 22.

B. 24.

C. 26.

D. 28.

Lời giải.

Ta có $B \in Ox \Rightarrow y_B = 0, D \in Oy \Rightarrow x_D = 0$. Khi đó $\overrightarrow{AB} = (x_B - 5; 11)$, $\overrightarrow{DC} = (17; 15 - y_D)$.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - 5 = 17 \\ 11 = 15 - y_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 22 \\ y_D = 4 \end{cases} \Rightarrow x_B + y_D = 26$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 209. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCF$ có $A(-4; 1)$, $B(2; 4)$, $C(2; -2)$. Gọi M là điểm nằm trên đoạn FB sao cho $2FM = 3MB$. Tính tọa độ véc-tơ $\overrightarrow{MB}$.

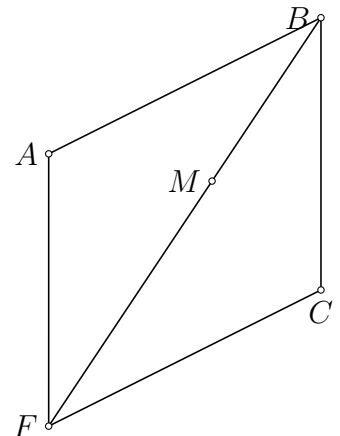
A. $\overrightarrow{MB} = \left(\frac{12}{5}; \frac{18}{5}\right)$.B. $\overrightarrow{MB} = \left(-\frac{12}{5}; -\frac{18}{5}\right)$.C. $\overrightarrow{MB} = (2; -2)$.D. $\overrightarrow{MB} = (2; 2)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BA} = (-6; -3)$, $\overrightarrow{BC} = (0; -6)$.

Từ giả thiết có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MB} &= -\frac{2}{5}\overrightarrow{BF} \\ &= -\frac{2}{5}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) \\ &= -\frac{2}{5}(-6 + 0; -3 - 6) \\ &= \left(\frac{12}{5}; \frac{18}{5}\right). \end{aligned}$$



Chọn đáp án **A**

□

Câu 210. Trong mặt phẳng cho hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $AD = 5$, $BH = \sqrt{3}$ với H là hình chiếu vuông góc của B trên AD . Chọn hệ trục tọa độ $(A; \vec{i}, \vec{j})$ với $\vec{i} = (1; 0)$, $\vec{j} = (0; 1)$ sao cho các véc-tơ $\vec{i}$ và $\overrightarrow{AD}$ cùng hướng, $y_B > 0$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\overrightarrow{AB} = (1; \sqrt{3})$.B. $\overrightarrow{AC} = (6; \sqrt{3})$.C. $\overrightarrow{CD} = (\sqrt{3}; 1)$.D. $\overrightarrow{BC} = (5; 0)$.

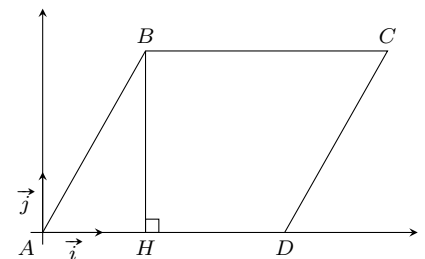
Lời giải.

Ta có $BH = \sqrt{3}$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$ nên $AB = 2$, $AH = 1$.

Suy ra $HD = 4$.

Khi đó $A(0; 0)$, $B(1; \sqrt{3})$, $D(5; 0)$, $C(6; \sqrt{3})$.

Do đó $\overrightarrow{AB} = (1; \sqrt{3})$, $\overrightarrow{AC} = (6; \sqrt{3})$, $\overrightarrow{CD} = (-1; -\sqrt{3})$, $\overrightarrow{BC} = (5; 0)$.



Chọn đáp án **C**

□

Câu 211. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$ thỏa mãn $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{x}$. Biết rằng hoành độ của véc-tơ $\vec{x}$ bằng 3 và trọng tâm của tam giác ABC là gốc tọa độ. Tìm hoành độ x_0 của trọng tâm tam giác $A'B'C'$.

A. $x_0 = 3$.

B. $x_0 = -3$.

C. $x_0 = 1$.

D. $x_0 = -1$.

Lời giải.

Gọi G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Ta có $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{OG'}$. Do đó $3\overrightarrow{OG'} = \vec{x}$. Từ đó suy ra $x_0 = 1$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 212. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$ thỏa mãn $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{x}$. Biết rằng tung độ của véc-tơ $\vec{x}$ bằng -3 và trọng tâm của tam giác ABC là gốc tọa độ. Tìm tung độ y_0 của trọng tâm tam giác $A'B'C'$.

A. $y_0 = 3$.

B. $y_0 = -3$.

C. $y_0 = 1$.

D. $y_0 = -1$.

Lời giải.

Gọi G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Ta có $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{OG'}$. Do đó $3\overrightarrow{OG'} = \vec{x}$. Từ đó suy ra $y_0 = -1$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 213. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1; -5)$ và $B(-3; 1)$. Tìm tọa độ điểm I sao cho với điểm M bất kì ta luôn có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

A. $I(1; 2)$.

B. $I(-1; -2)$.

C. $I(-2; -4)$.

D. $I(2; 4)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$. Do đó $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$, suy ra I là trung điểm của đoạn thẳng AB . Vậy $I(-1; -2)$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 214. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC với $A(1; -2)$, $B(0; -1)$, $C(3; 0)$. Tìm tọa độ điểm G sao cho với điểm M bất kì ta luôn có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

A. $G\left(\frac{4}{3}; -1\right)$.

B. $G\left(\frac{4}{3}; -1\right)$.

C. $G\left(\frac{4}{3}; -1\right)$.

D. $G\left(\frac{4}{3}; -1\right)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$. Do đó $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, suy ra G là trọng tâm của tam giác ABC . Vậy $G\left(\frac{4}{3}; -1\right)$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 215. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $M(1 + 2t; 1 + 3t)$ với $t \in \mathbb{R}$. Tìm tọa độ của điểm M khi $x_M^2 + y_M^2$ nhỏ nhất.

A. $M\left(-\frac{5}{13}; -\frac{5}{13}\right)$.

B. $M\left(\frac{1}{13}; \frac{2}{13}\right)$.

C. $M\left(\frac{3}{13}; -\frac{2}{13}\right)$.

D. $M\left(-\frac{3}{13}; \frac{5}{13}\right)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } x_M^2 + y_M^2 = (1 + 2t)^2 + (1 + 3t)^2 = 13t^2 + 10t + 2 = 13\left(t + \frac{5}{13}\right)^2 + \frac{1}{13} \geq \frac{1}{13}.$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow t = -\frac{5}{13}. \text{ Với } t = -\frac{5}{13} \Rightarrow M\left(\frac{3}{13}; -\frac{2}{13}\right).$$

Vậy với $M\left(\frac{3}{13}; -\frac{2}{13}\right)$ thì $x_M^2 + y_M^2$ nhỏ nhất.

Chọn đáp án **C** □

Câu 216. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $OABC$ với $A(4; 6)$. Biết điểm $G(4; 2)$ là trọng tâm tam giác OAC . Giả sử đỉnh B có tọa độ là $B(m, n)$. Tính tổng $S = m + n$.

A. $S = 16$.

B. $S = 18$.

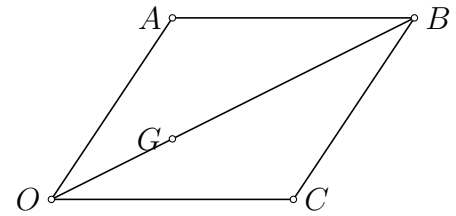
C. $S = 20$.

D. $S = 14$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $\overrightarrow{OB} = 3\overrightarrow{OG}$, suy ra $B(12; 6)$.

Vậy $S = 12 + 6 = 18$.



Chọn đáp án **B**

□

Câu 217. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác đều OAB có cạnh bằng 2, AB song song với trục hoành, điểm A có hoành độ và tung độ dương. Tìm tọa độ đỉnh B .

A. $B(-1; \sqrt{3})$.

B. $B(-1; -\sqrt{3})$.

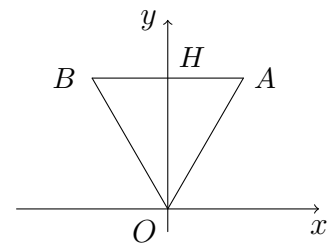
C. $B(1; \sqrt{3})$.

D. $B(1; -\sqrt{3})$.

Lời giải.

Gọi H là giao điểm của AB với trục tung. Do AB song song với Ox nên OH vuông góc với AB , hay H chính là trung điểm của AB .

Ta tính được $OH = \sqrt{3}$, $HB = 1$. Suy ra $B(-1; \sqrt{3})$.



Chọn đáp án **A**

□

Câu 218. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AD = 4$, chiều cao ứng với cạnh AD bằng 3, góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Chọn hệ trục tọa độ $(A; \vec{i}, \vec{j})$ với $\vec{i} = (1; 0)$ và $\vec{j} = (0; 1)$ sao cho $\vec{i}$ và $\overrightarrow{AD}$ cùng hướng, $y_B > 0$. Tìm tọa độ đỉnh C của hình bình hành đã cho.

A. $C(3 + \sqrt{3}; 4)$.

B. $C(4; 3 + \sqrt{3})$.

C. $C(\sqrt{3}; 3)$.

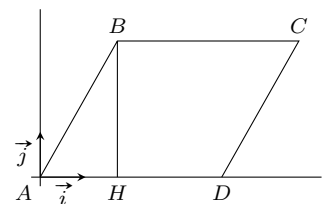
D. $C(4 + \sqrt{3}; 3)$.

Lời giải.

Bài toán được mô tả như hình vẽ.

Từ giả thiết, ta suy ra $BH = 3$, $AB = 2\sqrt{3}$, $AH = \sqrt{3}$. Do đó, $B(\sqrt{3}; 3)$.

Khi đó, ta tính được $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = (\sqrt{3}; 3) + (4; 0) = (4 + \sqrt{3}; 3)$. Vậy, tọa độ của đỉnh C là $(4 + \sqrt{3}; 3)$.



Chọn đáp án **D**

□

Câu 219. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có trực tâm $H(1; 0)$ và trọng tâm $G(3; 2)$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

A. $I(-2; -1)$.

B. $I(-4; -3)$.

C. $I(2; 1)$.

D. $I(4; 3)$.

Lời giải.

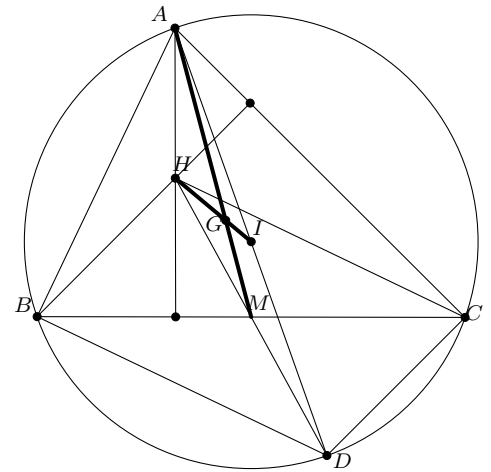
Đây là bài toán về **đường thẳng Euler**:

Trong $\triangle ABC$, trực tâm H , trọng tâm G và tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác luôn nằm trên một đường thẳng (đường thẳng Euler).

Thật vậy, kẻ đương kính AD , khi đó ta có $BHCD$ là hình bình hành, nên trung điểm M của BC cũng là trung điểm của DH . Do đó, AM vừa là trung tuyến của $\triangle ABC$, vừa là trung tuyến của $\triangle AHD$.

Lại có G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên $\frac{AG}{GM} = 2$, suy ra G cũng là trọng tâm của $\triangle AHD$.

Mà HI là trung tuyến của $\triangle AHD$ nên H, I, G thẳng hàng và $\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{GI}$, từ đó suy ra $I(4; 3)$.



Chọn đáp án **D**

Câu 220. Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy , cho hình vuông $ABCD$ có tâm là điểm I . Gọi $G(1; -2)$ và $K(3; 1)$ lần lượt là trọng tâm các tam giác ACD và ABI . Biết $A(a; b)$ với $b > 0$. Khi đó $a^2 + b^2$ bằng

- A. 37. B. 5. C. 9. D. 3.

Lời giải.

Gọi M , N và P lần lượt là các trung điểm của AB , CD và BI . Ta có

$$\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AI}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AI}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$$

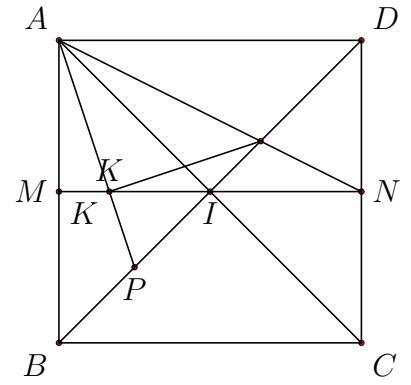
$$\overrightarrow{KG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$

$$\text{Suy ra: } \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{KG} = \frac{1}{9}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} - \frac{1}{9}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \text{ vì } AB = AD \text{ và } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$$

Đồng thời

$$AK^2 = \frac{5}{18}AB^2 = KG^2 = \frac{5}{18}AB^2. \text{ Do đó tam giác } AKG \text{ vuông cân}$$

tại K nên:



$$\begin{aligned} & \begin{cases} \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{KG} = 0 \\ AK^2 = GK^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2a + 3b = 9 \\ (3-a)^2 + (1-b)^2 = 13 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} b = \frac{9-2a}{3} \\ 13a^2 - 78a = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} b = \frac{9-2a}{3} \\ \begin{cases} a = 0 \\ a = 6 \end{cases} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \begin{cases} a = 0 \\ b = 3 \text{ (thỏa)} \end{cases} \\ \begin{cases} a = 6 \\ b = -1 \text{ (loại)} \end{cases} \end{cases} \\ \Rightarrow & a^2 + b^2 = 9. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 221. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(1; 0)$, $B(0; 5)$ và $C(-3; -5)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc trục Oy sao cho $|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(0; 5)$.

B. $M(0; 6)$.

C. $M(0; -6)$.

D. $M(0; -5)$.

Lời giải.

Gọi $I(a; b)$ là điểm thỏa mãn: $3\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$$\text{Ta có: } 3\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{9}{5} \\ b = -6 \end{cases} \Rightarrow I\left(-\frac{9}{5}; -6\right)$$

$$\text{Khi đó } |3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |3\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} - 5\overrightarrow{IM}| = |\vec{0} - 5\overrightarrow{IM}| = 5IM$$

Do đó: $|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất khi IM ngắn nhất. Suy ra M là hình chiếu vuông góc của

$I\left(-\frac{9}{5}; -6\right)$ trên $Oy \Rightarrow M(0; -6)$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 222. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai véc-tơ $\vec{u} = (-2; m+1)$ và $\vec{v} = (m-2; 1)$ (với m là tham số). Tìm giá trị của m để hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

- A. $\begin{cases} m = -1 \\ m = 0. \end{cases}$ B. $m = 1.$ C. $m = -1.$ D. $\begin{cases} m = 1 \\ m = 0. \end{cases}$

Lời giải.

Ta có $\vec{u} = (-2; m+1)$ và $\vec{v} = (m-2; 1)$ cùng phương khi và chỉ khi

$$-2 \cdot 1 = (m+1) \cdot (m-2) \Leftrightarrow m^2 - m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 223. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai véc-tơ $\vec{a} = (2; 1)$ và $\vec{b} = (0; -2)$. Tìm giá trị của tham số m để hai véc-tơ $\vec{u} = 4m\vec{a} - (2m-1)\vec{b}$ và $\vec{v} = 4\vec{a} - m\vec{b}$ cùng phương.

- A. $m = -1.$ B. $m = 1.$ C. $m = 0.$ D. $m = 2.$

Lời giải.

Có $\vec{u} = (8m; 8m-2)$, $\vec{v} = (8; 4+2m)$. $\vec{u}, \vec{v}$ cùng phương khi và chỉ khi

$$8m \cdot (4+2m) = (8m-2) \cdot 8 \Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Chọn đáp án **B** □

Câu 224. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các véc-tơ $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (-3; 1)$ và $\vec{c} = (6; 5)$. Tìm giá trị của tham số m để véc-tơ $\vec{d} = m\vec{a} + \vec{b}$ cùng phương với véc-tơ $\vec{c}$.

- A. $m = -3.$ B. $m = -2.$ C. $m = -1.$ D. $m = 0.$

Lời giải.

Ta có $\vec{d} = (m-3; 2m+1)$. Hai véc-tơ $\vec{d}, \vec{c}$ cùng phương khi và chỉ khi

$$(m-3) \cdot 5 = (2m+1) \cdot 6 \Leftrightarrow m = -3.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 225. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (m; m^2)$ và $\vec{b} = (m^2-5; 4)$ với m là tham số nguyên. Véc-tơ $\vec{c} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$ cùng phương với véc-tơ đơn vị của trục Oy khi m có giá trị bằng bao nhiêu?

- A. $-3.$ B. $3.$ C. $-2.$ D. $2.$

Lời giải.

Có $\vec{c} = (4m-3m^2+15; 4m^2-12)$, véc-tơ đơn vị trên trục Oy là $\vec{j} = (0; 1)$. Hai véc-tơ $\vec{c}, \vec{j}$ cùng phương khi và chỉ khi

$$(4m-3m^2+15) \cdot 1 = (4m^2-12) \cdot 0 \Leftrightarrow 3m^2-4m-15=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=3 \\ m=-\frac{5}{3}. \end{cases}$$

Do m nguyên nên $m = 3$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 226. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (m; 2)$, $\vec{b} = (1 - m; m + 4)$ (với m là tham số). Tìm m sao cho $2\vec{a} - 3\vec{b}$ cùng phương với $\vec{c} = (4; -2)$.

- A. $m = -19$. B. $m = 19$. C. $m = -13$. D. $m = 13$.

Lời giải.

Ta có $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} = (5m - 3; -3m - 8)$. Hai véc-tơ $\vec{d}$, $\vec{c}$ cùng phương khi và chỉ khi

$$(5m - 3) \cdot (-2) = (-3m - 8) \cdot 4 \Leftrightarrow m = -19.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 227. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(5; 6)$, $B(m; -2)$ và $C(3; m)$ (với m là tham số). Biết rằng có đúng hai giá trị của m sao cho ba điểm A , B , C thẳng hàng, tổng của chúng là

- A. -11 . B. 11 . C. 14 . D. -14 .

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (m - 5; -8)$, $\overrightarrow{AC} = (-2; m - 6)$. Ba điểm A, B, C thẳng hàng nên $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương $\Leftrightarrow (m - 5) \cdot (m - 6) = (-8) \cdot (-2) \Leftrightarrow m^2 - 11m + 14 = 0$.

Vậy $m_1 + m_2 = 11$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 228. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(1; 2)$, $B(-1; 4)$, $C(2; 2)$, $D(-3; 2)$. Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng AB và CD .

- A. $(1; 2)$. B. $(5; -5)$. C. $(3; -2)$. D. $(0; -1)$.

Lời giải.

Gọi $M(x; y)$ là giao điểm của hai đường thẳng AB và CD . Khi đó

$$\begin{cases} A, B, M \text{ thẳng hàng} \\ C, D, M \text{ thẳng hàng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA} = (1 - x; 2 - y) \text{ và } \overrightarrow{AB} = (-2; 2) \text{ cùng phương} \\ \overrightarrow{MC} = (2 - x; 2 - y) \text{ và } \overrightarrow{CD} = (-5; 0) \text{ cùng phương} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(1 - x) = -2(2 - y) \\ 2 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 229. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(1; 1)$, $B(2; 3)$ và $C(m; 2n + 1)$, trong đó m và n là các tham số thực. Biết rằng ba điểm A , B và C thẳng hàng, khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $m - n = 2$. B. $m - n = -2$. C. $m - n = 1$. D. $m - n = -1$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 2)$, $\overrightarrow{AC} = (m - 1; 2n)$.

Vì A, B và C thẳng hàng nên hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương, suy ra $\frac{m - 1}{1} = \frac{2n}{2} \Leftrightarrow m - n = 1$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 230. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(-24; -5)$, $B(60; 30)$. Gọi $M(x_1; y_1)$ và $N(x_2; y_2)$ lần lượt là hai điểm nằm trên trục Ox và Oy sao cho bốn điểm A , B , M và N thẳng hàng. Tính tổng $S = x_1 + x_2 + y_1 + y_2$.

- A. $S = -5$. B. $S = -7$. C. $S = -3$. D. $S = 4$.

Lời giải.

Vì $M(x_1; y_1) \in Ox$ và $N(x_2; y_2) \in Oy$ nên $M(x_1; 0)$ và $N(0; y_2)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (84; 35)$, $\overrightarrow{AM} = (x_1 + 24; 5)$, $\overrightarrow{AN} = (24; y_2 + 5)$.

Từ điều kiện thẳng hàng ta được $x_1 = -12$, $y_2 = 5$.

Vậy $S = -12 + 0 + 0 + 5 = -7$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 231. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC . Biết $A(1; 5)$, $B(-2; -2)$, điểm C thuộc trục hoành và trọng tâm G của tam giác nằm trên đường thẳng OB , tìm tọa độ đỉnh C .

- A. $C(0; -4)$. B. $C(4; 0)$. C. $C(-4; 0)$. D. $C(0; 4)$.

Lời giải.

Tọa độ C có dạng $C(c; 0)$. Khi đó $G\left(\frac{c-1}{3}; 1\right)$.

Ta có $\overrightarrow{OB} = (-2; -2)$, $\overrightarrow{OG} = \left(\frac{c-1}{3}; 1\right)$.

Điều kiện ba điểm B, O, G thẳng hàng ta được $c = 4$. Vậy $C(4; 0)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 232. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(3; 1)$, $B(-1; 3)$. Tìm tọa độ điểm M nằm trên Ox sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất.

- A. $M(1; 0)$. B. $M(2; 0)$. C. $M(3; 0)$. D. $M(4; 0)$.

Lời giải.

Vì tung độ của A, B cùng dấu nên A, B nằm cùng phía đối với trục Ox . Gọi B' đối xứng với B qua trục Ox . Dễ thấy $B'(-1; -3)$. Khi đó $MA + MB$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MA + MB'$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow A, B', M$ thẳng hàng.

Gọi $M(t; 0)$. Ta tính được $\overrightarrow{AB'} = (-4; -4)$, $\overrightarrow{AM} = (t-3; -1)$. Do A, B', M thẳng hàng nên $t = 2$. Vậy $M(2; 0)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 233. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(-3; 1)$, $B(-5; 5)$. Tìm tọa độ điểm M trên trục Oy sao cho $|MA - MB|$ lớn nhất.

- A. $M(0; -3)$. B. $M(0; 5)$. C. $M(0; 3)$. D. $M(0; -5)$.

Lời giải.

Ta có A, B nằm cùng phía đối với Oy và $|MA - MB| \leq AB$. Do đó $|MA - MB|$ lớn nhất $\Leftrightarrow |MA - MB| = AB \Leftrightarrow A, B, M$ thẳng hàng.

Gọi $M(0; t)$. Ta tính được $\overrightarrow{AB} = (-2; 4)$, $\overrightarrow{AM} = (3; t-1)$. Do A, B, M thẳng hàng nên $\frac{3}{-2} = \frac{t-1}{4} \Leftrightarrow t = -5$. Vậy $M(0; -5)$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 234. Trên trục tọa độ $(O, \vec{e})$ cho ba điểm $A(1)$, $B(-4)$, $C(8)$. Tìm điểm M sao cho $\overline{AM} + 2\overline{BM} = 4\overline{CM}$.

- A. $M(39)$. B. $M(29)$. C. $M(-15)$. D. $M\left(-\frac{29}{7}\right)$.

Lời giải.

Giả sử tọa độ của M là x . Từ đẳng thức $\overline{AM} + 2\overline{BM} = 4\overline{CM}$ ta có:

$$(x-1) + 2(x+4) = 4(x-8) \Leftrightarrow x = 39.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 235. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{u} = (3; -2)$ và hai điểm $A(0; -3)$, $B(1; 5)$. Biết $2\vec{x} + 2\vec{u} - \vec{AB} = \vec{0}$. Tính tọa độ véc-tơ $\vec{x}$.

- A. $\left(-\frac{5}{2}; 6\right)$. B. $\left(\frac{5}{2}; -6\right)$. C. $(-5; 12)$. D. $(5; -12)$.

Lời giải.

Ta có $2\vec{x} + 2\vec{u} - \vec{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} = \frac{1}{2}\vec{AB} - \vec{u}$.

$\vec{AB} = (1; 8)$ suy ra $\vec{x} = \left(-\frac{5}{2}; 6\right)$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 236. Cho $\vec{a} = (3; 5)$, $\vec{b} = (2; -4)$, $\vec{c} = (1; 1)$. Tìm 2 số m, n sao cho $m\vec{a} + n\vec{b} = 5\vec{c}$.

- A. $m = \frac{5}{11}; n = \frac{15}{11}$. B. $m = \frac{15}{11}; n = \frac{5}{11}$. C. $m = \frac{8}{11}; n = \frac{21}{11}$. D. $m = \frac{11}{5}; n = \frac{15}{11}$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $m\vec{a} + n\vec{b} = 5\vec{c} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m + 2n = 5 \\ 5m - 4n = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{15}{11} \\ n = \frac{5}{11} \end{cases}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 237. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (4; -m)$, $\vec{b} = (2m + 6; 1)$. Tính tổng của tất cả các giá trị của m để $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b}$.

- A. -1 . B. 1 . C. 0 . D. -3 .

Lời giải.

Hai véc-tơ đã cho cùng phương khi và chỉ khi $4 \cdot 1 + m(2m + 6) = 0 \Leftrightarrow 2m^2 + 6m + 4 = 0$. Phương trình này có 2 nghiệm phân biệt m_1, m_2 và theo hệ thức Vi-ét, $m_1 + m_2 = -3$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 238. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (2; 3)$, $\vec{c} = (-6; -10)$. Hãy chọn khẳng định đúng.

- A. $\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{c}$ cùng hướng. B. $\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{a} - \vec{b}$ cùng phương.
C. $\vec{a} - \vec{b}$ và $\vec{c}$ cùng hướng. D. $\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{c}$ ngược hướng.

Lời giải.

Ta có $\vec{a} + \vec{b} = (3; 5)$. Suy ra $-2(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c}$. Vậy $\vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{c}$ ngược hướng.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 239. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(2; 3)$, $B(3; 4)$, $C(m + 1; -2)$. Với giá trị nào của m thì ba điểm A, B, C thẳng hàng?

- A. 1 . B. 3 . C. -2 . D. -4 .

Lời giải.

Ta có $\vec{AB} = (1; 1)$, $\vec{AC} = (m - 1; -5)$. Ba điểm A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $-5 \cdot 1 - 1(m - 1) = 0 \Leftrightarrow m = -4$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 240. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(1; 1)$, $B(-2; -2)$, $C(7; 7)$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $G(2; -2)$ là trọng tâm tam giác ABC .
- B. Điểm B nằm ở giữa hai điểm A và C .
- C. Điểm A nằm ở giữa hai điểm B và C .
- D. $D(10; 10)$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCD$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BA}(3; 3)$, $\overrightarrow{BC}(9; 9) \Rightarrow \overrightarrow{BA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Do đó ba điểm A , B , C thẳng hàng và điểm A nằm ở giữa hai điểm B và C .

Chọn đáp án **C**

□

Câu 241. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(-2; -2)$, $B(3; 3)$, $C(5; 5)$ và các mệnh đề sau:

- a) Điểm $G(2; 2)$ là trọng tâm của tam giác ABC .
- b) Điểm B ở giữa hai điểm A và C .
- c) Điểm A ở giữa hai điểm B và C .
- d) Hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

Trong các mệnh đề trên, có tất cả bao nhiêu mệnh đề đúng?

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 4.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (5; 5)$; $\overrightarrow{AC} = (7; 7) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AC}$. Do đó ba điểm A , B , C thẳng hàng; hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng và điểm B nằm ở giữa hai điểm A và C . Suy ra chỉ có 2 mệnh đề đúng.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 242. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(-12; -8)$, $B(20; 8)$, $C(50; 24)$ và $D(100; 48)$. Biết rằng trong 4 điểm trên có 3 điểm thẳng hàng, hỏi đó là 3 điểm nào?

- A. A , B và C .
- B. B , C và D .
- C. A , B và D .
- D. A , C và D .

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (32; 16)$, $\overrightarrow{AC} = (62; 32)$, $\overrightarrow{AD} = (112; 56)$, $\overrightarrow{BC} = (30; 16)$, $\overrightarrow{BD} = (80; 40)$.

Ta thấy:

- $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên A , B , C không thẳng hàng.
- $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$ cùng phương nên A , B , D thẳng hàng.
- $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$ không cùng phương nên A , C , D không thẳng hàng.
- $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{BD}$ không cùng phương nên B , C , D không thẳng hàng.

Vậy A , B , D thẳng hàng.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 243. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(-2; 6)$, $B(-8; -3)$, $C(12; 13)$ và $D(8; 5)$. Trong các đường thẳng đi qua 2 điểm trong các điểm đã cho, có 2 đường thẳng song song với nhau, đó là 2 đường thẳng nào?

- A. AB và CD .
- B. AD và BC .
- C. AC và BD .
- D. AB và OC .

Lời giải.

• Ta có $\overrightarrow{AB} = (-6; -9)$, $\overrightarrow{CD} = (-4; -8)$ không cùng phương nên AB và CD không song song với

nhau.

• Ta có $\overrightarrow{AD} = (10; -1)$, $\overrightarrow{BC} = (20; 16)$ không cùng phương nên AD và BC không song song với nhau.

• Ta có $\overrightarrow{AC} = (14; 7)$, $\overrightarrow{BD} = (16; 8)$ cùng phương (1)

Và có $\overrightarrow{AB} = (-6; -9)$, $\overrightarrow{AC} = (14; 7)$ không cùng phương nên A, B, C không thẳng hàng (2)

Từ (1) và (2) suy ra AC và BD song song với nhau.

• Ta có $\overrightarrow{AB} = (-6; -9)$, $\overrightarrow{OC} = (12; 13)$ không cùng phương nên AB và OC không song song với nhau.

Vậy AC và BD song song với nhau.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 244. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(3; -2)$, $B(7; 1)$, $C(0; 1)$, $D(-8; -5)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ đối nhau.

B. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng phương nhưng ngược hướng.

C. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng phương và cùng hướng.

D. A, B, C, D thẳng hàng.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; 3)$, $\overrightarrow{CD} = (-8; -6)$ suy ra $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{CD}$. Vậy $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng phương nhưng ngược hướng.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 245. Trong mặt phẳng Oxy cho $A(-2; 4)$, $B(3; 5)$, $C(0; m)$, $D\left(\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right)$. Tìm tất cả các giá trị của m để 4 điểm A, B, C, D thẳng hàng.

A. $m = 4$. B. $m = -\frac{22}{5}$. C. $m = \frac{22}{5}$. D. $m = -4$.

Lời giải.

Nhận thấy D chính là trung điểm của AB , nên ta chỉ cần tìm m để A, B, C thẳng hàng, tức 2 véc-tơ $\overrightarrow{AB} = (5; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (2; m - 4)$ cùng phương, suy ra $\frac{2}{5} = \frac{m - 4}{1} \Leftrightarrow m = \frac{22}{5}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 246. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho M thuộc trục Ox và $A(4; 1)$, $B(1; 3)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = MA + MB$.

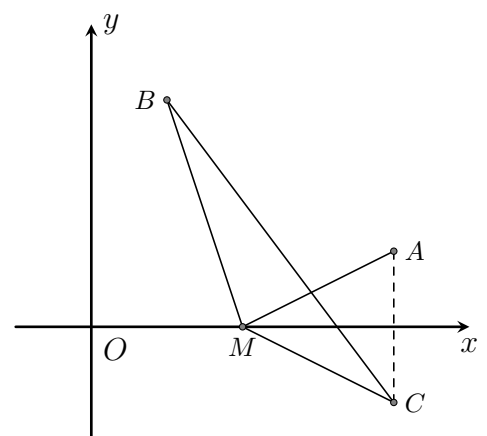
A. 6. B. 5. C. 4. D. $\sqrt{13}$.

Lời giải.

Ta có $A(4; 1)$, $B(1; 3)$ nằm về cùng một phía đối với trục Ox .

Gọi C đối xứng với A qua trục Ox suy ra $C(4; -1)$.

Với mọi điểm M thuộc trục Ox ta có $T = MA + MB = MC + MB \geq BC = 5$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 247. Trong mặt phẳng Oxy , cho $A(m-1; 2)$, $B(2; 5-2m)$ và $C(m-3; 4)$. Tìm giá trị m để A, B, C thẳng hàng.

- A. $m = 3$. B. $m = 2$. C. $m = -2$. D. $m = 1$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (3-m; 3-2m)$, $\overrightarrow{AC} = (-2; 2) \neq \vec{0}$.

Từ đó A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 3-m = -3+2m \Leftrightarrow m = 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 248. Trong mặt phẳng Oxy , cho $A(2; -3)$, $B(3; 4)$. Tọa độ điểm M nằm trên trục hoành sao cho A, B, M thẳng hàng là

- A. $M(1; 0)$. B. $M(4; 0)$. C. $M\left(-\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right)$. D. $M\left(\frac{17}{7}; 0\right)$.

Lời giải.

Gọi $M(x; 0) \in Ox$.

Ta có $\overrightarrow{AM} = (x-2; 3)$ và $\overrightarrow{AB} = (1; 7)$.

Khi đó A, B, M thẳng hàng $\Leftrightarrow \frac{x-2}{1} = \frac{3}{7} \Leftrightarrow x = \frac{17}{7} \Rightarrow M\left(\frac{17}{7}; 0\right)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 249. Tính độ dài véc-tơ $\vec{a} = (3; 4)$

- A. $|\vec{a}| = 3$. B. $|\vec{a}| = 5$. C. $|\vec{a}| = 4$. D. $|\vec{a}| = 7$.

Lời giải.

$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 250. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(4; -3)$ và $B(-2; 5)$. Độ dài đoạn thẳng AB là

- A. $2\sqrt{5}$. B. 5. C. 10. D. $2\sqrt{10}$.

Lời giải.

Ta có $AB = \sqrt{(-2-4)^2 + (5+3)^2} = 10$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 251. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $A(5; 2)$, $B(10; 8)$. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là

- A. $(50; 6)$. B. $(2; 4)$. C. $(15; 10)$. D. $(5; 6)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$, suy ra $\overrightarrow{AB} = (5; 6)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 252. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\triangle ABC$ có $A(3; 5)$, $B(1; 2)$, $C(5; 2)$. Trọng tâm $\triangle ABC$ có tọa độ là

- A. $(-3; 4)$. B. $(9; 9)$. C. $(3; 3)$. D. $\left(\frac{9}{2}; \frac{9}{2}\right)$.

Lời giải.

Tọa độ trọng tâm $\triangle ABC$ là

$$x = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = 3; \quad y = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = 3.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 253. Cho trục tọa độ $(O, \vec{e})$. Khẳng định nào sau đây luôn **đúng**?

- A. $AB = \overline{AB}$.
- B. $AB = |\overline{AB}|$.
- C. Điểm M có tọa độ là a đối với trục tọa độ $(O, \vec{e})$ thì $|\overrightarrow{OM}| = a$.
- D. $|\overline{AB}| = \overline{AB}$.

Lời giải.

Theo lý thuyết sách giáo khoa thì C đúng.

□

Câu 254. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , ba điểm nào thẳng hàng trong các điểm $M(-1; 2)$, $N(0; 4)$, $P(-1; 6)$, $Q(3; 10)$?

- A. M, N, P .
- B. N, P, Q .
- C. M, N, Q .
- D. M, P, Q .

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MN} = (1; 2)$ và $\overrightarrow{MQ} = (4; 8)$. Vậy $\overrightarrow{MQ} = 4\overrightarrow{MN}$ hay ba điểm M, N, Q thẳng hàng.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 255. Cho $A(3; -2)$, $B(-5; 4)$ và $C(\frac{1}{3}; 0)$. Ta có $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AC}$ thì giá trị x là

- A. $x = 3$.
- B. $x = -3$.
- C. $x = 2$.
- D. $x = -2$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-8; 6)$, $\overrightarrow{AC} = (-\frac{8}{3}; 2)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$.

Vậy $x = 3$.

Chọn đáp án **A**

□

ĐÁP ÁN

1. A	2. B	3. B	4. C	5. D	6. C	7. B	8. C	9. C	10. C
11. C	12. B	13. C	14. D	15. C	16. A	17. A	18. B	19. A	20. B
21. C	22. A	23. C	24. D	25. D	26. B	27. C	28. C	29. C	30. C
31. B	32. B	33. C	34. B	35. C	36. A	37. A	38. C	39. C	40. A
41. A	42. C	43. B	44. C	45. B	46. B	47. A	48. D	49. B	50. C
51. D	52. D	53. B	54. D	55. C	56. D	57. D	58. A	59. D	60. D
61. D	62. A	63. B	64. A	65. B	66. B	67. D	68. D	69. C	70. C
71. A	72. A	73. D	74. B	75. A	76. C	77. C	78. A	79. D	80. B
81. A	82. C	83. C	84. B	85. A	86. A	87. B	88. B	89. D	90. A
91. C	92. C	93. B	94. A	95. A	96. B	97. A	98. B	99. D	100. C
101. B	102. D	103. A	104. D	105. C	106. D	107. B	108. A	109. D	110. C
111. A	112. D	113. D	114. B	115. D	116. B	117. D	118. B	119. A	120. D
121. B	122. B	123. B	124. A	125. D	126. C	127. D	128. C	129. B	130. C
131. D	132. A	133. A	134. A	135. A	136. D	137. A	138. D	139. B	140. B
141. B	142. A	143. C	144. B	145. C	146. A	147. D	148. A	149. A	150. B
151. D	152. D	153. B	154. C	155. D	156. A	157. B	158. A	159. C	160. B
161. A	162. A	163. D	164. B	165. A	166. A	167. B	168. B	169. C	170. D
171. B	172. C	173. C	174. B	175. B	176. B	177. C	178. A	179. D	180. A
181. C	182. A	183. D	184. A	185. A	186. B	188. B	189. C	190. A	191. C
192. B	193. B	194. A	195. B	196. C	197. A	198. D	199. C	200. A	201. C
202. C	203. C	204. C	205. A	206. D	207. A	208. C	209. A	210. C	211. C
212. D	213. B	214. C	215. C	216. B	217. A	218. D	219. D	220. C	221. C
222. D	223. B	224. A	225. B	226. A	227. B	228. A	229. C	230. B	231. B
232. B	233. D	234. A	235. A	236. B	237. D	238. D	239. D	240. C	241. B
242. C	243. C	244. B	245. C	246. B	247. B	248. D	249. B	250. C	251. D
252. C	254. C	255. A							

Chương 2: TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VEC-TƠ VÀ ỨNG DỤNG

§1 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KỲ TỪ 0° ĐẾN 180°

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

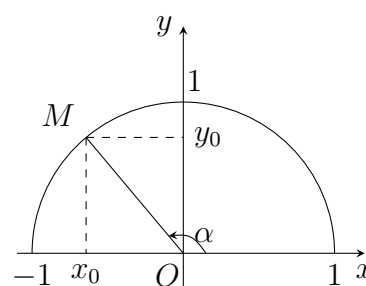
1 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KỲ TỪ 0° ĐẾN 180°

Định nghĩa.

Với mỗi góc α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$), ta xác định một điểm M trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$ và giả sử điểm M có tọa độ $M(x_0; y_0)$. Khi đó ta định nghĩa:

- **sin** của góc α là y_0 , ký hiệu $\sin \alpha = y_0$;
- **cô-sin** của góc α là x_0 , ký hiệu $\cos \alpha = x_0$;
- **tang** của góc α là $\frac{y_0}{x_0}$ ($x_0 \neq 0$), ký hiệu $\tan \alpha = \frac{y_0}{x_0}$;
- **cô-tang** của góc α là $\frac{x_0}{y_0}$ ($y_0 \neq 0$), ký hiệu $\cot \alpha = \frac{x_0}{y_0}$.

Các số $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$ được gọi là các *giá trị lượng giác của góc α* .



- Nếu α là góc tù thì $\cos \alpha < 0$, $\tan \alpha < 0$, $\cot \alpha < 0$.
- $\tan \alpha$ chỉ xác định khi $\alpha \neq 90^\circ$.
- $\cot \alpha$ chỉ xác định khi $\alpha \neq 0^\circ$ và $\alpha \neq 180^\circ$.

Tính chất 1. Về dấu của các giá trị lượng giác.

- $\sin \alpha > 0$ với $0^\circ < \alpha < 180^\circ$.
- $\cos \alpha > 0$ với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ và $\cos \alpha < 0$ với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.
- $\tan \alpha > 0$ với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ và $\tan \alpha < 0$ với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.
- $\cot \alpha > 0$ với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ và $\cot \alpha < 0$ với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Như vậy, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$ luôn cùng dấu với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Tính chất 2. Mối quan hệ giữa hai góc bù nhau.

- $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$.
- $\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$.

- $\tan \alpha = -\tan(180^\circ - \alpha)$ với $\alpha \neq 90^\circ$.
- $\cot \alpha = -\cot(180^\circ - \alpha)$ với $\alpha \neq 0^\circ, 180^\circ$.

Tính chất 3. Mỗi quan hệ giữa hai góc phụ nhau (với $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$).

- $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$.
- $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$.
- $\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$ với $\alpha \neq 0^\circ$.
- $\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$ với $\alpha \neq 90^\circ$.

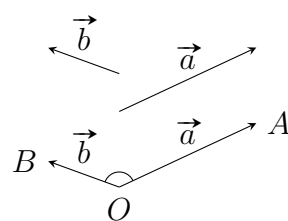
Tính chất 4. Các công thức cơ bản.

- $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.
- $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.
- $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$.
- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.
- $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.
- $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$.

2 GÓC GIỮA HAI VEC-TƠ

Định nghĩa.

Cho hai vec-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vec-tơ $\vec{0}$. Từ một điểm O bất kỳ, ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Góc $\widehat{AOB}$ với số đo từ 0° đến 180° được gọi là *góc giữa hai vec-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$* . Ta ký hiệu góc giữa hai vec-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $(\vec{a}, \vec{b})$. Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ thì ta nói rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, ký hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$ hoặc $\vec{b} \perp \vec{a}$.



! Từ định nghĩa ta có $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.

Tính chất 5. Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng thì $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$.

Tính chất 6. Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng thì $(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$.

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính các giá trị lượng giác

Sử dụng các công thức cơ bản ở phần lý thuyết để tính ra các giá trị lượng giác.

! Cần chú ý dấu của các giá trị lượng giác khi tính.

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 1 ❖❖❖

Ví dụ 1. Cho $\sin \alpha = \frac{1}{4}$. Tính $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$ biết $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Lời giải.

Ta có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$.

Với $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ thì $\cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.

Vì $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ nên $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Từ đó suy ra $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{15}}{15}$, $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \sqrt{15}$. □

Ví dụ 2. Cho $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α .

Lời giải.

Ta có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$.

Với $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ thì $\sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$.

Vì $\sin \alpha$ luôn dương nên $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Từ đó suy ra $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -2\sqrt{2}$, $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$. □

Ví dụ 3. Cho $\tan x = 2$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc x .

Lời giải.

Trước hết, ta có $\tan x \cdot \cot x = 1 \Rightarrow \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{2}$.

Mặt khác, $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + 2^2} = \frac{1}{5}$.

Vì $\tan x$ và $\cos x$ cùng dấu nên $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Áp dụng công thức $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$. Từ đó suy ra $\sin x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. □

Ví dụ 4. Cho $\cot x = -3$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc x .

Lời giải.

Trước hết ta có $\tan x \cdot \cot x = 1 \Rightarrow \tan x = \frac{1}{\cot x} = -\frac{1}{3}$.

Mặt khác $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{1 + (-3)^2} = \frac{1}{10}$. Suy ra $\sin x = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

Do $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow \cos x = \sin x \cdot \cot x = \frac{-3\sqrt{10}}{10}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α .

Lời giải.

Đáp số: $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\tan \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\cot \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$. □

Bài 2. Cho $\sin x = \frac{3}{4}$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc x biết $90^\circ < x < 180^\circ$.

Lời giải.

Đáp số: $\cos x = -\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\tan x = -\frac{3\sqrt{7}}{7}$, $\cot x = -\frac{\sqrt{7}}{3}$. □

Bài 3. Cho $\tan \alpha = \sqrt{2}$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α .

Lời giải.

Đáp số: $\cot \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$. □

Bài 4. Cho $\cot \beta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc β .

Lời giải.

Đáp số: $\tan \beta = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\sin \beta = \frac{2\sqrt{7}}{7}$, $\cos \beta = -\frac{\sqrt{21}}{7}$. □

Bài 5. Cho $\tan(180^\circ - a) = -\frac{1}{2}$. Tính các giá trị lượng giác của góc a .

Lời giải.

Đáp số: $\tan a = \frac{1}{2}$, $\cot a = 2$, $\cos a = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\sin a = \frac{5}{5}$. □

Bài 6. Cho $\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Tính các giá trị còn lại của góc α .

Lời giải.

Đáp số: $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, $\tan \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cot \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ □

Bài 7. Cho $\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{2}{5}$ với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Tính các giá trị lượng giác của góc α .

Lời giải.

Đáp số: $\sin \alpha = \frac{2}{5}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$, $\tan \alpha = \frac{2\sqrt{21}}{21}$, $\cot \alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}$. □

Dạng 2. Tính giá trị các biểu thức lượng giác.

Từ giả thiết đề cho (thường là giá trị của góc hay một giá trị lượng giác) định hướng biến đổi biểu thức về dạng chỉ xuất hiện giá trị đã cho của giả thiết để tính.

! Cần chú ý điều kiện áp dụng (nếu có).

BÀI TẬP DẠNG 2

Ví dụ 1. Tính $A = a \cos 60^\circ + 2a \tan 45^\circ - 3a \sin 30^\circ$.

Lời giải.

Ta có $A = \frac{1}{2}a + 2a - \frac{1}{2}.3a = a$. □

Ví dụ 2. Cho $x = 30^\circ$. Tính $A = \sin 2x - 3 \cos x$.

Lời giải.

$A = \sin 2.(30^\circ) - 3 \cos 30^\circ = \sin 60^\circ - 3 \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$. □

Ví dụ 3. Cho $\cos x = \frac{1}{3}$. Tính giá trị biểu thức $P = 4 \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Lời giải.

Ta có $P = 4(1 - \cos^2 x) + \cos^2 x = 4 - 3 \cos^2 x = 4 - 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{11}{3}$. □

Ví dụ 4. Cho $\tan x = 2$. Tính $A = \frac{3 \sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } A = \frac{3 \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\cos x}} = \frac{3 \tan x + 1}{\tan x - 1} = 7. \quad \square$$

Ví dụ 5. Cho $\sin x = \frac{2}{3}$. Tính $B = \frac{\cot x - \tan x}{\cot x + \tan x}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } B = \frac{\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x}}{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x}} = 2 \sin^2 x - 1 = -\frac{1}{9}. \quad \square$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tính

- $A = 5 - \cos^2 0^\circ + 2 \sin^2 30^\circ - 3 \tan^2 45^\circ$.
- $B = 2 \cos 2x + 3 \sin 3x$ với $x = 45^\circ$.

Bài 2. Tính

- $A = \tan 10^\circ \cdot \tan 20^\circ \dots \tan 80^\circ$.
- $B = \cot 20^\circ + \cot 40^\circ + \dots + \cot 140^\circ + \cot 160^\circ$.

Lời giải.

Hướng dẫn:

- Ta có: $\tan 10^\circ = \cot 80^\circ$, $\tan 20^\circ = \cot 70^\circ$, $\tan 30^\circ = \cot 60^\circ$, $\tan 40^\circ = \cot 50^\circ$. Do đó, ta tính được $A = 1$.
- Ta có: $\cot 20^\circ = -\cot 160^\circ$, $\cot 40^\circ = -\cot 140^\circ, \dots$ nên ta tính được $B = 0$. □

Bài 3. Cho $\cot a = -3$. Tính $A = \frac{\sin a - 2 \cos a}{3 \cos a + 2 \sin a}$.

Lời giải.

Đáp số: $A = -1$. □

Bài 4. Biết $\tan a = 2$. Tính $B = \frac{\sin^3 a + 2 \cos^2 a \cdot \sin a}{\cot a \cdot \sin^3 a - 2 \cos a}$.

Lời giải.

Đáp số: $B = 6$ □

Bài 5. Cho $\cos \alpha = \frac{3}{4}$. Tính $C = \frac{2 \tan \alpha + \cot \alpha}{4 \tan \alpha - 3 \cot \alpha}$.

Lời giải.

Đáp số: $C = 23$ □

Bài 6. Biết $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$. Tính $D = \sin x \cdot \cos x$.

Lời giải.

Hướng dẫn: Ta có $\frac{1}{9} = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 + \sin x \cos x$. Từ đó suy ra $\sin x \cdot \cos x = -\frac{4}{9}$. □

Dạng 3. Chứng minh đẳng thức lượng giác

Sử dụng linh hoạt các công thức cơ bản, các phép biến đổi đại số và sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ để rút gọn và chứng minh.

❖❖❖ **BÀI TẬP DẠNG 3** ❖❖❖

Ví dụ 1. Cho $\begin{cases} a = \sin x \\ b = \cos x \sin x \\ c = \cos x \cos y \end{cases}$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 = 1$

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= \sin^2 x + \cos^2 x (1 - \cos^2 y) + \cos^2 x \cos^2 y \\ &= \sin^2 x + \cos^2 x - \cos^2 x \cos^2 y + \cos^2 x \cos^2 y \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 2. Chứng minh các đẳng thức sau:

- $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$.
- $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$.
- $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \sin^2 x$.
- $\frac{1}{1 + \tan x} + \frac{1}{1 + \cot x} = 1$.

Lời giải.

- Ta có $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$
Do $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ nên ta suy ra $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$.
- $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x)^2 - (\sin^2 x)^2 = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x$
Do $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ nên $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x - 2 \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$
Tương tự ta có $\cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$.
- $\tan^2 x - \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x = \sin^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) = \sin^2 x \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x \sin^2 x$
- Ta có $\frac{1}{1 + \tan x} + \frac{1}{1 + \cot x} = \frac{1 + \tan x + 1 + \cot x}{(1 + \tan x)(1 + \cot x)}$
Mặt khác $(1 + \tan x)(1 + \cot x) = 1 + \tan x \cot x + \tan x + \cot x = 2 + \tan x + \cot x$.
Từ đó suy ra $\frac{1}{1 + \tan x} + \frac{1}{1 + \cot x} = \frac{2 + \tan x + \cot x}{2 + \tan x + \cot x} = 1$. □

Ví dụ 3. Cho A, B, C là các góc của tam giác. Chứng minh các đẳng thức sau:

- a) $\sin(A + B) = \sin C$.
- b) $\cos(A + B) + \cos C = 0$.
- c) $\sin \frac{A + B}{2} = \cos \frac{C}{2}$.
- d) $\tan(A - B + C) = -\tan 2B$.

Lời giải.

Do A, B, C là các góc của tam giác nên ta có $A + B + C = 180^\circ$.

- a) Ta có $A + B + C = 180^\circ \Leftrightarrow A + B = 180^\circ - C$.

Từ đó suy ra $\sin(A + B) = \sin(180^\circ - C) = \sin C$.

- b) Ta có $A + B + C = 180^\circ \Leftrightarrow A + B = 180^\circ - C$.

Từ đó suy ra $\cos(A + B) = \cos(180^\circ - C) = -\cos C \Rightarrow \cos(A + B) + \cos C = 0$.

- c) Ta có $A + B + C = 180^\circ \Leftrightarrow \frac{A + B}{2} = \frac{180^\circ - C}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}$.

Từ đó suy ra $\sin \frac{A + B}{2} = \sin \left(90^\circ - \frac{C}{2} \right) = \cos \frac{C}{2}$.

- d) Ta có $\tan(A - B + C) = \tan(A + B + C - 2B) = \tan(180^\circ - 2B) = -\tan 2B$.

□

Ví dụ 4. Chứng minh rằng các biểu thức sau có giá trị không phụ thuộc vào x .

- a) $A = \sin^8 x + \sin^6 x \cos^2 x + \sin^4 x \cos^2 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x$
- b) $B = \frac{1 - \sin^6 x}{\cos^6 x} - \frac{3 \tan^2 x}{\cos^2 x}$

Lời giải.

- a) Ta có:

$$\begin{aligned}
 A &= \sin^8 x + \sin^6 x \cos^2 x + \sin^4 x \cos^2 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x \\
 &= \sin^6 x (\sin^2 x + \cos^2 x) + \sin^4 x \cos^2 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x \\
 &= \sin^6 x + \sin^4 x \cos^2 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x \\
 &= \sin^4 x (\sin^2 x + \cos^2 x) + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x \\
 &= \sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x \\
 &= \sin^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x \\
 &= \sin^2 x + \cos^2 x = 1.
 \end{aligned}$$

b) Điều kiện $\cos x \neq 0$.

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{1 - \sin^6 x}{\cos^6 x} - \frac{3 \tan^2 x}{\cos^2 x} \\
 &= \frac{1 - \sin^6 x}{\cos^6 x} - \frac{3 \sin^2 x}{\cos^4 x} \\
 &= \frac{1 - \sin^6 x}{\cos^6 x} - \frac{3 \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^6 x} \\
 &= \frac{1 - \sin^6 x - 3 \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^6 x} \\
 &= \frac{(1 - \sin^2 x)^3 + 3 \sin^2 x (1 - \sin^2 x) - 3 \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^6 x} \\
 &= \frac{(\cos^2 x)^3 + 3 \sin^2 x \cos^2 x - 3 \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^6 x} \\
 &= \frac{\cos^6 x}{\cos^6 x} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

□

Ví dụ 5. Tìm m để biểu thức $P = \sin^6 x + \cos^6 x - m(\sin^4 x + \cos^4 x)$ có giá trị không phụ thuộc vào x .

Lời giải.

Ta có:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x.$$

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x.$$

$$\text{Từ đó suy ra } P = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x - m(1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x) = 1 - m + (2m - 3) \sin^2 x \cos^2 x.$$

$$\text{Do đó } P \text{ có giá trị không phụ thuộc vào } x \text{ khi và chỉ khi } 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}.$$

□

Ví dụ 6. Cho a, b là các số dương và thỏa mãn hệ thức $\frac{\sin^4 x}{a} + \frac{\cos^4 x}{b} = \frac{1}{a+b}$. Chứng minh rằng $\frac{\sin^{2018} x}{a^{1008}} + \frac{\cos^{2012} x}{b^{1008}} = \frac{1}{(a+b)^{1008}}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}\frac{\sin^4 x}{a} + \frac{\cos^4 x}{b} &= \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow (a+b) \left(\frac{\sin^4 x}{a} + \frac{\cos^4 x}{b} \right) = 1 \\ &\Leftrightarrow (a+b) \left(\frac{\sin^4 x}{a} + \frac{\cos^4 x}{b} \right) = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{a}{b} \cos^4 x + \frac{b}{a} \sin^4 x - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{b}{a}} \cos^2 x - \sqrt{\frac{a}{b}} \sin^2 x \right)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{b}{a}} \cos^2 x = \sqrt{\frac{a}{b}} \sin^2 x \\ &\Leftrightarrow \frac{\sin^2 x}{a} = \frac{\cos^2 x}{b}\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $\frac{\sin^2 x}{a} = \frac{\cos^2 x}{b} = \frac{1}{a+b} > 0$.

Đặt $t = \frac{1}{a+b} \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = at \\ \cos^2 x = bt \end{cases}$, do đó ta có $\begin{cases} \sin^{2018} x = a^{1009} t^{1009} \\ \cos^{2018} x = b^{1009} t^{1009} \end{cases}$.

Vậy $\frac{\sin^{2018} x}{a^{1008}} + \frac{\cos^{2018} x}{b^{1008}} = \frac{a^{1009} t^{1009}}{a^{1008}} + \frac{b^{1009} t^{1009}}{b^{1008}} = (a+b)t^{1009} = \frac{1}{(a+b)^{1008}}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho $A = \sin \alpha$, $B = \cos \alpha \sin \beta$, $C = \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma$, $D = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$. Chứng minh rằng $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1$.

Bài 2. Chứng minh đẳng thức lượng giác sau:

- a) $\frac{1 + \sin^2 x}{1 - \sin^2 x} = 1 + 2 \tan^2 x$.
- b) $\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \tan x = \frac{1}{\cos x}$.
- c) $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \sin^2 x$.

Bài 3. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào x

- a) $A = \sin^4 x (3 - \sin^2 x) + \cos^4 x (3 - 2 \cos^2 x)$.
- b) $B = 3 (\sin^8 x - \cos^8 x) + 4 (\cos^6 x - \sin^6 x) + 6 \sin^4 x$.
- c) $C = \sin^8 x + \cos^8 x + 6 \sin^4 x \cos^4 x + 4 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^4 x + \cos^4 x)$.

Bài 4. Tìm m để biểu thức $P = \sin^6 x + \cos^6 x + m (\sin^6 x + \cos^6 x) + 2 \sin^2 2x$ không phụ thuộc vào x

Lời giải.

Sử dụng các hằng đẳng thức rút gọn biểu thức P ta được $P = 1 + m + \frac{5-m}{4} \sin^2 2x$

Từ đó suy ra P không phụ thuộc vào x khi và chỉ khi $m = 5$. □

Bài 5. Cho $f(x) = \sin^6 x + \frac{3}{4} \sin^2 2x + \cos^6 x$. Tính $f\left(\frac{\pi}{2017}\right)$.

Lời giải.

Rút gọn $f(x)$ ta có $f(x) = 1 \forall x \in \mathbb{R}$, từ đó suy ra $f\left(\frac{\pi}{2017}\right) = 1$. □

BÀI TẬP TỔNG HỢP**Bài 6.** Cho $\cos a + 2 \sin a = 0$. Tính các giá trị lượng giác của góc a .**Lời giải.**Hướng dẫn: $\cos \alpha + 2 \sin \alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{1}{2}$. Từ đó ta được

$$\text{Đáp số: } \tan a = -\frac{1}{2}, \cot a = -2, \cos a = -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \sin a = \frac{\sqrt{5}}{2}. \quad \square$$

Bài 7. Cho $\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{7}{8}$. Tính các giá trị lượng giác của góc x biết x là góc tù.**Lời giải.**Hướng dẫn: $\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{7}{8} \Leftrightarrow (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \frac{7}{8} \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{7}{8} \quad (1)$.Ta lại có $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (2)$. Giải hệ phương trình gồm (1) và (2) ta tìm được các giá trị $\sin x$ và $\cos x$.

$$\text{Đáp số: } \cos x = -\frac{\sqrt{15}}{4}, \sin x = \frac{1}{4}, \tan x = -\frac{\sqrt{15}}{15}, \cot x = -\sqrt{15}. \quad \square$$

Bài 8. Tính $C = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \dots + \sin^2 170^\circ + \sin^2 180^\circ$.**Lời giải.**Hướng dẫn: $\sin 10^\circ = \sin 170^\circ, \sin 20^\circ = \sin 160^\circ, \dots$, suy ra $C = 2(\sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \dots + \sin^2 80^\circ) + \sin^2 90^\circ$. Mặt khác ta có $\sin 80^\circ = \cos 10^\circ, \sin 70^\circ = \cos 20^\circ, \dots$, có 4 cặp như vậy nên ta tính được $C = 5$. $\square$ **Bài 9.** Cho $\sin x + \cos x = \frac{3}{4}$. Tính $\sin^4 x + \cos^4 x$.**Lời giải.**Trước hết ta có $\frac{9}{16} = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 + 2 \sin x \cos x$, suy ra $\sin x \cdot \cos x = \frac{-7}{32}$.

$$\begin{aligned} \sin^4 x + \cos^4 x &= \sin^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x - 2 \sin^2 x \cos^2 x \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2(\sin x \cos x)^2 \\ &= 1 - 2\left(\frac{-7}{32}\right)^2 = \frac{463}{512} \end{aligned}$$

 $\square$ **Bài 10.** Cho $\sin^4 x + 3 \cos^4 x = \frac{7}{4}$. Tính $\cos^4 x + 3 \sin^4 x$.**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} \sin^4 x + 3 \cos^4 x &= \frac{7}{4} \Leftrightarrow (1 - \cos^2 x)^2 + 3 \cos^4 x = \frac{7}{4} \\ &\Leftrightarrow 4 \cos^4 x - 2 \cos^2 x - \frac{3}{4} = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

từ đó ta được

$$\begin{aligned} \cos^4 x + 3 \sin^4 x &= \cos^4 x + 3(1 - \cos^2 x)^2 \\ &= \frac{9}{16} + 3\left(1 - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

□

Bài 11. Cho $2 \sin x \sin y - 3 \cos x \cos y = 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x} + \frac{1}{2 \sin^2 y + 3 \cos^2 y} = \frac{5}{6}.$$

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $2 \tan x = 3 \cot y \Leftrightarrow \tan y = \frac{3}{2 \tan x}$.

Biến đổi về trái đẳng thức cần chứng minh theo $\tan x, \tan y$ ta suy ra điều phải chứng minh. □

Bài 12. Cho $6 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 2 = 0$. Biết $A = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha}{2 \cos \alpha - 1} = a + b \tan \alpha$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính giá trị của biểu thức $a + b$.

Lời giải.

Điều kiện $2 \cos \alpha - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \cos \alpha \neq \frac{1}{2}$.

Ta có $6 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{2} \\ \cos \alpha = -\frac{2}{3} \end{cases}$

Do $\cos \alpha \neq \frac{1}{2}$ nên $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$.

Mặt khác $A = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha}{2 \cos \alpha - 1} = \sin \alpha = \cos \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{2}{3} \tan \alpha$

Từ đó suy ra $\begin{cases} a = 0 \\ b = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow a + b = -\frac{2}{3}$. □

C CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Giá trị $\cos 45^\circ + \sin 45^\circ$ bằng bao nhiêu?

A. 1.

B. $\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. 0.

Lời giải.

Bằng cách tra bảng giá trị lượng giác của các góc đặc biệt hay dùng MTCT ta được
$$\begin{cases} \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos 45^\circ + \sin 45^\circ = \sqrt{2}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 2. Giá trị của $\tan 30^\circ + \cot 30^\circ$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

B. $\frac{1 + \sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

D. 2.

Lời giải.

Bằng cách tra bảng giá trị lượng giác của các góc đặc biệt hay dùng MTCT ta được
$$\begin{cases} \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \cot 30^\circ = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tan 30^\circ + \cot 30^\circ = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 3. Trong các đẳng thức sau đây đẳng thức nào là **đúng**?

A. $\sin 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $\cos 150^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

D. $\cot 150^\circ = \sqrt{3}$.

Lời giải.

Bằng cách tra bảng giá trị lượng giác của các góc đặc biệt hay dùng MTCT ta được

$$\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 4. Tính giá trị biểu thức $P = \cos 30^\circ \cos 60^\circ - \sin 30^\circ \sin 60^\circ$.

A. $P = \sqrt{3}$.

B. $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $P = 1$.

D. $P = 0$.

Lời giải.

Vì 30° và 60° là hai góc phụ nhau nên
$$\begin{cases} \sin 30^\circ = \cos 60^\circ \\ \sin 60^\circ = \cos 30^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = \cos 30^\circ \cos 60^\circ - \sin 30^\circ \sin 60^\circ = \cos 30^\circ \cos 60^\circ - \cos 60^\circ \cos 30^\circ = 0.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 5. Tính giá trị biểu thức $P = \sin 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ$

A. $P = 1$.

B. $P = 0$.

C. $P = \sqrt{3}$.

D. $P = -\sqrt{3}$.

Lời giải.

Vì 30° và 60° là hai góc phụ nhau nên
$$\begin{cases} \sin 30^\circ = \cos 60^\circ \\ \sin 60^\circ = \cos 30^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = \sin 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ = \cos^2 60^\circ + \sin^2 60^\circ = 1.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 6. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **sai**?

A. $\sin 45^\circ + \cos 45^\circ = \sqrt{2}$.

B. $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = 1$.

C. $\sin 60^\circ + \cos 150^\circ = 0$.

D. $\sin 120^\circ + \cos 30^\circ = 0$.

Lời giải.

Bằng cách tra bảng giá trị lượng giác của các góc đặc biệt hay dùng MTCT ta được
$$\begin{cases} \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow \cos 30^\circ + \sin 120^\circ = \sqrt{3}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 7. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **sai**?

A. $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 0$.

B. $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$.

C. $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1$.

D. $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$.

Lời giải.

Bằng cách tra bảng giá trị lượng giác của các góc đặc biệt hay dùng MTCT ta được
$$\begin{cases} \cos 0^\circ = 1 \\ \sin 0^\circ = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \cos 0^\circ + \sin 0^\circ = 1$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 8. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào **sai**?

A. $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ$.

B. $\cos 45^\circ = \sin 135^\circ$.

C. $\cos 30^\circ = \sin 120^\circ$.

D. $\sin 60^\circ = \cos 120^\circ$.

Lời giải.

Bằng cách tra bảng giá trị lượng giác của các góc đặc biệt hay dùng MTCT ta được
$$\begin{cases} \cos 120^\circ = -\frac{1}{2} \\ \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 9. Tam giác ABC vuông ở A có góc $\widehat{B} = 30^\circ$ Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\cos B = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

B. $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\cos C = \frac{1}{2}$.

D. $\sin B = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $\widehat{C} = 60^\circ$

Bằng cách tra bảng giá trị lượng giác của các góc đặc biệt hay dùng MTCT ta được

$\cos B = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 10. Tam giác đều ABC có đường cao AH . Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\sin \widehat{BAH} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $\cos \widehat{BAH} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

C. $\sin \widehat{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\sin \widehat{AHC} = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\widehat{BAH} = 30^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin \widehat{BAH} = \frac{1}{2} \\ \cos \widehat{BAH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Ta có $\widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \sin \widehat{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 11. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **đúng**?

- A. $\sin(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$. B. $\sin(180^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$.
C. $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$. D. $\sin(180^\circ - \alpha) = \cos \alpha$.

Lời giải.

Hai góc bù nhau α và $(180^\circ - \alpha)$ thì cho có giá trị của sin bằng nhau.

Chọn đáp án **C** □

Câu 12. Cho α và β là hai góc khác nhau và bù nhau. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào **sai**?

- A. $\sin \alpha = \sin \beta$. B. $\cos \alpha = -\cos \beta$. C. $\tan \alpha = -\tan \beta$. D. $\cot \alpha = \cot \beta$.

Lời giải.

Hai góc bù nhau α và β thì cho có giá trị của sin bằng nhau, các giá trị còn lại thì đối nhau.

Chọn đáp án **D** □

Câu 13. Tính giá trị biểu thức $P = \sin 30^\circ \cos 15^\circ + \sin 150^\circ \cos 165^\circ$.

- A. $P = -\frac{3}{4}$. B. $P = 0$. C. $P = \frac{1}{2}$. D. $P = 1$.

Lời giải.

Hai góc 30° và 150° bù nhau nên $\sin 30^\circ = \sin 150^\circ$;

Hai góc 15° và 165° bù nhau nên $\cos 15^\circ = -\cos 165^\circ$.

Do đó $P = \sin 30^\circ \cos 15^\circ + \sin 150^\circ \cos 165^\circ = \sin 150^\circ \cdot (-\cos 165^\circ) + \sin 150^\circ \cos 165^\circ = 0$

Chọn đáp án **B** □

Câu 14. Cho hai góc α và β với $\alpha + \beta = 180^\circ$. Tính giá trị của biểu thức $P = \cos \alpha \cos \beta - \sin \beta \sin \alpha$.

- A. $P = 0$. B. $P = 1$. C. $P = -1$. D. $P = 2$.

Lời giải.

Hai góc α và β bù nhau nên $\sin \alpha = \sin \beta$; $\cos \alpha = -\cos \beta$.

Do đó $P = \cos \alpha \cos \beta - \sin \beta \sin \alpha = -\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = -(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = -1$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 15. Cho tam giác ABC . Tính $P = \sin A \cdot \cos(B + C) + \cos A \cdot \sin(B + C)$.

- A. $P = 0$. B. $P = 1$. C. $P = -1$. D. $P = 2$.

Lời giải.

Giả sử $\widehat{A} = \alpha$; $\widehat{B} + \widehat{C} = \beta$.

Biểu thức trở thành $P = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$.

Trong tam giác ABC , có

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 180^\circ$.

Do hai góc α và β bù nhau nên $\sin \alpha = \sin \beta$; $\cos \alpha = -\cos \beta$.

Do đó, $P = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = -\sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 0$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 16. Cho tam giác ABC . Tính $P = \cos A \cdot \cos(B + C) - \sin A \cdot \sin(B + C)$.

- A. $P = 0$. B. $P = 1$. C. $P = -1$. D. $P = 2$.

Lời giải.

Giả sử $\widehat{A} = \alpha$; $\widehat{B} + \widehat{C} = \beta$.

Biểu thức trở thành $P = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$.

Trong tam giác ABC có

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 180^\circ.$$

Do hai góc α và β bù nhau nên $\sin \alpha = \sin \beta$; $\cos \alpha = -\cos \beta$.

$$\text{Do đó } P = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = -\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = -(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = -1.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 17. Cho hai góc nhọn α và β phụ nhau. Hệ thức nào sau đây là **sai**?

- A. $\sin \alpha = -\cos \beta$. B. $\cos \alpha = \sin \beta$. C. $\tan \alpha = \cot \beta$. D. $\cot \alpha = \tan \beta$.

Lời giải.

Hai góc nhọn α và β phụ nhau thì $\sin \alpha = \cos \beta$; $\cos \alpha = \sin \beta$; $\tan \alpha = \cot \beta$; $\cot \alpha = \tan \beta$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 18. Tính giá trị biểu thức $S = \sin^2 15^\circ + \cos^2 20^\circ + \sin^2 75^\circ + \cos^2 110^\circ$.

- A. $S = 0$. B. $S = 1$. C. $S = 2$. D. $S = 4$.

Lời giải.

Hai góc 15° và 75° phụ nhau nên $\sin 75^\circ = \cos 15^\circ$.

Hai góc 20° và 110° hơn kém nhau 90° nên $\cos 110^\circ = -\sin 20^\circ$.

Do đó,

$$\begin{aligned} S &= \sin^2 15^\circ + \cos^2 20^\circ + \sin^2 75^\circ + \cos^2 110^\circ = \sin^2 15^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 15^\circ + (-\sin 20^\circ)^2 \\ &= (\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ) + (\cos^2 20^\circ + \sin^2 20^\circ) = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 19. Cho hai góc α và β với $\alpha + \beta = 90^\circ$. Tính giá trị của biểu thức $P = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$.

- A. $P = 0$. B. $P = 1$. C. $P = -1$. D. $P = 2$.

Lời giải.

Hai góc α và β phụ nhau nên $\sin \alpha = \cos \beta$; $\cos \alpha = \sin \beta$.

$$\text{Do đó, } P = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 20. Cho hai góc α và β với $\alpha + \beta = 90^\circ$. Tính giá trị của biểu thức $P = \cos \alpha \cos \beta - \sin \beta \sin \alpha$.

- A. $P = 0$. B. $P = 1$. C. $P = -1$. D. $P = 2$.

Lời giải.

Hai góc α và β phụ nhau nên $\sin \alpha = \cos \beta$; $\cos \alpha = \sin \beta$.

$$\text{Do đó, } P = \cos \alpha \cos \beta - \sin \beta \sin \alpha = \cos \alpha \sin \alpha - \cos \alpha \sin \alpha = 0.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 21. Cho α là góc tù. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A. $\sin \alpha < 0$. B. $\cos \alpha > 0$. C. $\tan \alpha < 0$. D. $\cot \alpha > 0$.

Lời giải.

Chọn đáp án **C** □

Câu 22. Cho hai góc nhọn α và β trong đó $\alpha < \beta$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. $\cos \alpha < \cos \beta$. B. $\sin \alpha < \sin \beta$. C. $\cot \alpha > \cot \beta$. D. $\tan \alpha + \tan \beta > 0$.

Lời giải.

Chọn đáp án **A** □

Câu 23. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\cos 75^\circ > \cos 50^\circ$. B. $\sin 80^\circ > \sin 50^\circ$. C. $\tan 45^\circ < \tan 60^\circ$. D. $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ$.

Lời giải.

Trong khoảng từ 0° đến 90° , khi giá trị của góc tăng thì giá trị $\cos$ tương ứng của góc đó giảm.

Chọn đáp án **A** □

Câu 24. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. $\sin 90^\circ < \sin 100^\circ$. B. $\cos 95^\circ > \cos 100^\circ$. C. $\tan 85^\circ < \tan 125^\circ$. D. $\cos 145^\circ > \cos 125^\circ$.

Lời giải.

Trong khoảng từ 90° đến 180° , khi giá trị của góc tăng thì:

- Giá trị $\sin$ tương ứng của góc đó giảm.
- Giá trị $\cos$ tương ứng của góc đó giảm

Chọn đáp án **B** □

Câu 25. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. $\sin 90^\circ < \sin 150^\circ$. B. $\sin 90^\circ 15' < \sin 90^\circ 30'$.
C. $\cos 90^\circ 30' > \cos 100^\circ$. D. $\cos 150^\circ > \cos 120^\circ$.

Lời giải.

Trong khoảng từ 90° đến 180° , khi giá trị của góc tăng thì:

- Giá trị $\sin$ tương ứng của góc đó giảm.
- Giá trị $\cos$ tương ứng của góc đó giảm.

Chọn đáp án **C** □

Câu 26. Chọn hệ thức đúng được suy ra từ hệ thức $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$?

- A. $\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$. B. $\cos^2 \frac{\alpha}{3} + \sin^2 \frac{\alpha}{3} = \frac{1}{3}$.
C. $\cos^2 \frac{\alpha}{4} + \sin^2 \frac{\alpha}{4} = \frac{1}{4}$. D. $5(\cos^2 \frac{\alpha}{5} + \sin^2 \frac{\alpha}{5}) = 5$.

Lời giải.

Từ biểu thức $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ ta suy ra $\cos^2 \frac{\alpha}{5} + \sin^2 \frac{\alpha}{5} = 1$.

Do đó ta có $5 \left(\cos^2 \frac{\alpha}{5} + \sin^2 \frac{\alpha}{5} \right) = 5$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 27. Cho biết $\sin \frac{\alpha}{3} = \frac{3}{5}$. Giá trị của $P = 3 \sin^2 \frac{\alpha}{3} + 5 \cos^2 \frac{\alpha}{3}$ bằng bao nhiêu?

- A. $P = \frac{105}{25}$. B. $P = \frac{107}{25}$. C. $P = \frac{109}{25}$. D. $P = \frac{111}{25}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có biểu thức } \sin^2 \frac{\alpha}{3} + \cos^2 \frac{\alpha}{3} = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \frac{\alpha}{3} = 1 - \sin^2 \frac{\alpha}{3} = \frac{16}{25}.$$

$$\text{Do đó ta có } P = 3 \sin^2 \frac{\alpha}{3} + 5 \cos^2 \frac{\alpha}{3} = 3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 + 5 \cdot \frac{16}{25} = \frac{107}{25}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 28. Cho biết $\tan \alpha = -3$. Giá trị của $P = \frac{6 \sin \alpha - 7 \cos \alpha}{6 \cos \alpha + 7 \sin \alpha}$ bằng bao nhiêu?

A. $P = \frac{4}{3}$.

B. $P = \frac{5}{3}$.

C. $P = -\frac{4}{3}$.

D. $P = -\frac{5}{3}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } P = \frac{6 \sin \alpha - 7 \cos \alpha}{6 \cos \alpha + 7 \sin \alpha} = \frac{6 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - 7}{6 + 7 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{6 \tan \alpha - 7}{6 + 7 \tan \alpha} = \frac{5}{3}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 29. Cho biết $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$. Giá trị của $P = \frac{\cot \alpha + 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha + \tan \alpha}$ bằng bao nhiêu?

A. $P = -\frac{19}{13}$.

B. $P = \frac{19}{13}$.

C. $P = \frac{25}{13}$.

D. $P = -\frac{25}{13}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có biểu thức } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \frac{5}{9}.$$

$$\text{Ta có } P = \frac{\cot \alpha + 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha + \tan \alpha} = \frac{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + 3 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{2 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\cos^2 \alpha + 3 \sin^2 \alpha}{2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 3 \cdot \frac{5}{9}}{2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{9}} = \frac{19}{13}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 30. Cho biết $\cot \alpha = 5$. Giá trị của $P = 2 \cos^2 \alpha + 5 \sin \alpha \cos \alpha + 1$ bằng bao nhiêu?

A. $P = \frac{10}{26}$.

B. $P = \frac{100}{26}$.

C. $P = \frac{5}{0} 26$.

D. $P = \frac{101}{26}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} P &= 2 \cos^2 \alpha + 5 \sin \alpha \cos \alpha + 1 = \sin^2 \alpha \left(2 \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + 5 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) \\ &= \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} (2 \cot^2 \alpha + 5 \cot \alpha + 1 + \cot^2 \alpha) = \frac{3 \cot^2 \alpha + 5 \cot \alpha + 1}{\cot^2 \alpha + 1} = \frac{101}{26}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 31. Cho biết $3 \cos \alpha - \sin \alpha = 1$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Giá trị của $\tan \alpha$ bằng

A. $\tan \alpha = \frac{4}{3}$.

B. $\tan \alpha = \frac{3}{4}$.

C. $\tan \alpha = \frac{4}{5}$.

D. $\tan \alpha = \frac{5}{4}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } 3 \cos \alpha - \sin \alpha = 1 \Leftrightarrow 3 \cos \alpha = \sin \alpha + 1 \Rightarrow 9 \cos^2 \alpha = (\sin \alpha + 1)^2 \Leftrightarrow 9 \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha + 1 \Leftrightarrow$$

$$9(1 - \sin^2 \alpha) = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha + 1 \Leftrightarrow 10 \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = -1 \\ \sin \alpha = \frac{4}{5} \end{cases}$$

- $\sin \alpha = -1$: không thỏa mãn vì $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

$$\bullet \sin \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{3}.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 32. Cho biết $2 \cos \alpha + \sqrt{2} \sin \alpha = 2$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Tính giá trị của $\cot \alpha$

A. $\cot \alpha = \frac{\sqrt{5}}{4}$. B. $\cot \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$. C. $\cot \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$. D. $\cot \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } 2 \cos \alpha + \sqrt{2} \sin \alpha = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin \alpha = 2 - 2 \cos \alpha \Rightarrow 2 \sin^2 \alpha = (2 - 2 \cos \alpha)^2.$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 \alpha = 4 - 8 \cos \alpha + 4 \cos^2 \alpha \Leftrightarrow 2(1 - \cos^2 \alpha) = 4 - 8 \cos \alpha + 4 \cos^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow 6 \cos^2 \alpha - 8 \cos \alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 1 \\ \cos \alpha = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

• $\cos \alpha = 1$: không thỏa mãn vì $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

• $\cos \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 33. Cho biết $\sin \alpha + \cos \alpha = a$. Tính giá trị của $\sin \alpha \cos \alpha$.

A. $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{a^2}{a^2 - 1}$. B. $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{2a}{a^2 - 11}$.
C. $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{a^2 - 1}{2}$. D. $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{a^2 - 11}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \sin \alpha + \cos \alpha = a \Rightarrow (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = a^2$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = a^2 \Leftrightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{a^2 - 1}{2}.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 34. Cho biết $\cos \alpha + \sin \alpha = \frac{1}{3}$. Giá trị của $P = \sqrt{\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha}$ bằng bao nhiêu?

A. $P = \frac{5}{4}$. B. $P = \frac{7}{4}$. C. $P = \frac{9}{4}$. D. $P = \frac{11}{4}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \cos \alpha + \sin \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow (\cos \alpha + \sin \alpha)^2 = \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{4}{9}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha} = \sqrt{(\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - 2 \tan \alpha \cot \alpha} = \sqrt{\left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\right)^2 - 2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}\right)^2 - 2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}\right)^2 - 2} = \sqrt{\left(-\frac{9}{4}\right)^2 - 2} = \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 35. Cho biết $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Giá trị của $P = \sqrt{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha}$ bằng bao nhiêu?

A. $P = \frac{\sqrt{15}}{5}$. B. $P = \frac{\sqrt{17}}{5}$. C. $P = \frac{\sqrt{19}}{5}$. D. $P = \frac{\sqrt{21}}{5}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin \alpha - \cos \alpha &= \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \frac{1}{5} \\ \Leftrightarrow 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha &= \frac{1}{5} \Leftrightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha} = \sqrt{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} \\ &= \sqrt{1 - 2(\sin \alpha \cos \alpha)^2} = \frac{\sqrt{17}}{5}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(B)**

□

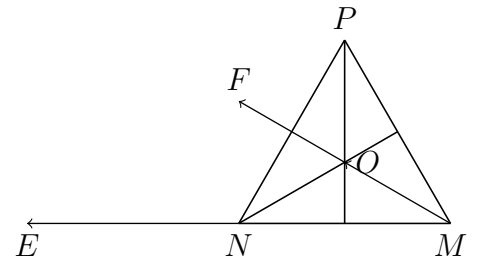
Câu 36. Cho O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều MNP . Góc nào sau đây bằng 120° ?

- A. $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NP})$. B. $(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{ON})$. C. $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{OP})$. D. $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP})$.

Lời giải.

- Vẽ $\overrightarrow{NE} = \overrightarrow{MN}$. Khi đó

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NP}) &= (\overrightarrow{NE}, \overrightarrow{NP}) \\ &= \widehat{PNE} = 180^\circ - \widehat{MNP} \\ &= 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ. \end{aligned}$$



- Vẽ $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{MO}$. Khi đó

$$(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{ON}) = (\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{ON}) = \widehat{NOF} = 60^\circ.$$

- Vì $MN \perp OP \Rightarrow (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{OP}) = 90^\circ$.
- Ta có $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}) = \widehat{NMP} = 60^\circ$.

Chọn đáp án **(A)**

□

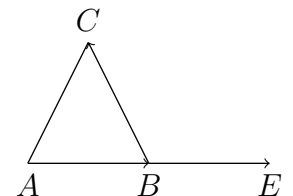
Câu 37. Cho tam giác đều ABC . Tính $P = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$

- A. $P = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. B. $P = \frac{3}{2}$. C. $P = -\frac{3}{2}$. D. $P = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Vẽ $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$. Khi đó

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) &= (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}) = \widehat{CBE} = 180 - \widehat{CBA} = 120^\circ \\ \Rightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) &= \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$



Tương tự, ta cũng có $\cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) = \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{1}{2}$.

Vậy $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{3}{2}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 38. Cho tam giác đều ABC có đường cao AH . Tính $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BA})$.

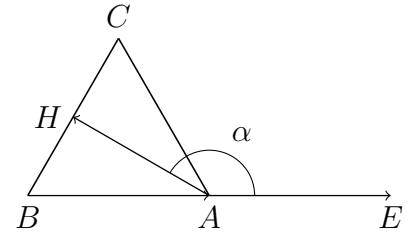
- A. 30° . B. 60° . C. 120° . D. 150° .

Lời giải.

Vẽ $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA}$.

Khi đó

$$(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AE}) = \widehat{HAE} = \alpha = 180^\circ - \widehat{BAH} = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ.$$



Chọn đáp án **(D)** □

Câu 39. Tam giác ABC vuông ở A và có góc $\widehat{B} = 50^\circ$. Hệ thức nào sau đây **sai**?

- A. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 130^\circ$. B. $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = 40^\circ$. C. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = 50^\circ$. D. $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 40^\circ$.

Lời giải.

Vì $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 180^\circ - \widehat{ACB} = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 40. Tam giác ABC vuông ở A và có $BC = 2AC$. Tính $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})$.

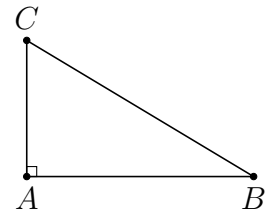
- A. $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}$. B. $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = -\frac{1}{2}$.
C. $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Xác định được $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 180^\circ - \widehat{ACB}$.

Ta có

$$\cos \widehat{ACB} = \frac{AC}{CB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{ACB} = 60^\circ \Rightarrow (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 180^\circ - \widehat{ACB} = 120^\circ.$$



Vậy $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 41. Cho tam giác ABC . Tính tổng $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$.

- A. 180° . B. 360° . C. 270° . D. 120° .

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } & \begin{cases} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 180^\circ - \widehat{ABC} \\ (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) = 180^\circ - \widehat{BCA} \\ (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}) = 180^\circ - \widehat{CAB} \end{cases} \\ \Rightarrow & (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}) \\ &= 540^\circ - (\widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{CAB}) \\ &= 540^\circ - 180^\circ = 360^\circ \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 42. Cho tam giác ABC với $\widehat{A} = 60^\circ$. Tính tổng $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$.

- A. 120° . B. 360° . C. 270° . D. 240° .

Lời giải.

Ta có
$$\begin{cases} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 180^\circ - \widehat{ABC} \\ (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) = 180^\circ - \widehat{BCA}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) &= 360^\circ - (\widehat{ABC} + \widehat{BCA}) \\ &= 360^\circ - (180^\circ - \widehat{BAC}) = 360^\circ - 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 43. Tam giác ABC có góc A bằng 100° và có trực tâm H . Tính tổng $(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}) + (\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) + (\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA})$.

A. 360° .

B. 180° .

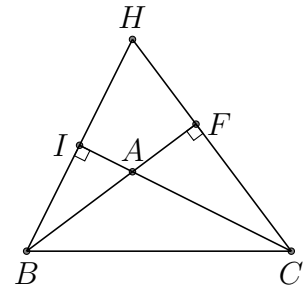
C. 80° .

D. 160° .

Lời giải.

Ta có
$$\begin{cases} (\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}) = \widehat{BHA} \\ (\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) = \widehat{BHC} \\ (\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA}) = \widehat{CHA}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}) + (\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) + (\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA}) = \widehat{BHA} + \widehat{BHC} + \widehat{CHA} = 2\widehat{BHC} = 2(180^\circ - 100^\circ) = 160^\circ \text{ (do tứ giác } HIAF \text{ nội tiếp).}$$



Chọn đáp án **(D)** □

Câu 44. Cho hình vuông $ABCD$. Tính $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA})$.

A. $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

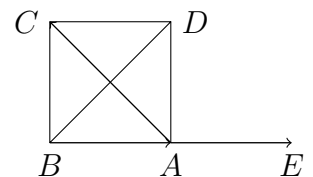
B. $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = 0$.

D. $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = -1$.

Lời giải.

Vẽ $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA}$. Khi đó $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) = \cos \widehat{CAE} = \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Chọn đáp án **(B)** □

Câu 45. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O . Tính tổng $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{DC})$.

A. 45° .

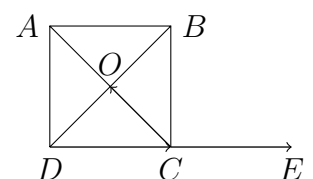
B. 405° .

C. 315° .

D. 225° .

Lời giải.

- Ta có $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ cùng hướng nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) = 0^\circ$.
- Ta có $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}$ ngược hướng nên $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}) = 180^\circ$.
- Vẽ $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DC}$, khi đó $(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CE}) = \widehat{OCE} = 135^\circ$



Vậy $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{DC}) = 0^\circ + 180^\circ + 135^\circ = 315^\circ$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 46. Cho tam giác đều ABC có M là trung điểm BC . Tính $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MA})$.

- A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MA}) = -\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 47. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào đúng?

- A. $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$. B. $\sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\cos 30^\circ = \frac{1}{2}$. D. $\tan 30^\circ = \sqrt{3}$.

Lời giải.

Từ bảng giá trị lượng giác của các góc đặc biệt, ta được $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 48. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào **sai**?

- A. $\sin 40^\circ = \sin 140^\circ$. B. $\cos 40^\circ = -\cos 140^\circ$.
C. $\tan 40^\circ = -\tan 140^\circ$. D. $\cot 40^\circ = \cot 140^\circ$.

Lời giải.

Ta có $\cot 40^\circ = \cot(40^\circ - 180^\circ) = \cot(-140^\circ) = -\cot 140^\circ$. Mà $\cot 140^\circ \neq 0$. Do đó $\cot 40^\circ \neq \cot 140^\circ$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 49. Cho góc α tù. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $\sin \alpha < 0$. B. $\cos \alpha > 0$. C. $\tan \alpha > 0$. D. $\cot \alpha < 0$.

Lời giải.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 50. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A và góc B bằng 60° . Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

- A. $\sin C = \frac{1}{2}$. B. $\cos C = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\sin B = \frac{1}{2}$. D. $\cot B = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Do $A + B + C = 180^\circ$ nên suy ra $C = 30^\circ$.

Ta có $\sin C = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

$$\cos C = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\sin B = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin B = \frac{1}{2} \text{ (sai).}$$

$$\cot B = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 51. Cho tam giác ABC đều. Tính $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$.

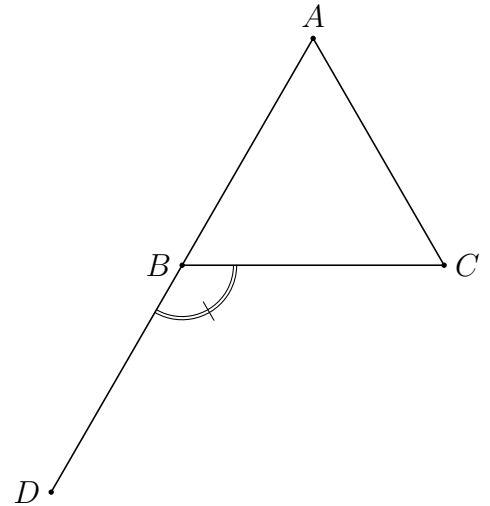
- A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Gọi D là điểm đối xứng của A qua B .

Tam giác ABC đều nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ$.

Khi đó $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{1}{2}$.



Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 52. Giá trị của $\sin 60^\circ + \cos 30^\circ$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

B. $\sqrt{3}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. 1.

Lời giải.

Ta có $\sin 60^\circ + \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 53. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào đúng?

A. $\sin(180^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$.

B. $\cos(180^\circ - \alpha) = \cos \alpha$.

C. $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$.

D. $\cot(180^\circ - \alpha) = \cot \alpha$.

Lời giải.

Hai góc bù nhau α và $180^\circ - \alpha$ thì $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 54. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

A. $\cos 35^\circ > \cos 10^\circ$.

B. $\sin 55^\circ < \sin 75^\circ$.

C. $\tan 20^\circ < \tan 60^\circ$.

D. $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$.

Lời giải.

Khẳng định sai là $\cos 35^\circ > \cos 10^\circ$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 55.

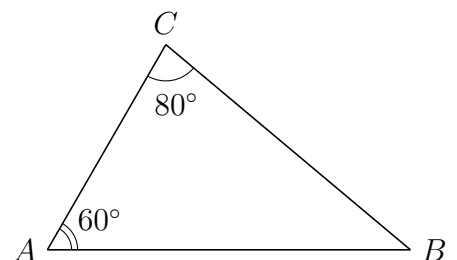
Cho tam giác ABC như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB}) = 40^\circ$.

B. $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = 140^\circ$.

C. $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 80^\circ$.

D. $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = 120^\circ$.



Lời giải.

Mệnh đề đúng là $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = 120^\circ$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 56. Tính giá trị biểu thức $P = \cos 0^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$.

- A. $P = 0$. B. $P = -1$. C. $P = 1$. D. $P = 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} P &= (\cos 0^\circ + \cos 180^\circ) + (\cos 20^\circ + \cos 160^\circ) + \dots + (\cos 80^\circ + \cos 100^\circ) \\ &= (1 - 1) + (\cos 20^\circ - \cos 20^\circ) + \dots + (\cos 80^\circ - \cos 80^\circ) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 57. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào **sai**?

- A. $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 1$. B. $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$.
C. $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = 1$. D. $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$ nên $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 58. Với α là góc bất kì, khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $\sin \alpha = -\sin(180^\circ - \alpha)$. B. $\tan \alpha = \tan(180^\circ - \alpha)$.
C. $\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$. D. $\cot \alpha = \cot(180^\circ - \alpha)$.

Lời giải.

Do $\alpha + (180^\circ - \alpha) = 180^\circ$ nên $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$, $\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$, $\tan \alpha = -\tan(180^\circ - \alpha)$ và $\cot \alpha = -\cot(180^\circ - \alpha)$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 59. Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau.

- A. $\cos 32^\circ > \cos 31^\circ$. B. $\sin 70^\circ > \sin 50^\circ$. C. $\tan 43^\circ < \tan 47^\circ$. D. $\cos 40^\circ = \sin 50^\circ$.

Lời giải.

Trong khoảng $(0; \frac{\pi}{2})$, khi α tăng thì $\cos \alpha$ giảm. Vậy khẳng định $\cos 32^\circ > \cos 31^\circ$ là sai.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 60. Cho tam giác ABC vuông tại A , góc B bằng 30° . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\cos B = \frac{1}{\sqrt{3}}$. B. $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\cos C = \frac{1}{2}$. D. $\sin B = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Do tam giác ABC vuông tại A , góc B bằng 30° nên $\widehat{C} = 60^\circ$.

Suy ra $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos C = \frac{1}{2}$, $\sin B = \frac{1}{2}$, $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $\cos B = \frac{1}{\sqrt{3}}$ là khẳng định sai.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 61. Cho $\sin a + \cos a = \frac{2}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \sin^6 a + \cos^6 a$.

- A. $P = \frac{16}{25}$. B. $P = \frac{71}{121}$. C. $P = \frac{83}{108}$. D. $P = \frac{23}{48}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} P &= \sin^6 a + \cos^6 a = (\sin^2 a + \cos^2 a)^3 - 3 \sin^2 a \cos^2 a (\sin^2 a + \cos^2 a) \\ &= 1 - 3 \cdot \left[\frac{(\sin a + \cos a)^2 - \sin^2 a - \cos^2 a}{2} \right]^2 \\ &= 1 - 3 \cdot \left[\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1}{2} \right]^2 \\ &= \frac{83}{108}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 62. Biết $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$, giá trị của biểu thức $A = \frac{\cot \alpha + 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha + \tan \alpha}$ bằng

- A. $\frac{19}{13}$. B. $-\frac{19}{13}$. C. $\frac{25}{13}$. D. $-\frac{25}{13}$.

Lời giải.

Ta có

$$A = \frac{\cot \alpha + 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha + \tan \alpha} = \frac{\sin \alpha (\cot \alpha + 3 \tan \alpha)}{\sin \alpha (2 \cot \alpha + \tan \alpha)} = \frac{\cos \alpha + 3 \cdot \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha}}{2 \cos \alpha + \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{-\frac{2}{3} - \frac{5}{2}}{-\frac{4}{3} - \frac{5}{6}} = \frac{19}{13}.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 63. Cho biết $\sin \alpha + \cos \alpha = m$. Giá trị của $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ bằng bao nhiêu?

- A. $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = m^2$. B. $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2m$.
C. $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1 - m^2}{2}$. D. $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{m^2 - 1}{2}$.

Lời giải.

$$\sin \alpha + \cos \alpha = m \Rightarrow (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = m^2 \Leftrightarrow 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = m^2 \Leftrightarrow \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{m^2 - 1}{2}.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 64. Với x là góc bất kì khác 90° , đẳng thức nào sau đây là **sai**?

- A. $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$. B. $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \sin^2 x$.
C. $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$. D. $\sin^6 x - \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 &= 1 + 2 \sin x \cos x + 1 - 2 \sin x \cos x = 2 \text{ (đúng)} \\ \tan^2 x - \sin^2 x &= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x = \frac{\sin^2 x - (1 - \sin^2 x) \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x \sin^2 x \text{ (đúng).} \\ \sin^4 x + \cos^4 x &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x \text{ (đúng).} \end{aligned}$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 65. Biết $\tan \alpha + \cot \alpha = 6$. Giá trị của biểu thức $P = \tan^4 \alpha + \cot^4 \alpha$ bằng

- A. 1154. B. 34. C. 36. D. 1156.

Lời giải.

Ta có $\tan \alpha + \cot \alpha = 6$ và $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$ nên $\tan \alpha, \cot \alpha$ là hai nghiệm của phương trình sau:

$$X^2 - 6X + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 3 + \sqrt{2} \\ X = 3 - \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan \alpha = 3 + \sqrt{2} \\ \cot \alpha = 3 - \sqrt{2} \end{cases}.$$

Vậy $P = \tan^4 \alpha + \cot^4 \alpha = (3 + \sqrt{2})^4 + (3 - \sqrt{2})^4 = 1154$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 66. Tính giá trị của biểu thức $A = \cos^3 1^\circ + \cos^3 2^\circ + \cos^3 3^\circ + \dots + \cos^3 180^\circ$.

- A. $A = 0$. B. $A = 1$. C. $A = -1$. D. $A = -2$.

Lời giải.

Ta có $\cos \alpha = -\cos (180^\circ - \alpha)$, suy ra $\cos 1^\circ = -\cos 179^\circ$; $\cos 2^\circ = -\cos 178^\circ, \dots, \cos 89^\circ = -\cos 91^\circ$.

Khi đó

$$\begin{aligned} A &= \cos^3 1^\circ + \cos^3 2^\circ + \cos^3 3^\circ + \dots + \cos^3 180^\circ \\ &= -\cos^3 179^\circ - \cos^3 178^\circ - \dots - \cos^3 91^\circ + \cos^3 90^\circ + \cos^3 91^\circ + \dots + \cos^3 179^\circ + \cos^3 180^\circ \\ &= \cos^3 90^\circ + \cos^3 180^\circ \\ &= -1 \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 67. Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{\tan \alpha - 3 \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$.

- A. $A = -\frac{1}{2}$. B. $A = \frac{1}{4}$. C. $A = 0$. D. $A = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } A = \frac{\tan \alpha - 3 \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha} = \frac{\tan \alpha - \frac{3}{\tan \alpha}}{\tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha}} = \frac{\tan^2 \alpha - 3}{\tan^2 \alpha + 1}.$$

$$\text{Có } 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 8 \Rightarrow \tan^2 \alpha = 7.$$

$$\text{Vậy nên } A = \frac{7 - 3}{7 + 1} = \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 68. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào đúng?

- A. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. B. $\sin x^2 + \cos x^2 = 1$. C. $\sin 2x + \cos 2x = 1$. D. $\sin^2 x + \cos x^2 = 1$.

Lời giải.

Hệ thức đúng là $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 69. Cho $\vec{a} = (4; 3)$ và $\vec{b} = (1; 7)$. Khi đó góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là

- A. 30° . B. 45° . C. 90° . D. 60° .

Lời giải.

$$\text{Ta có } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{4 \cdot 1 + 3 \cdot 7}{\sqrt{3^2 + 4^2} \sqrt{1^2 + 7^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 70. Biết $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$). Khi đó giá trị $\cos \alpha$ bằng

A. $\frac{3}{5}$. B. $\frac{1}{5}$. C. $-\frac{3}{5}$. D. $-\frac{1}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$. Do $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ nên $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 71. Cho hai véc-tơ $\vec{x} = (1; 0)$, $\vec{y} = (-2; 0)$. Số đo của góc giữa hai véc-tơ $\vec{x}$ và $\vec{y}$ bằng

A. 90° . B. 180° . C. 45° . D. 0° .

Lời giải.

Ta có $\vec{y} = -2\vec{x} \Rightarrow \vec{x}$ và $\vec{y}$ ngược hướng. Suy ra $(\vec{x}, \vec{y}) = 180^\circ$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 72. Trong hệ tọa độ Oxy cho $\vec{a} = (a_1; a_2)$; $\vec{b} = (b_1; b_2)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$. B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$.
- C. $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$. D. $\vec{a} = a_2\vec{j} + a_1\vec{i}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$.

Lời giải.

Ta có $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 73. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có $A(3; 1)$, $B(-1; -1)$, $C(6; 0)$. Tính góc A của tam giác ABC .

- A. Góc A bằng 60° . B. Góc A bằng 45° . C. Góc A bằng 135° . D. Góc A bằng 90° .

Lời giải.

Ta có $\vec{AB} = (-4; -2) \Rightarrow |\vec{AB}| = 2\sqrt{5}$; $\vec{AC} = (3; -1) \Rightarrow |\vec{AC}| = \sqrt{10}$.

Do $\cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{-4 \cdot 3 + (-2)(-1)}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ nên $(\vec{AB}, \vec{AC}) = 135^\circ$ hay góc A bằng 135° .

Chọn đáp án **C** □

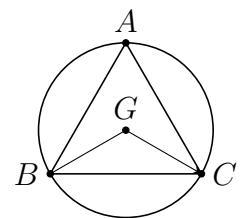
Câu 74. Cho tam giác đều ABC có trọng tâm G . Góc giữa 2 véc-tơ $\vec{GB}$, $\vec{GC}$ là

- A. 60° . B. 45° . C. 120° . D. 30° .

Lời giải.

Tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn tâm G , nên

$$(\vec{GB}, \vec{GC}) = \widehat{BGC} = 2\widehat{BAC} = 120^\circ.$$



Chọn đáp án **C** □

Câu 75. Cho $\sin x = \frac{1}{3}$ và $90^\circ < x < 180^\circ$. Giá trị lượng giác $\tan x$ là

- A. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. B. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. C. $-2\sqrt{2}$. D. $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Vì } 90^\circ < x < 180^\circ \text{ nên } \cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 76. Cho tam giác ABC . Đẳng thức nào **sai**?

A. $\cos \frac{B+C}{2} = \sin \frac{A}{2}.$

B. $\sin(A+B-2C) = \sin 3C.$

C. $\sin(A+B) = \sin C.$

D. $\cos \frac{A+B+2C}{2} = \sin \frac{C}{2}.$

Lời giải.

- $\cos \frac{B+C}{2} = \cos \frac{180^\circ - A}{2} = \cos \left(90^\circ - \frac{A}{2}\right) = \sin \frac{A}{2}$, nên “ $\cos \frac{B+C}{2} = \sin \frac{A}{2}$ ” đúng.
- $\sin(A+B-2C) = \sin(180^\circ - 3C) = \sin 3C$ nên “ $\sin(A+B-2C) = \sin 3C$ ” đúng.
- $\sin(A+B) = \sin(180^\circ - C) = \sin C$ nên “ $\sin(A+B) = \sin C$ ” đúng.
- “ $\cos \frac{A+B+2C}{2} = \sin \frac{C}{2}$ ” sai.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 77. Cho $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$. Tính giá trị $\sin \alpha$.

A. $\frac{3\sqrt{2}}{4}.$

B. $-\frac{3\sqrt{2}}{4}.$

C. $\frac{\sqrt{14}}{4}.$

D. $-\frac{\sqrt{14}}{4}.$

Lời giải.

$$\text{Vì } 0 \leq \alpha \leq 180^\circ \text{ nên } \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{8}} = \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 78. Cho α và β là hai góc khác nhau và bù nhau. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức **sai**?

A. $\tan \alpha = -\tan \beta.$

B. $\cot \alpha = \cot \beta.$

C. $\sin \alpha = \sin \beta.$

D. $\cos \alpha = -\cos \beta.$

Lời giải.

Trong các công thức trên, công thức sai là $\cot \alpha = \cot \beta$, đẳng thức đúng là $\cot \alpha = -\cot \beta$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 79. Giá trị của biểu thức $A = 2 \sin 30^\circ + 3 \cos 45^\circ - \sin 60^\circ$ là

A. $1 + \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}.$

B. $1 + \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}.$

C. $1 + \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$

D. $1 - \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} A &= 2 \sin 30^\circ + 3 \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 1 + \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 80. Cho hai véc-tơ $\vec{a}(4; 3)$ và $\vec{b}(1; 7)$. Tính góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. 90° .

B. 60° .

C. 45° .

D. 30° .

Lời giải.

Ta có

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{|4 \cdot 1 + 3 \cdot 7|}{\sqrt{4^2 + 3^2} \sqrt{1^2 + 7^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Suy ra góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 45° .

Chọn đáp án **C**

□

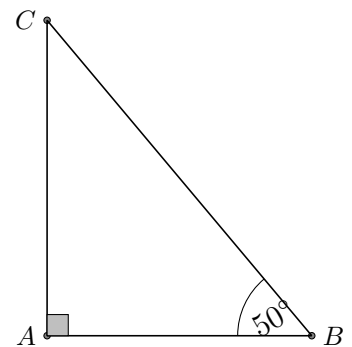
Câu 81. Cho tam giác ABC vuông tại A và có góc $\widehat{B} = 50^\circ$. Hệ thức nào sau đây **sai**

A. $(\vec{BC}, \vec{AC}) = 40^\circ$. B. $(\vec{AB}, \vec{BC}) = 130^\circ$. C. $(\vec{AC}, \vec{CB}) = 120^\circ$. D. $(\vec{AB}, \vec{CB}) = 50^\circ$.

Lời giải.

Ta có

- $(\vec{BC}, \vec{AC}) = \widehat{C} = 90^\circ - \widehat{B} = 40^\circ$.
- $(\vec{AB}, \vec{BC}) = 180^\circ - \widehat{B} = 130^\circ$.
- $(\vec{AC}, \vec{CB}) = 180^\circ - \widehat{C} = 140^\circ$.
- $(\vec{AB}, \vec{CB}) = \widehat{B} = 50^\circ$.



Chọn đáp án **C**

□

Câu 82. Cho $M = \cos^2 15^\circ + \cos^2 25^\circ + \cos^2 45^\circ + \cos^2 65^\circ + \cos^2 75^\circ$. Khi đó

A. $M = 3$.

B. $M = \frac{5}{2}$.

C. $M = -\frac{5}{2}$.

D. $M = 1$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} M &= \cos^2 15^\circ + \cos^2 25^\circ + \cos^2 45^\circ + \cos^2 65^\circ + \cos^2 75^\circ \\ \Leftrightarrow M &= \cos^2 15^\circ + \cos^2 25^\circ + \cos^2 45^\circ + \cos^2 (90^\circ - 25^\circ) + \cos^2 (90^\circ - 15^\circ) \\ \Leftrightarrow M &= \cos^2 15^\circ + \cos^2 25^\circ + \cos^2 45^\circ + \sin^2 25^\circ + \sin^2 15^\circ \\ \Leftrightarrow M &= \cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ + \cos^2 45^\circ + \cos^2 25^\circ + \sin^2 25^\circ \\ \Leftrightarrow M &= 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **B**

□

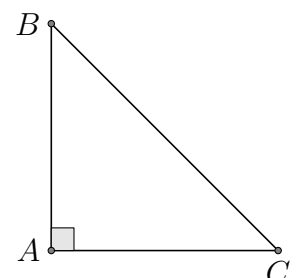
Câu 83. Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $(\vec{CA}, \vec{CB}) = 45^\circ$. B. $(\vec{BA}, \vec{CA}) = 45^\circ$. C. $(\vec{BA}, \vec{CB}) = 45^\circ$. D. $(\vec{CA}, \vec{BC}) = 45^\circ$.

Lời giải.

Ta có

- $(\vec{CA}, \vec{CB}) = \widehat{ACB} = 45^\circ$.
- $(\vec{BA}, \vec{CA}) = 90^\circ$.
- $(\vec{BA}, \vec{CB}) = 180^\circ - \widehat{ABC} = 135^\circ$.
- $(\vec{CA}, \vec{BC}) = 180^\circ - \widehat{ACB} = 135^\circ$.



Chọn đáp án **A**

□

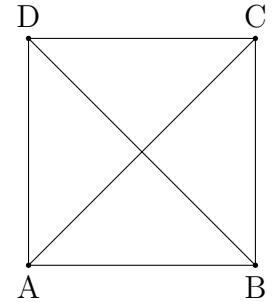
Câu 84. Cho hình vuông $ABCD$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $(\vec{AD}, \vec{AB}) = 90^\circ$. B. $(\vec{AB}, \vec{CA}) = 45^\circ$. C. $(\vec{AD}, \vec{BC}) = 0^\circ$. D. $(\vec{AB}, \vec{CD}) = 180^\circ$.

Lời giải.

Ta có

- $(\vec{AD}, \vec{AB}) = 90^\circ$.
- $(\vec{AB}, \vec{CA}) = 180^\circ - \widehat{BAC} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.
- $(\vec{AD}, \vec{BC}) = 0^\circ$.
- $(\vec{AB}, \vec{CD}) = 180^\circ$.



Chọn đáp án **B**

□

Câu 85. Tính giá trị biểu thức $P = \sin 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ$.

- A. $P = 1$. B. $P = 0$. C. $P = \sqrt{3}$. D. $P = -\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $P = \sin 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 86. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 60^\circ$. Tính tổng $(\vec{AB}, \vec{BC}) + (\vec{BC}, \vec{CA})$.

- A. 120° . B. 360° . C. 270° . D. 240° .

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & (\vec{AB}, \vec{BC}) + (\vec{BC}, \vec{CA}) \\ &= [180^\circ - (\vec{BA}, \vec{BC})] + [180^\circ - (\vec{CB}, \vec{CA})] \\ &= 180^\circ - \hat{B} + 180^\circ - \hat{C} = 180^\circ + \hat{A} = 240^\circ. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 87. Cho α và β là hai góc khác nhau và bù nhau. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào **sai**?

- A. $\sin \alpha = \sin \beta$. B. $\cot \alpha = \cot \beta$. C. $\tan \alpha = -\tan \beta$. D. $\cos \alpha = -\cos \beta$.

Lời giải.

Ghi nhớ $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 88. Cho $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Điều khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\cos \alpha > 0$. B. $\sin \alpha < 0$. C. $\cot \alpha > 0$. D. $\tan \alpha < 0$.

Lời giải.

$90^\circ < \alpha < 180^\circ \Rightarrow \tan \alpha < 0$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 89. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. $\sin(180^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$.
 B. $\tan(180^\circ - \alpha) = \tan \alpha$.
 C. $\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$.
 D. $\sin(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$.

Lời giải.

Với hai cung bù nhau α và $180^\circ - \alpha$ ta có

- $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$.
- $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$.
- $\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$.
- $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$.

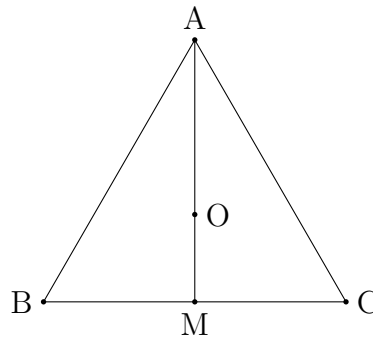
Chọn đáp án **C**

□

Câu 90. Cho tam giác ABC đều, gọi O là trọng tâm của tam giác. Góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{AO}$ và $\overrightarrow{BC}$ là

- A. 90° .
 B. 45° .
 C. 150° .
 D. 30° .

Lời giải.



Theo tính chất tam giác đều ta có $AO \perp BC$. Do đó $\widehat{(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{BC})} = 90^\circ$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 91. Cho tam giác ABC vuông tại A , góc C bằng 60° . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. $\sin B = \frac{1}{2}$.
 B. $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
 C. $\cos C = \frac{1}{2}$.
 D. $\cos B = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Theo giả thiết, ta có góc B bằng 30° , nên $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 92. Cho tam giác ABC không phải là tam giác vuông. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\sin A = -\sin(180^\circ - A)$.
 B. $\cos A = -\cos(180^\circ - A)$.
 C. $\tan A = \tan(180^\circ - A)$.
 D. $\cot A = \cot(180^\circ - A)$.

Lời giải.

$\cos A = -\cos(180^\circ - A)$ (tính chất SGK).

Chọn đáp án **B**

□

Câu 93. Cho tam giác đều ABC . Tính $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA})}$.

- A. 60° .
 B. 45° .
 C. 90° .
 D. 120° .

Lời giải.

Ta có: $\triangle ABC$ đều $\Rightarrow \widehat{BAC} = 60^\circ$.

Do đó, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 94. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$.

B. $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2 \cos^2 x$.

C. $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x$.

D. $\sin^4 x - \cos^4 x = 2 \cos^2 x - 1$.

Lời giải.

$$\sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - 2 \cos^2 x.$$

Chọn đáp án (B) □

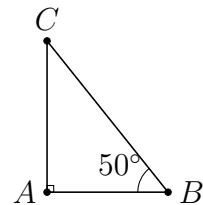
Câu 95. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A và có $\widehat{B} = 50^\circ$. Chọn khẳng định sai.

A. $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 140^\circ$. B. $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 40^\circ$. C. $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 50^\circ$. D. $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CB}) = 50^\circ$.

Lời giải.

Ta có $\widehat{CBA} = 50^\circ \Rightarrow \widehat{BCA} = 40^\circ$.

Do đó $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \widehat{BCA} = 40^\circ$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 96. Cho tam giác ABC vuông tại B , $C = 30^\circ$. Trong các kết luận sau, kết luận nào đúng?

A. $\cot A = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $\cos A = \frac{1}{2}$.

C. $\tan A = -\sqrt{3}$.

D. $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $A + B + C = 180^\circ \Rightarrow A = 60^\circ$ nên $\cos A = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 97. Cho hình vuông $ABCD$, giá trị của $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA})$ bằng

A. $-\frac{1}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

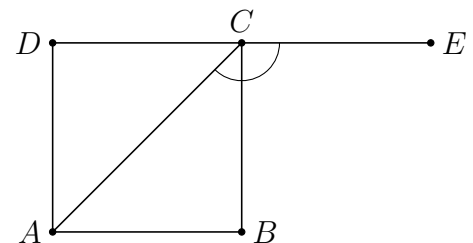
C. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Gọi E là điểm đối xứng của D qua C . Ta có

$$\begin{aligned} \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) &= \cos(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CA}) \\ &= \cos \widehat{ACE} = \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$



Chọn đáp án (D) □

Câu 98. Cho hai véc-tơ $\vec{a} = (-4; 3)$ và $\vec{b} = (1; -7)$. Góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là

A. 45° .

B. -45° .

C. 135° .

D. 30° .

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-4 - 21}{\sqrt{16 + 9} \cdot \sqrt{1 + 49}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 99. Cho tam giác ABC vuông ở A . Tìm tổng $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$.

- A. 180° . B. 360° . C. 270° . D. 240° .

Lời giải.

Vì tam giác ABC vuông ở A nên $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$.

Ta có:

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) &= 180^\circ - \widehat{B} + 180^\circ - \widehat{C} = 360^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C}) \\ &= 360^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ.\end{aligned}$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 100. Cho góc $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$. Tìm điều kiện của góc α để các giá trị lượng giác của $\sin \alpha$ và $\tan \alpha$ trái dấu nhau.

- A. $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. B. $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$. C. $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$. D. $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Lời giải.

Ta có $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$.

Để $\sin \alpha$ và $\tan \alpha$ trái dấu nhau thì α thuộc góc phần tư thứ 2 tức là $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 101. Cho góc α là góc tù thỏa $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$. Tính giá trị biểu thức $A = 2 \sin \alpha - \cos \alpha$.

- A. $A = \frac{11}{5}$. B. $A = 1$. C. $A = -\frac{7}{5}$. D. $A = \frac{9}{5}$.

Lời giải.

Vì α là góc tù nên $\sin \alpha > 0$; $\cos \alpha < 0$.

Ta có $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5}$. Suy ra $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{4}{5}$.

Vậy $A = 2 \sin \alpha - \cos \alpha = 2 \cdot \frac{4}{5} - \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{11}{5}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 102. Cho α là góc nhọn. Tìm biểu thức có giá trị không phụ thuộc vào góc α .

- A. $Q = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 4$. B. $P = \cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha + 3$.
C. $M = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$. D. $N = \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha + 2 \cos^2 \alpha + 1$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}N &= (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + 2 \cos^2 \alpha + 1 \\ &= \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha + 1 \\ &= 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha + 1 \\ &= 2.\end{aligned}$$

Vậy $N = \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha + 2 \cos^2 \alpha + 1$ là biểu thức có giá trị không phụ thuộc vào góc α .

Chọn đáp án **D**

□

Câu 103. Cho hai góc nhọn α, β thỏa $\alpha < \beta$. Tìm khẳng định **sai**?

- A. $\cos \alpha < \cos \beta$. B. $\sin \alpha < \sin \beta$. C. $\tan \alpha + \cot \beta > 0$. D. $\cot \alpha \tan \beta > 0$.

Lời giải.

Chọn $\alpha = 30^\circ$ và $\beta = 60^\circ$ khi đó $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ và $\cos \beta = \frac{1}{2}$. Nên mệnh đề $\cos \alpha < \cos \beta$ là sai.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 104. Cho tam giác ABC có các góc A, B, C . Tìm khẳng định **sai**?

- A. $\sin A = \sin (B + C)$. B. $\cos C + \cos (A + B) = 0$.
C. $\cot B = \cot (A + C)$. D. $\sin \frac{B}{2} = \cos \frac{A + C}{2}$.

Lời giải.

Ta có $B + (A + C) = 180^\circ$ nên $\cot B = \cot [180^\circ - (A + C)] = -\cot(A + C)$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 105. Tính số đo góc giữa hai véc-tơ $\vec{a} = (-1; 0)$, $\vec{b} = (1; \sqrt{3})$.

- A. 30° . B. 120° . C. 60° . D. 45° .

Lời giải.

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = (-1) \cdot 1 + 0 \cdot \sqrt{3} = -1$ và $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$.

Do đó $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-1}{1 \cdot 2} = -\frac{1}{2}$. Suy ra $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 106. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào đúng?

- A. $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$. B. $\cos 150^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\tan 150^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $\cot 150^\circ = \sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có

- $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$.
- $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\tan 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
- $\cot 150^\circ = -\sqrt{3}$

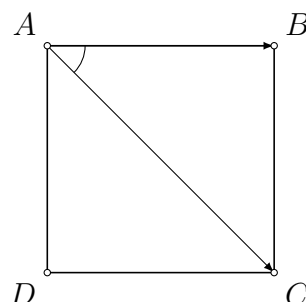
Chọn đáp án **(A)** □

Câu 107. Cho hình vuông $ABCD$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. $(\vec{AD}, \vec{AB}) = 90^\circ$. B. $(\vec{AB}, \vec{CA}) = 45^\circ$. C. $(\vec{AD}, \vec{BC}) = 0^\circ$. D. $(\vec{AB}, \vec{CD}) = 180^\circ$.

Lời giải.

Hiển nhiên ta thấy ngay $(\vec{AB}, \vec{AC}) = 45^\circ$.



Chọn đáp án **(B)** □

Câu 108. Cho hai vector $\vec{a} = (-1; 1)$, $\vec{b} = (2; 0)$. Góc giữa hai vector $\vec{a}$, $\vec{b}$ bằng

- A. 60° . B. 45° . C. 90° . D. 135° .

Lời giải.

$$\text{Ta có } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-2}{\sqrt{2} \cdot 2} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 109. Cho góc α tù, khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A. $\sin \alpha < 0$. B. $\cos \alpha > 0$. C. $\tan \alpha < 0$. D. $\cot \alpha > 0$.

Lời giải.

Nếu α là góc tù thì $\cos \alpha < 0$, $\tan \alpha < 0$, $\cot \alpha < 0$, và $\sin \alpha > 0$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 110. Cho hai góc nhọn α và β trong đó $\alpha < \beta$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\sin \alpha < \sin \beta$. B. $\cos \alpha < \cos \beta$.
C. $\cos \alpha = \sin \beta \Leftrightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$. D. $\cot \alpha + \tan \beta > 0$.

Lời giải.

Từ lý thuyết giáo khoa, ta suy ra “ $\cos \alpha < \cos \beta$ khi $\alpha < \beta$ ” là mệnh đề **sai**.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 111. Cho hai góc nhọn α và β trong đó $\alpha < \beta$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\sin \alpha < \sin \beta$. B. $\cos \alpha < \cos \beta$.
C. $\cos \alpha = \sin \beta \Leftrightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$. D. $\cot \alpha + \tan \beta > 0$.

Lời giải.

Vì α, β là hai góc nhọn và $\alpha < \beta$ nên

- $\begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan \alpha > 0 \\ \cot \alpha > 0 \end{cases} \Rightarrow \tan \alpha + \cot \alpha > 0.$
- $\alpha + \beta = 90^\circ \Leftrightarrow \alpha = 90^\circ - \beta \Leftrightarrow \cos \alpha = \cos(90^\circ - \beta) \Leftrightarrow \cos \alpha = \sin \beta.$
- $\sin \alpha < \sin \beta.$
- $\cos \alpha > \cos \beta.$

Vậy khẳng định sai là $\cos \alpha < \cos \beta$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 112. Cho $\tan \alpha = \sqrt{2}$. Tính giá trị của biểu thức $B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha + 2 \sin \alpha}$

- A. $B = \frac{3(\sqrt{2}-1)}{3+8\sqrt{2}}$. B. $B = \frac{3\sqrt{2}-1}{3+8\sqrt{2}}$. C. $B = \frac{3(\sqrt{2}-1)}{1+8\sqrt{2}}$. D. $B = \frac{3\sqrt{2}+1}{8\sqrt{2}-1}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } B &= \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha + 2 \sin \alpha} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos^3 \alpha}}{\frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + 3 \frac{\cos^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + 2 \frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha}} \\ &= \frac{\tan \alpha (1 + \tan^2 \alpha) - (1 + \tan^2 \alpha)}{\tan^3 \alpha + 3 + 2 \tan \alpha (1 + \tan^2 \alpha)} = \frac{\tan^3 \alpha - \tan^2 \alpha + \tan \alpha - 1}{3 \tan^3 \alpha + 2 \tan \alpha + 3} \\ &= \frac{2\sqrt{2} - 2 + \sqrt{2} - 1}{6\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 3} = \frac{3(\sqrt{2} - 1)}{3 + 8\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 113. Biết $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2017} + 1}{2018}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Tính giá trị của biểu thức $M = \cot \alpha + \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$

A. $M = -\frac{\sqrt{2017} + 1}{2018}$. B. $M = \frac{\sqrt{2017} + 1}{2018}$. C. $M = \frac{2018}{\sqrt{2017} + 1}$. D. $M = \frac{2018}{\sqrt{2017} + 1}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } M &= \cot \alpha + \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \\ &= \frac{\cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{\cos \alpha + 1}{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{2018}{\sqrt{2017} + 1}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 114. Cho tam giác ABC . Đẳng thức nào **sai**?

A. $\sin(A + B - 2C) = \sin 3C$. B. $\cos \frac{B + C}{2} = \sin \frac{A}{2}$.
C. $\cos \frac{A + B + 2C}{2} = \sin \frac{C}{2}$. D. $\sin(A + B) = \sin C$.

Lời giải.

$$\text{Do } \cos \frac{A + B + 2C}{2} = \cos \left(\frac{A + B + C + C}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{C}{2} \right) = -\sin \frac{C}{2}.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 115. Cho $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$. Tính $P = |\sin x - \cos x|$.

A. $P = \frac{3}{4}$. B. $P = \frac{4}{5}$. C. $P = \frac{5}{6}$. D. $P = \frac{7}{5}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } P^2 = (\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2 \sin x \cdot \cos x.$$

Theo giả thiết

$$\frac{1}{5} = \sin x + \cos x \Rightarrow \frac{1}{25} = (\sin x + \cos x)^2 \Rightarrow \frac{1}{25} = 1 + 2 \sin x \cdot \cos x \Rightarrow 2 \sin x \cdot \cos x = -\frac{24}{25}.$$

$$\text{Do đó } P^2 = 1 + \frac{24}{25} = \frac{49}{25} \Rightarrow P = \frac{7}{5} \text{ (Vì } P \geq 0 \text{)}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 116. Tính giá trị biểu thức $P = \sin 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ$.

A. $P = 1$. B. $P = 0$. C. $P = \sqrt{3}$. D. $P = -\sqrt{3}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } P = \sin 30^\circ \cdot \sin 30^\circ + \cos 30^\circ \cdot \cos 30^\circ = \sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = 1.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 117. Biết $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2017} + 1}{2018}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Tính giá trị của biểu thức $M = \cot \alpha + \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$.

- A. $M = -\frac{\sqrt{2017} + 1}{2018}$. B. $M = \frac{\sqrt{2017} + 1}{2018}$. C. $M = -\frac{2018}{\sqrt{2017} + 1}$. D. $M = \frac{2018}{\sqrt{2017} + 1}$.

Lời giải.

$$M = \cot \alpha + \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{2018}{\sqrt{2017} + 1}.$$

Chọn đáp án **(D)**

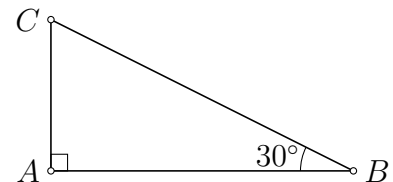
□

Câu 118. Cho tam giác ABC vuông tại A và góc $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Xác định góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$.

- A. 60° . B. 120° . C. -30° . D. 30° .

Lời giải.

$$\text{Góc } (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \widehat{ACB} = 90^\circ - \widehat{ABC} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$



Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 119. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai véc-tơ $\vec{a} = (3; 2)$, $\vec{b} = (5; -1)$. Khi đó, góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là

- A. 45° . B. 90° . C. 60° . D. 30° .

Lời giải.

$$\text{Ta có } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3 \cdot 5 + 2 \cdot (-1)}{\sqrt{3^2 + 2^2} \cdot \sqrt{5^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \text{ Vậy góc giữa hai véc-tơ } \vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ bằng } 45^\circ.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

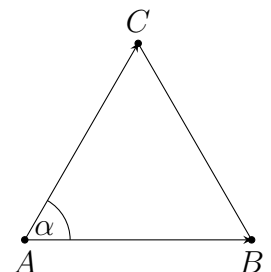
Câu 120. Cho tam giác đều ABC . Gọi α là góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. Tính α .

- A. $\alpha = 30^\circ$. B. $\alpha = 120^\circ$. C. $\alpha = 90^\circ$. D. $\alpha = 60^\circ$.

Lời giải.

Ta có

$$\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{BAC} = 60^\circ.$$



Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 121. Cho góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 60° . Hỏi góc giữa hai véc-tơ $2\vec{a}$ và $-3\vec{b}$ bằng

- A. 120° . B. 60° . C. 90° . D. 30° .

Lời giải.

$$(2\vec{a}, -3\vec{b}) = (\vec{a}, -\vec{b}) = 180^\circ - (\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 122. Cho hai véc-tơ $\vec{a} = (-1; 1)$, $\vec{b} = (2; 0)$. Góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ là

- A. 45° . B. 60° . C. 90° . D. 135° .

Lời giải.

Góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ được tính bằng công thức:

$$\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{-1 \cdot 2 + 1 \cdot 0}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + 0^2}} = -\frac{2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 123. Cho $\triangle ABC$ đều cạnh a . Góc giữa hai véc-tơ $\vec{AB}$ và $\vec{BC}$ là

- A. 120° . B. 60° . C. 45° . D. 135° .

Lời giải.

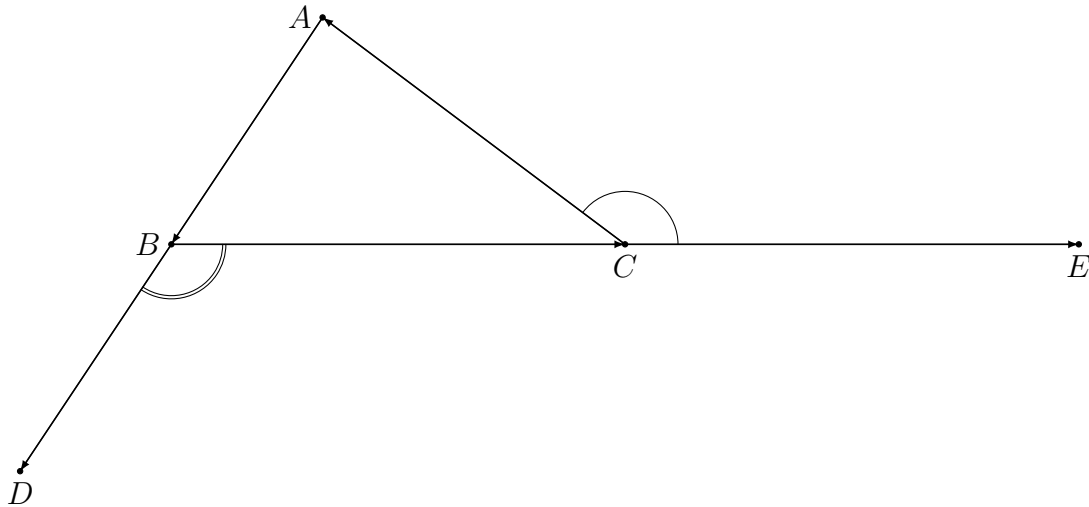
Ta có góc giữa hai véc-tơ $\vec{BA}$ và $\vec{BC}$ bằng 60° suy ra góc giữa hai véc-tơ $\vec{AB}$ và $\vec{BC}$ bằng 120° .

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 124. Cho tam giác ABC với $\hat{A} = 60^\circ$. Tính tổng $(\vec{AB}, \vec{BC}) + (\vec{BC}, \vec{CA})$.

- A. 120° . B. 360° . C. 270° . D. 240° .

Lời giải.



Vẽ các véc-tơ $\vec{BD} = \vec{AB}$, $\vec{CE} = \vec{BC}$.

Ta có $(\vec{AB}, \vec{BC}) + (\vec{BC}, \vec{CA}) = (\vec{BD}, \vec{BC}) + (\vec{CE}, \vec{CA}) = \widehat{CBD} + \widehat{ACE}$

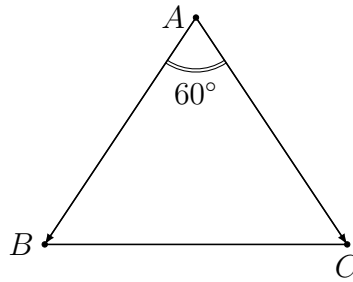
$$= 180^\circ - \widehat{ABC} + 180^\circ - \widehat{ACB} = 360^\circ - (\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) = 360^\circ - (180^\circ - \hat{A}) = 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 125. Cho tam giác đều ABC . Tính $\cos(\vec{AB}, \vec{AC}) + \cos(\vec{BA}, \vec{BC}) + \cos(\vec{CB}, \vec{CA})$.

- A. $\frac{3}{2}$. B. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $-\frac{3}{2}$.

Lời giải.



Ta có $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + \cos(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = 3 \cos 60^\circ = \frac{3}{2}$.

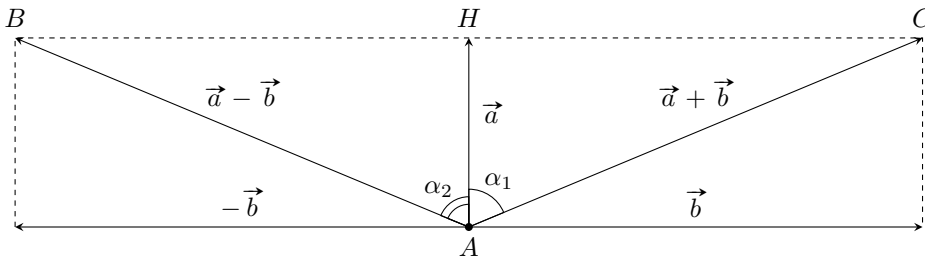
Chọn đáp án **A** □

Câu 126. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 12$ và $|\vec{a} + \vec{b}| = 13$. Khi đó cosin của góc giữa hai véc-tơ $\vec{a} - \vec{b}$ và $\vec{a} + \vec{b}$ bằng

- A. $\frac{12}{13}$. B. $\frac{5}{12}$. C. $-\frac{119}{169}$. D. $\frac{119}{169}$.

Lời giải.

Kí hiệu các véc-tơ và góc như hình vẽ bên dưới:



Cách 1. Nhận thấy $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$, suy ra $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$, suy ra $\vec{a} \perp \vec{b}$

Mặt khác: $\cos \alpha_1 = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a} + \vec{b}|} = \frac{5}{13} \Rightarrow \alpha_1 = \cos^{-1} \frac{5}{13}$.

Do đó góc giữa hai véc-tơ $\vec{a} - \vec{b}$ và $\vec{a} + \vec{b}$ bằng $\alpha_1 + \alpha_2 = 2\alpha_1 = 2 \cdot \cos^{-1} \frac{5}{13}$

Vậy $\cos(\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}) = \cos\left(2 \cdot \cos^{-1} \frac{5}{13}\right) = -\frac{119}{169}$.

Cách 2. Xét tam giác cân ABC có $AB = AC = 13$, $BC = 2 \times 12 = 24$.

Ta có $\cos(\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}) = \cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{13^2 + 13^2 - 24^2}{2 \cdot 13 \cdot 13} = -\frac{119}{169}$

Chọn đáp án **C** □

Câu 127. Cho $\tan \alpha = \sqrt{2}$. Tính $B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha + 2 \sin \alpha}$.

- A. $B = \frac{3(\sqrt{2} - 1)}{3 + 8\sqrt{2}}$. B. $B = \frac{3\sqrt{2} - 1}{8\sqrt{2} + 3}$. C. $B = \frac{3(\sqrt{2} - 1)}{8\sqrt{2} + 1}$. D. $B = \frac{3\sqrt{2} + 1}{8\sqrt{2} - 1}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha + 2 \sin \alpha} = \frac{\tan \alpha \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{\cos^2 \alpha}}{\tan^3 \alpha + 3 + 2 \tan \alpha \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\tan \alpha (1 + \tan^2 \alpha) - (1 + \tan^2 \alpha)}{\tan^3 \alpha + 3 + 2 \tan \alpha (1 + \tan^2 \alpha)} \\ &= \frac{(1 + \tan^2 \alpha)(\tan \alpha - 1)}{3 \tan^3 \alpha + 2 \tan \alpha + 3} = \frac{3(\sqrt{2} - 1)}{8\sqrt{2} + 3}. \end{aligned}$$

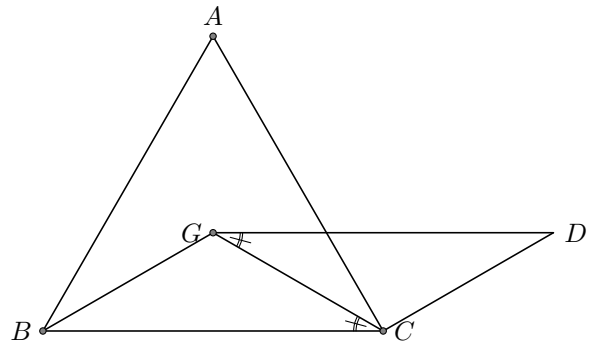
Chọn đáp án **A** □

Câu 128. Cho tam giác ABC đều có G là trọng tâm. Khi đó góc giữa $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{GC}$ bằng

- A. 120° . B. 30° . C. 150° . D. 60° .

Lời giải.

Từ G vẽ $\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{BC}$ do đó góc giữa $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{GC}$ bằng góc giữa $\overrightarrow{GD}$ và $\overrightarrow{GC}$ tức là góc $\widehat{DGC}$. Mặt khác $\widehat{DGC} = \widehat{GCB}$. Và tam giác ABC là tam giác đều với G là trọng tâm nên $\widehat{GCB} = 30^\circ$. Vậy góc giữa $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{GC}$ bằng 30° .



Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 129. Cho tam giác ABC đều. Giá trị $\sin(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC})$ là

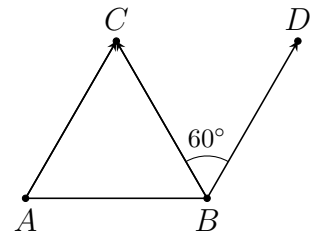
- A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Dựng $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$.

Khi đó, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) = \widehat{CBD} = 60^\circ$.

Vậy $\sin(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 130. Cho α là góc tù. Điều khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\sin \alpha < 0$. B. $\cos \alpha > 0$. C. $\tan \alpha < 0$. D. $\cot \alpha > 0$.

Lời giải.

Vì α là góc tù suy ra $\begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases} \Rightarrow \tan \alpha < 0$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 131. Cho góc nhọn α có $\sin \alpha = \frac{1}{2}$. Giá trị của $\cos \alpha$ là

- A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Do α là góc nhọn, suy ra $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án **(C)**

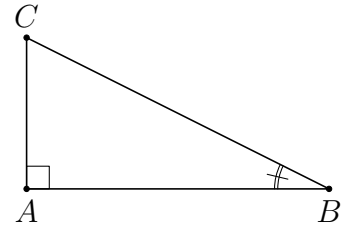
□

Câu 132. Tam giác ABC vuông ở A và có góc $\widehat{B} = 30^\circ$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\cos C = \frac{1}{2}$. C. $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\sin B = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\cos B = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Chọn đáp án **(A)** □

Câu 133. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. $\cos 150^\circ = \frac{-\sqrt{3}}{2}$. B. $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$. C. $\sin 120^\circ = \frac{1}{2}$. D. $\cot 90^\circ = 0$.

Lời giải.

Ta có $\cos 150^\circ = \frac{-\sqrt{3}}{2}$, $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$, $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cot 90^\circ = 0$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 134. Cho góc α , $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\cos \alpha = \cos (180^\circ - \alpha)$. B. $\tan \alpha = \tan (180^\circ - \alpha)$.
C. $\cot \alpha = \cot (180^\circ - \alpha)$. D. $\sin \alpha = \sin (180^\circ - \alpha)$.

Lời giải.

Hai góc α và $180^\circ - \alpha$ có tổng bằng 180° nên $\sin \alpha = \sin (180^\circ - \alpha)$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 135. Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau đây

- A. $\tan 45^\circ < \tan 60^\circ$. B. $\cos 45^\circ \leq \sin 45^\circ$. C. $\sin 60^\circ < \sin 80^\circ$. D. $\cos 35^\circ > \cos 10^\circ$.

Lời giải.

Khi $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$ hàm $\cos \alpha$ là hàm giảm nên $\cos 35^\circ < \cos 10^\circ$ suy ra “ $\cos 35^\circ > \cos 10^\circ$ ” sai.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 136. Cho α và β là hai góc khác nhau và bù nhau. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

- A. $\tan \alpha = -\tan \beta$. B. $\sin \alpha = -\sin \beta$. C. $\cos \alpha = \cos \beta$. D. $\cot \alpha = \cot \beta$.

Lời giải.

Với $\alpha \neq \beta$ và $\alpha + \beta = 180^\circ$ thì

- $\sin \alpha = \sin \beta$.
- $\cos \alpha = -\cos \beta$.
- $\tan \alpha = -\tan \beta$.
- $\cot \alpha = -\cot \beta$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 137. Cho $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\cot (90^\circ + \alpha) = \tan \alpha$. B. $\cos (90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$.
C. $\sin (90^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$. D. $\tan (90^\circ + \alpha) = \cot \alpha$.

Lời giải.

Khẳng định đúng là $\cos (90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 138. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\cos \alpha = -\cos (180^\circ - \alpha)$.

B. $\cot \alpha = \cot (180^\circ - \alpha)$.

C. $\tan \alpha = \tan (180^\circ - \alpha)$.

D. $\sin \alpha = -\sin (180^\circ - \alpha)$.

Lời giải.

Với hai góc bù nhau ta có $\cos \alpha = -\cos (180^\circ - \alpha)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 139. Cho $\vec{a} = (1; -2)$, $\vec{b} = (-1; -3)$. Tính $(\vec{a}, \vec{b})$.

A. $(\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$.

B. $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$.

C. $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$.

D. $(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$.

Lời giải.

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}, |\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}.$$

$$\text{Ta có } \cos (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-3)}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ.$$

Chọn đáp án **D**

□

ĐÁP ÁN

1. B	2. A	3. C	4. D	5. A	6. D	7. A	8. D	9. A	10. C
11. C	12. D	13. B	14. C	15. A	16. C	17. A	18. C	19. B	20. A
21. C	22. A	23. A	24. B	25. C	26. D	27. B	28. B	29. B	30. D
31. A	32. C	33. C	34. B	35. B	36. A	37. C	38. D	39. D	40. B
41. B	42. D	43. D	44. B	45. C	46. C	47. A	48. D	49. D	50. C
51. B	52. B	53. C	54. A	55. D	56. A	57. C	58. C	59. A	60. A
61. C	62. A	63. D	64. D	65. A	66. C	67. D	68. A	69. B	70. C
71. B	72. B	73. C	74. C	75. D	76. D	77. C	78. B	79. A	80. C
81. C	82. B	83. A	84. B	85. A	86. D	87. A	88. D	89. C	90. A
91. D	92. B	93. D	94. B	95. B	96. B	97. D	98. C	99. C	100. D
101. A	102. D	103. A	104. C	105. B	106. A	107. B	108. D	109. C	110. B
111. B	112. A	113. D	114. C	115. D	116. A	117. D	118. A	119. A	120. D
121. A	122. D	123. A	124. D	125. A	126. C	127. A	128. B	129. D	130. C
131. C	132. A	133. C	134. D	135. D	136. A	137. B	138. A	139. D	

§2 TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO

§3 TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VEC-TƠ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức sau:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

Trường hợp ít nhất một trong hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng véc-tơ $\vec{0}$ ta quy ước $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

a) Với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác véc-tơ $\vec{0}$ ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

! b) Khi $\vec{a} = \vec{b}$ tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{a}$ được kí hiệu là $\vec{a}^2$ và số này được gọi là bình phương vô hướng của véc-tơ $\vec{a}$.

Ta có: $\vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$.

2 CÁC TÍNH CHẤT CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

Tính chất 1. Với ba véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bất kì và mọi số k ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (tính chất giao hoán);

- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (tính chất phân phối);
- $(k \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k \vec{b})$;
- $\vec{a}^2 \geq 0, \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

Nhận xét: Từ các tính chất của tích vô hướng hai véc-tơ ta suy ra

- $(\vec{a} + \vec{a})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$;
- $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$;
- $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$.

3 BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

Trong mặt phẳng tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j})$, cho hai véc-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$. Khi đó tích vô hướng của hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.

Nhận xét:

Hai véc-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$ đều khác véc-tơ $\vec{0}$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$.

4 ỨNG DỤNG

a) Độ dài véc-tơ:

Độ dài của véc-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ được xác định bởi công thức: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

b) Góc giữa hai véc-tơ: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$

c) Khoảng cách giữa hai điểm:

Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ được tính theo công thức:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Các bài toán tính tích vô hướng của hai véc-tơ

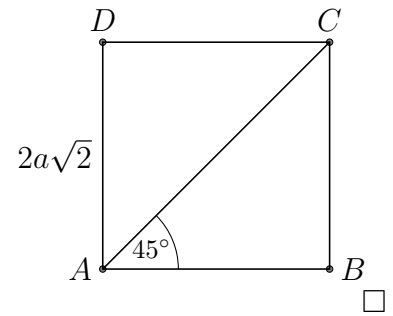
- Áp dụng công thức của định nghĩa: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.
- Sử dụng tính chất phân phối: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.
- Hai véc-tơ $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

BÀI TẬP DẠNG 1

Ví dụ 1. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng $2a\sqrt{2}$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Vì tam giác ABC vuông tại A nên $AC^2 = AB^2 + BC^2 = (2a\sqrt{2})^2 + (2a\sqrt{2})^2 = 16a^2$
 $\Rightarrow AC = 4a$. Suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a\sqrt{2} \cdot 4a \cdot \cos 45^\circ = 8a^2$.

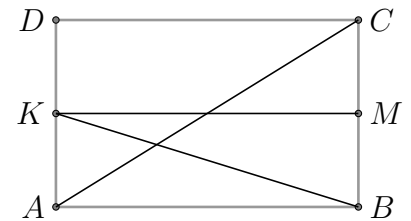


Ví dụ 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a\sqrt{2}$, $AD = 2a$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD .

- Phân tích $\overrightarrow{BK}$, $\overrightarrow{AC}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.
- Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

- Gọi M là trung điểm của cạnh BC
 Ta có: $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.
 Mặt khác: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
- Ta có: $AB = a\sqrt{2}$, $AC = BD = \sqrt{2a^2 + 4a^2} = a\sqrt{6}$.
 Suy ra $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(-\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$
 $= -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD}$
 $= -2a^2 + 0 + 0 + \frac{1}{2}(2a)^2 = 0$.
 Vậy $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.



Ví dụ 3. Cho hai vec-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 12$ và $|\vec{a} + \vec{b}| = 13$. Tính cosin của góc giữa hai vec-tơ $\vec{a}$ và $\vec{a} + \vec{b}$.

Lời giải.

Đựng tam giác ABC có $AB = 5$, $BC = 12$, $AC = 13$.

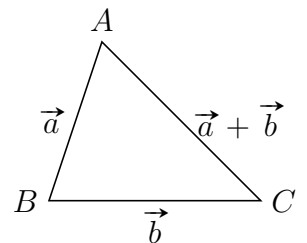
Ta có: $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 12$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 13$

và $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.

Khi đó: $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Mặt khác: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AC^2 + AB^2 - BC^2) = \frac{1}{2}(13^2 + 5^2 - 12^2) = 25$.

Vậy $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{25}{5 \cdot 13} = \frac{5}{13}$.



Ví dụ 4. Cho hình vuông $ABCD$ có M là trung điểm của đoạn thẳng AB và N là điểm thuộc đoạn AC sao cho $AN = 3NC$.

- Phân tích $\overrightarrow{DN}$, $\overrightarrow{MN}$ theo 2 vec-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

b) Chứng minh rằng $DN \perp MN$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{DN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$

Mặt khác

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}.$$

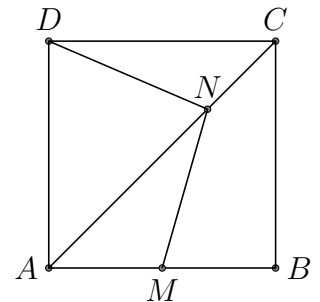
b) Để chứng minh $DN \perp MN$ thì ta chứng minh $\overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{MN} = \left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}\right)$$

$$\overrightarrow{DN} \cdot \overrightarrow{MN} = \frac{3}{16}AB^2 - \frac{3}{16}AD^2 = 0 \text{ (vì } AB \perp AD \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0).$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{DN} \perp \overrightarrow{MN} \Rightarrow DN \perp MN.$$

□



Ví dụ 5. Cho tam giác ABC đều cạnh $3a$. Lấy M, N, P lần lượt nằm trên ba cạnh BC, CA, AB sao cho $BM = a, CN = 2a, AP = x (x > 0)$.

a) Phân tích $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{NP}$ theo 2 vec-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b) Tìm x để AM vuông góc với NP .

Lời giải.

a) Ta có: $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BM} \Rightarrow \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = 3(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB})$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

$$\text{Mặt khác: } \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AN} = \frac{x}{3a}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

b) Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{9a^2}{2}$.

$$\text{Để } AM \perp NP \text{ thì } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{NP} = 0$$

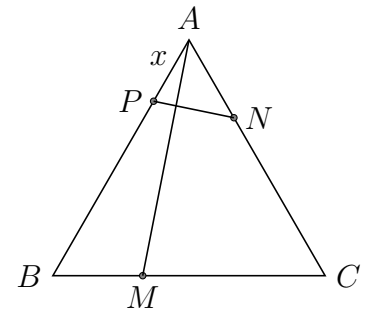
$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) \cdot \left(\frac{x}{3a}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{9a}AB^2 - \frac{2}{9}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{x}{9a}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{1}{9}AC^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{9a} \cdot (3a)^2 - \frac{2}{9} \cdot \frac{9a^2}{2} + \frac{x}{9a} \cdot \frac{9a^2}{2} - \frac{1}{9} \cdot (3a)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4a}{5}.$$

□



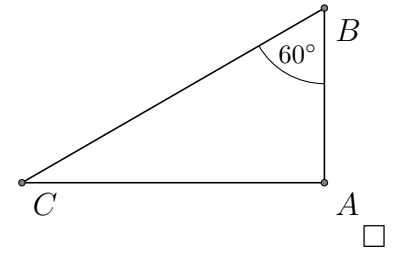
BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 60^\circ, AB = a$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} &= -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -CA \cdot CB \cdot \cos \widehat{ACB} \\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} &= -a\sqrt{3} \cdot 2a \cdot \cos 30^\circ = -3a^2.\end{aligned}$$

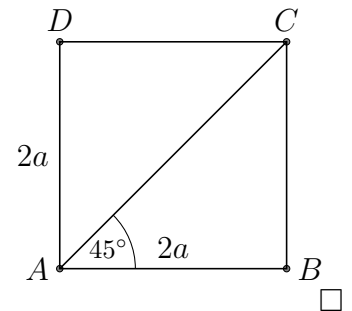


Bài 2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $2a$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2a$ nên $AC = 2a\sqrt{2}$.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos 45^\circ = 2a \cdot 2a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4a^2.$$



Bài 3. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3$, $AD = 4$. Gọi M là điểm thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.

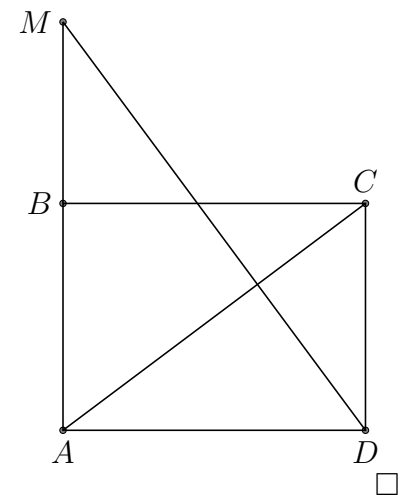
Tìm k để AC vuông góc với DM .

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DM} &= (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) \cdot (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD}) \\ &= \overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) - \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = -16 + 9k.\end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } AC \perp DM \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DM} = 0 \Leftrightarrow k = \frac{16}{9}.$$

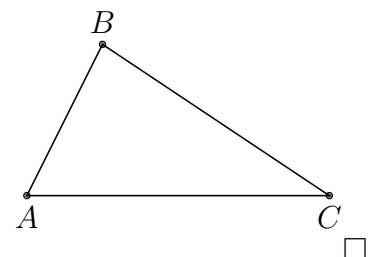


Bài 4. Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 8$, $BC = 7$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BC}^2}{2} = 20.$$



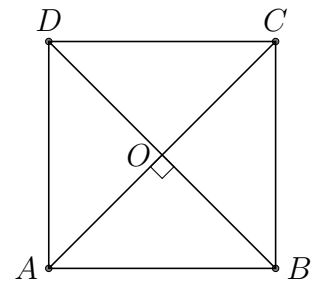
Bài 5. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O . Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MD^2.$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 &= 3MD^2 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 &= 3\overrightarrow{MD}^2 \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 &= 3(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD})^2 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{MO} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 3\overrightarrow{OD}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{MO} \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{DB} &= 0 \text{ (vì } \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}\text{)}. \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MO} = \vec{0} \\ \overrightarrow{MO} \perp \overrightarrow{DB} \end{cases} &\cdot \text{ Vậy tập hợp các điểm } M \text{ là đường thẳng } AC. \end{aligned}$$



□

Bài 6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (C) tâm O . Tìm vị trí điểm M thuộc đường tròn (C) để $P = MA^2 + MB^2 - 2MC^2$ đạt GTLN, GTNN.

Lời giải.

Gọi D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ACBD$, R là bán kính của đường tròn (C) .

Khi đó: $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD}$; $OA = OB = OC = R$.

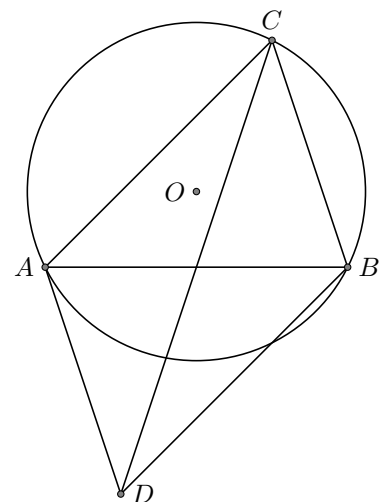
$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= MA^2 + MB^2 - 2MC^2 \\ &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 - 2(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 \\ &= 2\overrightarrow{MO} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}) + OA^2 + OB^2 - 2OC^2 \\ &= 2\overrightarrow{MO} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{CD} = 2R \cdot CD \cdot \cos(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{CD}) \end{aligned}$$

Mặt khác:

$$-1 \leq \cos(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{CD}) \leq 1 \Leftrightarrow -2R \cdot CD \leq P \leq 2R \cdot CD.$$

Vậy min $P = -2R \cdot CD$ khi $\cos(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{CD}) = -1$ tức là M thuộc đường tròn (C) sao cho $\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{CD}$ ngược hướng.

max $P = 2R \cdot CD$ khi $\cos(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{CD}) = 1$ tức là M thuộc đường tròn (C) sao cho $\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{CD}$ cùng hướng.



□

Dạng 2. Tính góc giữa hai véc-tơ -góc giữa hai đường thẳng-điều kiện vuông góc

Để tính góc giữa hai vectơ, ta sử dụng định nghĩa tích vô hướng kết hợp các kĩ thuật tính tích vô hướng.

Để tính góc giữa hai đường thẳng, ta tính góc giữa hai véc-tơ có giá là hai đường thẳng đã cho rồi suy ra góc giữa hai đường thẳng.

Để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, ta chứng minh góc giữa hai đường thẳng bằng 90° .

BÀI TẬP DẠNG 2

Ví dụ 1. Cho các vec-tơ $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j}$. Tìm góc giữa hai vec-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-1 \cdot 1 + 1 \cdot 3}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Do đó góc giữa hai vec-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$ mà $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. □

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $AB = 2, BC = 4, CA = 3$. Tính $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ và $\cos A$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{\vec{AB}^2 + \vec{AC}^2 - (\vec{AB} - \vec{AC})^2}{2} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} = -\frac{3}{2}.$$

$$\text{Lại có } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos A \text{ nên } \cos A = -\frac{3}{2 \cdot 2 \cdot 3} = -\frac{1}{4}. \quad \square$$

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho điểm $A(1; 3)$ và $B(3; -1)$. Tính góc giữa đường thẳng OA và AB .

Lời giải.

$$\text{Ta có } \vec{AO} = (-1; -3) \text{ và } \vec{AB} = (2; -4).$$

$$\text{Ta có } \cos(\vec{AO}, \vec{AB}) = \frac{\vec{AO} \cdot \vec{AB}}{AO \cdot AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Góc giữa vec-tơ $\vec{AO}$ và $\vec{AB}$ bằng góc $\widehat{BAO} = 45^\circ$. Do đó góc giữa đường thẳng OA và đường thẳng AB bằng 45° . □

Ví dụ 4. Cho hai vec-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = \sqrt{2}$. Chứng minh rằng hai vec-tơ $2\vec{a} - \vec{b}$ và $\vec{a} + \vec{b}$ vuông góc với nhau.

Lời giải.

$$\text{Ta có } (2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a}^2 - \vec{b}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Do đó hai vec-tơ $2\vec{a} - \vec{b}$ và $\vec{a} + \vec{b}$ vuông góc với nhau. □

Ví dụ 5. Cho hình vuông $ABCD$ có M là trung điểm của AB và N là trung điểm của BC . Chứng minh rằng $DM \perp AN$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \vec{AN} \cdot \vec{DM} &= \left(\vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{BC} \right) \cdot \left(\vec{DA} + \frac{1}{2} \vec{AB} \right) \\ &= \frac{1}{2} \vec{AB}^2 + \frac{1}{2} \vec{BC} \cdot \vec{DA} + \vec{AB} \cdot \vec{DA} + \frac{1}{4} \vec{BC} \cdot \vec{AB} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $DM \perp AN$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hai véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và véc-tơ $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b}$ vuông góc với véc-tơ $\vec{y} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$. Tính góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Lời giải.

Ta có

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 5|\vec{a}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 8|\vec{b}|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Do đó } |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}.$$

Từ đó suy ra góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 60° . $\square$

Bài 2. Cho các véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$. Tính góc giữa véc-tơ $\vec{a}$ và véc-tơ $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \vec{c}^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \text{ nên } |\vec{c}| = \sqrt{3}.$$

$$\text{Lại có } \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a}(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 3.$$

$$\text{Do đó } |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{c}) = 3 \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Từ đó tính được góc giữa véc-tơ } \vec{a} \text{ và } \vec{c} \text{ là } 30^\circ. \quad \square$$

Bài 3. Cho tứ giác $ABCD$ có $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$. Tính góc giữa hai đường thẳng AC và BD .

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra:

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{CD}^2 = \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{AD}^2$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{CD}^2 - \overrightarrow{BC}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC})\overrightarrow{BD} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB} \cdot 2\overrightarrow{AC} = 0$$

$$\Leftrightarrow DB \perp AC.$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng AC và BD bằng 90° . $\square$

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a; AC = 2a$. Gọi M là trung điểm của BC và điểm D bất kì thuộc cạnh AC . Tính AD theo a để $BD \perp AM$.

Lời giải.

Ta có

$$AM \perp BD$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BD} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = 0$$

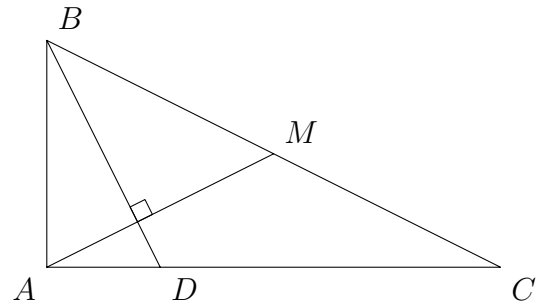
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 - a^2 + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} - 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = a^2$$

$$\Leftrightarrow 2a \cdot AD \cdot \cos 0^\circ = a^2$$

$$\Leftrightarrow AD = \frac{a}{2}.$$



□

Bài 5. Cho tam giác ABC cân tại A , H là trung điểm BC , K là hình chiếu của H trên AC và M là trung điểm của HK . Chứng minh rằng $AM \perp BK$.

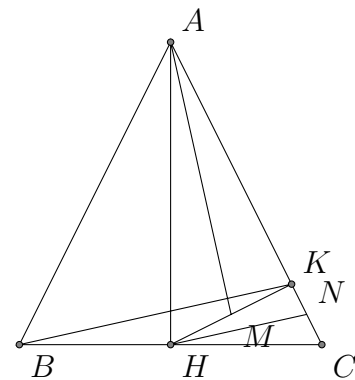
Lời giải.

Gọi N là trung điểm của KC . Khi đó $HN \parallel BK$ nên cần chứng minh $AM \perp HN$.

Ta có $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AK}$; $2\overrightarrow{HN} = \overrightarrow{HK} + \overrightarrow{HC}$. Do đó

$$\begin{aligned} 4\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{HN} &= (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AK}) \cdot (\overrightarrow{HK} + \overrightarrow{HC}) \\ &= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HK} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{HK} + \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{HC} \\ &= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HK} + \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{HC} \\ &= AH \cdot HK \cdot \cos(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{HK}) + AK \cdot HC \cdot \cos(\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{HC}) \\ &= -AH \cdot HK \cdot \cos \widehat{AHK} + AK \cdot HC \cdot \cos \widehat{ACH}. \quad (*) \end{aligned}$$

Dễ thấy tam giác AHK và HCK đồng dạng nên $AH \cdot HK = AK \cdot HC$ và $\widehat{AHK} = \widehat{ACH}$ nên từ $(*)$ có $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{HN} = 0$ hay $AM \perp HK$.



□

Dạng 3. Chứng minh đẳng thức về tích vô hướng hoặc về độ dài.

Liên quan đến đẳng thức về tích vô hướng hoặc độ dài ta có hai bài toán tiêu biểu:

- Bài toán 1: Chứng minh đẳng thức về tích vô hướng hoặc độ dài. Đối với dạng này ta thường sử dụng các tính chất của tích vô hướng, các tính chất của vec tơ để biến đổi tương đương đẳng thức cần chứng minh về một đẳng thức luôn đúng hoặc biến đổi về này thành về kia hoặc biến đổi cả 2 vế cùng bằng một biểu thức trung gian.
- Bài toán 2: Tìm điểm hoặc tập hợp điểm M thỏa mãn một đẳng thức vec tơ hoặc độ dài. Thông thường ta biến đổi đẳng thức ban đầu về dạng $IM = R$ trong đó I cố định, R không đổi hoặc $\overrightarrow{IM} \cdot \vec{u} = 0$ trong đó I cố định và $\vec{u}$ là một vec tơ xác định.

BÀI TẬP DẠNG 3

Ví dụ 1. Cho bốn điểm A, B, C, D bất kì. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

Lời giải.

Đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{DA} (\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}) + \overrightarrow{DB} (\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{DC} (\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}) = 0 \\ \Leftrightarrow & \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} = 0. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có diện tích bằng S . Chứng minh rằng:

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{4} AB^2 \cdot AC^2 \cdot \sin^2 A = \frac{1}{4} AB^2 \cdot AC^2 (1 - \cos^2 A) \\ &= \frac{1}{4} \left[AB^2 \cdot AC^2 - (AB \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}))^2 \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[AB^2 \cdot AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2 \right] \end{aligned}$$

Vậy ta được $S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}.$

□

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC có trực tâm H và trung điểm cạnh BC là M . Chứng minh rằng $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{4} BC^2.$

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ và $\overrightarrow{HM} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC})$ nên

$$\begin{aligned} 4 \cdot \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MH} &= 4 \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{HM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) (\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HC} \\ &= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HC} \\ &= \overrightarrow{AB} (\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{AC} (\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BC}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB} (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = CB^2. \end{aligned}$$

Vậy $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{4} BC^2.$

□

Ví dụ 4. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a . Tìm tập hợp tất cả các điểm M sao cho

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{a^2}{4}$$

Lời giải.

⊕ **Phần thuận.** Giả sử ta có điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Gọi O là tâm của tam giác ABC , ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MO}$, suy ra

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2 &= 9OM^2. \\ \Leftrightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 + 2(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}) &= 9MO^2 \end{aligned}$$

Mặt khác, ta lại có

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 \\ &= 3MO^2 + OA^2 + OB^2 + OC^2 + 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{MO} \\ &= 3MO^2 + a^2 \end{aligned}$$

Như vậy, ta được

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = 3MO^2 - \frac{a^2}{2}$$

Do đó

$$3OM^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow OM = \frac{a}{2}$$

⊕ **Phần đảo.** Giả sử ta có điểm M thuộc đường tròn tâm O bán kính $R = \frac{a}{2}$. Bằng cách biến đổi tương tự phần thuận ta được $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{a^2}{4}$.

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm O bán kính $R = \frac{a}{2}$. □

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp những điểm M thỏa mãn $MA^2 - MB^2 + CA^2 - CB^2 = 0$.

Lời giải.

⊕ **Phần thuận:** Gọi I là trung điểm AB . Ta có

$$\begin{aligned} MA^2 - MB^2 + CA^2 - CB^2 &= (\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2) + (\overrightarrow{CA}^2 - \overrightarrow{CB}^2) \\ &= (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB})(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) \\ &= 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CI} \\ &= 2\overrightarrow{BA}(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{CI}). \end{aligned}$$

Đựng vec tơ $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{CI}$, kết hợp với giả thiết ta được

$$0 = \overrightarrow{BA}(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IJ}) = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MJ}$$

Do đó M thuộc đường thẳng Δ đi qua J và vuông góc với AB .

⊕ **Phần đảo:** Giả sử $M \in \Delta$, biến đổi ngược lại so với phần thuận ta được $MA^2 - MB^2 + CA^2 - CB^2 = 0$. Vậy tập hợp điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán là đường thẳng đi qua J và vuông góc với AB . $\square$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hai điểm A, B và O là trung điểm của AB . Gọi M là một điểm tùy ý Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = OM^2 - OA^2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}) (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}) \\ &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OM} + OM^2 \\ &= OM^2 - OA^2.\end{aligned}$$

$\square$

Bài 2. Cho tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng $AC \perp BD \Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}AB^2 + CD^2 &= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{CD}^2 = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB})^2 + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD})^2 \\ &= AD^2 + 2\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AD} + DB^2 + BC^2 + 2\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CB} + BD^2 \\ &= BC^2 + AD^2 + 2\overrightarrow{DB} (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CB}) \\ &= BC^2 + AD^2 + 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD}.\end{aligned}$$

Do đó $AC \perp BD \Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$. $\square$

Bài 3. Cho tam giác ABC có trực tâm H . Gọi M là trung điểm BC . Chứng minh rằng $MH^2 + MA^2 = AH^2 + \frac{1}{2}BC^2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}AH^2 &= (\overrightarrow{MH} - \overrightarrow{MA})^2 \\ &= MH^2 + MA^2 - 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MH} \\ &= MH^2 + MA^2 - 2 \cdot \frac{1}{4}BC^2 \text{ (Xem Ví dụ 3)}\end{aligned}$$

Do đó $MH^2 + MA^2 = AH^2 + \frac{1}{2}BC^2$ $\square$

Bài 4. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp tất cả các điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ Do đó M thuộc đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB . $\square$

Bài 5. Cho hai điểm A, B có $AB = a$ và một số thực $k > 0$. Tùy theo k , tìm tập hợp điểm M thỏa mãn $MA^2 + MB^2 = k$.

Lời giải.

Gọi O là trung điểm của AB . Ta có

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 \\ &= 2MO^2 + 2OA^2 + OB^2 + 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \\ &= 2MO^2 + 2OA^2 = 2MO^2 + \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

Suy ra $OM^2 = \frac{1}{2} \left(k - \frac{a^2}{2} \right)$.

- Nếu $k > \frac{a^2}{2}$ thì $OM = \sqrt{\frac{1}{2} \left(k - \frac{a^2}{2} \right)}$ nên tập hợp M là đường tròn tâm O bán kính $R = \sqrt{\frac{1}{2} \left(k - \frac{a^2}{2} \right)}$.
- Nếu $k = \frac{a^2}{2}$ thì $OM = 0 \Leftrightarrow M \equiv O$ nên tập hợp điểm M là $\{O\}$.
- Nếu $k < \frac{a^2}{2}$ thì không tồn tại M nên tập hợp điểm M là tập $\emptyset$.

□

Bài 6. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp tất cả các điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = BC^2 - MB^2 + MC^2$.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned} BC^2 &= \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) - MB^2 - MC^2 \\ &= (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) \\ &= 3\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{BC}. \end{aligned}$$

Gọi M_0, G_0 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M và G trên BC thì đẳng thức trên tương đương với

$$3M_0G_0 \cdot BC = BC^2 \Leftrightarrow M_0G_0 = \frac{BC}{3}$$

do đó M_0 cố định. Vậy M thuộc đường thẳng đi qua M_0 và vuông góc với BC . □

Bài 7. Cho tam giác ABC có trọng tâm là G . Chứng minh rằng với mọi điểm M ta có $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$. Từ đó tìm vị trí của M để tổng $T = MA^2 + MB^2 + MC^2$ có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 &= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 \\ &= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) \\ &= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $MA^2 + MB^2 + MC^2 \geq GA^2 + GB^2 + GC^2$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $MG = 0 \Leftrightarrow M \equiv G$. $\square$

Bài 8. Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$. Trên cạnh AB lấy điểm M . Chứng minh rằng $c^2.CM^2 = a^2.AM^2 + b^2.BM^2 + (a^2 + b^2 - c^2)AM.BM$. Từ đó tính độ dài đường phân giác góc C theo độ dài ba cạnh của tam giác ABC .

(Định lý Stewart)

Lời giải.

Do M thuộc cạnh AB nên

$$\overrightarrow{AM} = -\frac{AM}{BM}\overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \frac{AM}{AB}\overrightarrow{CB} + \frac{BM}{AB}\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow c.\overrightarrow{CM} = AM.\overrightarrow{CB} + BM.\overrightarrow{CA}$$

Do đó

$$\begin{aligned} c^2.CM^2 &= AM^2.CB^2 + BM^2.CA^2 + 2AM.BM.\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} \\ &= a^2.AM^2 + b^2.BM^2 + 2AM.BM.CA.CB.\cos C \\ &= a^2.AM^2 + b^2.BM^2 + (a^2 + b^2 - c^2)AM.BM. \end{aligned}$$

Nếu D là chân đường phân giác của góc C thì dựa vào tính chất đường phân giác ta tính được

$$CD = \sqrt{\frac{ab[(a+b)^2 - c^2]}{(a+b)^2}} = \frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}$$

trong đó $p = \frac{a+b+c}{2}$. $\square$

Dạng 4. Ứng dụng của biểu thức tọa độ tích vô hướng vào tìm điểm thỏa mãn điều kiện cho trước

Phương pháp giải, kinh nghiệm: Phương pháp chung của dạng bài này là tọa độ hoá các điểm và thay vào các điều kiện để tìm điểm. Đa số các bài chỉ cần thay tọa độ và áp dụng các công thức là tính được, tuy nhiên một số bài có các tính chất đặc biệt mà nhờ nó, ta sẽ giảm đáng kể lượng công việc.

BÀI TẬP DẠNG 4

Ví dụ 1. Cho ba điểm $A(2; 3), B(1; 4), C(5; 2)$. Chứng minh ba điểm trên tạo thành một tam giác.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1; 1), \overrightarrow{AC} = (3; -1) \Rightarrow \frac{-1}{3} \neq \frac{1}{-1} \Rightarrow A, B, C$ không thẳng hàng, tạo thành một tam giác. $\square$

Ví dụ 2. Cho $A(3; 1), B(7; 2)$, tìm $C(x; y)$ thuộc trục Ox sao cho C thuộc đường tròn đường kính AB .

Lời giải.

Ta có: $C \in Ox \Rightarrow C(x; 0)$.

$$C \in (O; \frac{AB}{2}) \Rightarrow AC \perp BC \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$$

$$\overrightarrow{CA} = (3 - x; 1), \overrightarrow{CB} = (7 - x; 2) \Rightarrow (3 - x)(-x + 7) + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 5 + \sqrt{2} \Rightarrow C(5 + \sqrt{2}; 0) \\ x = 5 - \sqrt{2} \Rightarrow C(5 - \sqrt{2}; 0) \end{cases}$$

□

Ví dụ 3. Cho điểm $A(0, 2)$ và điểm $B(x; y) \in (d) : y = 2x - 2$ có hoành độ $x = 1$. Tìm trên (d) điểm C sao cho $\triangle ABC$ cân tại A .

Lời giải.

$$\forall C \in (d) \Rightarrow C(x, 2x - 2); B(1, y) \in (d) \Rightarrow B(1; 0)$$

$$\text{Ta có ngay } \overrightarrow{AB} = (1; -2), \overrightarrow{AC} = (x; 2x - 4).$$

$$\text{Tam giác } ABC \text{ cân tại } A \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| \Rightarrow 5 = x^2 + (2x - 4)^2 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow B(1; 0) \\ x = \frac{11}{5} \Rightarrow C(\frac{11}{5}; \frac{12}{5}) \end{cases}$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho ba điểm $A(6; 3), B(4; 1); C(9; 0)$. Chứng minh ba điểm trên không thẳng hàng. Tính diện tích tam giác ABC .

Lời giải.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (-2; -2), \overrightarrow{AC} = (3; -3) \Rightarrow \frac{-2}{3} \neq \frac{-3}{-2} \Rightarrow A, B, C \text{ tạo thành một tam giác. Lại có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -6 + 6 = 0 \Rightarrow \text{tam giác } ABC \text{ vuông tại } A. S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \sqrt{8} \sqrt{18} = 24$$

□

Bài 2. Cho $A(11; 4), B(8; 2), C(13; y)$. Tìm y để tam giác ABC cân tại A .

Lời giải.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (-3; -2), \overrightarrow{AC} = (2; y - 4).$$

$$A, B, C \text{ không thẳng hàng} \Rightarrow \frac{-3}{-2} \neq \frac{2}{y-4} \Rightarrow y \neq \frac{16}{3}.$$

$$\text{Tam giác cân tại } A \Rightarrow AB = AC \Rightarrow 13 = 4 + (y - 4)^2 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow C(2; 1) \\ y = 7 \Rightarrow C(2; 7) \end{cases}$$

□

Bài 3. Cho $A(3, 4)$, Tìm hai điểm B, C trên trục Ox sao cho tam giác ABC đều.

Lời giải.

$$\text{Ta có } B, C \in Ox \Rightarrow B(x_b; 0), C(x_c; 0). \overrightarrow{AB} = (x_b - 3; -4), \overrightarrow{AC} = (x_c - 3; -4), \overrightarrow{CB} = (x_b - x_c; 0).$$

$$\text{Tam giác } ABC \text{ đều} \Rightarrow \begin{cases} AB = AC \\ AC = BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_b - 3)^2 = (x_c - 3)^2 \\ (x_b - x_c)^2 = (x_b - 3)^2 + 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_b + x_c - 6 = 0 \\ (x_b - x_c)^2 = (x_b - 3)^2 + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_c = 6 - x_b \\ 3(x_b - 3)^2 = 16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_b = 3 + \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow x_c = 3 - \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow B(3 + \frac{4}{\sqrt{3}}; 0), C(3 - \frac{4}{\sqrt{3}}; 0) \\ x_b = 3 - \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow x_c = 3 + \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow B(3 - \frac{4}{\sqrt{3}}; 0), C(3 + \frac{4}{\sqrt{3}}; 0) \end{cases}$$

□

Bài 4. Cho $A(2; 1), C(5; 0)$, tìm $M \in (d) : y = \frac{1}{2}x + 2$ sao cho $MA = \sqrt{13}, MB = \sqrt{17}$.

Lời giải.

$$M \in (d) \Rightarrow M(x; \frac{1}{2}x + 2)$$

$$\begin{cases} MA = \sqrt{13} \\ MB = \sqrt{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (\frac{1}{2}x+1)^2 = 13 \\ (x-5)^2 + (\frac{1}{2}x+2)^2 = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{4}x^2 - 3x - 8 = 0 \\ \frac{5}{4}x^2 - 8x + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow C(5; 4) \quad \square$$

Bài 5. Cho ba điểm $A(3; 4), B(1, 2), C(-1, 5)$.

a/ Chứng minh ba điểm trên tạo thành một tam giác.

b/ Tìm tọa độ trực tâm và chân đường cao hạ từ các đỉnh.

c/ Tìm tọa độ chân đường phân giác trong hạ từ A .

d/ Tìm tọa độ của tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Lời giải.

a/ Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; -2), \overrightarrow{AC} = (-4; 1), \overrightarrow{BC} = (-2; 3) \Rightarrow \frac{-2}{-2} \neq \frac{-4}{1} \Rightarrow$ ba điểm A, B, C tạo thành một tam giác.

b/ Gọi $H(x; y)$ là tọa độ trực tâm của tam giác. Ta có $\overrightarrow{AH} = (x-3; y-4), \overrightarrow{BH} = (x-1; y-2),$.

$$H \text{ là trực tâm} \Rightarrow AH \perp BC, BH \perp AC \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2(x-3) + 3(y-4) = 0 \\ -4(x-1) + (y-2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = \frac{14}{5} \end{cases} \Leftrightarrow H(\frac{6}{5}; \frac{14}{5})$$

c/ Gọi $E(x; y)$ là chân đường phân giác trong của góc A . Ta có $\frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC} = \sqrt{\frac{8}{17}}$.

$$\overrightarrow{BE} = (x-1; y-2), \overrightarrow{EC} = (-1-x; 5-y).$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BE} = \sqrt{\frac{8}{17}} \overrightarrow{EC} \Rightarrow \begin{cases} x-1 = \sqrt{\frac{8}{17}}(-1-x) \\ y-2 = \sqrt{\frac{8}{17}}(5-y) \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1 - \sqrt{\frac{8}{17}}}{1 + \sqrt{\frac{8}{17}}}; \quad y = \frac{5\sqrt{\frac{8}{17}} + 2}{1 + \sqrt{\frac{8}{17}}}$$

$$\Rightarrow E(\frac{1 - \sqrt{\frac{8}{17}}}{1 + \sqrt{\frac{8}{17}}}; \frac{5\sqrt{\frac{8}{17}} + 2}{1 + \sqrt{\frac{8}{17}}})$$

d/ Gọi tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $O(x; y)$.

Ta có trung điểm các cạnh AB, AC, BC lần lượt là $D, I, F \Rightarrow D(2; 3), I(1; \frac{9}{2}), F(0; \frac{7}{2})$

$$\overrightarrow{DO} = (x-2; y-3), \overrightarrow{IO} = (x-1; y-\frac{9}{2}), \overrightarrow{FO} = (x; y-\frac{7}{2})$$

$$DO, IO \text{ lần lượt vuông góc với } AB, AC \Rightarrow \begin{cases} -2(x-2) - 2(y-3) = 0 \\ -4(x-1) + (y-\frac{9}{2}) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{10} \\ y = \frac{41}{10} \end{cases} \Rightarrow O(\frac{9}{10}; \frac{41}{10})$$

□

Bài 6. Cho $A(-2; 0), B(4; 0), C(3; 5)$. Gọi D, E, F lần lượt là chân đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C . Tìm toạ độ của D, E, F và tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF .

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (6; 0), \overrightarrow{AC} = (5; 5), \overrightarrow{BC} = (-1; 5)$. $E(x; y)$ là chân đường vuông góc hạ từ B xuống $AC \Rightarrow BE \perp AC \Rightarrow 5(x - 5) + 5(y) = 0$ (1)

$\overrightarrow{AE} = (x + 2; y)$, ba điểm A, C, E thẳng hàng $\Rightarrow \frac{x + 2}{y} = \frac{5}{5}$ (2).

Từ (1), (2) $\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow E(1; 3)$

Tương tự ta có $D(\frac{49}{13}; \frac{15}{13}), F(0; 3)$

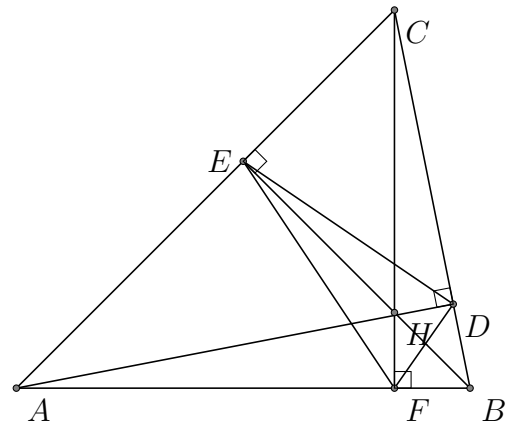
Trục tâm của tam giác ABC là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF !

$H(x; y)$ là trục tâm tam giác $ABC \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$

Với $\overrightarrow{AH} = (x + 2; y), \overrightarrow{BH} = (x - 4; y), \overrightarrow{BC} = (-1; 5), \overrightarrow{AC} = (5; 5)$, ta tìm được $H(3; 1)$.

Chúng minh H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF .

Dễ dàng chứng minh được rằng các tứ giác $C DFA, ABDE, CBFE$ nội tiếp. $\Rightarrow \widehat{EDA} = \widehat{EBA} = \widehat{ACF} = \widehat{ADF} \Rightarrow AD$ là tia phân giác của $\widehat{EDF}$. Chứng minh tương tự ta được H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF .



□

Bài tập tổng hợp

Bài 7. Cho ba điểm $A(-2; 3), B(\frac{1}{4}; 0), C(2; 0)$. Tìm toạ độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Lời giải.

$$AB = \frac{15}{4}, AC = 5, k = -\frac{AB}{AC} = -\frac{3}{4}$$

Gọi D là giao điểm của phân giác trong góc $\hat{A}$ và $BC \Rightarrow \overrightarrow{DB} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} - x = -\frac{3}{4}(2 - x) \\ -y = -\frac{3}{4}(0 - y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow D(1; 0).$$

$$BA = \frac{15}{4}, BD = \frac{3}{4} \Rightarrow k' = -5$$

Gọi J là giao điểm của phân giác trong góc B và AD .

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{JA} = -5\overrightarrow{JD} \Rightarrow \begin{cases} -2 - x = -5(1 - x) \\ 3 - y = -5(0 - y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow J(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}) \quad \square$$

Bài 8. Cho ba điểm $A(2; 6), B(-3; -4), C(5; 0)$. Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Lời giải.

Làm tương tự câu trên ta thu được $J(-2; \frac{2}{3})$. $\square$

Dạng 5. Tìm tọa độ các điểm đặc biệt trong tam giác - tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của một điểm lên đường thẳng

- Trục tâm tam giác
- Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác
- Tâm đường tròn nội tiếp tam giác
- Hình chiếu vuông góc của một điểm lên đường thẳng

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 5 ❖❖❖

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC với $A(x_A, y_A); B(x_B, y_B)$ và $C(x_C, y_C)$

a) Tìm tọa độ trục tâm H của tam giác ABC .

Gọi tọa độ $H(x, y)$. Khi đó

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

Ta thu được hệ 2 phương trình 2 ẩn x, y . Giải hệ ta được tọa độ điểm H .

b) Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

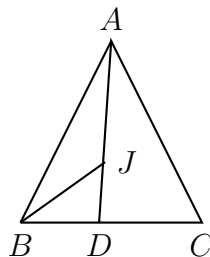
Gọi $I(x, y)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Khi đó $IA = IB$ và $IA = IC$. Do đó, ta có

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 = 0$$

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = 0$$

Giải hệ phương trình ta được tọa độ điểm I .

c) Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC



* Cách 1:

+) Gọi tọa độ điểm $D(x, y)$. Ta tính độ dài cạnh AB và AC .

$$\text{Ta có } \frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC}, \text{ suy ra } \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} := k$$

Do đó $\overrightarrow{DB} = -k\overrightarrow{DC}$, ta được hệ phương trình ẩn x, y , giải hệ ta được tọa độ điểm D .

+) Gọi tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC là $J(x, y)$. Tính độ dài đoạn BD .

Ta có $\frac{JD}{BD} = \frac{JA}{AB}$ suy ra $\frac{JD}{JA} = \frac{BD}{AB} := l$.

Do đó $\overrightarrow{JD} = -l\overrightarrow{JA}$, ta được hệ phương trình ẩn x, y , giải hệ ta được tọa độ điểm J .

* Cách 2:

Áp dụng đẳng thức sau

$$a\overrightarrow{JA} + b\overrightarrow{JB} + c\overrightarrow{JC} = \vec{0}$$

với $AB = c, BC = a, AC = b$.

d) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng BC Gọi tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng BC là $M(x, y)$, ta có

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$\overrightarrow{BM} = t \cdot \overrightarrow{BC}$ Ta thu được hệ 2 phương trình 2 ẩn, giải hệ ta được tọa độ điểm M .

Ví dụ 1. Cho $A(4, 3); B(2, 7); C(-3, -8)$.

- Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC .
- Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC
- Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng BC

Lời giải.

a) Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC .

Gọi $H(x, y)$. Ta có $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ và $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, suy ra $7x + 11y = 91$ và $x + 3y = 13$, giải hệ phương trình ta được $H(13, 0)$.

b) Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Gọi $I(x, y)$. Khi đó $IA = IB$ và $IA = IC$. Do đó, ta có

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = (x - 2)^2 + (y - 7)^2$$

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = (x + 3)^2 + (y + 8)^2$$

giải hệ phương trình ta được $I(-5, 1)$.

c) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng BC

Gọi $M(x, y)$ là hình chiếu vuông góc của điểm A lên cạnh BC . Ta có $\overrightarrow{AM} = (x - 4, y - 3)$ và $\overrightarrow{BC} = (-5, -15); \overrightarrow{BM} = (x - 2, y - 7)$

Khi đó ta có $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ và $\overrightarrow{BM} = t \cdot \overrightarrow{BC}$.

Suy ra $t = \frac{2}{7}$ và $M(\frac{4}{7}, \frac{19}{7})$

□

Ví dụ 2. Cho $A(2, 6); B(-3, -4); C(5, 0)$. Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-5, -10); \overrightarrow{AC} = (3, -6)$, suy ra $AB = 5\sqrt{5}; AC = 3\sqrt{5}$;

Gọi tọa độ điểm $D(x, y)$. Ta có $\frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC}$, suy ra $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} := \frac{5}{3}$

Do đó $\overrightarrow{DB} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{DC}$, ta được hệ phương trình ẩn x, y , giải hệ ta được tọa độ điểm $D(2, -3)$.

Gọi tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC là $J(x, y)$.

Ta có độ dài đoạn $BD = 5\sqrt{5}$.

Khi đó $\frac{JD}{BD} = \frac{JA}{AB}$ suy ra $\frac{JD}{JA} = \frac{BD}{AB} = \frac{5}{3}$.

Do đó $\vec{JD} = -\frac{5}{3}\vec{JA}$, ta được hệ phương trình ẩn x, y , giải hệ ta được tọa độ điểm $J(2, 1)$. $\square$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp J của tam giác ABC trong các trường hợp sau:

a) $A(1, 5); B(4, -1); C(-4, -5)$.

b) $A(0, -4); B(-5, 6); C(3, 2)$

Lời giải.

ĐS: 1) $J(1, \frac{10}{3})$; 2) $J(0, 1)$. $\square$

Bài 2. Cho $A(-1, 4); B(-4, 0)$ và $C(2, -2)$.

a) Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC .

b) Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp I của tam giác ABC

c) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc M của điểm I lên đường thẳng BC

Lời giải.

ĐS: $H(-2, 1); I(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); M(\frac{-5}{8}, \frac{-9}{8})$. $\square$

Bài 3. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC với $A(-1, -3); B(2, 5)$ và $C(4, 0)$. Xác định trực tâm H của tam giác ABC .

Lời giải.

ĐS: $H(\frac{164}{31}, \frac{15}{31})$ $\square$

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 4. Cho tứ giác $ABCD$ với $A(3, 4); B(4, 1); C(2, -3); D(-1, 6)$. Chứng minh tứ giác $ABCD$ nội tiếp được trong một đường tròn.

Lời giải.

HD: Tìm tâm I của bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ta được $I(-1; 1)$. Và chứng minh $IA = ID$. $\square$

Bài 5. Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm $A(-2, -2); B(5, -4)$.

a) Tìm tọa độ điểm C sao cho trọng tâm của tam giác ABC là điểm $G(2, 0)$.

b) Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp I của tam giác ABC .

c) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc H của điểm G lên đường thẳng BC .

Lời giải.

ĐS: $C(3, 6); I(\frac{169}{66}, \frac{47}{33}); H(\frac{60}{52}, \frac{21}{52})$ $\square$

Bài 6. Cho $A(-2, 2); B(6, 6); C(2, -2)$.

a) Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC ; tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp I của tam giác ABC , tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

- b) Chứng minh $\overrightarrow{IH} = -3\overrightarrow{IG}$
- c) AD là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABCD$. Chứng minh rằng $BHCD$ là một hình bình hành.

Lời giải.

- a) Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC ; tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp I của tam giác ABC , tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

Gọi $H(x, y)$. Ta có $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ và $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, suy ra $x + 2y = 2$ và $x - y = 0$, giải hệ phương trình ta được $H(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

Gọi $I(x, y)$ là tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Khi đó $IA = IB$ và $IA = IC$. Do đó, ta có

$$(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = (x - 6)^2 + (y - 6)^2$$

$$(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = (x - 2)^2 + (y + 2)^2$$

giải hệ phương trình ta được $I(\frac{8}{3}, \frac{8}{3})$.

Gọi $G(x, y)$ là tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Ta có

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = 3, y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = 3$$

- b) Chứng minh $\overrightarrow{IH} = 3\overrightarrow{IG}$

Ta có $\overrightarrow{IH} = (2, 2)$; $\overrightarrow{IG} = (\frac{-2}{3}, \frac{-2}{3})$ suy ra $\overrightarrow{IH} = -3\overrightarrow{IG}$

- c) AD là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABCD$. Chứng minh rằng $BHCD$ là một hình bình hành.

Ta có $\overrightarrow{BH} = (\frac{16}{3}, \frac{16}{3})$; $\overrightarrow{AC} = (4, -4)$; $D = (\frac{22}{3}, \frac{10}{3})$; $\overrightarrow{BH} = (\frac{-16}{3}, \frac{-16}{3})$;

suy ra

$$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \text{ và } \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0,$$

do đó

$$BH \parallel CD \text{ và } BH = CD.$$

□

C CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai véc-tơ cùng hướng và đều khác véc-tơ $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$.

D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Do $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai véc-tơ cùng hướng nên $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1$. Vậy $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 2. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

A. $\alpha = 180^\circ$.

B. $\alpha = 0^\circ$.

C. $\alpha = 90^\circ$.

D. $\alpha = 45^\circ$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Mà theo giả thiết $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, suy ra $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1 \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 3. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$. Xác định góc α giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha = 30^\circ$.

B. $\alpha = 45^\circ$.

C. $\alpha = 60^\circ$.

D. $\alpha = 120^\circ$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-3}{3 \cdot 2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 4. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và hai véc-tơ $\vec{u} = \frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc α giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha = 90^\circ$.

B. $\alpha = 180^\circ$.

C. $\alpha = 60^\circ$.

D. $\alpha = 45^\circ$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (\frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} + \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{5}\vec{a}^2 - \frac{13}{5}\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{b}^2 = 0 \xrightarrow{|\vec{a}|=|\vec{b}|=1} \vec{a} \cdot \vec{b} = -1$.

Suy ra $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = -1 \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 5. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \left(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 \right)$.

B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 \right)$.

C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \left(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 \right)$.

D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4} \left(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 \right)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
& \bullet \quad \left| \vec{a} + \vec{b} \right|^2 - \left| \vec{a} - \vec{b} \right|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2 = 4\vec{a} \cdot \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4} \left(\left| \vec{a} + \vec{b} \right|^2 - \left| \vec{a} - \vec{b} \right|^2 \right). \\
& \bullet \quad \left| \vec{a} + \vec{b} \right|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} \\
& \quad = \left| \vec{a} \right|^2 + \left| \vec{b} \right|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \left(\left| \vec{a} + \vec{b} \right|^2 - \left| \vec{a} \right|^2 - \left| \vec{b} \right|^2 \right). \\
& \bullet \quad \left| \vec{a} - \vec{b} \right|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} \\
& \quad = \left| \vec{a} \right|^2 + \left| \vec{b} \right|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \left(\left| \vec{a} \right|^2 + \left| \vec{b} \right|^2 - \left| \vec{a} - \vec{b} \right|^2 \right).
\end{aligned}$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 6. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$.

B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2}{2}$.

D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$.

Lời giải.

Xác định được góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ là góc $\widehat{A}$ nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^\circ$.

Do đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 7. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$.

B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$.

D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$.

Lời giải.

Xác định được góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ là góc ngoài của góc $\widehat{B}$ nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ$.

Do đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = AB \cdot BC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 8. Gọi G là trọng tâm tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}a^2$.

B. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = -\frac{1}{2}a^2$.

C. $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = \frac{a^2}{6}$.

D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}a^2$.

Lời giải.

• Xác định được góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ là góc $\widehat{A}$ nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^\circ$.

Do đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$.

• Xác định được góc $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})$ là góc ngoài của góc $\widehat{C}$ nên $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 120^\circ$.

Do đó $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = AC \cdot CB \cdot \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}$.

• Xác định được góc $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB})$ là góc $\widehat{AGB}$ nên $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}) = 120^\circ$.

Do đó $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = GA \cdot GB \cdot \cos(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}) = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{6}$.

• Xác định được góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG})$ là góc $\widehat{GAB}$ nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) = 30^\circ$.

Do đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = AB \cdot AG \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) = a \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \cos 30^\circ = \frac{a^2}{2}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 9. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a và chiều cao AH . Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. B. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HA}) = 150^\circ$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$. D. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{a^2}{2}$.

Lời giải.

Xác định được góc $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})$ là góc ngoài của góc $\widehat{A}$ nên $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 120^\circ$.

Do đó $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = AC \cdot CB \cdot \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 10. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và có $AB = AC = a$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$.
C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Xác định được góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ là góc ngoài của góc $\widehat{B}$ nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 135^\circ$.

Do đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = AB \cdot BC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 135^\circ = -a^2$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 11. Cho tam giác ABC vuông tại A và có $AB = c$, $AC = b$. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2$. B. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = c^2$. C. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 + c^2$. D. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 - c^2$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \cdot BC \cdot \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = BA \cdot BC \cdot \cos \widehat{B} = c \cdot \sqrt{b^2 + c^2} \cdot \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} = c^2$.

Cách khác. Tam giác ABC vuông tại A suy ra $AB \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

Ta có $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 = c^2$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 12. Cho tam giác ABC có $AB = 2$ cm, $BC = 3$ cm, $CA = 5$ cm. Tính $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

A. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 13$. B. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 15$. C. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 17$. D. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 19$.

Lời giải.

Ta có $AB + BC = CA \Rightarrow$ ba điểm A, B, C thẳng hàng và B nằm giữa A, C .

Khi đó $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CA \cdot CB \cdot \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 3 \cdot 5 \cdot \cos 0^\circ = 15$.

Cách khác. Ta có $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})^2 = CB^2 - 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} + CA^2$

$\Rightarrow \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}(CB^2 + CA^2 - AB^2) = \frac{1}{2}(3^2 + 5^2 - 2^2) = 15$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 13. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Tính $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. $P = b^2 - c^2$. B. $P = \frac{c^2 + b^2}{2}$. C. $P = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$. D. $P = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$.

Lời giải.

Ta có $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$

$= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 = AC^2 - AB^2 = b^2 - c^2$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 14. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi M là trung điểm cạnh BC . Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{b^2 - c^2}{2}$. B. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2}{2}$.
C. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$. D. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$.

Lời giải.

Vì M là trung điểm của BC suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2) = \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2) = \frac{b^2 - c^2}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 15. Cho ba điểm O, A, B không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để tích vô hướng $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ là

- A. tam giác OAB đều. B. tam giác OAB cân tại O .
 C. tam giác OAB vuông tại O . D. tam giác OAB vuông cân tại O .

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = 0 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OA}^2 &= 0 \Leftrightarrow OB^2 - OA^2 = 0 \Leftrightarrow OB = OA. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 16. Cho M, N, P, Q là bốn điểm tùy ý. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào **sai**?

- A. $\overrightarrow{MN}(\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ}$. B. $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$.
 C. $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{MN}$. D. $(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PQ})(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ}) = MN^2 - PQ^2$.

Lời giải.

$$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 17. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2\sqrt{2}$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}a^2$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}a^2$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{BAC} = 45^\circ \text{ nên } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos 45^\circ = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 18. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $P = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA})$.

- A. $P = -1$. B. $P = 3a^2$. C. $P = -3a^2$. D. $P = 2a^2$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $AC = a\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC}^2 \\ &= -CA \cdot CD \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) - AC^2 = -a\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos 45^\circ - (a\sqrt{2})^2 = -3a^2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 19. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA})$.

- A. $P = 2\sqrt{2}a$. B. $P = 2a^2$. C. $P = a^2$. D. $P = -2a^2$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} BD = a\sqrt{2} \\ \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA} = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BD}. \end{cases}$$

$$P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot 2\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} + 0$$

Khi đó

$$= -2 \cdot BA \cdot BD \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}) = -2 \cdot a \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -2a^2.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 20. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi E là điểm đối xứng của D qua C . Tính $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB}$.

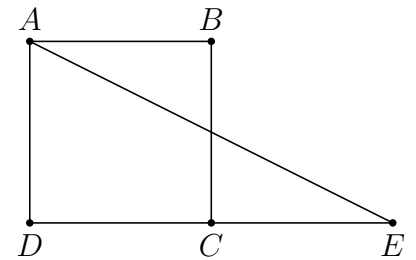
- A. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$. B. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{3}a^2$. C. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{5}a^2$. D. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 5a^2$.

Lời giải.

Ta có C là trung điểm của DE nên $DE = 2a$.

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}) \cdot \overrightarrow{AB} = \underbrace{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}}_0 + \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$= DE \cdot AB \cdot \cos(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{AB}) = DE \cdot AB \cdot \cos 0^\circ = 2a^2.$$



Chọn đáp án (A) □

Câu 21. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 2. Điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM = \frac{AC}{4}$. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng DC . Tính $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN}$.

- A. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = -4$. B. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$. C. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 4$. D. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 16$.

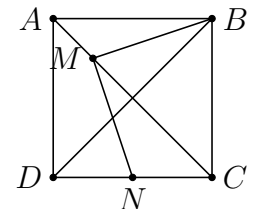
Lời giải.

Giả thiết không cho góc, ta phân tích các vec-tơ $\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MN}$ theo các vec-tơ có giá vuông góc với nhau.

$$\bullet \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}.$$

•

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} - \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \\ &= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}. \end{aligned}$$



Suy ra:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} &= \left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right) \\ &= \frac{1}{16}(3\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AB}^2 - 3\overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{16}(0 + 3a^2 - 3a^2 - 0) = 0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 22. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 8, AD = 5$. Tích $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$.

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 62$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 64$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -62$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -64$.

Lời giải.

Ta phân tích các vec-tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}$ theo các vec-tơ có giá vuông góc với nhau.

Ta có

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + 0 = -AB^2 = -64.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 23. Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 8$ và $BD = 6$. Tính $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

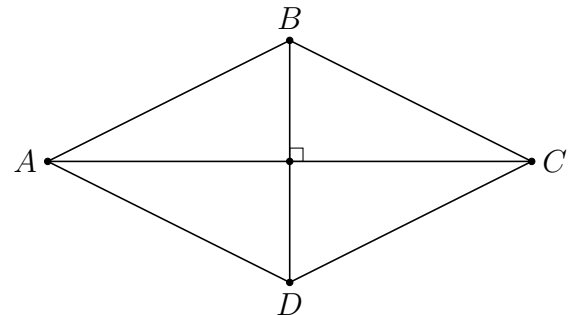
- A. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 24$. B. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 26$. C. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 28$. D. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 32$.

Lời giải.

Gọi $O = AC \cap BD$, giả thiết không cho góc, ta phân tích các vec-tơ $\vec{AB}, \vec{AC}$ theo các vec-tơ có giá vuông góc với nhau.

Ta có

$$\begin{aligned}\vec{AB} \cdot \vec{AC} &= (\vec{AO} + \vec{OB}) \cdot \vec{AC} \\ &= \vec{AO} \cdot \vec{AC} + \vec{OB} \cdot \vec{AC} \\ &= \frac{1}{2} \vec{AC} \cdot \vec{AC} + 0 = \frac{1}{2} AC^2 = 32.\end{aligned}$$



Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 24. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 8$ cm, $AD = 12$ cm, góc $\widehat{ABC}$ nhọn và diện tích bằng 54 cm^2 . Tính $\cos(\vec{AB}, \vec{BC})$.

- A. $\cos(\vec{AB}, \vec{BC}) = \frac{2\sqrt{7}}{16}$. B. $\cos(\vec{AB}, \vec{BC}) = -\frac{2\sqrt{7}}{16}$.
C. $\cos(\vec{AB}, \vec{BC}) = \frac{5\sqrt{7}}{16}$. D. $\cos(\vec{AB}, \vec{BC}) = -\frac{5\sqrt{7}}{16}$.

Lời giải.

Ta có $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{\triangle ABC} = 54 \Leftrightarrow S_{\triangle ABC} = 27 \text{ cm}^2$.

Diện tích tam giác ABC là:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \widehat{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{ABC}.$$

$$\Rightarrow \sin \widehat{ABC} = \frac{2 \cdot S_{\triangle ABC}}{AB \cdot AD} = \frac{2 \cdot 27}{8 \cdot 12} = \frac{9}{16} \Rightarrow \cos \widehat{ABC} = \sqrt{1 - \sin^2 \widehat{ABC}} = \frac{5\sqrt{7}}{16} \text{ (vì } \widehat{ABC} \text{ nhọn)}.$$

Mặt khác góc giữa hai vec-tơ $\vec{AB}, \vec{BC}$ là góc ngoài của góc $\widehat{ABC}$.

$$\text{Suy ra } \cos(\vec{AB}, \vec{BC}) = \cos(180^\circ - \widehat{ABC}) = -\cos \widehat{ABC} = -\frac{5\sqrt{7}}{16}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

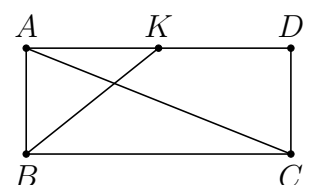
Câu 25. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$ và $AD = a\sqrt{2}$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD . Tính $\vec{BK} \cdot \vec{AC}$.

- A. $\vec{BK} \cdot \vec{AC} = 0$. B. $\vec{BK} \cdot \vec{AC} = -a^2\sqrt{2}$.
C. $\vec{BK} \cdot \vec{AC} = a^2\sqrt{2}$. D. $\vec{BK} \cdot \vec{AC} = 2a^2$.

Lời giải.

Ta có $AC = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \vec{BK} = \vec{BA} + \vec{AK} = \vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{AD} \\ \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} \end{cases}$$



$$\begin{aligned}\Rightarrow \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} &= \left(\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} \right) (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \\ &= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = -a^2 + 0 + 0 + \frac{1}{2} (a\sqrt{2})^2 = 0.\end{aligned}$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 26. Cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$ là

- A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm $BC \Rightarrow \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$.

Ta có $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot 2\overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MI}$. (*)

Biểu thức (*) chứng tỏ $MA \perp MI$ hay M nhìn đoạn AI dưới một góc vuông nên tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AI .

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 27. Tìm tập các hợp điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$ với A, B, C là ba đỉnh của tam giác.

- A. Một điểm. B. Đường thẳng. C. Đoạn thẳng. D. Đường tròn.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Ta có $\overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \cdot 3\overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{MG}$. (*)

Biểu thức (*) chứng tỏ $MB \perp MG$ hay M nhìn đoạn BG dưới một góc vuông nên tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính BG .

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 28. Cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ là

- A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow MA \perp BC$.

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC .

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 29. Cho hai điểm A, B cố định có khoảng cách bằng a . Tập hợp các điểm N thỏa mãn $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$ là

- A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.

Lời giải.

Gọi C là điểm đối xứng của A qua B . Khi đó $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}^2 = 2a^2$.

Kết hợp với giả thiết, ta có

$$\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CN} = 0 \Leftrightarrow CN \perp AB.$$

Vậy tập hợp các điểm N là đường thẳng qua C và vuông góc với AB .

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 30. Cho hai điểm A, B cố định và $AB = 8$ Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -16$ là

- A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Rightarrow \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$.

Ta có

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = MI^2 - IA^2 = MI^2 - \frac{AB^2}{4}.$$

Theo giả thiết, ta có $MI^2 - \frac{AB^2}{4} = -16 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{AB^2}{4} - 16 = \frac{8^2}{4} - 16 = 0 \Rightarrow M \equiv I$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 31. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(3; -1), B(2; 10), C(-4; 2)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 40$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -40$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 26$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -26$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; 11), \overrightarrow{AC} = (-7; 3)$. Suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1) \cdot (-7) + 11 \cdot 3 = 40$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 32. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(3; -1)$ và $B(2; 10)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB}$.

- A. $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = -4$. B. $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$. C. $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = 4$. D. $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = 16$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AO} = (-3; 1), \overrightarrow{OB} = (2; 10)$. Suy ra $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = -3 \cdot 2 + 1 \cdot 10 = 4$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 33. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vec-tơ $\vec{a} = 4\vec{i} + 6\vec{j}$ và $\vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j}$. Tính tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -30$. B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$. C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 30$. D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 43$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $\vec{a} = (4; 6)$ và $\vec{b} = (3; -7)$. Suy ra $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 3 + 6 \cdot (-7) = -30$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 34. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vec-tơ $\vec{a} = (-3; 2)$ và $\vec{b} = (-1; -7)$. Tìm tọa độ vec-tơ $\vec{c}$ biết $\vec{c} \cdot \vec{a} = 9$ và $\vec{c} \cdot \vec{b} = -20$.

- A. $\vec{c} = (-1; -3)$. B. $\vec{c} = (-1; 3)$. C. $\vec{c} = (1; -3)$. D. $\vec{c} = (1; 3)$.

Lời giải.

Gọi $\vec{c} = (x; y)$. Ta có
$$\begin{cases} \vec{c} \cdot \vec{a} = 9 \\ \vec{c} \cdot \vec{b} = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y = 9 \\ -x - 7y = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \vec{c} = (-1; 3).$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 35. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba vec-tơ $\vec{a} = (1; 2), \vec{b} = (4; 3)$ và $\vec{c} = (2; 3)$. Tính $P = \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$.

- A. $P = 0$. B. $P = 18$. C. $P = 20$. D. $P = 28$.

Lời giải.

Ta có $\vec{b} + \vec{c} = (6; 6)$. Suy ra $P = \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 6 = 18$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 36. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai véc-tơ $\vec{a} = (-1; 1)$ và $\vec{b} = (2; 0)$. Tính cosin của góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-1 \cdot 2 + 1 \cdot 0}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + 0^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 37. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai véc-tơ $\vec{a} = (-2; -1)$ và $\vec{b} = (4; -3)$. Tính cosin của góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$. B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-3)}{\sqrt{4 + 1} \cdot \sqrt{16 + 9}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 38. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai véc-tơ $\vec{a} = (4; 3)$ và $\vec{b} = (1; 7)$. Tính góc α giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha = 90^\circ$. B. $\alpha = 60^\circ$. C. $\alpha = 45^\circ$. D. $\alpha = 30^\circ$.

Lời giải.

Ta có $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{4 \cdot 1 + 3 \cdot 7}{\sqrt{16 + 9} \cdot \sqrt{1 + 49}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 39. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai véc-tơ $\vec{x} = (1; 2)$ và $\vec{y} = (-3; -1)$. Tính góc α giữa hai véc-tơ $\vec{x}$ và $\vec{y}$.

A. $\alpha = 45^\circ$. B. $\alpha = 60^\circ$. C. $\alpha = 90^\circ$. D. $\alpha = 135^\circ$.

Lời giải.

Ta có $\cos(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} = \frac{1 \cdot (-3) + 2 \cdot (-1)}{\sqrt{1 + 4} \cdot \sqrt{9 + 1}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\vec{x}, \vec{y}) = 135^\circ$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 40. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai véc-tơ $\vec{a} = (2; 5)$ và $\vec{b} = (3; -7)$. Tính góc α giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha = 30^\circ$. B. $\alpha = 45^\circ$. C. $\alpha = 60^\circ$. D. $\alpha = 135^\circ$.

Lời giải.

Ta có $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 3 + 5 \cdot (-7)}{\sqrt{4 + 25} \cdot \sqrt{9 + 49}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 41. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho vec-tơ $\vec{a} = (9; 3)$. Vec-tơ nào sau đây không vuông góc với vec-tơ $\vec{a}$?

- A. $\vec{v}_1 = (1; -3)$. B. $\vec{v}_2 = (2; -6)$. C. $\vec{v}_3 = (1; 3)$. D. $\vec{v}_4 = (-1; 3)$.

Lời giải.

Kiểm tra tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{v}$, nếu đáp án nào cho kết quả khác 0 thì kết luận vec-tơ đó không vuông góc với $\vec{a}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 42. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(1; 2)$, $B(-1; 1)$ và $C(5; -1)$. Tính cosin của góc giữa hai vec-tơ $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$.

- A. $\cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = -\frac{1}{2}$. B. $\cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
C. $\cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = -\frac{2}{5}$. D. $\cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\vec{AB} = (-2; -1)$ và $\vec{AC} = (4; -3)$.

$$\text{Suy ra } \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{-2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-3)}{\sqrt{4+1} \cdot \sqrt{16+9}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 43. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(6; 0)$, $B(3; 1)$ và $C(-1; -1)$. Tính số đo góc B của tam giác đã cho.

- A. 15° . B. 60° . C. 120° . D. 135° .

Lời giải.

Ta có $\vec{BA} = (3; -1)$ và $\vec{BC} = (-4; -2)$.

$$\text{Suy ra: } \cos(\vec{BA}, \vec{BC}) = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}|} = \frac{3 \cdot (-4) + (-1) \cdot (-2)}{\sqrt{9+1} \cdot \sqrt{16+4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{B} = (\vec{BA}, \vec{BC}) = 135^\circ.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 44. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(-8; 0)$, $B(0; 4)$, $C(2; 0)$ và $D(-3; -5)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hai góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$ phụ nhau. B. Góc $\widehat{BCD}$ là góc nhọn.
C. $\cos(\vec{AB}, \vec{AD}) = \cos(\vec{CB}, \vec{CD})$. D. Hai góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$ bù nhau.

Lời giải.

Ta có $\vec{AB} = (8; 4)$, $\vec{AD} = (5; -5)$, $\vec{CB} = (-2; 4)$, $\vec{CD} = (-5; 5)$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \cos(\vec{AB}, \vec{AD}) = \frac{8 \cdot 5 + 4 \cdot (-5)}{\sqrt{8^2 + 4^2} \cdot \sqrt{5^2 + 5^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \cos(\vec{CB}, \vec{CD}) = \frac{(-2) \cdot (-5) + 4 \cdot (-5)}{\sqrt{2^2 + 4^2} \cdot \sqrt{5^2 + 5^2}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos(\vec{AB}, \vec{AD}) + \cos(\vec{CB}, \vec{CD}) = 0 \Rightarrow \widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 45. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vec-tơ $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j}$ và $\vec{v} = k\vec{i} - 4\vec{j}$. Tìm k để vec-tơ $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

A. $k = 20$.

B. $k = -20$.

C. $k = -40$.

D. $k = 40$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $\vec{u} = (\frac{1}{2}; -5)$, $\vec{v} = (k; -4)$.

Yêu cầu bài toán: $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \frac{1}{2}k + (-5)(-4) = 0 \Leftrightarrow k = -40$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 46. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai véc-tơ $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j}$ và $\vec{v} = k\vec{i} - 4\vec{j}$. Tìm k để véc-tơ $\vec{u}$ và véc-tơ $\vec{v}$ có độ dài bằng nhau.

A. $k = \frac{37}{4}$.

B. $k = \frac{\sqrt{37}}{2}$.

C. $k = \pm \frac{\sqrt{37}}{2}$.

D. $k = \frac{5}{8}$.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $\vec{u} = (\frac{1}{2}; -5)$, $\vec{v} = (k; -4)$.

Suy ra $|\vec{u}| = \sqrt{\frac{1}{4} + 25} = \frac{1}{2}\sqrt{101}$ và $|\vec{v}| = \sqrt{k^2 + 16}$.

Do đó để $|\vec{u}| = |\vec{v}| \Leftrightarrow \sqrt{k^2 + 16} = \frac{1}{2}\sqrt{101} \Leftrightarrow k^2 + 16 = \frac{101}{4} \Leftrightarrow k^2 = \frac{37}{4} \Leftrightarrow k = \pm \frac{\sqrt{37}}{2}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 47. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba véc-tơ $\vec{a} = (-2; 3)$, $\vec{b} = (4; 1)$ và $\vec{c} = k\vec{a} + m\vec{b}$ với $k, m \in \mathbb{R}$. Biết rằng véc-tơ $\vec{c}$ vuông góc với véc-tơ $(\vec{a} + \vec{b})$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $2k = 2m$.

B. $3k = 2m$.

C. $2k + 3m = 0$.

D. $3k + 2m = 0$.

Lời giải.

Ta có
$$\begin{cases} \vec{c} = k\vec{a} + m\vec{b} = (-2k + 4m; 3k + m) \\ \vec{a} + \vec{b} = (2; 4). \end{cases}$$

Để $\vec{c} \perp (\vec{a} + \vec{b}) \Leftrightarrow \vec{c}(\vec{a} + \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow 2(-2k + 4m) + 4(3k + m) = 0 \Leftrightarrow 2k + 3m = 0$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 48. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai véc-tơ $\vec{a} = (-2; 3)$ và $\vec{b} = (4; 1)$. Tìm véc-tơ $\vec{d}$ biết $\vec{a} \cdot \vec{d} = 4$ và $\vec{b} \cdot \vec{d} = -2$.

A. $\vec{d} = (\frac{5}{7}; \frac{6}{7})$.

B. $\vec{d} = (-\frac{5}{7}; \frac{6}{7})$.

C. $\vec{d} = (\frac{5}{7}; -\frac{6}{7})$.

D. $\vec{d} = (-\frac{5}{7}; -\frac{6}{7})$.

Lời giải.

Gọi $\vec{d} = (x; y)$. Từ giả thiết, ta có hệ
$$\begin{cases} -2x + 3y = 4 \\ 4x + y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{7} \\ y = \frac{6}{7} \end{cases}.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 49. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba véc-tơ $\vec{u} = (4; 1)$, $\vec{v} = (1; 4)$ và $\vec{a} = \vec{u} + m \cdot \vec{v}$ với $m \in \mathbb{R}$. Tìm m để $\vec{a}$ vuông góc với trục hoành.

A. $m = 4$.

B. $m = -4$.

C. $m = -2$.

D. $m = 2$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a} = \vec{u} + m \cdot \vec{v} = (4 + m; 1 + 4m)$.

Trục hoành có véc-tơ đơn vị là $\vec{i} = (1; 0)$.

véc-tơ $\vec{a}$ vuông góc với trục hoành $\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{i} = 0 \Leftrightarrow 4 + m = 0 \Leftrightarrow m = -4$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 50. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai véc-tơ $\vec{u} = (4; 1)$ và $\vec{v} = (1; 4)$. Tìm m để véc-tơ $\vec{a} = m \cdot \vec{u} + \vec{v}$ tạo với véc-tơ $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$ một góc 45° .

- A. $m = 4$. B. $m = -\frac{1}{2}$. C. $m = -\frac{1}{4}$. D. $m = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \vec{a} = m \cdot \vec{u} + \vec{v} = (4m + 1; m + 4) \\ \vec{b} = \vec{i} + \vec{j} = (1; 1). \end{cases}$$

Yêu cầu bài toán tương đương

$$\begin{aligned} \cos(\vec{a}, \vec{b}) &= \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{(4m + 1) + (m + 4)}{\sqrt{2}\sqrt{(4m + 1)^2 + (m + 4)^2}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{5(m + 1)}{\sqrt{2}\sqrt{17m^2 + 16m + 17}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Leftrightarrow 5(m + 1) &= \sqrt{17m^2 + 16m + 17} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 \geq 0 \\ 25m^2 + 50m + 25 = 17m^2 + 16m + 17 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 51. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tính khoảng cách giữa hai điểm $M(1; -2)$ và $N(-3; 4)$.

- A. $MN = 4$. B. $MN = 6$. C. $MN = 3\sqrt{6}$. D. $MN = 2\sqrt{13}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MN} = (-4; 6) \text{ suy ra } MN = \sqrt{(-4)^2 + 6^2} = \sqrt{42} = 2\sqrt{13}.$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 52. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(1; 4)$, $B(3; 2)$, $C(5; 4)$. Tính chu vi P của tam giác đã cho.

- A. $P = 4 + 2\sqrt{2}$. B. $P = 4 + 4\sqrt{2}$. C. $P = 8 + 8\sqrt{2}$. D. $P = 2 + 2\sqrt{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2; -2) \\ \overrightarrow{BC} = (2; 2) \\ \overrightarrow{CA} = (-4; 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2} \\ BC = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \\ CA = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = 4. \end{cases}$$

$$\text{Vậy chu vi } P \text{ của tam giác } ABC \text{ là } P = AB + BC + CA = 4 + 4\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án **B** □

Câu 53. Trong hệ tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j})$, cho véc-tơ $\vec{a} = -\frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$. Độ dài của véc-tơ $\vec{a}$ bằng

- A. $\frac{1}{5}$. B. 1. C. $\frac{6}{5}$. D. $\frac{7}{5}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \vec{a} = -\frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j} \Rightarrow \vec{a} = \left(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = 1.$$

Chọn đáp án **B** □

Câu 54. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai véc-tơ $\vec{u} = (3; 4)$ và $\vec{v} = (-8; 6)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $|\vec{u}| = |\vec{v}|$. B. $M\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ và $\vec{v}$ cùng phương.

C. $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.D. $\vec{u} = -\vec{v}$.**Lời giải.**Ta có $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot (-8) + 4 \cdot 6 = 0$ suy ra $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.Chọn đáp án **C** □**Câu 55.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các điểm $A(1; 2)$, $B(-2; -4)$, $C(0; 1)$ và $D(-1; \frac{3}{2})$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?A. $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{CD}$.B. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$.C. $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$.D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.**Lời giải.**Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3; -6)$ và $\overrightarrow{CD} = (-1; \frac{1}{2})$ suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (-3) \cdot (-1) + (-6) \cdot \frac{1}{2} = 0$.Vậy $\overrightarrow{AB}$ vuông góc với $\overrightarrow{CD}$.Chọn đáp án **C** □**Câu 56.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(7; -3)$, $B(8; 4)$, $C(1; 5)$ và $D(0; -2)$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?A. $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{CB}$.B. Tam giác ABC đều.C. Tứ giác $ABCD$ là hình vuông.D. Tứ giác $ABCD$ không nội tiếp đường tròn.**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1; 7) \Rightarrow AB = \sqrt{1^2 + 7^2} = 5\sqrt{2} \\ \overrightarrow{BC} = (-7; 1) \Rightarrow BC = 5\sqrt{2} \\ \overrightarrow{CD} = (-1; -7) \Rightarrow CD = 5\sqrt{2} \\ \overrightarrow{DA} = (7; -1) \Rightarrow DA = 5\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow AB = BC = CD = DA = 5\sqrt{2}.$$

Lại có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 1(-7) + 7 \cdot 1 = 0$ nên $AB \perp BC$.Từ đó suy ra $ABCD$ là hình vuông.Chọn đáp án **C** □**Câu 57.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(-1; 1)$, $B(0; 2)$, $C(3; 1)$ và $D(0; -2)$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?A. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.B. Tứ giác $ABCD$ là hình thoi.C. Tứ giác $ABCD$ là hình thang cân.D. Tứ giác $ABCD$ không nội tiếp được đường tròn.**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1; 1) \\ \overrightarrow{DC} = (3; 3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{AB}.$$

Suy ra $DC \parallel AB$ và $DC = 3AB$ (1)

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} AD = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \\ BC = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \end{cases} \Rightarrow AD = BC \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra tứ giác $ABCD$ là hình thang cân.Chọn đáp án **C** □

Câu 58. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-1; 1)$, $B(1; 3)$ và $C(1; -1)$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A. Tam giác ABC đều. B. Tam giác ABC có ba góc đều nhọn.
C. Tam giác ABC cân tại B . D. Tam giác ABC vuông cân tại A .

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; 2)$, $\overrightarrow{BC} = (0; -4)$ và $\overrightarrow{AC} = (2; -2)$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} AB = AC = 2\sqrt{2} \\ AB^2 + AC^2 = BC^2. \end{cases}$$

Vậy tam giác ABC vuông cân tại A .

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 59. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(10; 5)$, $B(3; 2)$ và $C(6; -5)$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A. Tam giác ABC đều. B. Tam giác ABC vuông cân tại A .
C. Tam giác ABC vuông cân tại B . D. Tam giác ABC có góc A tù.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-7; -3)$, $\overrightarrow{BC} = (3; -7)$ và $\overrightarrow{AC} = (-4; -10)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (-7) \cdot 3 + (-3) \cdot (-7) = 0$ và $AB = BC$.

Vậy tam giác ABC vuông cân tại B .

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 60. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-2; -1)$, $B(1; -1)$ và $C(-2; 2)$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A. Tam giác ABC đều. B. Tam giác ABC vuông cân tại A .
C. Tam giác ABC vuông tại B . D. Tam giác ABC vuông cân tại C .

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; 0)$, $\overrightarrow{BC} = (-3; 3)$ và $\overrightarrow{AC} = (0; 3)$.

$$\text{Do đó } \begin{cases} AB = AC = 3 \\ BC = 3\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

Vậy tam giác ABC vuông cân tại A .

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 61. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(-2; 4)$ và $B(8; 4)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc trục hoành sao cho tam giác ABC vuông tại C .

- A. $C(6; 0)$. B. $C(0; 0)$, $C(6; 0)$. C. $C(0; 0)$. D. $C(-1; 0)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } C \in Ox \text{ nên } C(c; 0) \text{ và } \begin{cases} \overrightarrow{CA} = (-2 - c; 4) \\ \overrightarrow{CB} = (8 - c; 4) \end{cases}$$

Tam giác ABC vuông tại C nên $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow (-2 - c) \cdot (8 - c) + 4 \cdot 4 = 0$

$$\Leftrightarrow c^2 - 6c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 6 \Rightarrow C(6; 0) \\ c = 0 \Rightarrow C(0; 0). \end{cases}$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 62. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1; 2)$ và $B(-3; 1)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc trục tung sao cho tam giác ABC vuông tại A .

- A. $C(0; 6)$. B. $C(5; 0)$. C. $C(3; 1)$. D. $C(0; -6)$.

Lời giải.

Ta có $C \in Oy$ nên $C(0; c)$ và $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-4; -1) \\ \overrightarrow{AC} = (-1; c - 2) \end{cases}$.

Tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (-4) \cdot (-1) + (-1)(c - 2) = 0 \Leftrightarrow c = 6$.

Vậy $C(0; 6)$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 63. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(4; 0)$, $B(5; 0)$ và $C(3; 0)$. Tìm điểm M thuộc trục hoành sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

- A. $M(2; 0)$. B. $M(2; 0)$. C. $M(4; 0)$. D. $M(5; 0)$.

Lời giải.

Ta có $M \in Ox$ nên $M(x; 0)$ và $\begin{cases} \overrightarrow{MA} = (-4 - x; 0) \\ \overrightarrow{MB} = (-5 - x; 0) \\ \overrightarrow{MC} = (3 - x; 0) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = (-6 - 3x; 0)$.

Do $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ nên $-6 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow M(-2; 0)$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 64. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $M(2; 2)$ và $N(1; 1)$. Tìm tọa độ điểm P thuộc trục hoành sao cho ba điểm M, N, P thẳng hàng.

- A. $P(0; 4)$. B. $P(0; 4)$. C. $P(4; 0)$. D. $P(4; 0)$.

Lời giải.

Ta có $P \in Ox$ nên $P(x; 0)$ và $\begin{cases} \overrightarrow{MP} = (x + 2; -2) \\ \overrightarrow{MN} = (3; -1) \end{cases}$.

Do M, N, P thẳng hàng nên $\frac{x + 2}{3} = \frac{-2}{-1} \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow P(4; 0)$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 65. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm điểm M thuộc trục hoành để khoảng cách từ đó đến điểm $N(-1; 4)$ bằng $2\sqrt{5}$.

- A. $M(1; 0)$. B. $M(1; 0), M(-3; 0)$. C. $M(3; 0)$. D. $M(1; 0), M(3; 0)$.

Lời giải.

Ta có $M \in Ox$ nên $M(m; 0)$ và $\overrightarrow{MN} = (-1 - m; 4)$.

Theo giả thiết: $MN = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow |\overrightarrow{MN}| = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(-1 - m)^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$

$$\Leftrightarrow (1 + m)^2 + 16 = 20 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \Rightarrow M(1; 0) \\ m = -3 \Rightarrow M(-3; 0) \end{cases}$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 66. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1; 3)$ và $B(4; 2)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc trục hoành sao cho C cách đều hai điểm A và B .

- A. $C\left(-\frac{5}{3}; 0\right)$. B. $C\left(\frac{5}{3}; 0\right)$. C. $C\left(-\frac{3}{5}; 0\right)$. D. $C\left(\frac{3}{5}; 0\right)$.

Lời giải.

Ta có $C \in Ox$ nên $C(x; 0)$ và $\begin{cases} \overrightarrow{AC} = (x - 1; -3) \\ \overrightarrow{BC} = (x - 4; -2) \end{cases}$.

$$\text{Do } CA = CB \Leftrightarrow CA^2 = CB^2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (-3)^2 = (x - 4)^2 + (-2)^2 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \Rightarrow C\left(\frac{5}{3}; 0\right).$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 67. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(2; 2), B(5; -2)$. Tìm điểm M thuộc trục hoành sao cho $\widehat{AMB} = 90^\circ$.

- A. $M(0; 1)$. B. $M(6; 0)$. C. $M(1; 6)$. D. $M(0; 6)$.

Lời giải.

Ta có $M \in Ox$ nên $M(m; 0)$ và $\begin{cases} \overrightarrow{AM} = (m - 2; -2) \\ \overrightarrow{BM} = (m - 5; 2) \end{cases}$. Vì $\widehat{AMB} = 90^\circ$ suy ra $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ nên

$$(m - 2)(m - 5) + (-2) \cdot 2 = 0. \Leftrightarrow m^2 - 7m + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(1; 0) \\ M(6; 0) \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 68. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1; -1)$ và $B(3; 2)$. Tìm M thuộc trục tung sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

- A. $M(0; 1)$. B. $M(0; -1)$. C. $M\left(0; \frac{1}{2}\right)$. D. $M\left(0; -\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Ta có $M \in Oy$ nên $M(0; m)$ và $\begin{cases} \overrightarrow{MA} = (1; -1 - m) \\ \overrightarrow{MB} = (3; 2 - m) \end{cases}$.

$$\text{Khi đó } MA^2 + MB^2 = |\overrightarrow{MA}|^2 + |\overrightarrow{MB}|^2 = 1^2 + (-1 - m)^2 + 3^2 + (2 - m)^2 = 2m^2 - 2m + 15.$$

$$= 2\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{29}{2} \geq \frac{29}{2}; \forall m \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Suy ra } \min\{MA^2 + MB^2\} = \frac{29}{2}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } m = \frac{1}{2} \Rightarrow M\left(0; \frac{1}{2}\right).$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 69. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ biết $A(-2; 0), B(2; 5), C(6; 2)$. Tìm tọa độ điểm D .

- A. $D(2; -3)$. B. $D(2; 3)$. C. $D(-2; -3)$. D. $D(-2; 3)$.

Lời giải.

Gọi $D(x; y)$ Ta có $\overrightarrow{AD} = (x + 2; y)$ và $\overrightarrow{BC} = (4; -3)$.

$$\text{Vì } ABCD \text{ là hình bình hành nên } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 4 \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow D(2; -3).$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 70. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(1; 3), B(-2; 4), C(5; 3)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác đã cho.

- A. $G(2; \frac{10}{3})$. B. $G(\frac{8}{3}; -\frac{10}{3})$. C. $G(2; 5)$. D. $G(\frac{4}{3}; \frac{10}{3})$.

Lời giải.

$$\text{Tọa độ trọng tâm } G(x_G; y_G) \text{ là } \begin{cases} x_G = \frac{1-2+5}{3} = \frac{4}{3} \\ y_G = \frac{3+4+3}{3} = \frac{10}{3} \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(D)** □**Câu 71.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-4; 1)$, $B(2; 4)$, $C(2; -2)$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác đã cho.

A. $I\left(\frac{1}{4}; 1\right)$. B. $I\left(-\frac{1}{4}; 1\right)$. C. $I\left(1; \frac{1}{4}\right)$. D. $I\left(1; -\frac{1}{4}\right)$.

Lời giải.

$$\text{Gọi } I(x; y). \text{ Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AI} = (x+4; y-1) \\ \overrightarrow{BI} = (x-2; y-4) \\ \overrightarrow{CI} = (x-2; y+2) \end{cases}$$

Do I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên

$$\begin{aligned} IA = IB = IC &\Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IB^2 = IC^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)^2 + (y-1)^2 = (x-2)^2 + (y-4)^2 \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = (x-2)^2 + (y+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)^2 = (x-2)^2 + 9 \\ y = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{4} \\ y = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(B)** □**Câu 72.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-3; 0)$, $B(3; 0)$ và $C(2; 6)$. Gọi $H(a; b)$ là tọa độ trực tâm của tam giác đã cho. Tính $a + 6b$.

A. $a + 6b = 5$. B. $a + 6b = 6$. C. $a + 6b = 7$. D. $a + 6b = 8$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AH} = (a+3; b) \\ \overrightarrow{BC} = (-1; 6) \\ \overrightarrow{BH} = (a-3; b) \\ \overrightarrow{AC} = (5; 6) \end{cases}.$$

$$\text{Từ giả thiết, ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+3) \cdot (-1) + b \cdot 6 = 0 \\ (a-3) \cdot 5 + b \cdot 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = \frac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow a + 6b = 7.$$

Chọn đáp án **(C)** □**Câu 73.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(4; 3)$, $B(2; 7)$ và $C(-3; -8)$. Tìm tọa độ chân đường cao A' kẻ từ đỉnh A xuống cạnh BC .

A. $A'(1; -4)$. B. $A'(-1; 4)$. C. $A'(1; 4)$. D. $A'(4; 1)$.

Lời giải.

Gọi $A'(x; y)$. Ta có
$$\begin{cases} \overrightarrow{AA'} = (x - 4; y - 3) \\ \overrightarrow{BC} = (-5; -15) \\ \overrightarrow{BA'} = (x - 2; y - 7) \end{cases}.$$

Từ giả thiết, ta có
$$\begin{cases} AA' \perp BC \\ B, A', C \text{ thẳng hàng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 & (1) \\ \overrightarrow{BA'} = k\overrightarrow{BC} & (2) \end{cases}$$

• $(1) \Leftrightarrow -5(x - 4) - 15(y - 3) = 0 \Leftrightarrow x + 3y = 13.$

• $(2) \Leftrightarrow \frac{x - 2}{-5} = \frac{y - 7}{-15} \Leftrightarrow 3x - y = -1.$

Giải hệ
$$\begin{cases} x + 3y = 13 \\ 3x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow A'(1; 4).$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 74. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(2; 4)$, $B(-3; 1)$, $C(3; -1)$. Tìm tọa độ chân đường cao A' vẽ từ đỉnh A của tam giác đã cho.

A. $A'(\frac{3}{5}; \frac{1}{5})$. B. $A'(-\frac{3}{5}; -\frac{1}{5})$. C. $A'(-\frac{3}{5}; \frac{1}{5})$. D. $A'(\frac{3}{5}; -\frac{1}{5})$.

Lời giải.

Gọi $A'(x; y)$ Ta có
$$\begin{cases} \overrightarrow{AA'} = (x - 2; y - 4) \\ \overrightarrow{BC} = (6; -2) \\ \overrightarrow{BA'} = (x + 3; y - 1) \end{cases}.$$

Vì A' là chân đường cao vẽ từ đỉnh A của tam giác ABC nên

$$\begin{aligned} & \begin{cases} AA' \perp BC \\ B, C, A' \text{ thẳng hàng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BA'} = k\overrightarrow{BC} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (x - 2) \cdot 6 + (y - 4) \cdot (-2) = 0 \\ \frac{x + 3}{6} = \frac{y - 1}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 2y = 4 \\ -2x - 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = -\frac{1}{5} \end{cases}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 75. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(-3; -2)$, $B(3; 6)$ và $C(11; 0)$. Tìm tọa độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình vuông.

A. $D(5; -8)$. B. $D(8; 5)$. C. $D(-5; 8)$. D. $D(-8; 5)$.

Lời giải.

Dễ dàng kiểm tra $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow \widehat{ABC} = 90^\circ$

Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD$. Suy ra I là trung điểm của $AC \Rightarrow I(4; -1)$.

Gọi $D(x; y)$, do I cũng là trung điểm của $BD \Rightarrow \begin{cases} \frac{x + 3}{2} = 4 \\ \frac{y + 6}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -8 \end{cases} \Rightarrow D(5; -8).$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 76. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(2; 4)$ và $B(1; 1)$. Tìm tọa độ điểm C sao cho tam giác ABC vuông cân tại B

A. $C(4; 0)$.B. $C(-2; 2)$.C. $C(4; 0), C(-2; 2)$.D. $C(2; 0)$.**Lời giải.**

Gọi $C(x; y)$. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{BA} = (1; 3) \\ \overrightarrow{BC} = (x-1; y-1) \end{cases}$.

Tam giác ABC vuông cân tại B

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ BA = BC \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \cdot (x-1) + 3 \cdot (y-1) = 0 \\ 1^2 + 3^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 3y \\ 10y^2 - 20y = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 4 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} y = 2 \\ x = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 77. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ có $A(1; -1)$ và $B(3; 0)$. Tìm tọa độ điểm D , biết D có tung độ âm.

A. $D(0; -1)$.B. $D(2; -3)$.C. $D(2; -3), D(0; 1)$.D. $D(-2; -3)$.**Lời giải.**

Gọi $C = (x; y)$ Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2; 1) \\ \overrightarrow{BC} = (x-3; y) \end{cases}$.

Vì $ABCD$ là hình vuông nên ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \\ AB = BC \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-3) + 1 \cdot y = 0 \\ (x-3)^2 + y^2 = 5 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2(3-x) \\ 5(x-3)^2 = 5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2(3-x) \\ (x-3)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 2 \\ y = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Với $C_1(4; -2)$ ta tính được đỉnh $D_1(2; -3)$: thỏa mãn.

Với $C_2(2; 2)$ ta tính được đỉnh $D_2(0; 1)$: không thỏa mãn.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 78. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(1; 2)$, $B(-1; 3)$, $C(-2; -1)$ và $D(0; -2)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $ABCD$ là hình vuông.B. $ABCD$ là hình chữ nhật.C. $ABCD$ là hình thoi.D. $ABCD$ là hình bình hành.**Lời giải.**

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-2; 1) \\ \overrightarrow{BC} = (-1; -4) \\ \overrightarrow{DC} = (-2; 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow ABCD \text{ là hình bình hành.}$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 79. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác OAB với $A(1; 3)$ và $B(4; 2)$. Tìm tọa độ điểm E là chân đường phân giác trong góc O của tam giác OAB

A. $E = (\frac{5}{2}; \frac{5}{2})$.B. $E = (\frac{3}{2}; -\frac{1}{2})$.

C. $E = (-2 + 3\sqrt{2}; 4 + \sqrt{2})$.

D. $E = (-2 + 3\sqrt{2}; 4 - \sqrt{2})$.

Lời giải.

Theo tính chất đường phân giác của tam giác ta có $\frac{EA}{EB} = \frac{OA}{OB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vì E nằm giữa hai điểm A, B nên $\overrightarrow{EA} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{EB}$. (*)

Gọi $E(x; y)$. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{EA} = (1 - x; 3 - y) \\ \overrightarrow{EB} = (4 - x; 2 - y) \end{cases}$.

Từ (*), suy ra $\begin{cases} 1 - x = -\frac{\sqrt{2}}{2}(4 - x) \\ 3 - y = -\frac{\sqrt{2}}{2}(2 - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 3\sqrt{2} \\ y = 4 - \sqrt{2} \end{cases}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 80. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(2; 0), B(0; 2)$ và $C(0; 7)$. Tìm tọa độ đỉnh thứ tư D của hình thang cân $ABCD$.

A. $D(7; 0)$. B. $D(7; 0), D(2; 9)$. C. $D(0; 7), D(9; 2)$. D. $D(9; 2)$.

Lời giải.

Để tứ giác $ABCD$ là hình thang cân, ta cần có một cặp cạnh đối song song không bằng nhau và cặp cạnh còn lại có độ dài bằng nhau. Gọi $D(x; y)$,

- Trường hợp 1: Với $k \neq -1$, ta có

$$\begin{cases} AB \parallel CD \\ AB \neq CD \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (x - 0; y - 7) = (-2k; 2k) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2k \\ y = 2k + 7 \end{cases} \quad (1)$$

Ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{AD} = (x - 2; y) \Rightarrow AD = \sqrt{(x - 2)^2 + y^2} \\ \overrightarrow{BC} = (0; 5) \Rightarrow BC = 5 \end{cases} \Rightarrow AD = BC \Leftrightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 25 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), ta có } (-2k - 2)^2 + (2k + 7)^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \text{ (loại)} \\ k = -\frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow D(7; 0).$$

- Trường hợp 2: $\begin{cases} AD \parallel BC \\ AD \neq BC \end{cases}$.

Làm tương tự ta được $D = (2; 9)$.

Vậy $D(7; 0)$ hoặc $D(2; 9)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 81. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

A. $\frac{3a^2}{2}$. B. $\frac{5a^2}{2}$. C. $\frac{a^2}{2}$. D. $-\frac{a^2}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = a^2 \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$.

Chọn đáp án **(C)**

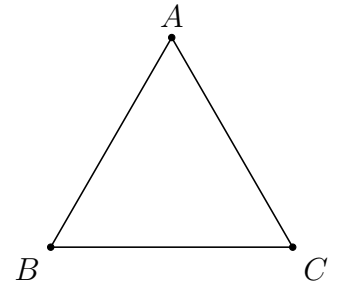
□

Câu 82. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng 2. Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $\vec{BC} \cdot \vec{CA} = -2$. B. $(\vec{BC} - \vec{AC}) \cdot \vec{BA} = 4$.
 C. $(\vec{AB} + \vec{BC}) \cdot \vec{AC} = -4$. D. $(\vec{AB} \cdot \vec{AC}) \cdot \vec{BC} = 2\vec{BC}$.

Lời giải. $\vec{BC} \cdot \vec{CA} = BC \cdot CA \cdot \cos(\vec{BC}, \vec{CA}) = 2 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ = -2$.

- $(\vec{BC} - \vec{AC}) \cdot \vec{BA} = (\vec{BC} + \vec{CA}) \cdot \vec{BA} = \vec{BA} \cdot \vec{BA} = BA^2 = 4$.
- $(\vec{AB} + \vec{BC}) \cdot \vec{AC} = \vec{AC} \cdot \vec{AC} = AC^2 = 4$.
- $(\vec{AB} \cdot \vec{AC}) \cdot \vec{BC} = AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ \cdot \vec{BC} = 2\vec{BC}$.



Chọn đáp án **C** □

Câu 83. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-3; 0)$, $B(3; 0)$ và $C(2; 6)$. Gọi $H(a; b)$ là trực tâm của tam giác ABC . Tính $6ab$.

- A. 10. B. $\frac{5}{3}$. C. 60. D. 6.

Lời giải.

• $\vec{AH} = (a + 3; b)$, $\vec{BC} = (-1; 6)$, $\vec{BH} = (a - 3; b)$, $\vec{AC} = (5; 6)$.

• H là trực tâm tam giác $ABC \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{AH} \perp \vec{BC} \\ \vec{BH} \perp \vec{AC} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0 \\ \vec{BH} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a + 3) \cdot (-1) + b \cdot 6 = 0 \\ (a - 3) \cdot 5 + b \cdot 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = \frac{5}{6} \end{cases}$$

- Khi đó $6ab = 10$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 84. Cho hình thang vuông $ABCD$ với đường cao $AB = 2a$, các cạnh đáy $AD = a$ và $BC = 3a$. Gọi M là điểm trên đoạn AC sao cho $\vec{AM} = k \cdot \vec{AC}$. Tìm k để $BM \perp CD$.

- A. $\frac{4}{9}$. B. $\frac{3}{7}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{2}{5}$.

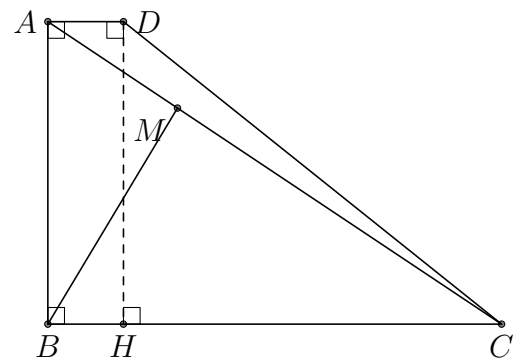
Lời giải.

Hạ $DH \perp BC$ để thấy $ABHD$ là hình chữ nhật và $BH = a$.

Từ giả thiết

$$\begin{aligned} \vec{AM} &= k \cdot \vec{AC} \\ \Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{BM} &= k \cdot (\vec{AB} + \vec{BC}) \\ \Leftrightarrow \vec{BM} &= (k - 1) \cdot \vec{AB} + k \cdot \vec{BC}. \end{aligned}$$

Mặt khác $\vec{DC} = \vec{DH} + \vec{HC}$.



Theo chứng minh trên ta có $\vec{DH} = \vec{AB}$ và $\vec{HC} = \frac{2}{3}\vec{BC}$. Nên $\vec{DC} = \vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{BC}$.

Để $BM \perp CD$ khi và chỉ khi $\vec{BM} \cdot \vec{DC} = 0$ (*).

Do giả thiết ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ nên

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \left((k-1) \cdot \overrightarrow{AB} + k \cdot \overrightarrow{BC} \right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{BC} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow (k-1) \cdot \overrightarrow{AB}^2 + \frac{2k}{3} \cdot \overrightarrow{BC}^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4(k-1) \cdot a^2 + 9 \cdot \frac{2k}{3} \cdot \vec{a}^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4k - 4 + 6k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 85. Cho hai vectơ $\vec{a} = (4; 3)$, $\vec{b} = (-1; -7)$. Tính góc giữa hai vectơ đó.

- A. 135° . B. 45° . C. 30° . D. 60° .

Lời giải.

$$\text{Ta có } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{4 \cdot (-1) + 3 \cdot (-7)}{\sqrt{4^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 86. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4$; $|\vec{b}| = 3$; $|\vec{a} - \vec{b}| = 4$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Chọn phát biểu **đúng**.

- A. $\alpha = 60^\circ$. B. $\alpha = 30^\circ$. C. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. D. $\cos \alpha = \frac{3}{8}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } |\vec{a} - \vec{b}| = 4 \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 16 \Rightarrow 2\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a})^2 + (\vec{b})^2 - 16 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 16 = 9.$$

$$\text{Khi đó } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3}{8}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 87. Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 8$, $BC = 7$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

- A. -20 . B. 40 . C. 10 . D. 20 .

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}^2 &= (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 \\ \Leftrightarrow BC^2 &= AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} = 20. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 88. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai véc-tơ $\vec{a} = (-1; 1)$ và $\vec{b} = (2; 0)$. Tính cô-sin của góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

- A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$. D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-1 \cdot 2 + 1 \cdot 0}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + 0^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Chọn đáp án (B) □**Câu 89.** Gọi G là trọng tâm tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}a^2$. B. $\vec{AC} \cdot \vec{CB} = -\frac{1}{2}a^2$. C. $\vec{GA} \cdot \vec{GB} = \frac{a^2}{6}$. D. $\vec{AB} \cdot \vec{AG} = \frac{1}{2}a^2$.

Lời giải.Vì $\triangle ABC$ đều nên $\widehat{BAC} = 60^\circ$, $\widehat{AGB} = 120^\circ$, $\widehat{BAG} = 30^\circ$,

$$GA = GB = GC = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy suy ra

- $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}a^2$.
- $\vec{AC} \cdot \vec{CB} = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}a^2$.
- $\vec{GA} \cdot \vec{GB} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{6}$.
- $\vec{AB} \cdot \vec{AG} = a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \cos 30^\circ = \frac{1}{2}a^2$.

Do đó mệnh đề sai là $\vec{GA} \cdot \vec{GB} = \frac{a^2}{6}$.Chọn đáp án (C) □**Câu 90.** Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a và chiều cao AH . Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

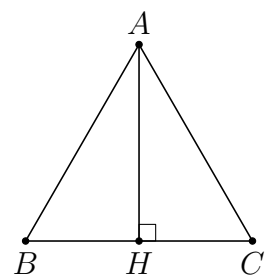
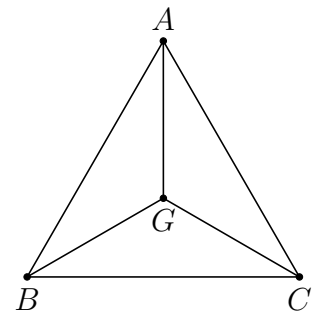
A. $\vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0$. B. $(\vec{AB}, \vec{HA}) = 150^\circ$. C. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{a^2}{2}$. D. $\vec{AC} \cdot \vec{CB} = \frac{a^2}{2}$.

Lời giải.Vì tam giác ABC đều có chiều cao AH nên ta có

- $AH \perp BC \Rightarrow \vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0$.
- $(\vec{AB}, \vec{HA}) = 180^\circ - \widehat{BAH} = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.
- $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos A = a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$.
- $\vec{AC} \cdot \vec{CB} = AC \cdot CB \cdot \cos(180^\circ - \widehat{C}) = a \cdot a \cdot \frac{-1}{2} = -\frac{a^2}{2}$.

Chọn đáp án (D) □**Câu 91.** Điều kiện cần và đủ để tích vô hướng $(\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot \vec{AB} = 0$ khi ba điểm O, A, B không thẳng hàng là

- A. tam giác OAB đều. B. tam giác OAB cân tại O .
C. tam giác OAB vuông tại O . D. tam giác OAB vuông cân tại O .

Lời giải.Gọi I là trung điểm của AB . Khi đó $\vec{OA} + \vec{OB} = 2\vec{OI}$.Vậy $(\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot \vec{AB} = 0 \Leftrightarrow 2\vec{OI} \cdot \vec{AB} = 0 \Leftrightarrow \vec{OI} \perp \vec{AB}$ hay $\triangle OAB$ cân tại O .Chọn đáp án (B) □

Câu 92. Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 8$ và $BD = 6$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

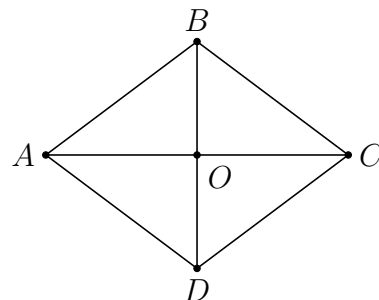
- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 26$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 28$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 32$.

Lời giải.

Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$.

Khi đó $AO = 4$, $BO = 3$ và $AB = 5$.

Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = 5 \cdot 8 \cdot \frac{4}{5} = 32$.



Chọn đáp án **(D)** □

Câu 93. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai véc-tơ $\vec{a} = (-3; 2)$ và $\vec{b} = (-1; -7)$. Tìm tọa độ véc-tơ $\vec{c}$ biết $\vec{c} \cdot \vec{a} = 9$ và $\vec{c} \cdot \vec{b} = -20$.

- A. $\vec{c} = (-1; -3)$. B. $\vec{c} = (-1; 3)$. C. $\vec{c} = (1; -3)$. D. $\vec{c} = (1; 3)$.

Lời giải.

Gọi tọa độ của $\vec{c}$ là $(m; n)$.

$$\text{Vì } \vec{c} \cdot \vec{a} = 9 \text{ và } \vec{c} \cdot \vec{b} = -20 \Rightarrow \begin{cases} -3m + 2n = 9 \\ -m - 7n = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = 3 \end{cases}$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 94. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(6; 0)$, $B(3; 1)$ và $C(-1; -1)$. Tính số đo góc B của tam giác đã cho.

- A. 15° . B. 60° . C. 120° . D. 135° .

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BA} = (3; -1)$ và $\overrightarrow{BC} = (-4; -2)$.

$$\text{Suy ra } \cos B = \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{3 \cdot (-4) + (-1) \cdot (-2)}{\sqrt{3^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\Rightarrow \widehat{B} = 135^\circ.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 95. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-4; 1)$, $B(2; 4)$, $C(2; -2)$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác đã cho.

- A. $I\left(\frac{1}{4}; 1\right)$. B. $I\left(-\frac{1}{4}; 1\right)$. C. $I\left(1; \frac{1}{4}\right)$. D. $I\left(1; -\frac{1}{4}\right)$.

Lời giải.

Ta có $M(2; 1)$ là trung điểm của BC , $N\left(-1; \frac{5}{2}\right)$ là trung điểm của AB .

Vậy $I(m; n)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{IN} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-a)(2-2) + (1-b)(-2-4) = 0 \\ (-1-a)(2+4) + \left(\frac{5}{2}-b\right)(4-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = 1 \end{cases}$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 96. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-3; 0)$, $B(3; 0)$ và $C(2; 6)$. Gọi $H(a; b)$ là tọa độ trực tâm của tam giác đã cho. Tính $a + 6b$.

A. $a + 6b = 5$.

B. $a + 6b = 6$.

C. $a + 6b = 7$.

D. $a + 6b = 8$.

Lời giải.

$H(a; b)$ là trực tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+3)(2-3) + (b-0)(6-0) = 0 \\ (a-3)(2+3) + (b-0)(6-0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = \frac{5}{6} \end{cases}.$$

Vậy $a + 6b = 2 + 6 \cdot \frac{5}{6} = 7$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 97. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(4; 3)$, $B(2; 7)$ và $C(-3; -8)$. Tìm tọa độ chân đường cao A' kẻ từ đỉnh A xuống cạnh BC .

A. $A'(1; -4)$.

B. $A'(-1; 4)$.

C. $A'(1; 4)$.

D. $A'(4; 1)$.

Lời giải.

Vì $A' \in BC$ nên $\overrightarrow{BA'} = k\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} - 2 = -5k \\ y_{A'} - 7 = -15k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2 - 5k \\ y_{A'} = 7 - 15k \end{cases}.$

Vậy A' là chân đường cao kẻ từ đỉnh A xuống cạnh BC khi và chỉ khi $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow (-2 - 5k) \cdot (-5) + (4 - 15k) \cdot (-15) = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{5}.$

Suy ra tọa độ của A' là $(1; 4)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 98. Phương tích của điểm $M(1; 2)$ đối với đường tròn ($\mathcal{C}$) tâm $I(-2; 1)$, bán kính $R = 2$ là

A. 6.

B. 8.

C. 0.

D. -5.

Lời giải.

$$\mathcal{P}_{M/(I)} = MI^2 - R^2 = (-3)^2 + (-1)^2 - 2^2 = 6.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 99. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA})$.

A. $P = 2\sqrt{2}a$.

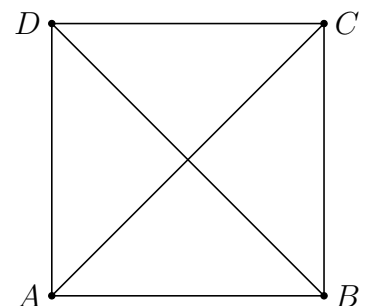
B. $P = 2a^2$.

C. $P = a^2$.

D. $P = -2a^2$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} P &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA}) \\ &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD}) \\ &= 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})\overrightarrow{BD} \\ &= 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} \\ &= 2a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 135^\circ + 0 = -2a^2. \end{aligned}$$



Chọn đáp án **D**

□

Câu 100. Cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$ là

- A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm BC . Khi đó $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$.

$$\text{Vậy } \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA} = \vec{0} \\ \overrightarrow{MI} = \vec{0} \\ \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MI}. \end{cases}$$

$\Rightarrow M$ nằm trên đường tròn đường kính AI .

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 101. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai véc-tơ $\vec{u} = (4; 1)$ và $\vec{v} = (1; 4)$. Tìm m để véc-tơ $\vec{a} = m \cdot \vec{u} + \vec{v}$ tạo với véc-tơ $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$ một góc 45° .

- A. $m = 4$. B. $m = -\frac{1}{2}$. C. $m = -\frac{1}{4}$. D. $m = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a} = (4m + 1; m + 4)$; $\vec{b} = (1; 1)$ và $(\vec{a}; \vec{b}) = 45^\circ$.

$$\Rightarrow \frac{4m + 1 + m + 4}{\sqrt{(4m + 1)^2 + (m + 4)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}} = \cos 45^\circ$$

$$\Leftrightarrow \frac{5m + 5}{\sqrt{17m^2 + 16m + 17} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{17m^2 + 16m + 17} = 5m + 5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5m + 5 \geq 0 \\ 8m^2 + 34m + 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m = -\frac{1}{4}.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 102. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(-1; 1)$, $B(0; 2)$, $C(3; 1)$ và $D(0; -2)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
B. Tứ giác $ABCD$ là hình thoi.
C. Tứ giác $ABCD$ là hình thang cân.
D. Tứ giác $ABCD$ không nội tiếp được đường tròn.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 1)$ và $\overrightarrow{DC} = (3; 3)$. Suy ra $\overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{AB}$ nên $\overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương.

Lại có $\overrightarrow{AC} = (4; 0)$ và $\frac{4}{3} \neq \frac{0}{3}$ nên A, C, D không thẳng hàng. Vậy $AB \parallel CD$ hay $ABCD$ là hình thang.

Mà $AC^2 = 4^2 + 0^2 = 0^2 + 4^2 = BD^2 \Rightarrow AC = BD$. Do đó $ABCD$ là hình thang cân.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 103. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1; -1)$ và $B(3; 2)$. Tìm M thuộc trục tung sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

- A. $M(0; 1)$. B. $M(0; -1)$. C. $M\left(0; \frac{1}{2}\right)$. D. $M\left(0; -\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Gọi tọa độ của M nằm trên Oy là $(0; m)$.

$$\text{Khi đó } MA^2 + MB^2 = 1^2 + (-1 - m)^2 + 3^2 + (2 - m)^2 = 2m^2 - 2m + 15 = 2\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{29}{2} \geq \frac{29}{2}.$$

Vậy $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất bằng $\frac{29}{2}$ khi và chỉ khi $m = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 104. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC biết $A(1; 3), B(-2; -2), C(3; 1)$. Tính cosin góc A của tam giác.

A. $\cos A = \frac{2}{\sqrt{17}}$. B. $\cos A = \frac{1}{\sqrt{17}}$. C. $\cos A = -\frac{2}{\sqrt{17}}$. D. $\cos A = -\frac{1}{\sqrt{17}}$.

Lời giải.

$$\overrightarrow{AB} = (-3; -5), \overrightarrow{AC} = (2; -2) \quad \cos A = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC} = \frac{-3 \cdot 2 + 5 \cdot 2}{\sqrt{34} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

Chọn đáp án **B** □

Câu 105. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 8, AD = 5$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$.

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 62$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -64$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -62$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 64$.

Lời giải.

Giả sử E là điểm đối xứng với A qua B ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BE}$.

Xét tam giác ABD có $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{89}$.

Xét tam giác ABD có $\cos \widehat{ABD} = \frac{AB}{BD} = \frac{8}{\sqrt{89}}$ suy ra

$$\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BD}) = \cos \widehat{DBE} = -\cos \widehat{ABD} = -\frac{8}{\sqrt{89}}.$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BD}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BD}) = 8 \cdot \sqrt{89} \cdot \left(\frac{-8}{\sqrt{89}}\right) = -64.$$

Chọn đáp án **B** □

Câu 106. Cho tam giác ABC . Tập hợp tất cả các điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ là

- A. đường thẳng qua A và song song với BC . B. đường thẳng qua A và vuông góc với BC .
C. đường thẳng qua B và vuông góc với BC . D. đường thẳng qua B và song song với AC .

Lời giải.

Theo giả thiết $AM \perp BC$ nên tập các điểm M là đường thẳng qua A vuông góc với BC .

Chọn đáp án **B** □

Câu 107. Cho tam giác ABC vuông cân tại B có $AB = 2$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4\sqrt{2}$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 8\sqrt{2}$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$.

Lời giải.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = 4.$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 108. Cho tam giác đều ABC cạnh a có trọng tâm G . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}a^2$. B. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = -\frac{1}{2}a^2$. C. $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = \frac{1}{6}a^2$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}a^2$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = GA \cdot GB \cdot \cos \widehat{AGB} = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{6}.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 109. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(-3; -3)$, $B(1; 3)$ và $C(7; -1)$. Hỏi tam giác ABC là tam giác gì?

- A. Tam giác vuông, không cân. B. Tam giác tù.
C. Tam giác vuông cân. D. Tam giác đều.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BA} = (-4; -6) \Rightarrow BA = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52}$;

$\overrightarrow{BC} = (6; -4) \Rightarrow BC = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$.

Suy ra $BA = BC$.

Mặt khác $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -24 + 24 = 0 \Rightarrow BA \perp BC$.

Vậy tam giác ABC là tam giác vuông cân ở B .

Chọn đáp án **C** □

Câu 110. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC với $A(1; 0)$, $B(-2; -1)$ và $C(0; 3)$. Xác định hình dạng của tam giác ABC .

- A. Tam giác đều. B. Tam giác vuông tại A .
C. Tam giác cân tại B . D. Tam giác vuông tại C .

Lời giải.

Ta có $AB = \sqrt{10}$, $BC = \sqrt{20}$, $AC = \sqrt{10}$.

Dễ thấy $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Vậy $\triangle ABC$ vuông tại A .

Chọn đáp án **B** □

Câu 111. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC với $A(1; -1)$, $B(4; 2)$ và $C(4; -2)$. Hỏi góc $\widehat{ABC}$ có số đo độ bằng bao nhiêu?

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BA} = (-3; -3) \Rightarrow BA = 3\sqrt{2}$.

$\overrightarrow{BC} = (0; -4) \Rightarrow BC = 4$.

$$\cos \widehat{ABC} = \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{BA \cdot BC} = \frac{(-3) \cdot 0 + (-3) \cdot (-4)}{3 \cdot \sqrt{2} \cdot 4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{ABC} = 45^\circ$$

Chọn đáp án **B** □

Câu 112. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC với $A(0; 3)$, $B(2; 2)$ và $C(-6; 1)$. Tính số đo của góc $\hat{A}$.

- A. $\hat{A} = 30^\circ$. B. $\hat{A} = 45^\circ$. C. $\hat{A} = 135^\circ$. D. $\hat{A} = 150^\circ$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-6; -2)$. Suy ra

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{2 \cdot (-6) + (-1) \cdot (-2)}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{40}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy $\hat{A} = 135^\circ$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 113. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC với $A(2; 1)$, $B(2; -3)$ và $C(3; 2)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Tam giác ABC là tam giác nhọn.
C. Tam giác ABC là tam giác tù.

- B. Tam giác ABC là tam giác đều.
D. Tam giác ABC là tam giác vuông.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (0; -4) \Rightarrow AB = 4$.

$\overrightarrow{AC} = (1; 1) \Rightarrow AC = \sqrt{2}$;

$\overrightarrow{BC} = (1; 5) \Rightarrow BC = \sqrt{26}$.

Ta nhận thấy $AB \neq AC$ nên tam giác ABC không phải là tam giác đều.

Ta có $AB^2 + AC^2 = 4^2 + (\sqrt{2})^2 = 18 \neq 26 = BC^2$.

Cạnh dài nhất là BC nên góc lớn nhất là góc A . Ta tính góc này:

$$\cos \hat{A} = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{0 \cdot 1 - 4 \cdot 1}{4\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0 \Rightarrow \hat{A} > 90^\circ.$$

Vậy $\triangle ABC$ là tam giác tù.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 114. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(4; 0)$ và $B(-4; 0)$. Tìm tọa độ điểm C trên trục Oy sao cho tam giác ABC đều.

A. $C(0; -4\sqrt{3})$.

B. $C(0; 4\sqrt{3})$ hoặc $C(0; -4\sqrt{3})$.

C. $C(0; 4)$.

D. $C(0; -1)$.

Lời giải.

Gọi $C(0; c) \in Oy$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-8; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-4; c)$, $\overrightarrow{BC} = (4; c)$.

Khi đó

$$\triangle ABC \text{ là tam giác đều} \Leftrightarrow \left\{ |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| \right\} |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AB}| \Leftrightarrow c^2 + 16 = 64 \Leftrightarrow c = \pm 4\sqrt{3}.$$

Vậy $C(0; 4\sqrt{3})$ hoặc $C(0; -4\sqrt{3})$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 115. Cho $AB = a > 0$. Biết rằng tập hợp các điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 2a^2$ là một đường tròn. Tính theo a bán kính r của đường tròn đó.

A. $r = \frac{3a}{2}$.

B. $r = \frac{5a}{2}$.

C. $r = \frac{a}{4}$.

D. $r = \frac{a}{2}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm AB . Ta có $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ và

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = MI^2 + \overrightarrow{MI} (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} \\ &= MI^2 + \overrightarrow{MI} (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) - IA \cdot IB = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2. \end{aligned}$$

Do đó

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 2a^2 \Leftrightarrow IM^2 - \frac{a^2}{4} = 2a^2 \Leftrightarrow IM^2 = \frac{9a^2}{4} \Leftrightarrow IM = \frac{3a}{2}.$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I , bán kính $r = \frac{3a}{2}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 116. Cho $AB = a > 0$ với I là trung điểm AB . Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn điều kiện $MA^2 + MB^2 = a^2$.

- A. Đường tròn tâm I , bán kính $\frac{a}{4}$.
 B. Đường tròn tâm I , bán kính $\frac{a}{2}$.
 C. Đường tròn tâm I , bán kính $\frac{a}{\sqrt{2}}$.
 D. Đường tròn tâm I , bán kính a .

Lời giải.

Gọi I là trung điểm AB . Ta có

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + IA^2 + IB^2 \\ &= 2MI^2 + 2IA^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}a^2. \end{aligned}$$

Do đó

$$MA^2 + MB^2 = a^2 \Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{1}{2}a^2 = a^2 \Leftrightarrow IM^2 = \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow IM = \frac{a}{2}.$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I , bán kính $r = \frac{a}{2}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 117. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn điều kiện $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = 0$.

- A. Đường thẳng đi qua trung điểm AB và BC .
 B. Đường trung trực đoạn thẳng AB .
 C. Đường thẳng đi qua trung điểm AB và vuông góc BC .
 D. Đường thẳng đi qua trung điểm BC và vuông góc AB .

Lời giải.

Gọi I là trung điểm AB . Ta có

$$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow MI \perp BC.$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng qua trung điểm I của AB và vuông góc với BC .

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 118. Cho tam giác ABC có trực tâm H và M là trung điểm BC . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. $BC^2 = \frac{1}{4}\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA}$.
 B. $BC^2 = \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA}$.
 C. $BC^2 = 4\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA}$.
 D. $BC^2 = \frac{1}{2}\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 4\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{HM} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HC} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BC}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{CB}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = CB^2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 119. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a . Biết rằng tập hợp các điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 7a^2$ là một đường tròn bán kính r . Tính r theo a .

- A. $r = a\sqrt{2}$. B. $r = 2a\sqrt{2}$. C. $r = 4a$. D. $r = 2a$.

Lời giải.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ và

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 7a^2 \\ \Leftrightarrow & (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}) (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD}) = 7a^2 \\ \Leftrightarrow & 2MO^2 + \overrightarrow{MO} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = 7a^2 \\ \Leftrightarrow & 2MO^2 - 2OA^2 = 7a^2 \Leftrightarrow 2OM^2 - a^2 = 7a^2 \Leftrightarrow OM = 2a. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm O , bán kính $r = 2a$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 120. Cho tam giác ABC có $AB = c$, $BC = a$ và $CA = b$. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm M sao cho $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$ là một đường tròn bán kính r . Tính r .

- A. $r = \frac{b}{4}$. B. $r = \frac{c+a}{4}$. C. $r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{4}$. D. $r = \frac{a+b+c}{4}$.

Lời giải.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB, BC . Ta có

$$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} \cdot 2\overrightarrow{MJ} = 0 \Leftrightarrow MI \perp MJ \Leftrightarrow \widehat{IMJ} = 90^\circ.$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính $IJ = \frac{AC}{2} = \frac{b}{2}$, suy ra bán kính $r = \frac{b}{4}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 121. Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 8$ và $\hat{A} = 60^\circ$. Tính BC .

- A. $BC = 4\sqrt{3}$. B. $BC = 7$. C. $BC = 20$. D. $BC = 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, suy ra

$$\begin{aligned} BC^2 &= (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= AC^2 + AB^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 49. \end{aligned}$$

Vậy $BC = 7$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 122. Cho tam giác ABC có $AB = 2$, $BC = 4$ và $CA = 5$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{9}{2}$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{11}{2}$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{13}{2}$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{15}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Suy ra

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} = \frac{13}{2}.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 123. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $BC = 2a$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

- A. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 3a^2$. B. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 2a^2$. C. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a^2\sqrt{3}$. D. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 6a^2$.

Lời giải.

Áp dụng định lý Pitago, ta có được $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$, suy ra

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CA \cdot CB \cdot \cos C = CA^2 = 3a^2.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 124. Cho tam giác ABC đều cạnh a , có trọng tâm G . Tính theo a giá trị của biểu thức $T = \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}$?

- A. $T = -a^2$. B. $T = -\frac{a^2}{3}$. C. $T = -\frac{a^2}{2}$. D. $T = a^2$.

Lời giải.

Vì $GA = GB = GC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}) = (\overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GC}) = (\overrightarrow{GC}, \overrightarrow{GA}) = 120^\circ$ nên ta có

$$\begin{aligned} T &= \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} \\ &= 3\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = 3 \cdot GA \cdot GB \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 125. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (5; 2)$ và $\vec{b} = (7; -3)$. Tìm tọa độ véc-tơ $\vec{x}$ sao cho $\vec{a} \cdot \vec{x} = 38$ và $\vec{b} \cdot \vec{x} = 30$.

- A. $\vec{x} = (6; -4)$. B. $\vec{x} = (6; 4)$. C. $\vec{x} = \left(7; \frac{3}{2}\right)$. D. $\vec{x} = (3; -3)$.

Lời giải.

Gọi $\vec{x} = (x_1; x_2)$. Ta có

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{x} = 38 \\ \vec{b} \cdot \vec{x} = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 38 \\ 7x_1 - 3x_2 = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 4. \end{cases}$$

Vậy $\vec{x} = (6; 4)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 126. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(1; 1)$, $B(3; 2)$ và $C(-2; m - 1)$. Với giá trị nào của m thì véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ vuông góc với véc-tơ $\overrightarrow{OC}$?

- A. $m = -5$. B. $m = -3$. C. $m = 3$. D. $m = 5$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; 1)$, $\overrightarrow{OC} = (-2; m - 1)$.

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0 \Leftrightarrow -4 + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 5.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 127. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(-1; 5)$ và $B(3; 3)$. Tìm tọa độ M nằm trên trục Ox sao cho $MA = MB$.

- A. $M(0; 1)$. B. $M(-1; 0)$. C. $M(2; 0)$. D. $M(-2; 0)$.

Lời giải.

Gọi $M(x; 0) \in Ox$. Ta có

$$\overrightarrow{MA} = (-1 - x; 5) \Rightarrow MA = \sqrt{(1 + x)^2 + 25}.$$

$$\overrightarrow{MB} = (3 - x; 3) \Rightarrow MB = \sqrt{(3 - x)^2 + 9}.$$

$$MA = MB \Leftrightarrow MA^2 = MB^2 \Leftrightarrow (1 + x)^2 + 25 = (3 - x)^2 + 9 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow M(-1; 0).$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 128. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(2; -1)$, $B(-2; 1)$ và điểm M có tung độ bằng 2. Tìm tọa độ tất cả các điểm M biết tam giác ABM vuông tại M .

A. $M(1; 2)$.

B. $M(-3; 2)$ hoặc $M(1; 2)$.

C. $M(-1; 2)$.

D. $M(1; 2)$ hoặc $M(-1; 2)$.

Lời giải.

Gọi $M(x; 2)$. Ta có $\overrightarrow{AM} = (x - 2; 3)$, $\overrightarrow{BM} = (x + 2; 1)$.

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = \vec{0} \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2) + 3 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Vậy $M(1; 2)$ hoặc $M(-1; 2)$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 129. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(2; 4)$ và $B(1; 1)$. Tìm tọa độ điểm C sao cho tam giác ABC vuông cân tại B .

A. $C(4; 0)$ hoặc $C(5; -1)$.

B. $C(-2; 2)$ hoặc $C(1; -3)$.

C. $C(5; -1)$ hoặc $C(1; -3)$.

D. $C(-2; 2)$ hoặc $C(4; 0)$.

Lời giải.

Gọi $C(x; y)$. Ta có $\overrightarrow{BA} = (1; 3)$, $\overrightarrow{BC} = (x - 1; y - 1)$.

Khi đó

$$\begin{aligned} \triangle ABC \text{ vuông cân tại } B &\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ |\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BC}| \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 + 3(y - 1) = 0 \\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 10 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y + 4 \\ 10(y - 1)^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 4 \\ y = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $C(-2; 2)$ hoặc $C(4; 0)$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 130. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1; 2)$ và $B(-3; 1)$. Tìm tọa độ điểm C nằm trên trục Oy sao cho tam giác ABC vuông tại A .

A. $C(0; 5)$.

B. $C(0; 6)$.

C. $C(0; 1)$.

D. $C(0; -6)$.

Lời giải.

Gọi $C(0; c) \in Oy$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-4; -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1; c - 2)$.

Khi đó

$$\triangle ABC \text{ vuông tại } A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow 4 - (c - 2) = 0 \Leftrightarrow c = 6.$$

Vậy $C(0; 6)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 131. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(-2; 4)$ và $B(8; 4)$. Tìm tọa độ điểm C nằm trên trục Ox sao cho tam giác ABC vuông tại C .

- A. $C(1; 0)$. B. $C(3; 0)$.
C. $C(-1; 0)$. D. $C(0; 0)$ hoặc $C(6; 0)$.

Lời giải.

Gọi $C(c; 0) \in Ox$. Ta có $\overrightarrow{AC} = (c + 2; -4)$, $\overrightarrow{BC} = (c - 8; -4)$.

Khi đó

$$\triangle ABC \text{ vuông tại } C \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow (c + 2)(c - 8) + 16 = 0 \Leftrightarrow c^2 - 6c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ c = 6. \end{cases}$$

Vậy $C(0; 0)$ hoặc $C(6; 0)$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 132. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(3; 4)$ và $B(-1; 0)$. Tìm tọa độ điểm C trên trục Ox sao cho tam giác ABC cân tại C .

- A. $C(3; 0)$. B. $C(-3; 0)$. C. $C(-1; 0)$. D. $C(2; 0)$.

Lời giải.

Gọi $C(c; 0) \in Ox$. Ta có $\overrightarrow{AC} = (c - 3; -4)$, $\overrightarrow{BC} = (c + 1; 0)$.

Khi đó

$$\triangle ABC \text{ cân tại } C \Leftrightarrow |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| \Leftrightarrow (c - 3)^2 + 16 = (c + 1)^2 \Leftrightarrow c = 3.$$

Vậy $C(3; 0)$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 133. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(3; 1)$ và $B(6; -3)$. Tìm được bao nhiêu điểm M nằm trên trục Ox sao cho tam giác MAB vuông tại M .

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải.

Gọi $M(m; 0) \in Ox$. Ta có $\overrightarrow{AM} = (m - 3; -1)$, $\overrightarrow{BM} = (m - 6; 3)$.

Khi đó

$$\triangle MAB \text{ vuông tại } M \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow (m - 3)(m - 6) - 3 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 9m + 15 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{9 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

Vậy có hai điểm M thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án **C** □

Câu 134. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC với $A(0; 2)$, $B(m; 0)$ và $C(m + 3; 1)$. Tìm tất cả các giá trị của m để tam giác ABC vuông tại A .

- A. $m = -1$. B. $m = 0$.
C. $m = -2$. D. $m = -1$ hoặc $m = -2$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (m; -2)$, $\overrightarrow{AC} = (m+3; -1)$. Khi đó

$$\triangle ABC \text{ vuông tại } A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

$$\Leftrightarrow m(m+3) + 2 = 0 \Leftrightarrow m^2 + 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -2. \end{cases}$$

Vậy $m = -1$ hoặc $m = -2$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 135. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC biết $A(-1; 3)$, $B(-3; -2)$ và $C(4; 1)$. Tính khoảng cách d từ điểm C đến AB .

A. $d = \sqrt{29}$. B. $d = \sqrt{58}$. C. $d = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. D. $d = \frac{\sqrt{145}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; -5)$, $\overrightarrow{AC} = (5; -2)$.

Do $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ nên $AB \perp AC \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại A .

Do đó $d(C, AB) = AC = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 136. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC với $A(2; 6)$, $B(-3; -4)$ và $C(5; 0)$. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC .

A. $H(2; 1)$. B. $H\left(-2; \frac{2}{3}\right)$. C. $H(5; 0)$. D. $H\left(-\frac{1}{20}; \frac{49}{40}\right)$.

Lời giải.

Gọi $H(x; y)$. Ta có $\overrightarrow{AH} = (x-2; y-6)$, $\overrightarrow{BC} = (8; 4)$, $\overrightarrow{BH} = (x+3; y+4)$, $\overrightarrow{AC} = (3; -6)$.

Do H là trực tâm tam giác ABC nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8(x-2) + 4(y-6) = 0 \\ 3(x+3) - 6(y+4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 4y = 40 \\ 3x - 6y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 137. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC biết $A(3; 4)$, $B(4; 1)$ và $C(2; -3)$. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC .

A. $H(-1; 1)$. B. $H\left(3; \frac{2}{3}\right)$. C. $H(9; 2)$. D. $H(7; 2)$.

Lời giải.

Gọi $H(x; y)$ là trực tâm tam giác ABC .

Ta có $\overrightarrow{AH} = (x-3; y-4)$, $\overrightarrow{BC} = (-2; -4)$, $\overrightarrow{BH} = (x-4; y-1)$, $\overrightarrow{AC} = (1; -3)$. Khi đó

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2(x-3) - 4(y-4) = 0 \\ 1(x-4) - 3(y-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 4y = -22 \\ x - 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 2. \end{cases}$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 138. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC với $A(1; 5)$, $B(-4; -5)$ và $C(4; -1)$. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC .

- A. $H(1; 0)$. B. $H(1; -1)$. C. $H\left(-2; -\frac{1}{4}\right)$. D. $H(4; -1)$.

Lời giải.

Gọi $H(x; y)$ là trực tâm $\triangle ABC$.

Ta có $\overrightarrow{AH} = (x - 1; y - 5)$, $\overrightarrow{BC} = (8; 4)$, $\overrightarrow{BH} = (x + 4; y + 5)$, $\overrightarrow{AC} = (3; -6)$. Khi đó

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8(x - 1) + 4(y - 5) = 0 \\ 3(x + 4) - 6(y + 5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 4y = 28 \\ 3x - 6y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -1. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(D)** □

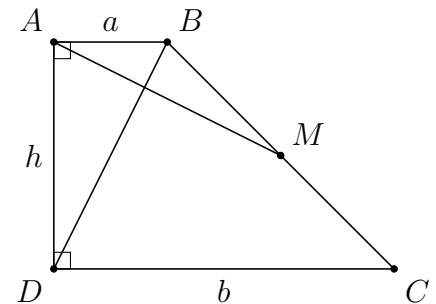
Câu 139. Cho hình thang vuông $ABCD$, đường cao $AD = h$, đáy $AB = a$, đáy $CD = b$. Gọi M là trung điểm của BC . Hệ thức giữa a, b, h để $AM \perp BD$ là

- A. $a^2 - h^2 - ab = 0$. B. $h^2 - a^2 - ab = 0$. C. $h^2 - b^2 - ab = 0$. D. $b^2 - h^2 - ab = 0$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} AM \perp BD &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = 0 \\ &\Leftrightarrow -AB^2 + AD^2 - \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ &\Leftrightarrow h^2 - a^2 - ab = 0. \end{aligned}$$



Chọn đáp án **(B)** □

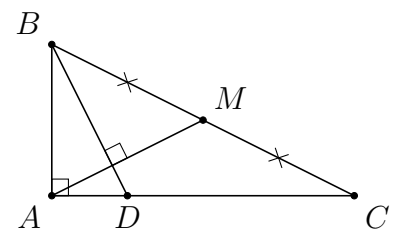
Câu 140. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $AC = 2a$. Gọi M là trung điểm của BC và điểm D bất kỳ thuộc cạnh AC . Tính AD theo a để $BD \perp AM$.

- A. $AD = \frac{5a}{9}$. B. $AD = \frac{a}{2}$. C. $AD = \frac{a}{3}$. D. $AD = \frac{2a}{3}$.

Lời giải.

Ta có $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$. Lại có $AB \perp AC$ nên

$$\begin{aligned} 2 \cdot \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) \\ &= -AB^2 + AC \cdot AD = 2a \cdot AD - a^2. \end{aligned}$$



Do đó

$$AM \perp BD \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \Leftrightarrow 2a \cdot AD - a^2 = 0 \Leftrightarrow AD = \frac{a}{2}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

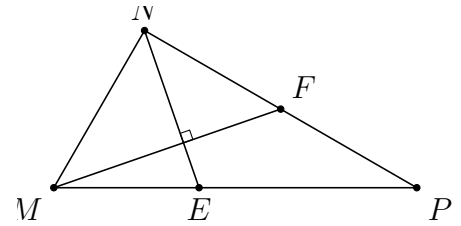
Câu 141. Cho tam giác MNP có $MN = 4$, $MP = 8$ và $\widehat{NMP} = 60^\circ$. Lấy điểm E trên tia MP và đặt $\overrightarrow{ME} = k\overrightarrow{MP}$. Tìm k để NE vuông góc với trung tuyến MF của tam giác MNP .

- A. $k = -\frac{5}{2}$. B. $k = \frac{2}{5}$. C. $k = -\frac{2}{5}$. D. $k = \frac{5}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} NP^2 &= (\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MN})^2 \\ &= MP^2 + MN^2 - 2MP \cdot MN \cos 60^\circ = 48. \end{aligned}$$



Suy ra $MP^2 = MN^2 + NP^2$ hay tam giác MNP vuông tại N . Do đó

$$\begin{aligned} \overrightarrow{NE} \cdot \overrightarrow{MF} &= (k\overrightarrow{NP} + (1-k)\overrightarrow{NM}) (\overrightarrow{NF} - \overrightarrow{NM}) \\ &= kNF \cdot NP + (k-1)NM^2 = 40k - 16. \end{aligned}$$

Suy ra

$$NE \perp MF \Leftrightarrow \overrightarrow{NE} \cdot \overrightarrow{MF} = 0 \Leftrightarrow 40k - 16 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{2}{5}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 142. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi M, N lần lượt thuộc cạnh BC và BA sao cho $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MC}$ và $\overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{AN}$. Tìm k để $AM \perp DN$.

- A. $k = 3$. B. $k = -3$. C. $k = 4$. D. $k = -4$.

Lời giải.

Ta có $4\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ và $(1-k)\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DB} - k\overrightarrow{DA}$ ($k \neq 1$), suy ra

$$\begin{aligned} 4(1-k)\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DN} &= (3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) (\overrightarrow{DB} - k\overrightarrow{DA}) \\ &= k\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DB} = (k+3)a^2. \end{aligned}$$

Do đó $AM \perp DN$ khi và chỉ khi

$$4(1-k)\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DN} = 0 \Leftrightarrow (k+3)a^2 = 0 \Leftrightarrow k = -3.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 143. Cho tam giác ABC có $AB = 2a$, $AC = a$ và $\hat{A} = 120^\circ$. Gọi M là trung điểm của AC và N là điểm thuộc cạnh BC sao cho $\overrightarrow{BN} = x\overrightarrow{BC}$. Giá trị của x để $AN \perp BM$ là

- A. $x = \frac{3}{4}$. B. $x = -\frac{3}{2}$. C. $x = \frac{2+\sqrt{3}}{3}$. D. $x = -\frac{2}{3}$.

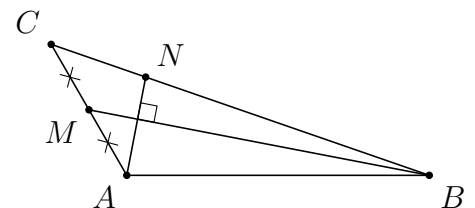
Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AC} + (1-x)\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}$, suy ra

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BM} &= (x\overrightarrow{AC} + (1-x)\overrightarrow{AB}) (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}) \\ &= xAC \cdot AM - xAC \cdot AB \cdot \cos 120^\circ \\ &\quad + (1-x)AB \cdot AM \cdot \cos 120^\circ + (x-1)AB^2 \\ &= \left(6x - \frac{9}{2}\right)a^2. \end{aligned}$$

Do đó $AN \perp BM$ khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow \left(6x - \frac{9}{2}\right)a^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}.$$



Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 144. Cho nửa đường tròn đường kính AB có AC, BD là hai dây cung thuộc nửa đường tròn, cắt nhau tại E . Tính $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD}$ theo AB .

A. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD} = AB^2$.

B. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD} = AB$.

C. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD} = 2AB$.

D. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD} = 4AB$.

Lời giải.

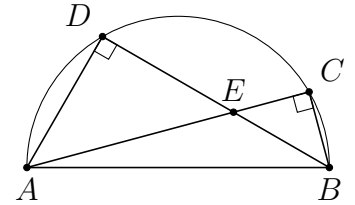
Theo giả thiết, ta có $AD \perp BD, AC \perp BC$, suy ra

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Tương tự $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BA}$.

Vậy $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB}) = AB^2$.

Chọn đáp án (A) □



Câu 145. Cho ba véc-tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ khác $\vec{0}$, thỏa mãn $\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c} = \vec{0}$, $|\vec{a}| = a, |\vec{b}| = b, |\vec{c}| = c$.

Tính $A = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$.

A. $A = \frac{1}{2}(3c^2 - a^2 + b^2)$.

B. $A = \frac{1}{2}(3c^2 - a^2 - b^2)$.

C. $A = \frac{1}{2}(3c^2 + a^2 - b^2)$.

D. $A = \frac{1}{2}(3c^2 + a^2 + b^2)$.

Lời giải.

Theo giả thiết, ta có $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = -2\vec{c}$, suy ra

$$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = 4\vec{c}^2 \Rightarrow \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2A = 4\vec{c}^2.$$

Vậy $A = \frac{1}{2}(3c^2 - a^2 - b^2)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 146. Cho tam giác ABC vuông tại A , $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $BC = 2a$. Tích vô hướng $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC}$ bằng bao nhiêu?

A. $3a^2$.

B. $-3a^2$.

C. $a^2\sqrt{3}$.

D. $-a^2\sqrt{3}$.

Lời giải.

$\triangle ABC$ vuông tại A có $\widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ACB} = 30^\circ$.

Do đó $AB = \frac{1}{2}BC = a \Rightarrow CA = a\sqrt{3}$.

Ta có $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -CA \cdot CB \cdot \cos(\widehat{ACB}) = -a\sqrt{3} \cdot 2a \cdot \cos 30^\circ = -3a^2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 147. Cho $\vec{i}, \vec{j}$ là các véc-tơ đơn vị của các trục Ox, Oy trong hệ trục tọa độ vuông góc Oxy . Biết rằng $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}, \vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$. Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.

B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1a_2 + b_1b_2$.

C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_2 + b_1a_2$.

D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$.

Lời giải.

Theo giả thiết ta có $\vec{a} = (a_1; a_2); \vec{b} = (b_1; b_2)$.

Do đó $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 148. Tính cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{u} = (3; -2)$ và $\vec{v} = (3; 2)$ trong hệ trục tọa độ Oxy .

A. 0.

B. 1.

C. $-\frac{5}{13}$.D. $\frac{5}{13}$.

Lời giải.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 = 5.$$

$$\text{Lại có } \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \sqrt{3^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{3^2 + 2^2} \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 13 \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

$$\text{Do đó } \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{5}{13}.$$

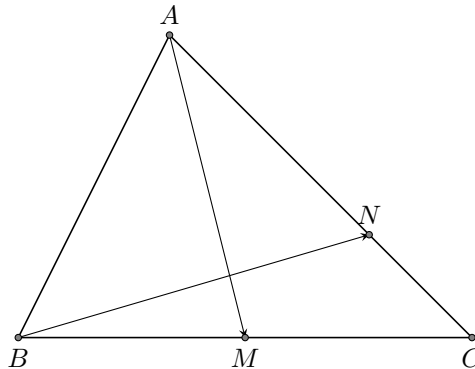
Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 149. Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $BC = 6$ và $AC = 9$. Gọi M là trung điểm của BC , N là điểm thuộc cạnh AC sao cho $AC = 3NC$. Tính tích vô hướng $\vec{AM} \cdot \vec{BN}$.

A. $\frac{26}{3}$.B. $-\frac{11}{3}$.C. $\frac{35}{3}$.D. $\frac{8}{3}$.

Lời giải.



$$\text{Ta có } \vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) \text{ và } \vec{BN} = \frac{1}{3}(\vec{BA} + 2\vec{BC})$$

$$\vec{AM} \cdot \vec{BN} = \frac{1}{6}(\vec{AB} + \vec{AC}) \cdot (\vec{BA} + 2\vec{BC}) = \frac{1}{6}(-AB^2 - 2\vec{BA} \cdot \vec{BC} - \vec{AC} \cdot \vec{AB} + 2\vec{AC} \cdot \vec{BC}) = \frac{26}{3}$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 150. Cho hai điểm $A(1; 0)$ và $B(-3; 3)$. Tính độ dài đoạn thẳng AB .

A. $AB = 4$.B. $AB = 5$.C. $AB = 3\sqrt{2}$.D. $AB = \sqrt{13}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } AB = \sqrt{(-3 - 1)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 151. Cho hai điểm $A(-1; 2)$ và $B(1; 2)$. Gọi I là trung điểm của đoạn AB . Khoảng cách giữa hai điểm I và B là

A. 1.

B. $\sqrt{3}$.C. $\sqrt{2}$.D. $\sqrt{5}$.

Lời giải.

$$\text{Do } I \text{ là trung điểm của } AB \text{ nên } \begin{cases} x_I = \frac{-1 + 1}{2} = 0 \\ y_I = \frac{2 + 2}{2} = 2. \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } IB = \sqrt{(0 - 1)^2 + (2 - 2)^2} = 1.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 152. Cho $\vec{a}, \vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Kết quả nào dưới đây đúng?

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = (|\vec{a}| + |\vec{b}|) \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = (|\vec{a}| - |\vec{b}|) \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Lời giải.

Theo định nghĩa tích vô hướng của hai véc-tơ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 153. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$. Biểu thức nào dưới đây đúng?

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2$.

B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1.b_1 - a_2.b_2$.

C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1.b_2 + a_2.b_1$.

D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1.a_2 + b_1.b_2$.

Lời giải.

Biểu thức tọa độ của tích vô hướng giữa hai véc-tơ là $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 154. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1; 3)$, $B(0; -4)$. Tính độ dài AB .

A. $AB = \sqrt{50}$.

B. $AB = 50$.

C. $AB = \sqrt{2}$.

D. $AB = 2$.

Lời giải.

Ta có $AB = \sqrt{(0-1)^2 + (-4-3)^2} = \sqrt{50}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 155. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}a^2$.

B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}a^2$.

C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$.

D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -a^2$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos A = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}a^2$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 156. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vectơ $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (-1; 0)$. Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$.

B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$.

C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$.

D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = -1$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 157. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai véc-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$.

B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$.

C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1b_2 + a_2b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_2^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_1^2}}$.

D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_2^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_1^2}}$.

Lời giải.

Mệnh đề đúng là $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 158. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$.

B. $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$.

C. $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$.

D. $(\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2 = 2(\vec{a}^2 + \vec{b}^2)$.

Lời giải.

Ta có $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2$ nên mệnh đề $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$ là sai.

Chọn đáp án **C** □

Câu 159. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kì. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

B. $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$.

C. $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) > 90^\circ$.

D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(-\vec{a}, -\vec{b})$.

Lời giải.

Vì $(-\vec{a}, -\vec{b}) = (\vec{a}, \vec{b})$ nên ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(-\vec{a}, -\vec{b})$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 160. Trong mặt phẳng tọa độ cho điểm $A(1; 1)$. Gọi B là điểm đối xứng với A qua điểm $I(-1, 2)$. Tìm điểm C có hoành độ bằng -2 sao cho tam giác ABC vuông tại C .

A. $C(-2; 0)$ và $C(-2; 4)$.

B. $C(-2; 1)$ và $C(-2; 3)$.

C. $C(-2; 2)$ và $C(-2; -2)$.

D. $C(-2; -1)$ và $C(-2; -3)$.

Lời giải.

Giả sử $C = (-2; t)$, với t là một số thực. Do I là trung điểm AB nên $B = (-3; 3)$. Tam giác ABC vuông tại C khi và chỉ khi $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 0$ hay $t^2 - 4t = 0$. Ta được $t = 0$ tức $C = (-2; 0)$ hoặc $t = 4$ tức $C = (-2; 4)$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 161. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai véc-tơ ngược hướng. Trong các đẳng thức sau, hãy chọn đẳng thức đúng?

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{0}$.

C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$.

D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Do $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai véc-tơ ngược hướng nên $(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$. Suy ra $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1$.

Vậy $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 162. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , góc B bằng 30° và $AB = 10$. Tính $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$.

A. $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 50\sqrt{3}$.

B. $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 50$.

C. $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 100$.

D. $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \frac{100}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có $\cos B = \frac{AB}{BC} \Rightarrow BC = \frac{AB}{\cos B} = \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{20}{\sqrt{3}}$.

Khi đó, ta có $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = BA \cdot BC \cdot \cos B = 10 \cdot \frac{20}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 100$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 163. Trong mặt phẳng tọa độ, cho $\vec{a} = (3; 4)$; $\vec{b} = (-4; 3)$. Kết luận nào sau đây là sai?

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

B. $\vec{a} \perp \vec{b}$.

C. $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = 0$.

D. $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = 0$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot (-4) + 4 \cdot 3 = 0$ suy ra các khẳng định $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, $\vec{a} \perp \vec{b}$ và $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = 0$ là đúng.
 Lại có $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $|\vec{b}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$ suy ra $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = 25 \neq 0$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 164. Cho các vec-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ có độ dài tương ứng bằng 1, 2 và góc $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$. Gọi $\vec{c} = 3\vec{a} + 4\vec{b}$. Khi đó độ dài $\vec{c}$ bằng

A. 7.

B. $\sqrt{17}$.C. $\sqrt{65}$.D. $\sqrt{11}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} |\vec{c}|^2 &= |3\vec{a} + 4\vec{b}|^2 \\ &= 9|\vec{a}|^2 + 24 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) + |\vec{b}|^2 \\ &= 9 + 24 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ + 64 = 49. \end{aligned}$$

Suy ra $|\vec{c}| = 7$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 165. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh $AB = 1$. Đặt $P = (\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}) \cdot (3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD})$. Giá trị của biểu thức P là

A. 2.

B. 4.

C. 0.

D. 1.

Lời giải.

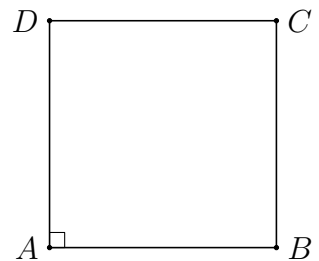
Do $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

Do $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{CD} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

Do $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ ngược hướng nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 180^\circ \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = -1$.

Khi đó

$$\begin{aligned} P &= (\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}) \cdot (3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}) \\ &= 3 \cdot \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + 6 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - 2 \cdot \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} \\ &= 3 \cdot 1 - (-1) + 6 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 4. \end{aligned}$$



Chọn đáp án **(B)** □

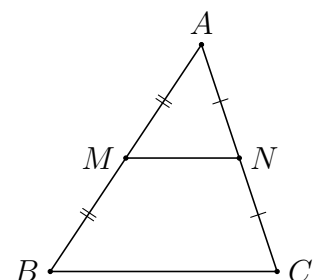
Câu 166. Cho tam giác ABC có cạnh $BC = a$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm cạnh AB , AC . Khi đó tích vô hướng $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CB}$ bằng

A. $\frac{a^2}{2}$.B. $\frac{a}{2}$.C. $\frac{a^2}{4}$.D. $-\frac{a^2}{2}$.

Lời giải.

Ta có $MN = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$ và $\overrightarrow{MN}$ ngược hướng với $\overrightarrow{CB}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CB} &= |\overrightarrow{MN}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cdot \cos(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{CB}) \\ &= \frac{a}{2} \cdot a \cdot \cos 180^\circ = -\frac{a^2}{2}. \end{aligned}$$



Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 167. Cho tam giác ABC vuông ở A và có hai cạnh $AB = 7$, $AC = 10$. Gọi H là hình chiếu của A trên BC . Khi đó $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC}$ bằng

- A. $\frac{149}{4900}$. B. $-\frac{149}{4900}$. C. $\frac{4900}{149}$. D. $-\frac{4900}{149}$.

Lời giải.

Ta có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{149}$, $BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{49}{\sqrt{149}}$ và $CH = \frac{AC^2}{BC} = \frac{100}{\sqrt{149}}$.

Theo định nghĩa tích vô hướng thì $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = BH \cdot CH \cdot \cos \widehat{BHC} = \frac{49}{\sqrt{149}} \cdot \frac{100}{\sqrt{149}} \cdot (-1) = -\frac{4900}{149}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 168. Cho $\vec{a}, \vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Kết quả nào sau đây **sai**?

- A. $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$. B. $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
C. $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$. D. $\vec{a} \cdot \vec{b}$ là một vectơ.

Lời giải.

Ta biết tích vô hướng của hai véc-tơ là một số nên $\vec{a} \cdot \vec{b}$ là một vectơ là mệnh đề sai.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 169. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1; 2)$, $B(3; 4)$. Giá trị của $\overrightarrow{AB}^2$ là

- A. 8. B. $\sqrt{8}$. C. 4. D. 2.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2 = (3 - 1)^2 + (4 - 2)^2 = 8$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 170. Cho tam giác ABC vuông tại A . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} < \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} < \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$.
C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} < \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$. D. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} < \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

Vì $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) < 90^\circ \Rightarrow \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) > 0 \Rightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} > 0$.

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) > 90^\circ \Rightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) < 0 \Rightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} < 0$. Vậy $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} > \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 171. Cho tam giác ABC , tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng biểu thức nào sau đây?

- A. $BC^2 - AB^2 - AC^2$. B. $\frac{BC^2 - AB^2 - AC^2}{2}$.
C. $\frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}$. D. $AB^2 + AC^2 - BC^2$.

Lời giải.

Từ $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ (quy tắc trừ), ta suy ra

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC}^2 &= \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 172. Cho tam giác ABC có $AB = 2$, $AC = 5$, $BC = 6$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

A. 7. B. -7. C. $\frac{7}{2}$. D. $-\frac{7}{2}$.

Lời giải.

Từ định lý cosin $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$ suy ra

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} = \frac{4 + 25 - 36}{2} = -\frac{7}{2}$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 173. Cho đoạn thẳng $AB = 4$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $MA^2 - MB^2 = 8$ là

A. một đường thẳng. B. một đoạn thẳng. C. một đường tròn. D. một điểm.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm AB và H là hình chiếu của M trên AB . Ta có

$$8 = MA^2 - MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = \overrightarrow{BA} \cdot 2 \cdot \overrightarrow{MI} = 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{HI}.$$

Suy ra $\overrightarrow{HI} = \frac{4}{\overrightarrow{BA}}$. Do đó H là điểm nằm trên đoạn thẳng BI sao cho $HI = 1$ hay H là trung điểm BI . Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng vuông góc với AB tại H .

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 174. Cho đoạn thẳng $AB = 4$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $MA^2 + MB^2 = 8$ là

A. một đường thẳng. B. một đoạn thẳng. C. một đường tròn. D. một điểm.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của AB . Ta có

$$MI^2 = \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4} = \frac{8}{2} - \frac{4^2}{4} = 0.$$

Vậy $M \equiv I$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 175. Cho đoạn thẳng $AB = 4$. Tập hợp các điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -5$ là

A. một điểm. B. một đường tròn. C. tập rỗng. D. một đoạn thẳng.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB . Ta có

$$-5 = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = MI^2 - IA^2 \Leftrightarrow MI^2 = IA^2 - 5 = -1.$$

Vậy không tồn tại điểm M thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 176. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 5, I là trung điểm của BC . Độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AC}$ bằng

- A. 17. B. $\frac{5\sqrt{5} + 10\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{35}{2}$. D. $\frac{25}{2}$.

Lời giải.

Gọi E là trung điểm IC , suy ra $BE = \frac{15}{4}$. Khi đó, ta có $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AE}$.

$$\text{Vậy } |\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AC}| = 2|\overrightarrow{AE}| = 2\sqrt{AB^2 + BE^2} = 2\sqrt{25 + \frac{225}{16}} = \frac{25}{2}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 177. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 4, BC = 5, CA = 6$. Tính tích $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -24$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{27}{2}$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{16 + 36 - 25}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{9}{16}.$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos A = 4 \cdot 6 \cdot \frac{9}{16} = \frac{27}{2}.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 178. Cho $\triangle ABC$ đều cạnh bằng a . Tính độ dài của $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.

- A. $a\sqrt{3}$. B. $a\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $a\sqrt{6}$. D. $2a\sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm AC . Khi đó, ta có BI là đường cao trong tam giác ABC và $BI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BI}$ nên suy ra $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = 2|\overrightarrow{BI}| = 2BI = a\sqrt{3}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 179. Tam giác ABC có $A(-1; 1), B(1; 3), C(1; -1)$. Khẳng định nào đúng?

- A. Tam giác ABC có ba cạnh bằng nhau. B. Tam giác ABC có ba góc nhọn.
C. Tam giác ABC cân tại B . D. Tam giác ABC vuông cân tại A .

Lời giải.

$$AB = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}, BC = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = 4, AC = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}.$$

Suy ra $AB = AC$ nên tam giác ABC cân tại A .

$$\text{Mà } \overrightarrow{AB} = (2; 2), \overrightarrow{AC} = (2; -2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.$$

Vậy ABC là tam giác vuông cân tại A .

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 180. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 120^\circ, AB = 1, AC = 3$. Đặt $P = (\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}) \cdot (2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$.

Giá trị biểu thức P là

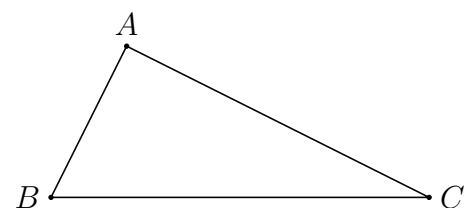
- A. $\frac{41}{2}$. B. $-\frac{41}{2}$. C. $\frac{43}{2}$. D. $-\frac{23}{2}$.

Lời giải.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 1 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ = -\frac{3}{2}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} P &= (\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}) \cdot (2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \\ &= 2 \cdot \overrightarrow{AB}^2 + 3 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - 2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 \\ &= 2 \cdot 1 + 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 2 \cdot 9 = -\frac{41}{2}. \end{aligned}$$



Chọn đáp án **(B)** □

Câu 181. Cho tam giác ABC với $A(1, 0)$, $B(2, 0)$, $C(0, 3)$. Gọi H là trực tâm của tam giác. Giá trị của tổng $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HA}$ bằng

A. $\frac{22}{9}$.

B. $\frac{22}{3}$.

C. $-\frac{2}{3}$.

D. $\frac{11}{9}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ và $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ suy ra $H\left(0, -\frac{2}{3}\right)$. Khi đó $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HA} = \frac{22}{9}$, vậy tổng $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HA} = \frac{66}{9}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 182. Cho ba điểm $A(-1, 1)$, $B(3, 1)$, $C(2, 4)$. Gọi H , G , I lần lượt là trực tâm, trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC . Khi đó

A. $\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{IG}$.

B. $\overrightarrow{IH} = 3\overrightarrow{IG}$.

C. $\overrightarrow{IH} = 2\overrightarrow{IG}$.

D. $\overrightarrow{IH} = -3\overrightarrow{IG}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ và $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ suy ra $H(2, 2)$; $G\left(\frac{4}{3}, 2\right)$; $I(1, 2)$. Khi đó $\overrightarrow{IH} = (1, 0)$; $\overrightarrow{IG} = \left(\frac{1}{3}, 0\right)$, do đó $\overrightarrow{IH} = 3\overrightarrow{IG}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 183. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(10; 5)$, $B(3; 2)$, $C(6; -5)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Tam giác ABC là tam giác đều.

B. Tam giác ABC vuông cân tại B .

C. Tam giác ABC vuông cân tại A .

D. Tam giác ABC có góc tù tại A .

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BA} = (7; 3) \Rightarrow BA = \sqrt{58}$.

$\overrightarrow{BC} = (3; -7) \Rightarrow BC = \sqrt{58}$.

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ nên tam giác ABC vuông cân tại B .

Chọn đáp án (B) □

Câu 184. Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy , cho các vec-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$. Tính

$$Q = \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$

A. $Q = |a_1b_2 + a_2b_1|$.

B. $Q = |a_1b_1 + a_2b_2|$.

C. $Q = |a_1b_1 - a_2b_2|$.

D. $Q = |a_1b_2 - a_2b_1|$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} Q^2 &= (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1b_1 + a_2b_2)^2 \\ &= a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1b_2a_2b_1 \\ &= (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \end{aligned}$$

Suy ra $Q = |a_1b_2 - a_2b_1|$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 185. Cho $\vec{a} = (2; -1)$, $\vec{b} = (3; -5)$ và $\vec{c} = (-1; -3)$. Giá trị của biểu thức $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c})$ là

A. 10.

B. 12.

C. 16.

D. 8.

Lời giải.

Ta có $\vec{b} - \vec{c} = (4; -2)$. Suy ra $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 2 \times 4 + (-1) \times (-2) = 10$.

Chọn đáp án (A) □

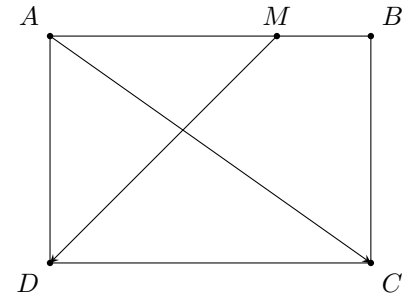
Câu 186. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a\sqrt{2}$, $AD = a$. Gọi M là điểm nằm trên cạnh AB sao cho $AM = a$. Tính $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{AC}$.

- A. $(1 - \sqrt{2})a^2$. B. 0. C. $(1 + \sqrt{2})a^2$. D. $\sqrt{3}a^2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \\ &= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= AD \times AD \times \cos 0^\circ - AM \times AB \times \cos 0^\circ \\ &= a^2 - \sqrt{2}a^2 = (1 - \sqrt{2})a^2.\end{aligned}$$



Chọn đáp án **A** □

Câu 187. Trong hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3$, $AC = 4$, $B(2; -1)$, $C(5; 3)$. Tìm tọa độ chân đường cao AH của tam giác ABC .

- A. $H\left(\frac{17}{4}; 2\right)$. B. $H\left(\frac{7}{2}; 1\right)$. C. $H\left(\frac{37}{5}; \frac{31}{5}\right)$. D. $H\left(\frac{77}{25}; \frac{11}{25}\right)$.

Lời giải.

Giả sử $A(x; y)$. Khi đó, ta có

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+1)^2 = 9 \\ (x-5)^2 + (y-3)^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 2y = 4 & (1) \\ x^2 + y^2 - 10x - 6y = -18 & (2). \end{cases}$$

Từ (1) và (2) suy ra $3x + 4y = 11 \Leftrightarrow y = \frac{11-3x}{4}$ (3).

Từ (1) và (3) suy ra

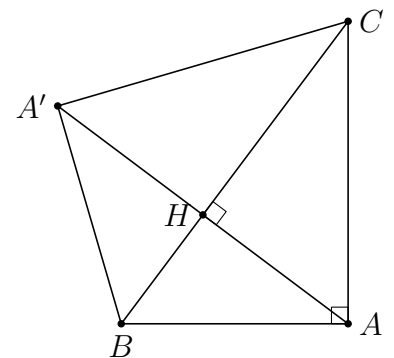
$$\begin{aligned}x^2 + \left(\frac{11-3x}{4}\right)^2 - 4x + 2\left(\frac{11-3x}{4}\right) &= 4 \\ \Leftrightarrow 25x^2 - 154x + 145 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = \frac{29}{25}. \end{cases}\end{aligned}$$

Do đó, có hai điểm thỏa mãn đề bài là $A(5; -1)$ hoặc $A\left(\frac{29}{25}; \frac{47}{25}\right)$.

Do hai điểm trên đối xứng với nhau qua BC nên cả hai trường hợp đều cho một kết quả H cần tìm. Vì vậy ta chỉ cần xét trường hợp $A(5; -1)$.

Giả sử $H(x_H; y_H)$ là điểm cần tìm. Khi đó ta có

$$\overrightarrow{AH} = (x_H - 5; y_H + 1), \overrightarrow{BH} = (x_H - 2; y_H + 1), \overrightarrow{BC} = (3; 4).$$



H là chân đường cao hạ từ A xuống cạnh BC khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} = k \cdot \overrightarrow{BC}, (k > 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_H + 4y_H = 11 \\ x_H - 2 = 3k \\ y_H + 1 = 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{9}{25} \\ x_H = \frac{77}{25} \\ y_H = \frac{11}{25} \end{cases}.$$

Vậy $H\left(\frac{77}{25}; \frac{11}{25}\right)$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 188. Trong mặt phẳng Oxy , cho $A(-1; 1)$ và $B(4; 4)$. Tọa độ của điểm N trên trục Oy để $\triangle ABN$ vuông tại N là

- A. $N(0; 0)$ hoặc $N(0; 3)$. B. $N(0; 0)$ hoặc $N(0; 5)$.
C. $N(0; 1)$ hoặc $N(0; 5)$. D. $N(0; 1)$ hoặc $N(0; 4)$.

Lời giải.

Gọi $N(0; a) \in Oy$. $\triangle ABN$ vuông tại N khi và chỉ khi $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BN} = 0$.

Ta có $\overrightarrow{AN} = (1; a - 1)$ và $\overrightarrow{BN} = (-4; a - 4)$.

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BN} = 0 \Leftrightarrow -4 + (a - 1)(a - 4) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 5a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 5 \end{cases}.$$

Vậy $N(0; 0)$ hoặc $N(0; 5)$.

Chọn đáp án **(B)** □

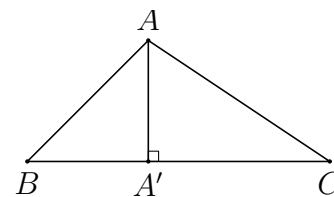
Câu 189. Trong mặt phẳng Oxy , cho 3 điểm $A(-1; 1)$, $B(3; 1)$ và $C(2; 4)$. Gọi A' là hình chiếu vuông góc của A trên BC . Tọa độ của điểm A' là

- A. $\left(-\frac{13}{5}; -\frac{11}{5}\right)$. B. $\left(\frac{13}{5}; -\frac{11}{5}\right)$. C. $\left(\frac{13}{5}; \frac{11}{5}\right)$. D. $\left(-\frac{13}{5}; \frac{11}{5}\right)$.

Lời giải.

Gọi $A'(a; b)$, ta có $\overrightarrow{BC} = (-1; 3)$, $\overrightarrow{AA'} = (a + 1; b - 1)$, $\overrightarrow{BA'} = (a - 3; b - 1)$.

Vì A' là hình chiếu của A trên BC , khi đó ta có



$$\begin{cases} \overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AA'} \\ \overrightarrow{BC} \text{ và } \overrightarrow{BA'} \text{ cùng phương} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a - 1 + 3b - 3 = 0 \\ \frac{a - 3}{-1} = \frac{b - 1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 3b = 4 \\ 3a + b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{13}{5} \\ b = \frac{11}{5} \end{cases}.$$

Vậy $A'\left(\frac{13}{5}; \frac{11}{5}\right)$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 190. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có $A(-4; 0)$, $B(5; -3)$, $C(-2; -4)$. Tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

- A. $(2; 1)$. B. $(1; 0)$. C. $(1; 2)$. D. $(0; 1)$.

Lời giải.

Gọi $I(a; b)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , khi đó $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MI} = 0 \\ \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{NI} = 0 \end{cases}$,

trong đó $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right), N\left(\frac{3}{2}; -\frac{7}{2}\right)$ lần lượt là trung điểm của AB và BC .

Ta có $\overrightarrow{AB} = (9; -3), \overrightarrow{MI} = \left(a - \frac{1}{2}; b + \frac{3}{2}\right), \overrightarrow{BC} = (-7; -1), \overrightarrow{NI} = \left(a - \frac{3}{2}; b + \frac{7}{2}\right)$.

$$\text{Do đó } \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MI} = 0 \\ \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{NI} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a - \frac{9}{2} - 3b - \frac{9}{2} = 0 \\ -7a + \frac{21}{2} - b - \frac{7}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a - 3b = 9 \\ -7a - b = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}.$$

Vậy $I(1; 0)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 191. Cho hình thang vuông $ABCD$ (vuông tại C và D) có $CD = a$. Khi đó tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ bằng

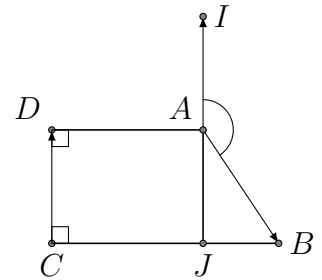
- A. $-a^2$. B. a^2 . C. 0. D. $-2a^2$.

Lời giải.

Gọi I, J là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{CD}$. Khi đó $AI = AJ = a$.

Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} = AB \cdot AI \cdot \cos(\widehat{BAI})$

$$\begin{aligned} &= AB \cdot AI \cdot \cos \widehat{BAI} \\ &= AB \cdot AI \cdot \cos(180^\circ - \widehat{BAJ}) \\ &= -AB \cdot AI \cdot \cos \widehat{BAJ} \\ &= -AB \cdot AI \cdot \frac{AJ}{AB} = -AI \cdot AJ = -a^2. \end{aligned}$$



Chọn đáp án **(A)** □

Câu 192. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1; 1), B(-1; 1)$. Tìm điểm M thuộc trục tung sao cho $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị bé nhất.

- A. $M(0; 1)$. B. $M(1; 0)$. C. $M(-1; 0)$. D. $M(0; 0)$.

Lời giải.

Xét $M \in Oy \Leftrightarrow M(0; b)$, trong đó $b \in \mathbb{R}$.

Khi đó ta có $MA^2 + MB^2 = 1^2 + (b - 1)^2 + 1^2 + (b - 1)^2 = 2(b - 1)^2 + 2 \geq 2$ với mọi $b \in \mathbb{R}$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $b - 1 = 0 \Leftrightarrow b = 1$. Vậy $M(0; 1)$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 193. Trong mặt phẳng Oxy , cho hai vec-tơ $\vec{a} = (2; 3), \vec{b} = (4; -1)$. Tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$ bằng

- A. -2. B. 4. C. 5. D. 11.

Lời giải.

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) = 5$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 194. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vec-tơ $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j}$ và $\vec{v} = k\vec{i} - 4\vec{j}; k \in \mathbb{R}$. Tìm k để vec-tơ $\vec{u}$ vuông góc với vec-tơ $\vec{v}$?

- A. $k = -40$. B. $k = 20$. C. $k = 40$. D. $k = -20$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j} \Leftrightarrow \vec{u} = \left(\frac{1}{2}; -5\right)$, $\vec{v} = k\vec{i} - 4\vec{j} \Leftrightarrow \vec{v} = (k; -4)$.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \frac{k}{2} + 20 = 0 \Leftrightarrow k = -40.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 195. Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng a . Khi đó tích vô hướng $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ bằng

A. $-\frac{a^2}{2}$. B. $\frac{3a^2}{2}$. C. $\frac{5a^2}{2}$. D. $\frac{a^2}{2}$.

Lời giải.

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \cdot AC \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}.$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 196. Cho hai điểm A, B cố định và $AB = 8$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = -16$ là

A. Một đoạn thẳng. B. Một đường tròn. C. Một đường thẳng. D. Một điểm.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB , A và B cố định nên I cố định.

$$\begin{aligned} \vec{MA} \cdot \vec{MB} = -16 &\Leftrightarrow (\vec{MI} + \vec{IA}) \cdot (\vec{MI} + \vec{IB}) = -16 \\ &\Leftrightarrow \vec{MI}^2 - \vec{IA}^2 = -16 \Leftrightarrow MI^2 = -16 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow MI^2 = 0 \Leftrightarrow M \equiv I. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 197. Trong hệ tọa độ Oxy , cho $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j}$ và $\vec{v} = (2; -1)$. Tính $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

A. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5\sqrt{2}$. B. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$. C. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$. D. $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2; -3)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j}$ nên $\vec{u} = (1; 3)$.

Khi đó $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = -1$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 198. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = \sqrt{2}$, $AD = 1$. Số đo góc giữa hai véc-tơ $\vec{AC}$ và $\vec{BD}$ gần bằng

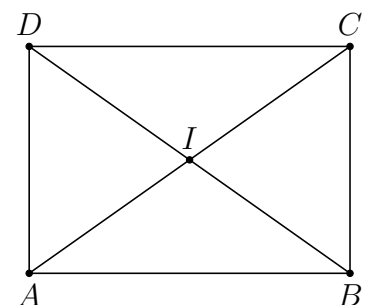
A. 89° . B. 109° . C. 91° . D. 92° .

Lời giải.

Gọi I là giao điểm của BD và AC . Ta có góc giữa hai véc-tơ $\vec{AC}$ và $\vec{BD}$ là $\widehat{CID}$.

Ta có $AC = BD = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3}$ suy ra $CI = DI = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Khi đó, xét tam giác CID có

$$\cos \widehat{CID} = \frac{CI^2 + DI^2 - CD^2}{2CI \cdot DI} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{3}{4} - 2}{2 \cdot \frac{3}{4}} = -\frac{1}{3}.$$



Vậy số đo góc giữa hai véc-tơ $\vec{AC}$ và $\vec{BD}$ gần bằng 109° .

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 199. Cho tam giác ABC có $A(-1; 1), B(1; 3), C(1; -1)$. Trong các phát biểu sau, hãy chọn phát biểu đúng.

A. ABC là tam giác có ba góc đều nhọn.

B. ABC là tam giác có ba cạnh bằng nhau.

C. ABC là tam giác cân tại B .

D. ABC là tam giác vuông cân tại A .

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; 2), \overrightarrow{BC} = (0; -4), \overrightarrow{CA} = (2; -2)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$ và $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CA}|$. Khi đó ABC là tam giác vuông cân tại A .

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 200. Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = a$, $BC = 2a$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$ bằng

A. a^2 .

B. $-3a^2$.

C. $-a^2$.

D. $3a^2$.

Lời giải.

Kẻ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$.

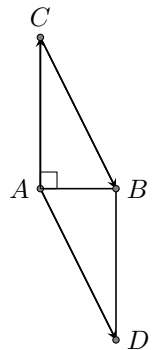
Khi đó $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = AC \cdot AD \cdot \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = AC \cdot AD \cdot \cos \widehat{CAD}$.

Ta có $AD = BC = 2a$, $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$.

$\cos \widehat{ABC} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$ suy ra $\widehat{ABC} = 60^\circ$.

Do đó $\widehat{BAD} = 60^\circ$ suy ra $\widehat{CAD} = 150^\circ$.

Vậy $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = a\sqrt{3} \cdot 2a \cdot \cos 150^\circ = -3a^2$.



Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 201. Cho tam giác ABC cân đỉnh A , $\widehat{B} = 30^\circ$, $BC = 6$, M là điểm thuộc đoạn BC sao cho $MC = 2MB$. Tính $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}$.

A. 4.

B. 20.

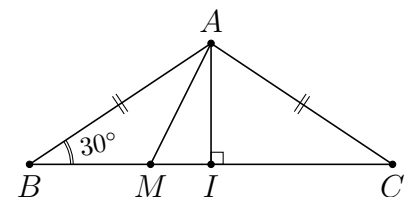
C. $2\sqrt{3}$.

D. $4\sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của BC . Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} &= (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BM}) \cdot \frac{2}{3} \overrightarrow{BC} \\ &= \left(\overrightarrow{BA} - \frac{1}{3} \overrightarrow{BC} \right) \cdot \frac{2}{3} \overrightarrow{BC} \\ &= \frac{2}{3} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} - \frac{2}{9} \overrightarrow{BC}^2 = \frac{2}{3} \cdot BI \cdot BC - \frac{2}{9} \cdot BC^2 = \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 6 - \frac{2}{9} \cdot 6^2 = 4. \end{aligned}$$



Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 202. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 4$ và $AD = 3$. Khi đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ bằng

A. 0.

B. 12.

C. 5.

D. -1.

Lời giải.

Ta có $AB \perp AD \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 203. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(-3; 2)$, $B(1; 5)$. Khoảng cách giữa hai điểm A và B bằng bao nhiêu?

A. 53.

B. $\sqrt{53}$.

C. 25.

D. 5.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; 3) \Rightarrow AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 204. Trong mặt phẳng tọa độ $(O; \vec{i}, \vec{j})$, cho $\vec{a} = (-1; 2)$, $\vec{b} = (3; -5)$. Tìm số thực m sao cho $m\vec{a} + \vec{b}$ vuông góc với $\vec{i} + \vec{j}$.

A. $m = -2$.B. $m = 2$.C. $m = 3$.D. $m = \frac{5}{2}$.

Lời giải.

Ta có $m\vec{a} + \vec{b} = (-m + 3; 2m - 5)$ và $\vec{i} + \vec{j} = (1; 1)$.

$m\vec{a} + \vec{b}$ vuông góc với $\vec{i} + \vec{j} \Leftrightarrow (m\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{i} + \vec{j}) = 0 \Leftrightarrow m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 205. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-3; -2)$, $B(5; 2)$ và trực tâm $H(5; 0)$. Tìm tọa độ đỉnh C .

A. $C(6; -2)$.B. $C(4; -2)$.C. $C(5; -2)$.D. $C(4; -1)$.

Lời giải.

Gọi tọa độ đỉnh $C(x; y)$. Ta có $\overrightarrow{AC} = (x + 3; y + 2)$, $\overrightarrow{BC} = (x - 5; y - 2)$, $\overrightarrow{AH} = (8; 2)$, $\overrightarrow{BH} = (0; -2)$. Vì H là trực tâm tam giác ABC nên ta có

$$\begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8(x - 5) + 2(y - 2) = 0 \\ -2(y + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -2 \end{cases}$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 206. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a . Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

A. $-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.B. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.C. $\frac{a^2}{2}$.D. $-\frac{a^2}{2}$.

Lời giải.

Ta có $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 180^\circ - \widehat{ABC} = 120^\circ$. Vậy

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})}) = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 207. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-3; 0)$, $B(3; 0)$ và $C(2; 6)$. Gọi $H(a; b)$ là trực tâm của tam giác ABC . Tính $a + 6b$.

A. $a + 6b = 5$.B. $a + 6b = 6$.C. $a + 6b = 7$.D. $a + 6b = 8$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AH} = (a + 3; b)$, $\overrightarrow{BC} = (-1; 6)$, $\overrightarrow{BH} = (a - 3; b)$ và $\overrightarrow{AC} = (5; 6)$.

H là trực tâm tam giác ABC khi và chỉ khi

$$\begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a - 3 + 6b = 0 \\ 5a - 15 + 6b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = \frac{5}{6} \end{cases}.$$

Suy ra $a + 6b = 7$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 208. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Khi đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng

- A. a^2 . B. $a^2\sqrt{2}$. C. $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{a^2}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = a^2.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 209. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4} \left(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 \right)$. B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \left(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 \right)$.
C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \left(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 \right)$. D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 \right)$.

Lời giải.

Ta có

- $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$.
- $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$.

Suy ra

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 4\vec{a} \cdot \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4} \left(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 \right).$$

Chọn đáp án **B** □

Câu 210. Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm $A(5; 4)$, $B(3; -2)$. Một điểm M di động trên trục hoành Ox . Vậy giá trị nhỏ nhất của $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$ bằng

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 5.

Lời giải.

Gọi $M(x; 0)$, ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{MA} = (5 - x; 4) \\ \overrightarrow{MB} = (3 - x; -2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = (8 - 2x; 2).$$

$$\text{Nên } |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = \sqrt{(8 - 2x)^2 + 2^2} \geq 2.$$

Do đó, giá trị nhỏ nhất của $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$ bằng 2 khi và chỉ khi $x = 4$. Khi đó $M(4; 0)$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 211. Cho tam giác ABC có $A = 90^\circ$, $B = 60^\circ$ và $AB = a$. Tích $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$ bằng

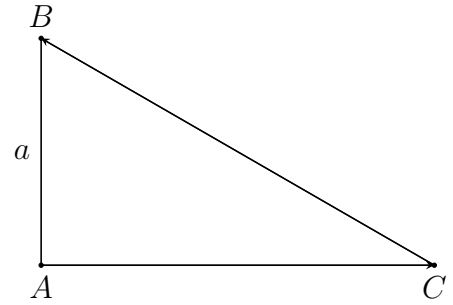
- A. $-a^2$. B. $3a^2$. C. $-\frac{1}{2}a^2$. D. $-3a^2$.

Lời giải.

Ta có $AC = AB \tan B = a \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Từ đó

$$\begin{aligned}\vec{AC} \cdot \vec{CB} &= \vec{AC} \cdot (\vec{AB} - \vec{AC}) = \vec{AC} \cdot \vec{AB} - \vec{AC}^2 \\ &= 0 - AC^2 = -3a^2.\end{aligned}$$



Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 212. Cho tam giác ABC vuông tại C có $AC = 9$, $CB = 5$. Tích $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ bằng

A. 81.

B. 91.

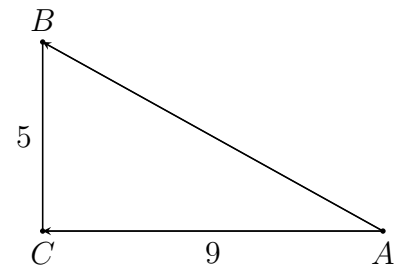
C. 56.

D. 76.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\vec{AB} \cdot \vec{AC} &= (\vec{CB} - \vec{CA}) \cdot (-\vec{CA}) = -\vec{CB} \cdot \vec{CA} + \vec{CA}^2 \\ &= 0 + CA^2 = 81.\end{aligned}$$



Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 213. Cho tam giác ABC đều, cạnh bằng a , điểm M thuộc đường tròn tâm O và thỏa mãn $\vec{MA} \cdot \vec{MB} + \vec{MB} \cdot \vec{MC} + \vec{MC} \cdot \vec{MA} = \frac{a^2}{4}$. Bán kính đường tròn đó là

A. $R = a$.

B. $R = \frac{a}{4}$.

C. $R = \frac{a}{2}$.

D. $R = \frac{3a}{2}$.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , ta có $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$, $GA = GB = GC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $\vec{GA} \cdot \vec{GB} = \vec{GB} \cdot \vec{GC} = \vec{GC} \cdot \vec{GA} = -\frac{a^2}{6}$.

Ta có

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = (\vec{MG} + \vec{GA}) \cdot (\vec{MG} + \vec{GB}) = \vec{MG}^2 + \vec{MG}(\vec{GA} + \vec{GB}) + \vec{GA} \cdot \vec{GB} \quad (1);$$

$$\vec{MB} \cdot \vec{MC} = (\vec{MG} + \vec{GB}) \cdot (\vec{MG} + \vec{GC}) = \vec{MG}^2 + \vec{MG}(\vec{GB} + \vec{GC}) + \vec{GB} \cdot \vec{GC} \quad (2);$$

$$\vec{MC} \cdot \vec{MA} = (\vec{MG} + \vec{GC}) \cdot (\vec{MG} + \vec{GA}) = \vec{MG}^2 + \vec{MG}(\vec{GC} + \vec{GA}) + \vec{GC} \cdot \vec{GA} \quad (3).$$

Cộng vế với vế (1), (2), (3) ta có

$$\begin{aligned}\vec{MA} \cdot \vec{MB} + \vec{MB} \cdot \vec{MC} + \vec{MC} \cdot \vec{MA} &= 3MG^2 + 3\left(-\frac{a^2}{6}\right) \\ \Rightarrow \frac{a^2}{4} &= 3MG^2 - \frac{a^2}{2} \\ \Rightarrow MG &= \frac{a}{2}.\end{aligned}$$

Suy ra, điểm M nằm trên đường tròn tâm G , bán kính $R = \frac{a}{2}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 214. Cho tam giác ABC , gọi H là trực tâm của tam giác và M là trung điểm của cạnh BC . Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

A. $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}BC^2$.

B. $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = -\frac{1}{4}BC^2$.

C. $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{4}BC^2$.

D. $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{5}BC^2$.

Lời giải.

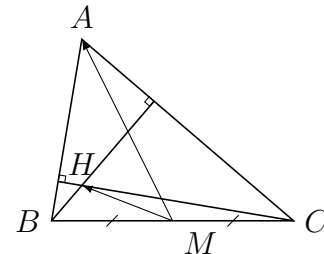
M là trung điểm của BC , theo tính chất trung điểm

$$\begin{cases} \overrightarrow{MH} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CH}) \\ \overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CH})$$

Theo công thức hình chiếu ta có $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$, nên

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA}) \\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CH}) \\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC}) \\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CA}) \\ &= \frac{1}{4}BC^2. \end{aligned}$$



Chọn đáp án **C** □

Câu 215. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (1; -2)$, $\vec{b} = (-1; -3)$. Tính $(\vec{a}, \vec{b})$.

A. $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$.

B. $(\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$.

C. $(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$.

D. $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$.

Lời giải.

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-3)}{\sqrt{1^2 + (-2)^2} \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 216. Cặp vec-tơ nào sau đây vuông góc?

A. $\vec{a}_1 = (-4; -6)$ và $\vec{a}_2 = (3; 2)$.

B. $\vec{b}_1 = (3; -4)$ và $\vec{b}_2 = (-3; 4)$.

C. $\vec{c}_1 = (-4; -6)$ và $\vec{c}_2 = (-3; 2)$.

D. $\vec{d}_1 = (5; -3)$ và $\vec{d}_2 = (3; -5)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_2 = 0$ nên $\vec{c}_1 \perp \vec{c}_2$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 217. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(1; 3)$, $B(-6; 2)$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB (với O là gốc tọa độ) là

A. 6.

B. 5.

C. $\sqrt{50}$.

D. $\frac{\sqrt{50}}{2}$.

Lời giải.

Dễ thấy $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ nên tam giác OAB vuông tại O . Do đó bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB là $\frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{50}}{2}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 218. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có trực tâm là gốc tọa độ O , hai đỉnh A và B có tọa độ là $A(-2; 2)$, $B(3; 5)$. Tọa độ của đỉnh C là

- A. $\left(-\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$. B. $\left(\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$. C. $\left(\frac{3}{4}; \frac{11}{4}\right)$. D. $\left(-\frac{3}{4}; \frac{11}{4}\right)$.

Lời giải.

Giả sử $C(x; y)$. Khi đó $\overrightarrow{OC} = (x; y)$, $\overrightarrow{AB} = (5; 3)$, $\overrightarrow{AC} = (x + 2; y - 2)$ và $\overrightarrow{OB} = (3; 5)$. Do O là trực tâm tam giác ABC nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 3y = 0 \\ 3(x + 2) + 5(y - 2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{4} \\ y = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Vậy $C\left(-\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$.

Chọn đáp án **(A)**

□

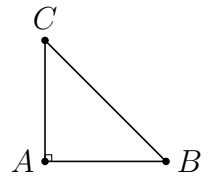
Câu 219. Cho tam giác ABC vuông cân tại A , $AB = 2a$. Giá trị của $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ bằng

- A. $4a^2$. B. a^2 . C. $2a^2$. D. $-4a^2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} &= |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) \\ &= BA \cdot BC \cos \widehat{ABC} \\ &= 2a \cdot 2a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ \\ &= 4a^2. \end{aligned}$$



Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 220. Trong mặt phẳng Oxy cho véc-tơ $\vec{u} = (2; -4)$ và $\vec{v} = (x; 3)$. Tìm giá trị của x để $\vec{u} \perp \vec{v}$.

- A. 6. B. -2. C. 0. D. -1.

Lời giải.

Ta có $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow 2 \cdot x = (-4) \cdot 3 \Leftrightarrow x = 6$. Vậy $x = 6$ là giá trị cần tìm.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 221. Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$. B. $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}$. C. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$. D. $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

$\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$ đúng theo quy tắc ba điểm trong phép cộng hai véc-tơ.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 222. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 3. Tính $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

- A. $\frac{9}{4}$. B. $\frac{9}{2}$. C. $-\frac{9}{2}$. D. 9.

Lời giải.

Cách 1: Dùng định nghĩa

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CA \cdot CB \cdot \cos C = 3 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = \frac{9}{2}.$$

Vậy $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{9}{2}$.

Cách 2: Dùng hằng đẳng thức

Gọi M là trung điểm của AB . Khi đó

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})^2 &= CA^2 + CB^2 + 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} \\ \Rightarrow \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} &= \frac{1}{2} [(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})^2 - (CA^2 + CB^2)] \\ &= \frac{1}{2} [4CM^2 - (CA^2 + CB^2)] \\ &= 2 \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^2 - a^2 = \frac{a^2}{2} = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 223. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có $A(1; 2)$, $B(3; 4)$, $C(0; -2)$. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC .

- A. $H(-1; 3)$. B. $H(-9; 7)$. C. $H(9; -7)$. D. $H(3; -1)$.

Lời giải.

Gọi $H(x; y)$ là trực tâm của tam giác ABC . Khi đó ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 6y = 15 \\ x + 4y = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -9 \\ y = 7. \end{cases}$$

Vậy $H(-9; 7)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 224. Cho đoạn thẳng $AB = 2$, I là trung điểm của AB . Tìm tập hợp các điểm M sao cho $MA^2 - MB^2 = 8$.

- A. Đường thẳng vuông góc với AB tại H (với H là điểm đối xứng của I qua B).
 B. M là điểm đối xứng của I qua B .
 C. Đường tròn tâm I , bán kính $R = \sqrt{3}$.
 D. Đường thẳng vuông góc với AB tại K (với K là điểm đối xứng của I qua A).

Lời giải.

Ta có $MA^2 - MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MI}$.

Theo giả thiết, ta có $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MI} = 4$. Gọi H là hình chiếu của M trên AB , khi đó ta có $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{HI} = 4 \Rightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{HI} = 4$.

Chọn hệ tọa độ có gốc tại điểm A , chiều dương từ A đến B , vậy $\overrightarrow{BA} = -2$ nên $\overrightarrow{HI} = -2$.

Vậy H là điểm đối xứng của I qua B và H cố định nên quỹ tích điểm M là đường thẳng vuông góc với AB tại H .

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 225. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Chọn khẳng định đúng.

- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

$$\text{C. } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b}).$$

$$\text{D. } \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|.$$

Lời giải.

Câu hỏi lý thuyết, ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 226. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ lần lượt có độ dài là 5 và 8, góc giữa hai véc-tơ $(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$. Tính tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

$$\text{A. } 20\sqrt{2}.$$

$$\text{B. } 10\sqrt{2}.$$

$$\text{C. } 40\sqrt{2}.$$

$$\text{D. } 30\sqrt{2}.$$

Lời giải.

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 45^\circ = 5 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 20\sqrt{2}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 227. Cho hai điểm $A(2; 1)$, $B(10; -5)$. Tính khoảng cách giữa hai điểm A và B .

$$\text{A. } 100.$$

$$\text{B. } 10.$$

$$\text{C. } 2\sqrt{7}.$$

$$\text{D. } 2\sqrt{5}.$$

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (8; -6)$ suy ra $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 228. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và AM là trung tuyến. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AM}$.

$$\text{A. } -a^2.$$

$$\text{B. } a^2.$$

$$\text{C. } -\frac{a^2}{2}.$$

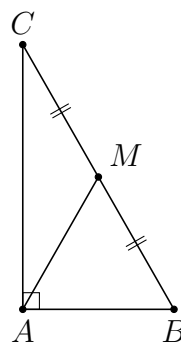
$$\text{D. } \frac{a^2}{2}.$$

Lời giải.

Ta có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a$ và $AM = \frac{BC}{2} = a$ (tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền).

Lại có $AM = AB = BM = a$ nên tam giác ABM đều, suy ra $\widehat{BAM} = 60^\circ$.

Vậy $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AM} = BA \cdot AM \cdot \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AM}) = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}$.



Chọn đáp án **(C)** □

Câu 229. Cho hai véc-tơ $\vec{a} = (2; -1)$, $\vec{b} = (-3; 4)$. Tính tích vô hướng $2\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{a})$.

$$\text{A. } -30.$$

$$\text{B. } 30.$$

$$\text{C. } -15.$$

$$\text{D. } 15.$$

Lời giải.

Ta có $\vec{b} - \vec{a} = (-3 - 2; 4 + 1) = (-5; 5)$ nên $2\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 2[2 \cdot (-5) + (-1) \cdot 5] = -30$.

Cách khác:

$2\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{a} = 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 2|\vec{a}|^2 = 2[2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 4] - 2[2^2 + (-1)^2] = -30$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 230. Cho hai điểm $A(-6; 3)$, $B(4; 1)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc tia Oy sao cho tam giác ABC vuông tại C .

$$\text{A. } (0; 7).$$

$$\text{B. } (7; 0).$$

$$\text{C. } (0; -3).$$

$$\text{D. } (0; -3) \text{ và } (0; 7).$$

Lời giải.

Gọi $C(0; c) \in Oy$. Vì C thuộc tia Oy nên $c > 0$.

Ta có $\overrightarrow{CA} = (-6; 3 - c)$, $\overrightarrow{CB} = (4; 1 - c)$.

Tam giác ABC vuông tại C khi và chỉ khi $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$

$$\Leftrightarrow (-6) \cdot 4 + (3 - c)(1 - c) = 0 \Leftrightarrow c^2 - 4c - 21 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 7 & (\text{nhận}) \\ c = -3 & (\text{loại}). \end{cases}$$

Vậy $C(0; 7)$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 231. Tìm m để hai véc-tơ $\vec{a} = (1; -3)$, $\vec{b} = (m^2; 4)$ vuông góc với nhau.

A. $m = 12$.

B. $m = 2\sqrt{3}$.

C. $m = -2\sqrt{3}$.

D. $m = \pm 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot m^2 + (-3) \cdot 4 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 232. Cho hình vuông $ABCD$, biết đỉnh $A(1; -1)$, $B(3; 0)$ và đỉnh C có tọa độ dương. Tìm tọa độ C .

A. $C(4; -2)$.

B. $C(4; 2)$.

C. $C(2; 4)$.

D. $C(2; 2)$.

Lời giải.

Gọi $C(x; y)$ với $x > 0$, $y > 0$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; 1)$, $\overrightarrow{BC} = (x - 3; y)$.

$$ABCD \text{ là hình vuông nên } \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ AB = BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x - 3) + y = 0 \\ AB^2 = BC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - 2x \\ (x - 3)^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - 2x \\ (x - 3)^2 + (6 - 2x)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - 2x \\ 5x^2 - 30x + 40 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 - 2x \\ \begin{cases} x = 4 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases} \text{ (loại)} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \text{ (nhận)}. \end{cases}$$

Vậy $C(2; 2)$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 233. Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = a$, $BC = 2a$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$.

A. $3a^2$.

B. a^2 .

C. $-a^2$.

D. $-3a^2$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}^2 \end{aligned}$$

$$= 0 - AC^2 = AB^2 - BC^2 = a^2 - 4a^2 = -3a^2.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 234. Nếu góc giữa hai véc-tơ $\vec{a} = (2; y)$ và $\vec{b} = (0; 2)$ là 60° thì y nhận giá trị là

A. $y = \frac{1}{2}$.

B. $y = 1$.

C. $y = \frac{2}{3}$.

D. $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{2y}{2\sqrt{4+y^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4+y^2} = 2y$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ 4+y^2 = 4y^2 \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 235. Cho tam giác ABC , với $A(0; 3)$, $B(x; 1)$, $C(4; 1)$. Tìm x để tam giác ABC vuông tại A .**A.** $x = -2$.**B.** $x = 1$.**C.** $x = 0$.**D.** $x = -1$.**Lời giải.**Ta có $\overrightarrow{AB} = (x; -2)$, $\overrightarrow{AC} = (4; -2)$. Tam giác ABC vuông tại A nên

$$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow 4x + (-2) \cdot (-2) = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 236. Cho hai véc-tơ $\vec{u} = (2; -1)$, $\vec{v} = (-4; 2)$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?**A.** Góc giữa hai véc-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ bằng 90° .**B.** Hai véc-tơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ cùng phương.**C.** Tọa độ véc-tơ $\vec{u} + \vec{v}$ là $(-2; 1)$.**D.** Độ dài của véc-tơ $\vec{u}$ bằng $\sqrt{5}$.**Lời giải.**Ta có $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot (-4) + (-1) \cdot 2 = -10 \neq 0$ nên suy ra góc giữa hai véc-tơ khác 90° .Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 237. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ biết $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 4$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$. Trong các kết quả sau đây, hãy chọn kết quả **đúng**.**A.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = -16$.**B.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 8$.**C.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 16$.**D.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = -8$.**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 4 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ = 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -8.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 238. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a . Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.**A.** $-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.**B.** $\frac{a^2}{2}$.**C.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.**D.** $-\frac{a^2}{2}$.**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -BA \cdot BC \cdot \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = -a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = -\frac{a^2}{2}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 239. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC với $A(4; 1)$, $B(-4; 3)$, $C(3; 2)$ và có trọng tâm G . Tính độ dài đoạn thẳng BG .**A.** $BG = \sqrt{26}$.**B.** $BG = \sqrt{5}$.**C.** $BG = \sqrt{17}$.**D.** $BG = \sqrt{10}$.**Lời giải.**

- G là trọng tâm $\triangle ABC \Rightarrow G(1; 2)$.
- $BG = \sqrt{(1+4)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{26}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 240. Cho M là trung điểm AB , đẳng thức nào **sai** ?

- A. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = -MA \cdot AB$. B. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB$.
 C. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = AM \cdot AB$. D. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -MA \cdot MB$.

Lời giải.

- Do M là trung điểm của AB nên $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 180^\circ$.
 Ta có $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB \cdot \cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = MA \cdot MB \cdot \cos 180^\circ = -MA \cdot MB$.
- Do M là trung điểm của AB nên $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{AB}) = 180^\circ$.
 Ta có $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = MA \cdot AB \cdot \cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{AB}) = MA \cdot AB \cdot \cos 180^\circ = -MA \cdot AB$.
- Do M là trung điểm của AB nên $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0^\circ$.
 Ta có $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = MA \cdot AB \cdot \cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = MA \cdot AB \cdot \cos 0^\circ = AM \cdot AB$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 241. Trong mặt phẳng Oxy , cho hai véc-tơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$. B. $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.
 C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$. D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}{\vec{a} \cdot \vec{b}}$.

Lời giải.

Ta có $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ nên khẳng định **sai** là $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}{\vec{a} \cdot \vec{b}}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 242. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , biết $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = 4$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 9$. Khi đó AB , AC , BC có độ dài là

- A. 2; 3; $\sqrt{13}$. B. 3; 4; 5. C. 2; 4; $2\sqrt{5}$. D. 4; 6; $2\sqrt{13}$.

Lời giải.

Do $\triangle ABC$ vuông tại A nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có} \\ \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = 4 \\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 9 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = 4 \\ \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \\ \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB^2 = 4 \\ AC^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = 2 \\ AC = 3 \end{cases} \\ \Rightarrow BC &= \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{13}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 243. Trong hệ tọa độ Oxy , cho véc-tơ $\vec{a} = (3; -4)$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $|\vec{a}| = 5$. B. $|\vec{a}| = 3$. C. $|\vec{a}| = 4$. D. $|\vec{a}| = 7$.

Lời giải.

Ta có $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 244. Trong hệ trục tọa độ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ cho các véc-tơ sau: $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{b} = 2\vec{j}$. Trong các mệnh đề sau tìm mệnh đề **sai**?

- A. $\vec{a} = (4; -3)$. B. $|\vec{b}| = \sqrt{2}$. C. $\vec{b} = (0; 2)$. D. $|\vec{a}| = 5$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a} = (4; -3)$, $\vec{b} = (0; 2)$.

$$\Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5; |\vec{b}| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 245. Cho $\vec{a} = (-3; 4)$, $\vec{b} = (4; 3)$. Kết luận nào sau đây sai.

- A. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. B. $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}$. C. $\vec{a} \perp \vec{b}$. D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Lời giải.

Ta có

$$\vec{a} = (-3; 4) \Rightarrow |\vec{a}| = 5.$$

$$\vec{b} = (4; 3) \Rightarrow |\vec{b}| = 5.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 246. Cho ba véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 3$. Tính $(\vec{a} - 2\vec{b})(2\vec{a} + \vec{b})$.

- A. -6. B. 8. C. 4. D. 0.

Lời giải.

$$\text{Ta có } |\vec{a} - \vec{b}| = 3 \Leftrightarrow (\vec{a})^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + (\vec{b})^2 = 9 \Leftrightarrow 1 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 4 = 9 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = -2.$$

$$\text{Ta có } (\vec{a} - 2\vec{b})(2\vec{a} + \vec{b}) = 2(\vec{a})^2 - 3\vec{a} \cdot \vec{b} - 2(\vec{b})^2 = 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) - 2 \cdot 4 = 0.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 247. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $BC = 2a$. Tính $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$ theo a .

- A. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -a\sqrt{3}$. B. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -3a^2$.
C. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = a\sqrt{3}$. D. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = 3a^2$.

Lời giải.

Tam giác ABC vuông tại $A \Rightarrow AC^2 = BC^2 - AB^2 = 3a^2$ và $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

$$\text{Mặt khác } \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} \Rightarrow \overrightarrow{BA}^2 = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})^2 \Leftrightarrow BA^2 = BC^2 + CA^2 + 2 \cdot \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = \frac{BA^2 - BC^2 - CA^2}{2} = \frac{a^2 - 4a^2 - 3a^2}{2} = -3a^2.$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -3a^2.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 248. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4} (|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$. B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} (|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$.
C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} (|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$. D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$.

Lời giải.

Ta có $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$.

Tương tự $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$.

Nên $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} (|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2) = \frac{1}{2} (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2) = \frac{1}{4} (|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 249. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn các điều kiện $|\vec{a}| = \frac{1}{2}|\vec{b}| = 1$, $|\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{15}$. Đặt $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{v} = 2k\vec{a} - \vec{b}$, $k \in \mathbb{R}$. Tìm tất cả các giá trị của k sao cho $(\vec{u}, \vec{v}) = 60^\circ$.

A. $k = 4 + \frac{3\sqrt{5}}{2}$. B. $k = 4 \pm \frac{3\sqrt{5}}{2}$. C. $k = 5 + \frac{\sqrt{17}}{2}$. D. $k = 5 \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$.

Lời giải.

Ta có

- $|\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{15} \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} = 15 \Leftrightarrow 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2k\vec{a} - \vec{b}) = 2k|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 + (2k - 1)\vec{a} \cdot \vec{b} = 2k - 4 + \frac{2k - 1}{2}$.
- $(|\vec{u}| |\vec{v}|)^2 = (|\vec{a} + \vec{b}| |2k\vec{a} - \vec{b}|)^2$
 $= (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}) (4k^2 |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 4k\vec{a} \cdot \vec{b})$
 $= (5 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}) (4k^2 + 4 - 4k\vec{a} \cdot \vec{b})$
 $= 6(4k^2 + 4 - 2k)$.

Suy ra $|\vec{u}| |\vec{v}| = \sqrt{6(4k^2 + 4 - 2k)}$.

Từ yêu cầu $(\vec{u}, \vec{v}) = 60^\circ$ ta có

$$\begin{aligned} \cos 60^\circ &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &= \frac{2k - 4 + \frac{2k - 1}{2}}{\sqrt{6(4k^2 + 4 - 2k)}} \\ \Leftrightarrow \sqrt{6(4k^2 + 4 - 2k)} &= 6k - 9 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq \frac{3}{2} \\ 6(4k^2 + 4 - 2k) = (6k - 9)^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq \frac{3}{2} \\ 12k^2 - 96k + 57 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq \frac{3}{2} \\ k = 4 \pm \frac{3\sqrt{5}}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow k &= 4 + \frac{3\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Vậy $k = 4 + \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 250. Trên mặt phẳng Oxy , cho $A(1; 1)$, $B(2; -2)$, $M \in Oy$ và $MA = MB$. Khi đó tọa độ điểm M là

- A. $(0; 1)$. B. $(-1; 1)$. C. $(1; -1)$. D. $(0; -1)$.

Lời giải.

$M \in Oy \Leftrightarrow M(0; m)$. Ta có

$$MA = \sqrt{(0-1)^2 + (m-1)^2} = \sqrt{m^2 - 2m + 2} \Rightarrow MA^2 = m^2 - 2m + 2,$$

$$MB = \sqrt{(0-2)^2 + (m+2)^2} = \sqrt{m^2 + 4m + 8} \Rightarrow MB^2 = m^2 + 4m + 8.$$

Theo giả thiết

$$MA = MB \Leftrightarrow MA^2 = MB^2 \Leftrightarrow m^2 - 2m + 2 = m^2 + 4m + 8 \Leftrightarrow m = -1.$$

Vậy $M(0; -1)$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 251. Gọi G là trọng tâm tam giác vuông ABC với cạnh huyền $BC = 12$. Tổng hai véc-tơ $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$ có độ dài bằng bao nhiêu?

- A. 2. B. 4. C. 8. D. $2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC . M cũng là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông ABC tại A .

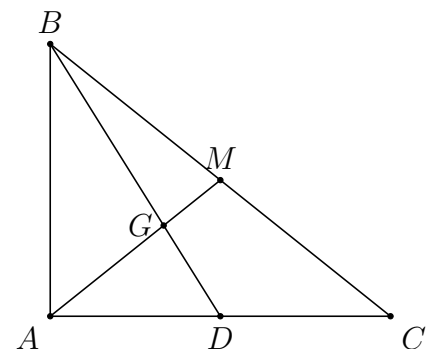
Ta có $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GM}$.

Mà G là trọng tâm tam giác vuông ABC nên $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$.

Do đó $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.

Suy ra $|\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}| = 2|\overrightarrow{GM}| = \frac{2}{3}|\overrightarrow{AM}| = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}BC = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 = 4$.

Chọn đáp án **(B)** □



Câu 252. Cho tam giác ABC đều, cạnh $2a$, trọng tâm G . Độ dài véc-tơ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC}$ là

- A. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{2a}{3}$. C. $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GB} - (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC}) = \overrightarrow{GB} - (-\overrightarrow{GB})$ vì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Khi đó $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC}| = |2\overrightarrow{GB}| = 2GB = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{2} = \frac{4a\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 253. Cho tam giác đều ABC cạnh $2a$ có G là trọng tâm. Khi đó $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC}|$ là

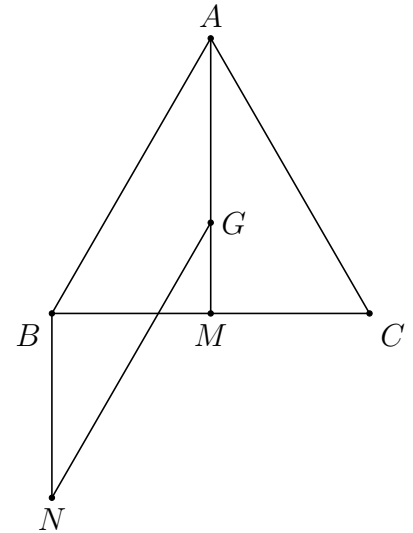
- A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{2a}{3}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm BC , dựng điểm N sao cho $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AG}$.

Ta có

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC}| &= |\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GC}| \\ &= |\overrightarrow{GB} - (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC})| \\ &= |2\overrightarrow{GB}| \\ &= 2 \cdot GB = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{4a\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$



Chọn đáp án **C**

□

Câu 254. Cho hình thang $ABCD$ có đáy $AB = a$, $CD = 2a$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm AD và BC . Tính độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA}$.

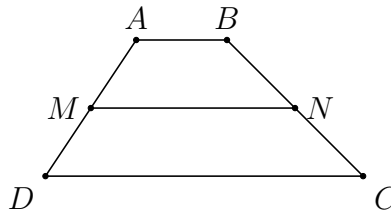
A. $\frac{5a}{2}$.

B. $\frac{7a}{2}$.

C. $\frac{3a}{2}$.

D. $\frac{a}{2}$.

Lời giải.



Ta có M, N là trung điểm của AD và BC nên $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$.

Khi đó

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA}| &= |\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MA}| \\ &= |\overrightarrow{MN} + 2\overrightarrow{NM}| \\ &= |\overrightarrow{NM}| \\ &= NM = \frac{1}{2}(AB + CD) = \frac{3a}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 255. Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB = 4a$, đáy nhỏ $CD = 2a$, đường cao $AD = 3a$; I là trung điểm của AD . Khi đó $(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) \cdot \overrightarrow{ID}$ bằng

A. $\frac{9a^2}{2}$.

B. $\frac{-9a^2}{2}$.

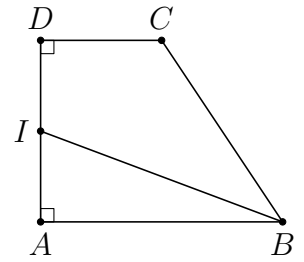
C. 0.

D. $9a^2$.

Lời giải.

Ta có $\vec{IA} \cdot \vec{ID} = -\vec{IA}^2 = -IA^2$.

$$\begin{aligned} \text{Lại có } \vec{IB} \cdot \vec{ID} &= IB \cdot ID \cdot \cos \widehat{BID} \\ &= -IB \cdot ID \cdot \cos \widehat{BIA} \\ &= -IB \cdot ID \cdot \frac{IA}{IB} \\ &= -IA \cdot ID \\ &= -IA^2. \end{aligned}$$



$$\text{Vậy } (\vec{IA} + \vec{IB}) \cdot \vec{ID} = \vec{IA} \cdot \vec{ID} + \vec{IB} \cdot \vec{ID} = -2IA^2 = -2 \cdot \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{-9a^2}{2}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 256. Cho tam giác ABC vuông tại A . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} < \vec{BA} \cdot \vec{BC}$. B. $\vec{AC} \cdot \vec{CB} < \vec{AC} \cdot \vec{BC}$.
C. $\vec{AB} \cdot \vec{BC} < \vec{CA} \cdot \vec{CB}$. D. $\vec{AC} \cdot \vec{BC} < \vec{BC} \cdot \vec{AB}$.

Lời giải.

Vì tam giác ABC vuông tại A nên $(\vec{AB}, \vec{AC}) = 90^\circ \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$

$$\widehat{BAC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} < 90^\circ, \widehat{ACB} < 90^\circ$$

Theo định nghĩa của tích vô hướng của hai véc-tơ, ta có

$$\vec{AC} \cdot \vec{BC} = |\vec{AC}| \cdot |\vec{BC}| \cdot \cos(\vec{AC}, \vec{BC}) > 0$$

$$\vec{BC} \cdot \vec{AB} = |\vec{BC}| \cdot |\vec{AB}| \cdot \cos(\vec{BC}, \vec{AB}) < 0.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 257. Cho tam giác ABC vuông tại A , $BC = a\sqrt{3}$, M là trung điểm của BC và có $\vec{AM} \cdot \vec{BC} = \frac{a^2}{2}$.

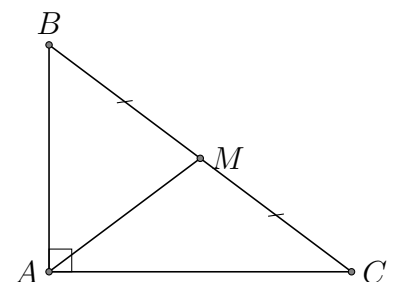
Tính cạnh AB , AC .

- A. $AB = a$, $AC = a\sqrt{2}$. B. $AB = a\sqrt{2}$, $AC = a\sqrt{2}$.
C. $AB = a\sqrt{2}$, $AC = a$. D. $AB = a$, $AC = a$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \vec{AM} \cdot \vec{BC} &= \frac{a^2}{2} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{AC}) (\vec{AC} - \vec{AB}) &= \frac{a^2}{2} \\ \Rightarrow AC^2 - AB^2 &= a^2. \end{aligned}$$



Mặt khác, tam giác ABC vuông tại A nên $AB^2 + AC^2 = 3a^2$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} AC^2 = 2a^2 \\ AB^2 = a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AC = a\sqrt{2} \\ AB = a. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 258. Đoạn thẳng AB có độ dài $2a$, I là trung điểm AB . Khi $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 3a^2$. Độ dài MI là

- A. $2a$. B. a . C. $a\sqrt{3}$. D. $a\sqrt{7}$.

Lời giải.

+ Vì I là trung điểm đoạn AB nên

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} &= 2\overrightarrow{MI} \\ \Rightarrow (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})^2 &= 4MI^2 \\ \Rightarrow MA^2 + 2\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MB} + MB^2 &= 4MI^2 \\ \Rightarrow MA^2 + MB^2 + 6a^2 &= 4MI^2 \quad (1).\end{aligned}$$

+ Theo công thức độ dài đường trung tuyến

$$\begin{aligned}MI^2 &= \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4} \\ \Rightarrow MI^2 &= \frac{MA^2 + MB^2}{2} - a^2 \\ \Rightarrow 4MI^2 &= 2(MA^2 + MB^2) - 4a^2 \quad (2).\end{aligned}$$

+ Từ (1) và (2) suy ra $MA^2 + MB^2 = 10a^2$.

Thay vào (1) ta được: $10a^2 + 6a^2 = 4MI^2 \Rightarrow MI^2 = 4a^2 \Rightarrow MI = 2a$. □

Câu 259. Trong mặt phẳng tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(1; -3)$; $B(-2; 6)$ và $C(4; -9)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc Ox sao cho véc-tơ $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ có độ dài nhỏ nhất.

- A. $M(2; 0)$. B. $M(4; 0)$. C. $M(3; 0)$. D. $M(1; 0)$.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$. Khi đó, $G(1; -2)$.

Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Do đó, $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $|\overrightarrow{MG}|$ nhỏ nhất.

Hơn nữa $M \in Ox$ nên M là hình chiếu của G lên Ox .

Vậy M cần tìm có tọa độ là $(1; 0)$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 260. Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(2; -3)$, $B(3; -4)$. Tìm tọa độ M trên trục hoành sao cho chu vi tam giác AMB nhỏ nhất.

- A. $M\left(\frac{18}{7}; 0\right)$. B. $M(4; 0)$. C. $M(3; 0)$. D. $M\left(\frac{17}{7}; 0\right)$.

Lời giải.

Cách 1: Vì M trên trục hoành nên $M(x; 0)$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -1)$, $\overrightarrow{AM} = (x - 2; 3)$, $\overrightarrow{BM} = (x - 3; 4)$.

Ta có chu vi tam giác AMB

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{ABM} &= \sqrt{2} + \sqrt{(x - 2)^2 + 3^2} + \sqrt{(x - 3)^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{2} + \sqrt{(x - 2)^2 + 3^2} + \sqrt{(3 - x)^2 + 4^2} \\ &\geq \sqrt{2} + \sqrt{(x - 2 + 3 - x)^2 + (3 + 4)^2} \\ \Leftrightarrow \mathcal{P}_{ABM} &\geq 6\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Dấu bằng ra khi $\frac{x - 2}{3 - x} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{17}{7} \Rightarrow M\left(\frac{17}{7}; 0\right)$.

Cách 2 Lấy đối xứng điểm A qua Ox ta được $A'(2; 3)$. Ta có $MA + MB = MA' + MB \geq A'B$.

Dấu bằng ra khi M trùng với giao điểm của $A'B$ với Ox .

Chọn đáp án **D**

□

Câu 261. Cho $M(-1; -2)$, $N(3; 2)$, $P(4; -1)$. Tìm E trên Ox sao cho $\left| \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EN} + \overrightarrow{EP} \right|$ nhỏ nhất.

A. $E(4; 0)$.

B. $E(3; 0)$.

C. $E(1; 0)$.

D. $E(2; 0)$.

Lời giải.

Do $E \in Ox$ nên $E(a; 0)$.

Ta có $\overrightarrow{EM} = (-1 - a; -2)$; $\overrightarrow{EN} = (3 - a; 2)$; $\overrightarrow{EP} = (4 - a; -1)$

Suy ra $\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EN} + \overrightarrow{EP} = (6 - 3a; -1)$.

Do đó $\left| \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EN} + \overrightarrow{EP} \right| = \sqrt{(6 - 3a)^2 + (-1)^2} = \sqrt{(6 - 3a)^2 + 1} \geq 1$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $6 - 3a = 0 \Leftrightarrow a = 2$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của $\left| \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EN} + \overrightarrow{EP} \right|$ bằng 1.

Vậy $E(2; 0)$.

Chọn đáp án **D**

□

ĐÁP ÁN

1. A	2. A	3. D	4. B	5. C	6. D	7. C	8. C	9. D	10. A
11. B	12. B	13. A	14. A	15. B	16. B	17. A	18. C	19. D	20. A
21. B	22. D	23. D	24. D	25. A	26. D	27. D	28. B	29. B	30. A
31. A	32. C	33. A	34. B	35. B	36. B	37. A	38. C	39. D	40. D
41. C	42. D	43. D	44. D	45. C	46. C	47. C	48. B	49. B	50. C
51. D	52. B	53. B	54. C	55. C	56. C	57. C	58. D	59. C	60. B
61. B	62. A	63. A	64. D	65. B	66. B	67. B	68. C	69. A	70. D
71. B	72. C	73. C	74. D	75. A	76. C	77. B	78. D	79. D	80. B
81. C	82. C	83. A	84. D	85. A	86. D	87. D	88. B	89. C	90. D
91. B	92. D	93. B	94. D	95. B	96. C	97. C	98. A	99. D	100. D
101. C	102. C	103. C	104. B	105. B	106. B	107. D	108. C	109. C	110. B
111. B	112. C	113. C	114. B	115. A	116. B	117. C	118. C	119. D	120. A
121. B	122. C	123. A	124. C	125. B	126. D	127. B	128. D	129. D	130. B
131. D	132. A	133. C	134. D	135. A	136. C	137. D	138. D	139. B	140. B
141. B	142. B	143. A	144. A	145. B	146. B	147. A	148. D	149. A	150. B
151. A	152. A	153. A	154. A	155. A	156. B	157. B	158. C	159. D	160. A
161. D	162. C	163. D	164. A	165. B	166. D	167. D	168. D	169. A	170. D
171. C	172. D	173. A	174. D	175. C	176. D	177. C	178. A	179. D	180. B
181. B	182. B	183. B	184. D	185. A	186. A	187. D	188. B	189. C	190. B
191. A	192. A	193. C	194. A	195. D	196. D	197. C	198. B	199. B	200. B
201. A	202. A	203. D	204. B	205. A	206. D	207. C	208. A	209. B	210. C
211. D	212. A	213. C	214. C	215. C	216. C	217. D	218. A	219. A	220. A
221. D	222. B	223. B	224. A	225. B	226. A	227. B	228. C	229. A	230. A
231. D	232. D	233. D	234. D	235. D	236. A	237. D	238. D	239. A	240. B
241. D	242. A	243. A	244. B	245. B	246. D	247. B	248. B	249. A	250. D
251. B	252. C	253. C	254. C	255. B	256. D	257. A	259. D	260. D	261. D

§4 HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ GIẢI TAM GIÁC

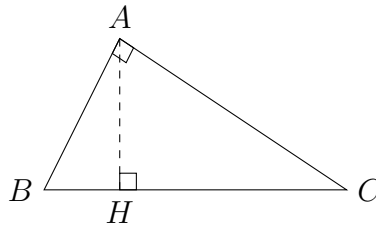
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Cho tam giác ABC , ta quy ước các kí hiệu sau.

- $BC = a, CA = b, AB = c$.
- $p = \frac{a+b+c}{2}$ gọi là nửa chu vi của tam giác ABC .
- m_a, m_b, m_c là độ dài đường trung tuyến tương ứng kẻ từ đỉnh A, B, C của tam giác ABC .
- h_a, h_b, h_c là độ dài đường cao tương ứng kẻ từ đỉnh A, B, C của tam giác ABC .
- l_a, l_b, l_c là độ dài đường phân giác tương ứng kẻ từ đỉnh A, B, C của tam giác ABC .
- R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
- r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

1 HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH .



- Định lí Pitago:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

- Nếu biết 2 cạnh góc vuông thì có thể tính được đường cao AH bởi công thức:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

- Tích 2 cạnh góc vuông bằng tích cạnh huyền với đường cao tương ứng:

$$AB \cdot AC = BC \cdot AH$$

- Nếu biết 1 cạnh góc vuông và cạnh huyền thì có thể tính được hình chiếu của cạnh góc vuông đó lên cạnh huyền nhờ công thức:

$$AB^2 = BH \cdot BC; \quad AC^2 = CH \cdot BC$$

2 ĐỊNH LÝ HÀM SỐ COSIN, CÔNG THỨC TRUNG TUYẾN.

Định lý hàm số cosin được phát minh bởi nhà toán học Al Kashi (1380 - 1429). Đây là một mở rộng của định lý Pythagore. Định lý hàm số cosin đưa ra một phương pháp giúp ta tìm được một cạnh của tam giác bất kì khi biết độ dài hai cạnh còn lại và số đo của góc xen giữa hai cạnh đó, từ đó cũng cho chúng ta tính được số đo của các góc còn lại của tam giác. Định lý được phát biểu như sau:

Định lí 1. Trong một tam giác bất kỳ, bình phương một cạnh bằng tổng bình phương của hai cạnh còn lại trừ đi hai lần tích của chúng với cosin của góc xen giữa hai cạnh đó.

Nếu ký hiệu a, b, c lần lượt là độ dài các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC thì ta có:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{cases}$$

Từ định lý hàm số cosin ta cũng suy ra công thức tính cosin các góc của tam giác theo độ dài các cạnh của tam giác như sau:

$$\begin{cases} \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \\ \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{cases}$$

Mặt khác, sử dụng định lý hàm số cosin có thể giúp ta tìm được độ dài các đường trung tuyến theo ba cạnh của một tam giác. Cụ thể, nếu ký hiệu m_a, m_b, m_c là độ dài các đường trung tuyến xuất phát từ các đỉnh A, B, C thì:

$$\begin{cases} m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} \\ m_b^2 = \frac{2(c^2 + a^2) - b^2}{4} \\ m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4} \end{cases}$$

3 ĐỊNH LÝ SIN

Định lí 2. Cho tam giác ABC , gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Đặt $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Ta có

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

4 CÁC CÔNG THỨC DIỆN TÍCH TAM GIÁC

Diện tích S của tam giác ABC được tính bởi một trong các công thức

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c \\ &= \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C \\ &= \frac{abc}{4R} \\ &= pr \\ &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \end{aligned}$$

B CÁC DẠNG TOÁN**Dạng 1. Một số bài tập giúp nắm vững lý thuyết**

Mục này đưa ra một số bài tập mà việc giải quyết chỉ dùng đến các kiến thức về tích vô hướng của hai véc-tơ ở bài trước, chưa dùng đến các công thức về hệ thức lượng ở bài 3. Kết quả của các bài tập này sẽ dùng vào việc giới thiệu các công thức mới về hệ thức lượng trong tam giác.

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 1 ❖❖❖

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC

- Tính $\overrightarrow{BC}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.
- Tính $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC}$ từ đó tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ theo độ dài các cạnh của tam giác.
- Chứng minh rằng $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$.

Lời giải.

- $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.
- $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Từ đó suy ra

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}.$$

- Theo câu trên ta có

$$\begin{aligned} AB \cdot AC \cdot \cos A &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} \\ \Leftrightarrow \cos A &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} \end{aligned}$$

□

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có AM là trung tuyến.

- Tính $\overrightarrow{BC}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.
- Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ theo độ dài các cạnh của tam giác.
- Tính $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.
- Chứng minh $AM^2 = \frac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{4}$.

Lời giải.

- Như bài trên.
- Như bài trên.
- $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$
- Ta có

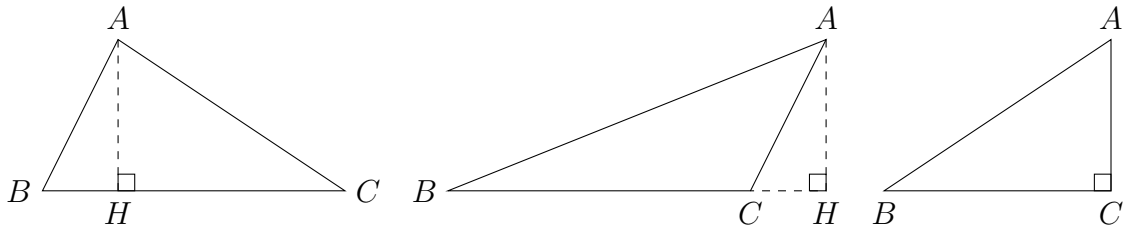
$$\begin{aligned} AM^2 &= \frac{AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{4} \\ &= \frac{AB^2 + AC^2 + AB^2 + AC^2 - BC^2}{4} \\ &= \frac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{4} \end{aligned}$$

□

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC , đặt $AB = c$, $CA = b$, $BC = a$. Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài các đường cao kẻ từ A, B, C của tam giác ABC .

- a) Chứng minh rằng $h_a = b \sin C = c \sin B$; $h_b = c \sin A = a \sin C$; $h_c = a \sin B = b \sin A$.
b) Gọi S là diện tích tam giác ABC , chứng minh rằng

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B$$



Lời giải.

- a) Trong cả ba trường hợp $\widehat{C}$ nhọn, vuông, tù, ta đều có $\sin B = \frac{h_a}{AB}$. Suy ra $h_a = c \sin B$. Tương tự ta cũng có $h_a = b \sin C$. Thay đổi vai trò A, B, C ta được

$$h_a = b \sin C = c \sin B; h_b = c \sin A = a \sin C; h_c = a \sin B = b \sin A$$

- b) Ta có $S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}a.b \sin C$, còn lại tương tự.

□

Ví dụ 4. Chứng minh rằng diện tích tam giác ABC được tính bởi công thức $S = \frac{abc}{4R}$.

Lời giải.

Theo định lý sin, ta có $\frac{c}{\sin C} = 2R$. Suy ra $\sin C = \frac{c}{2R}$. Từ đó

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}.$$

□

Ví dụ 5. Cho đường tròn tâm I bán kính r nội tiếp tam giác ABC và tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA của tam giác tại K, L, M . Gọi p là nửa chu vi tam giác ABC . Chứng minh rằng $S = p.r$.

Lời giải.

Ta có $r = IK = IM = IL$.

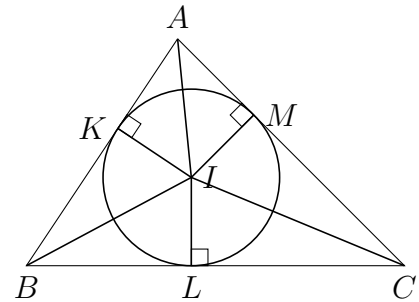
Theo tính chất hai tiếp tuyến cùng xuất phát tại một điểm ta có $AM = AK$, $BK = BL$, $CL = CM$. Chu vi tam giác là

$$2p = AM + AK + BK + BL + CL + CM = 2(AK + BL + CK)$$

Suy ra $p = AK + BL + CM$.

Diện tích tam giác ABC là

$$\begin{aligned} S &= 2(S_{AKI} + S_{BLI} + S_{CMI}) \\ &= 2\left(\frac{1}{2}AK.r + \frac{1}{2}BL.r + \frac{1}{2}CM.r\right) \\ &= (AK + BL + CM).r \\ &= pr \end{aligned}$$



□

Ví dụ 6. Cho tam giác ABC diện tích S . Chứng minh rằng

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2}$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A \\ &= \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sqrt{1 - \cos^2 A} \\ &= \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \cdot AC}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2} \end{aligned}$$

□

Ví dụ 7. Chứng minh công thức tính diện tích sau (công thức Hê-rông)

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

với p là nửa chu vi tam giác, $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ là độ dài các cạnh.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}.$$

Dùng kết quả bài trên, ta có

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{b^2 c^2 - \frac{1}{4} (b^2 + c^2 - a^2)^2} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} (2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} [(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2]} \\
 &= \sqrt{\frac{b+c+a}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2}} \\
 &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}
 \end{aligned}$$

□

Ví dụ 8. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , cho hai véc-tơ $a = (a_1; a_2)$, $b = (b_1; b_2)$. Chứng minh rằng

$$Q = \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$$

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 Q^2 &= (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \\
 &= a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - 2a_1 b_2 a_2 b_1 \\
 &= (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2
 \end{aligned}$$

Suy ra $Q = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$.

□

Ví dụ 9. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho tam giác ABC có $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$. Chứng minh rằng diện tích tam giác ABC là

$$S = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} (x_B - x_A) & (x_C - x_A) \\ (y_B - y_A) & (y_C - y_A) \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A)|$$

trong đó, người ta đặt $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ (định thức cấp 2).

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AB} &= (x_B - x_A; y_B - y_A) \\
 \overrightarrow{AC} &= (x_C - x_A; y_C - y_A)
 \end{aligned}$$

Ta đã biết $S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$. Kết quả tính toán về toạ độ của bài trên ta được

$$S = \frac{1}{2} |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A)|.$$

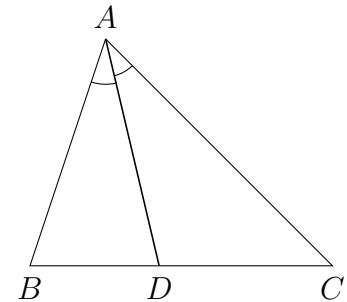
□

Ví dụ 10. Cho tam giác ABC , gọi l_a là độ dài đường phân giác trong kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC . Chứng minh rằng $l_a = \frac{bc \sin A}{(b+c) \sin \frac{A}{2}}$.

Lời giải.

Gọi D là chân đường phân giác trong kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC . Ta có $l_a = AD$. Ta có

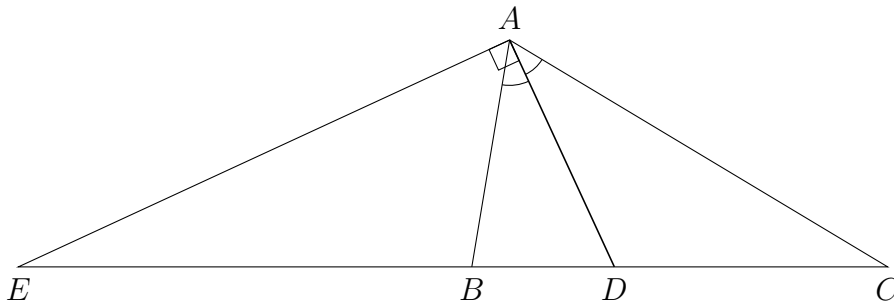
$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{ABD} + S_{ACD} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A &= \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2} AC \cdot AD \cdot \sin \frac{A}{2} \\ \Leftrightarrow cb \sin A &= l_a (c+b) \sin \frac{A}{2} \\ \Leftrightarrow l_a &= \frac{bc \sin A}{(b+c) \sin \frac{A}{2}} \end{aligned}$$



□

Ví dụ 11. Cho tam giác ABC có $AB < AC$ (hay $c < b$), gọi l'_a là độ dài đường phân ngoài kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC . Chứng minh rằng $l'_a = \frac{bc \sin A}{(b-c) \cos \frac{A}{2}}$.

Lời giải.



Gọi E là chân đường phân giác ngoài kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC . Ta có $l'_a = AE$. Ta có

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{ACE} - S_{ABE} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A &= \frac{1}{2} AC \cdot AE \cdot \sin \left(90^\circ + \frac{A}{2} \right) - \frac{1}{2} AB \cdot AE \cdot \sin \left(90^\circ - \frac{A}{2} \right) \\ \Leftrightarrow cb \sin A &= l'_a (b-c) \cos \frac{A}{2} \\ \Leftrightarrow l'_a &= \frac{bc \sin A}{(b-c) \cos \frac{A}{2}} \end{aligned}$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho tam giác ABC có $AB = 1$, $AC = \sqrt{3}$, $\hat{A} = 60^\circ$.

- a) Tính $\overrightarrow{BC}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.
b) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

- c) Tính độ dài BC .

Lời giải.

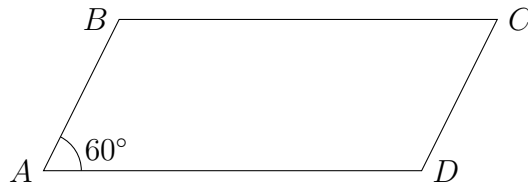
- a) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.
b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
c) $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 + 3 - \sqrt{3}$. Suy ra $BC = \sqrt{4 - \sqrt{3}}$.

□

Bài 2. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = a$, $AD = 2a$ và $\widehat{DAB} = 60^\circ$.

- a) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ c) Tính AC
b) Tính $\overrightarrow{AC}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$. d) Tính BD

Lời giải.

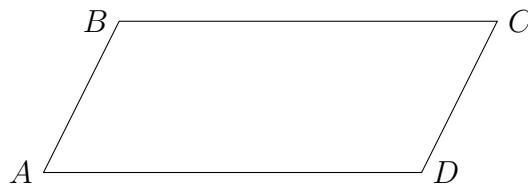


- a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \cdot AD \cdot \cos \widehat{DAB} = a \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} = a^2$.
b) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
c) $AC^2 = AB^2 + AD^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = a^2 + 4a^2 + 2a^2 = 7a^2$. Suy ra $AC = a\sqrt{7}$.
d) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$. Suy ra $BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 3a^2$. Suy ra $BD = a\sqrt{3}$.

□

Bài 3. Chứng minh rằng tổng bình phương các đường chéo của hình bình hành bằng tổng bình phương các cạnh.

Lời giải.



Ta có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Suy ra $AC^2 = AB^2 + AD^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

Tương tự $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$. Suy ra $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

Từ đó suy ra $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2) = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$.

□

Bài 4. Cho tam giác ABC có $AB = 2$, $AC = 5$, $BC = 4$. Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

Lời giải.

$$\bullet \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} = \frac{4 + 25 - 16}{2} = \frac{13}{2}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} &= -\frac{5}{2} \\ \bullet \quad \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} &= \frac{37}{2} \end{aligned}$$

□

Bài 5. Cho tam giác ABC có trọng tâm G , M là điểm bất kì. Chứng minh rằng

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

Lời giải.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

$$\begin{aligned} &MA^2 + MB^2 + MC^2 \\ &= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 \\ &= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) \\ &= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \end{aligned}$$

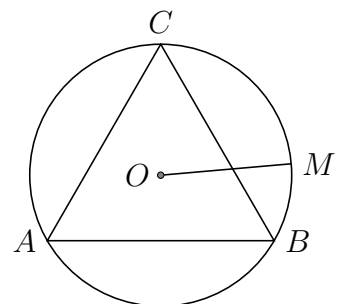
□

Bài 6. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O , M là một điểm thay đổi trên đường tròn. Chứng minh rằng $MA^2 + MB^2 + MC^2$ không đổi.

Lời giải.

Gọi R là bán kính của đường tròn. Áp dụng bài trên ta có

$$\begin{aligned} &MA^2 + MB^2 + MC^2 \\ &= 3MO^2 + OA^2 + OB^2 + OC^2 \\ &= 3R^2 + R^2 + R^2 + R^2 \\ &= 6R^2 \end{aligned}$$



□

Dạng 2. Xác định các yếu tố còn lại của một tam giác khi biết một số yếu tố về cạnh và góc của tam giác đó

Ở dạng toán này, chúng ta áp dụng trực tiếp định lý hàm số cosin hoặc hệ quả của định lý hàm số cosin để tìm các yếu tố còn lại của tam giác đã cho.

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 2 ❖❖❖

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có $b = 5, c = 7$ và $\cos A = \frac{3}{5}$. Tính cạnh a và cosin các góc còn lại của tam giác đó.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 25 + 49 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \frac{3}{5} = 32 \Rightarrow a = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \\ \cos B &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{32 + 49 - 25}{56\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{32 + 25 - 49}{40\sqrt{2}} = \frac{8}{40\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}.\end{aligned}$$

□

Ví dụ 2. Một người đứng trên ngọn hải đăng A ở bờ biển quan sát hai chiếc tàu ở hai điểm B và C . Khoảng cách từ người đó tới chiếc tàu ở điểm B và C lần lượt là 5 km và 6 km. Góc tạo bởi hai hướng nhìn AB và AC là 60° . Tính khoảng cách d giữa hai chiếc tàu.

Lời giải.

Xét tam giác ABC với $AC = 6$ km, $AB = 5$ km, $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Áp dụng định lí cos ta có

$$BC^2 = AB^2 + CA^2 - 2 \cdot CA \cdot AB \cdot \cos \widehat{BAC}$$

Từ đó suy ra $BC^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ = 31 \Rightarrow BC = \sqrt{31}$.

Vậy khoảng cách giữa hai chiếc tàu là $d = \sqrt{31}$ km.

□

Ví dụ 3. Cho x là số thực lớn hơn 1 và $\begin{cases} a = x^2 + x + 1 \\ b = 2x + 1 \\ c = x^2 - 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác và tính số đo của góc đối diện với cạnh a .

Lời giải.

Do $x > 1$ nên dễ dàng chứng minh được: $\begin{cases} a + b > c \\ b + c > a, \\ c + a > b \end{cases}$ từ đó suy ra a, b, c là độ dài ba cạnh của một

tam giác.

Gọi A là góc đối diện với cạnh a , khi đó: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$$\text{Ta có } \begin{cases} a^2 = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \\ b^2 = 4x^2 + 4x + 1 \\ c^2 = x^4 - 2x^2 + 1 \\ bc = 2x^3 + x^2 - 2x - 1 \end{cases}$$

Từ đó suy ra $b^2 + c^2 - a^2 = -bc \Rightarrow \cos A = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = 120^\circ$.

□

Ví dụ 4. Cho $\triangle ABC$ có các cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$. Biết rằng tồn tại số tự nhiên $n > 2$ sao cho $a^n = b^n + c^n$. Chứng minh rằng A là góc có số đo lớn nhất của tam giác, từ đó suy ra

$\triangle ABC$ có 3 góc nhọn.

Lời giải.

Từ giả thiết suy ra $\begin{cases} a > b \\ a > c \end{cases}$, do đó $\begin{cases} A > B \\ A > C \end{cases}$. Vậy A là góc lớn nhất của $\triangle ABC$.

Ta có $a^n = b^n + c^n \Leftrightarrow a^2 = b^2 \left(\frac{b}{a}\right)^{n-2} + c^2 \left(\frac{c}{a}\right)^{n-2}$.

Do $\begin{cases} a > b \\ a > c \end{cases}$ nên $\begin{cases} \frac{b}{a} < 1 \\ \frac{c}{a} < 1 \end{cases}$. Từ đó suy ra $a^2 < b^2 + c^2$ hay $b^2 + c^2 - a^2 > 0$.

Mà $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ nên suy ra $\cos A > 0$ hay A là góc nhọn, do đó B, C cũng là các góc nhọn.

□

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC có $m_c = \frac{\sqrt{3}}{2}c$. Chứng minh rằng:

$$m_a + m_b + m_c = \frac{\sqrt{3}}{2}(a + b + c).$$

Lời giải.

Ta có $m_c = \frac{\sqrt{3}}{2}c \Rightarrow m_c^2 = \frac{3}{4}c^2 \Rightarrow \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4} = \frac{3}{4}c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 2c^2$.

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2(b^2 + c^2) - a^2 = 3b^2 \\ 2(c^2 + a^2) - b^2 = 3a^2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 4m_a^2 = 3b^2 \\ 4m_b^2 = 3a^2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} m_a = \frac{\sqrt{3}}{2}b \\ m_b = \frac{\sqrt{3}}{2}a \end{cases} \\ &\Rightarrow m_a + m_b + m_c = \frac{\sqrt{3}}{2}(a + b + c) \end{aligned}$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho tam giác ABC có $AC = 10$ cm, $BC = 16$ cm và $C = 120^\circ$, tính độ dài cạnh AB .

Lời giải.

Áp dụng định lý hàm số cosin ta có $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA \cdot CB \cos C$ ta suy ra $AB = \sqrt{516}$ cm □

Bài 2. Cho tam giác ABC có $BC = 3$, $CA = 4$ và $AB = 6$, Tính cosin của góc có số đo lớn nhất của tam giác đã cho.

Lời giải.

Do $AB > AC > BC$ nên $C > B > A$.

Áp dụng định lý hàm số cosin ta có $\cos C = -\frac{11}{24}$.

□

Bài 3. Cho a^2, b^2, c^2 là độ dài các cạnh của một tam giác nào đó và a, b, c là độ dài các cạnh của tam giác ABC . Chứng minh rằng tam giác ABC có ba góc nhọn.

Lời giải.

Do a^2, b^2, c^2 là độ dài các cạnh của một tam giác nên

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - c^2 > 0 \\ b^2 + c^2 - a^2 > 0 \\ c^2 + a^2 - b^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \cos A, \cos B, \cos C > 0.$$

□

Bài 4. Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ có $AB = CD = a$, $AD = b$, $BC = c$. Chứng minh rằng $\cos A = \frac{b-c}{2a}$.

Lời giải.

Áp dụng định lý hàm số cosin cho hai tam giác BAD, BCD và chú ý $\widehat{BAD} + \widehat{BCD}$ ta suy ra điều phải chứng minh.

□

Bài 5. Cho tam giác ABC có $m_a = 15, m_b = 18, m_c = 27$.

- Tính diện tích của tam giác ABC .
- Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC .

Lời giải.

- Gọi G là trọng tâm ΔABC ; A', B', C' lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB và D là điểm đối xứng của A qua G . Khi đó ta có $BGCD$ là hình bình hành.

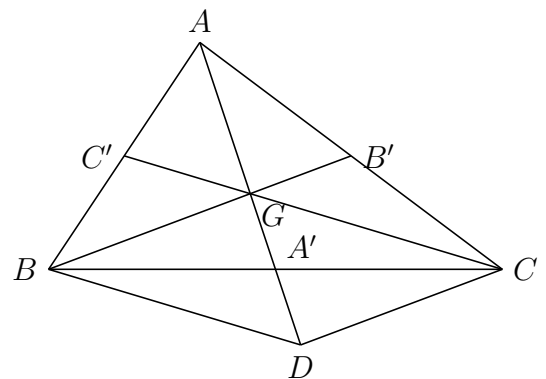
$$S_{\Delta ABC} = 3S_{\Delta GBC} = \frac{1}{2}S_{\Delta BGCD} = S_{\Delta BGD}.$$

Tam giác BGD có độ dài các cạnh lần lượt là 10, 12, 18 nên $S_{\Delta BGD} = \sqrt{20 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 2} = 40\sqrt{2}$.

$$\text{Vậy } S_{\Delta ABC} = 120\sqrt{2}.$$

- Áp dụng công thức tính độ dài đường trung tuyến ta tính được $a = 2\sqrt{209}, b = 8\sqrt{11}, c = 2\sqrt{41}$.

□



Bài 6. Cho ΔABC có các cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$ thỏa mãn hệ thức

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}.$$

Chứng minh rằng $B = 60^\circ$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} &= \frac{3}{a+b+c} \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{a+b} + \frac{a+b+c}{b+c} = 3 \\
 &\Leftrightarrow 1 + \frac{c}{a+b} + 1 + \frac{a}{b+c} = 3 \\
 &\Leftrightarrow \frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} = 1 \\
 &\Leftrightarrow c(b+c) + a(a+b) = (a+b)(b+c) \\
 &\Leftrightarrow c^2 + bc + a^2 + ab = ab + b^2 + ac + bc \\
 &\Leftrightarrow c^2 + a^2 - b^2 = ac \\
 &\Leftrightarrow \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2} \\
 &\Leftrightarrow \cos B = \frac{1}{2} \\
 &\Leftrightarrow B = 60^\circ.
 \end{aligned}$$

□

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 7. Cho tam giác ABC có $BC = 10$. I là điểm trên cạnh BC sao cho $2IB = 3IC$. Đường tròn tâm I bán kính 3 tiếp xúc với các cạnh AB, AC lần lượt tại các điểm M, N . Tính độ dài các cạnh AB, AC .

Lời giải.

Trước hết ta có
$$\begin{cases} \sin B = \frac{IM}{BI} = \frac{1}{2} \\ \sin C = \frac{IN}{CI} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Từ đó suy ra
$$\begin{cases} \cos B = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos C = \frac{\sqrt{7}}{4} \end{cases} \quad (\text{Do } B, C \text{ là các góc nhọn}).$$

Đặt $AB = c$, $AC = b$. Do AI là phân giác góc A nên $\frac{c}{b} = \frac{6}{4} \Rightarrow 2c = 3b$.

Mặt khác, theo định lý cosin trong tam giác ABC ta có

$$\begin{cases} c^2 = b^2 + BC^2 - 2b \cdot BC \cdot \cos C \\ b^2 = c^2 + BC^2 - 2c \cdot BC \cdot \cos B \end{cases}$$

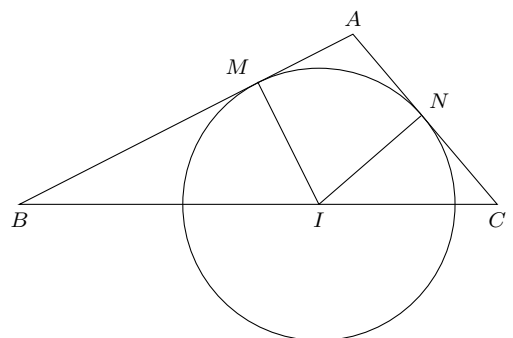
Thay số vào ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} 2c = 3b \\ c^2 = b^2 + 100 - 5\sqrt{7} \cdot b \\ b^2 = c^2 + 100 - 10\sqrt{3} \cdot c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2(3\sqrt{3} - \sqrt{7}) \\ c = 3(3\sqrt{3} - \sqrt{7}) \end{cases}$$

□

Bài 8. Cho $\triangle ABC$ có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và có diện tích S . Chứng minh rằng:

a) $\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$.



- b) Nếu $\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c} \neq 1$ thì $\cot B + \cot C = 2 \cot A$, ở đó m_b, m_c là độ dài các trung tuyến xuất phát từ B, C .

Lời giải.

- a) Theo định lý hàm số cosin ta có: $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos A$.

Mặt khác, $S = \frac{1}{2}bc \sin A$ nên ta có

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} = \frac{2bc \cos A}{2bc \sin A} = \cot A$$

- b) Ta có $\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c} \neq 1 \Leftrightarrow \frac{c^2}{b^2} = \frac{m_b^2}{m_c^2} = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{2a^2 + 2b^2 - c^2}$.

Từ đó suy ra $2a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 - b^4 \Rightarrow 2a^2(c^2 - b^2) = c^4 - b^4 = (c^2 + b^2)(c^2 - b^2)$.

Do $b \neq c$ nên $c^2 - b^2 \neq 0$, do đó $b^2 + c^2 = 2a^2$.

$$\text{Từ } \begin{cases} \cot B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{4S} \\ \cot C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S} \end{cases} \Rightarrow \cot B + \cot C = \frac{2a^2}{4S}. \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } 2 \cot A = 2 \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} = \frac{2a^2}{4S}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra điều phải chứng minh. □

Dạng 3. Diện tích tam giác

Dạng này thường sử dụng các công thức về diện tích sau

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c \\ &= \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C \\ &= \frac{abc}{4R} \\ &= pr \\ &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \end{aligned}$$

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 3 ❖❖❖

Bài 1. Cho $A(1, 5); B(4, -1); C(-4, -5)$. Tính diện tích của tam giác ABC .

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (3, -6); \overrightarrow{BC} = (-8, -4)$, nên tam giác ABC vuông tại B .

Do đó, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.BC = \frac{1}{2}.3\sqrt{5}.4\sqrt{5} = 30(\text{đvdt})$. □

Bài 2. Tính diện tích tam giác ABC , biết chu vi tam giác bằng $2p$, các góc $\hat{A} = \alpha^\circ, \hat{B} = \beta^\circ$.

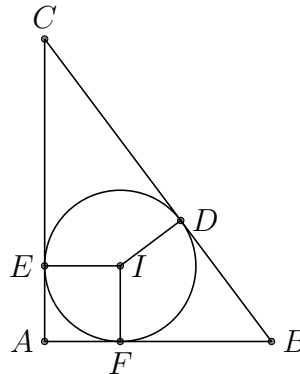
Lời giải.

Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R}$. Theo định lý hàm sin ta có $abc = 8R^3 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$, suy ra $S = 2R^2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$.

và $R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{2p}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin(\pi - \alpha - \beta)}$. Vậy $S = 2 \left(\frac{2p}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin(\pi - \alpha - \beta)} \right)^2 \cdot (\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin(\pi - \alpha - \beta))$ □

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = 90^\circ$, bán kính đường tròn ngoại tiếp $R = 7$ và bán kính đường tròn nội tiếp là $r = 3$. Tính diện tích S của tam giác.

Lời giải.



Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp của $\triangle ABC$.

Gọi tiếp điểm của đường tròn nội tiếp (I) với các cạnh BC, CA, AB lần lượt là D, E, F .

Vì $\triangle ABC$ vuông tại A nên $BC = 2R = 14$ và $AE = AF = r = 3$.

$$\text{Ta có } p = \frac{AB + AC + BC}{2} = AE + BC = 14 + 3 = 17$$

$$\text{Vậy } S = pr = 17 \times 3 = 51$$

□

Bài 4. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn $(O, 3)$. Biết rằng $\widehat{A} = \widehat{B} = 30^\circ$. Tính diện tích S của $\triangle ABC$

Lời giải.

Áp dụng định lý sin trong $\triangle ABC$ ta có:

$$BC = 2R \sin A = 6 \sin 30^\circ = 3 \text{ và } AC = 2R \sin B = 6 \sin 30^\circ = 3$$

$$\text{Ta có } \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{B} - \widehat{A} = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ.$$

$$\text{Vậy } S = \frac{1}{2} BC \cdot AC \cdot \sin \widehat{C} = \frac{3^2}{2} \sin 120^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{4}.$$

□

Bài 5. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{2Rr}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \frac{1}{2Rr} = \frac{1}{2 \cdot \frac{abc}{4s} \cdot \frac{S}{p}} = \frac{2p}{abc} = \frac{a+b+c}{abc} = \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}$$

$$\text{Bất đẳng thức ban đầu} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}$$

Ta thấy:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \right) \\ &\geq \sqrt{\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2}} + \sqrt{\frac{1}{b^2} \cdot \frac{1}{c^2}} + \sqrt{\frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{a^2}} \\ &= \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} \end{aligned}$$

□

Bài 6. Cho hình vuông $MNPQ$ nội tiếp trong tam giác ABC . Chứng minh rằng:

$$S_{ABC} \geq 2S_{MNPQ}.$$

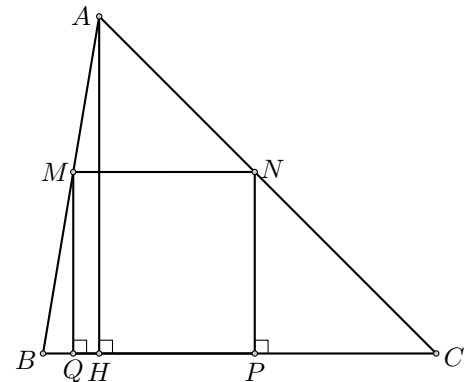
Lời giải.

Ta thấy:

$$\begin{aligned} S_{ABC} &\geq 2S_{MNPQ} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}BC \cdot AH &\geq 2MN \cdot PQ \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4} &\geq \frac{MN}{BC} \cdot \frac{MQ}{AH} \end{aligned}$$

Mà

$$\begin{aligned} \frac{MN}{BC} \cdot \frac{MQ}{AH} &= \frac{AM}{AB} \cdot \frac{BM}{AB} = \frac{1}{AB^2} \cdot AM \cdot BM \\ &\leq \frac{1}{AB^2} \left(\frac{AM + BM}{2} \right)^2 = \frac{1}{AB^2} \cdot \frac{AB^2}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$



□

Dạng 4. Chứng minh hệ thức liên quan giữa các yếu tố trong tam giác

- Dùng các hệ thức cơ bản để biến đổi vế này thành vế kia hoặc chứng minh cả hai vế cũng bằng một hệ thức đã biết là đúng.
- Khi chứng minh cần khai thác các giả thiết và kết luận để tìm đúng các hệ thức thích hợp làm trung gian cho quá trình biến đổi.

BÀI TẬP DẠNG 4

Ví dụ 1. Cho $\triangle ABC$ có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. p là nửa chu vi tam giác. Chứng minh rằng:

$$abc \cdot (\cos A + \cos B + \cos C) = a^2(p - a) + b^2(p - b) + c^2(p - c).$$

Lời giải.

Áp dụng định lý cos trong $\triangle ABC$, ta có:

$$\begin{aligned} VT &= abc \cdot \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right) \\ &= a \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} + b \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} + c \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \\ &= \frac{a^2}{2}(b + c - a) + \frac{b^2}{2}(a + c - b) + \frac{c^2}{2}(a + b - c) \\ &= a^2(p - a) + b^2(p - b) + c^2(p - c) = VP. \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức được chứng minh.

□

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ có trung tuyến AM , $\widehat{AMB} = \alpha$, $AC = b$, $AB = c$, S là diện tích $\triangle ABC$.

Với $0 < \alpha < 90^\circ$. Chứng minh: $\cot \alpha = \frac{b^2 - c^2}{4S}$.

Lời giải.

Đặt $BC = a$.

Gọi H là chân đường cao kẻ từ A đến BC .

$$\text{Có } \triangle AHM \text{ vuông} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{HM}{AH} = \frac{MB - BH}{AH} = \frac{BC}{2AH} - \frac{BH}{AH}.$$

$$\text{Hay } \cot \alpha = \frac{a}{2AH} - \frac{BH}{AH} \quad (1)$$

Mặt khác, áp dụng định lý cos và công thức tính diện tích:

$$\begin{aligned} \frac{b^2 - c^2}{4S} &= \frac{(a^2 + c^2 - 2ac \cos B) - c^2}{2AH \cdot a} \\ &= \frac{a^2 - 2ac \cos B}{2AH \cdot a} = \frac{a}{2AH} - \frac{c \cdot \cos B}{AH}. \end{aligned}$$

$$\text{Hay } \frac{b^2 - c^2}{4S} = \frac{a}{2AH} - \frac{BH}{AH} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \cot \alpha = \frac{b^2 - c^2}{4S}.$$

□

Ví dụ 3. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G và $\widehat{GAB} = \alpha$, $\widehat{GBC} = \beta$, $\widehat{GCA} = \gamma$. Đặt $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ và S là diện tích $\triangle ABC$. Chứng minh:

$$\cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma = \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{4S}.$$

Lời giải.

Gọi M là trung điểm BC . Kẻ $MH \perp AB$.

$$\triangle AMH \text{ vuông} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{AH}{AM}.$$

$$\triangle BHM \text{ vuông} \Rightarrow \cos B = \frac{BH}{MB} = \frac{2BH}{a}.$$

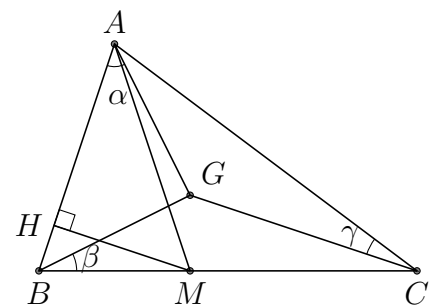
$$\text{Ta có } AB = HA + HB \Rightarrow c = AM \cdot \cos \alpha + \frac{a}{2} \cdot \cos B$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{AM} \left(c - \frac{a}{2} \cos B \right) \quad (1)$$

Mặt khác, áp dụng định lý hàm số sin cho $\triangle AMB$:

$$\frac{MB}{\sin \alpha} = \frac{MA}{\sin B} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{1}{AM} \cdot MB \sin B = \frac{a}{2AM} \sin B \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được:



$$\cot \alpha = \frac{c - \frac{a}{2} \cos B}{\frac{a}{2} \sin B} = \frac{2c - a \cos B}{a \cdot \frac{2R}{2}} = \frac{R(4c - 2a \cos B)}{ab} = \frac{4c^2 - 2ac \cos B}{abc} = \frac{3c^2 + b^2 - a^2}{4S}.$$

$$\text{Tương tự: } \cot \beta = \frac{3a^2 + c^2 - b^2}{4S}; \cot \gamma = \frac{3b^2 + a^2 - c^2}{4S}.$$

$$\text{Do đó, } \cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma = \frac{3c^2 + b^2 - a^2}{4S} + \frac{3a^2 + c^2 - b^2}{4S} + \frac{3b^2 + a^2 - c^2}{4S} = \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{4S}. \quad \square$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. R là độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Chứng minh rằng: $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc} R$.

Lời giải.

Áp dụng định lý cos và sin, ta được:

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc \cdot \frac{a}{2R}} = \frac{(b^2 + c^2 - a^2) R}{abc}.$$

Tương tự với $\cot B$ và $\cot C$, cộng vế theo vế được đpcm. $\square$

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G , R là độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác. Chứng minh rằng:

$$3 - (\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) = \frac{3}{4R^2} (GA^2 + GB^2 + GC^2)$$

Lời giải.

Áp dụng công thức trung tuyến, ta được $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$.

Áp dụng định lý sin: $a = 2R \sin A$; $b = 2R \sin B$; $c = 2R \sin C$.

$$\text{Suy ra } m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = 3R^2 (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) = 3R^2 (3 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C) \quad (1)$$

$$\text{Theo tính chất trọng tâm, có } m_a = \frac{3}{2}GA, m_b = \frac{3}{2}GB, m_c = \frac{3}{2}GC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) thu được đẳng thức cần chứng minh. $\square$

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ có h_a , h_b , h_c lần lượt là độ dài đường cao xuất phát từ A , B , C ; p là nửa chu vi. R , r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác. Chứng minh rằng:

$$p^2 = \frac{R}{2r^2} h_a h_b h_c$$

Lời giải.

$$\text{Ta có } ah_a = bh_b = ch_c = 2S \Rightarrow h_a h_b h_c = \frac{2S}{abc}.$$

$$\text{Lại có } S = pr \Rightarrow \frac{2p^2 r^2}{h_a h_b h_c} = \frac{abc}{4S} = R. \quad \square$$

Bài 4. Cho $\triangle ABC$ có $\sin^2 B + \sin^2 C = 2\sin^2 A$. Chứng minh $\cos A \geq \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Áp dụng định lý sin, có:

$$\sin^2 B + \sin^2 C = 2\sin^2 A \Leftrightarrow \frac{b^2}{4R^2} + \frac{c^2}{4R^2} = 2\frac{a^2}{4R^2} \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 2a^2.$$

Áp dụng định lý cos, có:

$$b^2 + c^2 = 2(b^2 + c^2 - 2bc \cos A) \Leftrightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2}{4bc}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si: $b^2 + c^2 \geq 2bc$. Suy ra $\cos A \geq \frac{1}{2}$. □

Bài 5. Cho $\triangle ABC$ có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$; l_a , l_b , l_c lần lượt là độ dài đường phân giác xuất phát từ A , B , C . Chứng minh: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c}$.

Lời giải.

Gọi D là chân đường phân giác kẻ từ A . Ta có:

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD} \Leftrightarrow \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}b.l_a \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2}c.l_a \sin \frac{A}{2} \Leftrightarrow l_a = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c}.$$

$$\text{Vì } 0^\circ < \hat{A} < 180^\circ \text{ nên } 0 < \cos \frac{A}{2} < 1.$$

$$\text{Suy ra } l_a < \frac{2bc}{b+c} \Leftrightarrow \frac{1}{l_a} > \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}.$$

Tương tự với l_b và l_c . Cộng vế theo vế ta được đpcm. □

Bài 6. Cho $\triangle ABC$ diện tích S có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$.

Lời giải.

Theo công thức Hê-rông: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

$$\text{Ta có } \sqrt{(p-a)(p-b)} \leq \frac{p-a+p-b}{2} = \frac{c}{2}. \text{ Tương tự có } \sqrt{(p-b)(p-c)} \leq \frac{a}{2}; \sqrt{(p-a)(p-c)} \leq \frac{b}{2}.$$

$$\text{Do đó } S^2 \leq p \cdot \frac{abc}{8} = \frac{(a+b+c)abc}{16}.$$

$$\text{Lại có } (a^2 + b^2 + c^2) \geq 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq 3abc(a+b+c) \geq 3.16.S^2.$$

Suy ra đpcm. □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 7. Cho $\triangle ABC$ có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$; trọng tâm G và tâm đường tròn nội tiếp I . Biết GI vuông góc với đường phân giác trong của $\widehat{BCA}$. Chứng minh: $\frac{a+b+c}{3} = \frac{2ab}{a+b}$.

Lời giải.

Vẽ $GH \perp AC$, $GK \perp BC$, $ID \perp AC$.

Gọi L và N lần lượt là giao điểm của IG với AC và BC .

$$\text{Ta có: } S_{\triangle CLN} = 2S_{\triangle LIC} = ID \cdot IC = r \cdot LC \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } S_{\triangle CLN} = S_{\triangle GLC} + S_{\triangle GCN} = \frac{1}{2}(GH \cdot LC + GK \cdot CN) \quad (2)$$

Do $\triangle CLN$ cân nên $LC = CN$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $r.LC = \frac{1}{2}.LC(GH + GK) \Leftrightarrow 2r = GH + GK$.

Gọi h_a, h_b lần lượt là độ dài đường cao của $\triangle ABC$ xuất phát từ A và B .

Ta có: $\frac{GK}{h_a} = \frac{MG}{MA} = \frac{1}{3}; \frac{GH}{h_b} = \frac{1}{3}$. Do đó $2r = \frac{1}{3}(h_a + h_b)$.

Mà $S_{\triangle ABC} = pr = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b \Rightarrow h_a = \frac{2pr}{a}; h_b = \frac{2pr}{b}$.

Suy ra $2r = \frac{2}{3}pr \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{3}p \left(\frac{a+b}{ab} \right) \Leftrightarrow \frac{2ab}{a+b} = \frac{a+b+c}{3}$. □

Bài 8. Cho $ABCD$ là tứ giác nội tiếp với $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$ và p là nửa chu vi, S là diện tích tứ giác. Chứng minh rằng:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos^2 \frac{B+D}{2}}.$$

Lời giải.

Áp dụng định lý hàm số cos trong các tam giác ABD, CBD ta có:

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \cos C.$$

$$a^2 + d^2 - 2ad \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \cos C.$$

$$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2ad \cos A - 2bc \cos C. (1)$$

Bình phương hai vế của (1) ta có:

$$(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 = 4(ad \cos A - 2bc \cos C)^2. (2)$$

Ta có:

$$S = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}ad \sin A + \frac{1}{2}bc \sin C.$$

$$16S^2 = 4(ad \sin A + bc \sin C)^2. (3)$$

Cộng từng vế (2), (3) ta được:

$$\begin{aligned} (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 + 16S^2 &= 4[a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd(\cos A \cos C - \sin A \sin C)] \\ &= 4[a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd(\cos(A+C))] \\ &= 4\left[a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd\left(2\frac{\cos^2(A+C)}{2} - 1\right)\right] \\ &= 4\left[(ad+bc)^2 - 4abcd\frac{\cos^2(A+C)}{2}\right]. (4) \end{aligned}$$

Từ (4) suy ra

$$\begin{aligned} 16S^2 &= 4(ad+bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 - 16abcd\frac{\cos^2(A+C)}{2} \\ &= (2ad + 2bc + a^2 + d^2 - b^2 - c^2)(2ad + 2bc - a^2 - d^2 + b^2 + c^2) - 16abcd\frac{\cos^2(A+C)}{2} \\ &= [(a+d)^2 - (b-c)^2][(b+c)^2 - (a-d)^2] - 16abcd\frac{\cos^2(A+C)}{2} \\ &= (2p-2c)(2p-2b)(2p-2d)(2p-2a) - 16abcd\frac{\cos^2(A+C)}{2}. (5) \end{aligned}$$

$$\text{Vì } \frac{\widehat{A} + \widehat{C}}{2} + \frac{\widehat{B} + \widehat{D}}{2} = 180^\circ \Rightarrow \cos^2 \frac{B + D}{2} = \cos^2 \frac{A + C}{2}$$

nên từ (5) suy ra

$$S^2 = (p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - abcd \cos^2 \frac{B + D}{2}.$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - abcd \cos^2 \frac{B + D}{2}}.$$

□

Dạng 5. Nhận dạng tam giác vuông

Sử dụng các phép biến đổi tương đương hoặc hệ quả để biến đổi “Điều kiện cho trước” đến một đẳng thức mà từ đó ta dễ dàng kết luận được tính chất của tam giác.

BÀI TẬP DẠNG 5

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC thỏa mãn điều kiện

$$\sin 2A + \sin 2B = \frac{\sin 2A \sin 2B}{\cos A \cos B}.$$

Chứng minh tam giác ABC vuông.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} \sin 2A + \sin 2B &= \frac{\sin 2A \sin 2B}{\cos A \cos B} \\ \Leftrightarrow 2 \sin A \cos A + 2 \sin B \cos B &= \frac{2 \sin A \cos A \cdot 2 \sin B \cos B}{\cos A \cos B} \\ \Leftrightarrow \sin A \cos A + \sin B \cos B &= 2 \sin A \sin B \\ \Leftrightarrow \sin 2A + \sin 2B &= 4 \sin A \sin B \\ \Leftrightarrow 2 \sin(A + B) \cos(A - B) &= 2[\cos(A - B) - \cos(A + B)] \\ \Leftrightarrow \sin C \cdot \cos(A - B) &= \cos(A - B) + \cos C \\ \Leftrightarrow \cos(A - B) \cdot \cos C(1 - \sin C) + \cos^2 C &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos(A - B) \cdot \cos C(1 - \sin C) + 1 - \sin^2 C &= 0 \\ \Leftrightarrow (1 - \sin C)(\cos(A - B) \cos C + 1 + \sin C) &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 - \sin C &= 0 \\ \Leftrightarrow C &= \frac{\pi}{2} \\ \Leftrightarrow \triangle ABC &\text{ vuông tại } C. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ có $\sin 2A \cos 2A + \sin 2B \cos 2B + \sin 2C \cos 2C = 0$. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ vuông.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} & \sin 2A \cos 2A + \sin 2B \cos 2B + 2 \sin 2C \cos 2C \\ &= \sin 4A + \sin 4B + 2 \sin 2C \cos 2C \\ &= 2 \sin 2(A+B) \cos 2(A-B) + 2 \sin 2C \cos 2C \\ &= -2 \sin 2C \cos 2(A-B) + 2 \sin 2C \cos 2(A+B) \\ &= -2 \sin 2C [\cos 2(A-B) - \cos 2(A+B)] \\ &= -4 \sin 2C \sin 2A \sin 2B. \end{aligned}$$

Do đó $\sin 2A \cos 2A + \sin 2B \cos 2B + \sin 2C \cos 2C = 0 \Leftrightarrow -4 \sin 2A \sin 2B \sin 2C = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2A = 0 \\ \sin 2B = 0 \\ \sin 2C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2A = \pi \\ 2B = \pi \\ 2C = \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{\pi}{2} \\ B = \frac{\pi}{2} \\ C = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \text{ vuông.} \quad \square$$

Ví dụ 3. Cho $\triangle ABC$ có $\sin^2 A + \sin^2 B = \sqrt[2017]{\sin C}$ và các góc A, B nhọn. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.

Lời giải.

Ta có: $\sin C \in [0, 1] \Rightarrow \sqrt[2017]{\sin C} = \sin^{2017} C \geq \sin^2 C \Rightarrow \sin^2 A + \sin^2 B \geq \sin^2 C$

$$\Leftrightarrow 4R^2[\sin^2 A + \sin^2 B] \geq 4R^2 \sin^2 C \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq c^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 \geq 0.$$

Theo định lý hàm số cosin ta có: $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \geq 0$.

Ta thấy:

$$\begin{aligned} \sin^2 A + \sin^2 B &= \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} \\ &= 1 - \frac{\cos 2A + \cos 2B}{2} \\ &= 1 - \cos(A+B) \cos(A-B) \\ &= 1 + \cos C \cos(A-B) \geq 1. \end{aligned}$$

Mặt khác: $\sqrt[2017]{\sin C} \leq \sqrt[2017]{1} = 1$.

$$\text{Do đó: } \sin^2 A + \sin^2 B = \sqrt[2017]{\sin C} \text{ khi } \begin{cases} \cos C \cos(A-B) = 0 \\ \sin C = 1 \end{cases} \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \triangle ABC \text{ vuông.} \quad \square$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho A, B là hai góc nhọn của tam giác ABC thỏa mãn:

$$\sin^2 A + \sin^2 B = 1.$$

Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại C.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\sin^2 A + \sin^2 B &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} &= 1 \\ \Leftrightarrow \cos(A + B) \cos(A - B) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos C \cos(A - B) &= 0.\end{aligned}$$

Mà A, B là hai góc nhọn nên $\cos(A - B) \neq 0$.

Do đó $\cos C \cdot \cos(A - B) = 0 \Leftrightarrow \cos C = 0 \Rightarrow C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại C . □

Bài 2. Cho tam giác ABC có các góc thỏa mãn đẳng thức :

$$\sin C = \sin A \cos B.$$

Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại A .

Lời giải.

$$\begin{aligned}\sin C &= \sin A \cos B = \frac{1}{2}[\sin(A + B) + \sin(A - B)] \\ \Rightarrow 2 \sin C &= \sin C + \sin(A - B) \\ \Rightarrow \sin C &= \sin(A - B) \\ \Rightarrow \sin(A + B) &= \sin(A - B) \\ \Rightarrow \sin A \cos B + \sin B \cos A &= \sin A \cos B - \sin B \cos A \\ \Rightarrow \sin B \cos A &= 0 \\ \Rightarrow \cos A &= 0 \Rightarrow A = \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow \triangle ABC &\text{ vuông tại } A.\end{aligned}$$

□

Bài 3. Cho tam giác ABC có $C < B$ và b, c là các cạnh của tam giác. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông nếu có:

$$\frac{\sin(B - C)}{\sin(B + C)} = \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}.$$

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}\frac{\sin(B - C)}{\sin(B + C)} &= \frac{\sin B \cos C - \sin C \cos B}{\sin B \sin C + \sin B \sin C} \\ &= \frac{\frac{b}{2R} \cos C - \frac{c}{2R} \cos B}{\frac{b}{2R} \cos C + \frac{c}{2R} \cos B} \\ &= \frac{2ab \cos C - 2ac \cos B}{2ab \cos C + 2ac \cos B} \\ &= \frac{(a^2 + b^2 - c^2) - (a^2 + c^2 - b^2)}{(a^2 + b^2 - c^2) + (a^2 + c^2 - b^2)} \\ &= \frac{b^2 - c^2}{a^2}.\end{aligned}$$

$$\text{Mà } \frac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)} = \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}.$$

$$\text{Do đó: } \frac{b^2 - c^2}{a^2} = \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \triangle ABC \text{ vuông tại } A. \quad \square$$

Bài 4. Cho tam giác ABC có: $5(\sin A + 3 \cos B) + 9(\sin B + 3 \cos A) = 20$. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} & 4(\sin A + 3 \cos B) + 3(\cos A + 3 \sin B) \\ &= (3 \cos A + 4 \sin A) + (9 \sin B + 12 \cos B) \\ &\leq \sqrt{(4^2 + 3^2)(\sin^2 A + \cos^2 A)} + \sqrt{(9^2 + 12^2)(\sin^2 B + \cos^2 B)} \\ &= 5 + 15 = 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dấu bằng xảy ra} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{3}{4} \\ \frac{\cos B}{\sin B} = \frac{9}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \tan A = \cot B = \frac{3}{4} \\ \Rightarrow \tan A &= \tan\left(\frac{\pi}{2} - B\right) \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{2} - B \Leftrightarrow A + B = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \triangle ABC \text{ vuông tại } C. \quad \square \end{aligned}$$

Dạng 6. Nhận dạng tam giác cân

Sử dụng các phép biến đổi tương đương hoặc hệ quả để biến đổi “Điều kiện cho trước” đến một đẳng thức mà từ đó ta dễ dàng kết luận được tính chất của tam giác.

BÀI TẬP DẠNG 6

Ví dụ 1. Chứng tỏ rằng tam giác ABC cân nếu $\tan B + \tan C = 2 \tan \frac{B+C}{2}$

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} \tan B + \tan C &= 2 \tan \frac{B+C}{2} \\ \Leftrightarrow \tan B - \tan \frac{B+C}{2} + \tan C - \tan \frac{B+C}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\sin \frac{B-C}{2}}{\cos B \cos \frac{B+C}{2}} + \frac{\sin \frac{C-B}{2}}{\cos C \cos \frac{B+C}{2}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin \frac{B-C}{2} \left(\frac{1}{\cos B \cos \frac{B+C}{2}} - \frac{1}{\cos C \cos \frac{B+C}{2}} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin \frac{B-C}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{B-C}{2} = 0 \\ \Leftrightarrow B = C \Rightarrow \triangle ABC \text{ cân tại } A. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ thỏa mãn hệ thức: $\sin \frac{B}{2} \cos^3 \frac{C}{2} = \sin \frac{C}{2} \cos^3 \frac{B}{2}$. Chứng minh tam giác ABC cân.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} \sin \frac{B}{2} \cos^3 \frac{C}{2} &= \sin \frac{C}{2} \cos^3 \frac{B}{2} \\ \Leftrightarrow \tan \frac{B}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{B}{2}} &= \tan \frac{C}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{C}{2}} \\ \Leftrightarrow \tan \frac{B}{2} (1 + \tan^2 \frac{B}{2}) &= \tan \frac{C}{2} (1 + \tan^2 \frac{C}{2}). \end{aligned}$$

Đặt $x = \tan \frac{B}{2}$; $y = \tan \frac{C}{2}$ khi đó ta có:

$$\begin{aligned} x(1 + x^2) &= y(1 + y^2) \\ \Leftrightarrow x^3 - y^3 + x - y &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x - y = 0 &\Leftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

Do đó ta có: $\tan \frac{B}{2} = \tan \frac{C}{2} \Rightarrow \frac{B}{2} = \frac{C}{2} \Leftrightarrow B = C \Rightarrow \triangle ABC$ cân tại A .

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ thỏa mãn: $\frac{c}{b \sin A} = 2 \tan A$. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ cân.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b \sin A} &= 2 \tan A \\ \Leftrightarrow \frac{\sin C}{\sin B} &= 2 \cos A \\ \Leftrightarrow \sin C &= 2 \sin B \cos A \\ \Leftrightarrow \sin C &= \sin(B + A) + \sin(B - A) \\ \Leftrightarrow \sin C &= \sin C + \sin(B - A) \\ \Leftrightarrow \sin(B - A) &= 0 \Rightarrow B - A = 0 \Leftrightarrow B = A \Rightarrow \triangle ABC \text{ cân tại } C. \end{aligned}$$

□

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ có đường cao $AH = h_a$ thỏa mãn hệ thức: $h_a^2 = bc \cos^2 \frac{A}{2}$. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ cân.

Lời giải.

Ta có: $h_a = c \sin B = b \sin C \Rightarrow h_a^2 = bc \sin B \sin C$.

Từ đó ta có:

$$\begin{aligned}\sin B \sin C &= \cos^2 \frac{A}{2} \\ \Leftrightarrow \cos(B - C) - \cos(B + C) &= 1 + \cos A \\ \Leftrightarrow \cos(B - C) + \cos A &= 1 + \cos A \\ \Leftrightarrow \cos(B - C) &= 1 \\ \Rightarrow B - C &= 0 \\ \Leftrightarrow B = C &\Rightarrow \triangle ABC \text{ cân.}\end{aligned}$$

□

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ thỏa mãn hệ thức:

$$\frac{4 - 2 \sin^2 B - 2 \sin^2 C}{\sin^2 B + \sin^2 C} = (\cot B + \cot C)^2 - 2 \cot B \cdot \cot C.$$

Lời giải.

$$\begin{aligned}\frac{4 - 2 \sin^2 B - 2 \sin^2 C}{\sin^2 B + \sin^2 C} &= (\cot B + \cot C)^2 - 2 \cot B \cdot \cot C \\ \Leftrightarrow \frac{4}{\sin^2 B + \sin^2 C} - 2 &= \cot^2 B + \cot^2 C \\ \Leftrightarrow \frac{4}{\sin^2 B + \sin^2 C} - 2 &= \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C} - 2 \\ \Leftrightarrow (\sin^2 B + \sin^2 C) \left(\frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C} \right) &= 4 \\ \Leftrightarrow \frac{\sin^2 B}{\sin^2 C} + \frac{\sin^2 C}{\sin^2 B} - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\sin B}{\sin C} - \frac{\sin C}{\sin B} \right)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin B &= \sin C \\ \Leftrightarrow B = C &\Rightarrow \triangle ABC \text{ cân.}\end{aligned}$$

□

Bài 4. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức: $\sin \frac{B}{2} = \frac{b}{2\sqrt{ac}}$. Chứng minh rằng tam giác ABC cân.

Lời giải.

$$\sin^2 \frac{B}{2} = \frac{1 - \cos B}{2} = \frac{1 - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}}{2} = \frac{b^2 - (a - c)^2}{4ac}.$$

$$\text{Mà: } \sin^2 \frac{B}{2} = \frac{b^2}{4ac}.$$

$$\text{Do đó: } \frac{b^2 - (a - c)^2}{4ac} = \frac{b^2}{4ac} \Leftrightarrow b^2 - (a - c)^2 = b^2 \Leftrightarrow a - c = 0 \Leftrightarrow a = c \Rightarrow \triangle ABC \text{ cân.}$$

□

Bài 5. Cho $\triangle ABC$ có: $\frac{1 + \cos A}{\sin A} = \frac{2b + c}{\sqrt{4b^2 - c^2}}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1 + \cos A}{\sin A} &= \frac{2b + c}{\sqrt{4b^2 - c^2}} \\ \Leftrightarrow \frac{(1 + \cos A)^2}{\sin^2 A} &= \frac{(2b + c)^2}{4b^2 - c^2} \\ \Leftrightarrow \frac{1 + \cos A}{1 - \cos A} &= \frac{2b + c}{2b - c} \\ \Leftrightarrow \frac{1 + \cos A}{1 - \cos A} &= \frac{2 \sin B + \sin C}{2 \sin B - \sin C} \\ \Leftrightarrow 2 \sin B + 2 \cos A \sin B - \sin C - \cos A \sin C &= 2 \sin B - 2 \sin B \cos A + \sin C - \sin C \cos A \\ \Leftrightarrow 4 \sin A \cos B - 2 \sin C &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin(A + B) + \sin(A - C) &= \sin C \\ \Leftrightarrow \sin C + \sin(A - B) &= \sin C \\ \Leftrightarrow \sin(A - B) &= 0 \\ \Leftrightarrow A - B &= 0 \\ \Leftrightarrow A = B &\Rightarrow \triangle ABC \text{ cân.} \end{aligned}$$

□

Dạng 7. Nhận dạng tam giác đều.

Sử dụng các phép biến đổi tương đương hoặc hệ quả để biến đổi “Điều kiện cho trước” đến một đẳng thức mà từ đó ta dễ dàng kết luận được tính chất của tam giác. Ngoài ra đối với các bất đẳng thức đối xứng với ba góc A, B, C hoặc ba cạnh a, b, c đều xảy ra dấu bằng tại trạng thái $A = B = C = 60^\circ$ hoặc $a = b = c$ để chứng minh tam giác ABC đều.

BÀI TẬP DẠNG 7

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có:

$$\begin{cases} \sin B \sin C = \frac{3}{4} \\ a^2 = \frac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c} \end{cases}$$

Chứng minh rằng tam giác ABC đều.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}
 a^2 &= \frac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c} \\
 \Leftrightarrow a^2(a - b - c) &= a^3 - b^3 - c^3 \\
 \Leftrightarrow a^2(b + c) &= (b + c)(b^2 - bc + c^2) \\
 \Leftrightarrow a^2 &= b^2 - bc + c^2 \\
 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 &= bc \\
 \Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} &= \frac{1}{2} \\
 \Rightarrow \cos A = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow A = \frac{\pi}{3}. \quad (1)
 \end{aligned}$$

Ta lại có:

$$\begin{aligned}
 \sin B \sin C &= \frac{3}{4} \\
 \Leftrightarrow \cos(B - C) - \cos(B + C) &= \frac{3}{2} \\
 \Leftrightarrow \cos(B - C) + \cos A &= \frac{3}{2} \\
 \Leftrightarrow \cos(B - C) &= 1 \\
 \Rightarrow B - C = 0 &\Leftrightarrow B = C \Rightarrow \triangle ABC \text{ cân.} \quad (2)
 \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle ABC$ đều. □

Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ có: $\cot^2 \frac{A}{2} + \cot^2 \frac{B}{2} + \cot^2 \frac{C}{2} = 9$. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ đều.

Lời giải.

Theo định lý hàm số cos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \geq 2bc - 2bc \cos A = 4bc \cdot \sin^2 \frac{A}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 \frac{A}{2}} \geq \frac{4bc}{a^2} \Rightarrow \cot^2 \frac{A}{2} \geq \frac{4bc}{a^2} - 1.$$

$$\text{Chứng minh tương tự ta có: } \cot^2 \frac{B}{2} \geq \frac{4ac}{b^2} - 1; \cot^2 \frac{C}{2} \geq \frac{4bc}{c^2} - 1.$$

$$\text{Do đó: } \cot^2 \frac{A}{2} + \cot^2 \frac{B}{2} + \cot^2 \frac{C}{2} \geq \frac{4bc}{a^2} + \frac{4ac}{b^2} + \frac{4ab}{c^2} - 3 \geq 3 \sqrt[3]{\frac{4bc}{a^2} \cdot \frac{4ac}{b^2} \cdot \frac{4ab}{c^2}} - 3 = 9.$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \triangle ABC$ đều. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ có:

$$\begin{cases} \sin B + \sin C = 2 \sin A \\ \cos B + \cos C = 2 \cos A \end{cases}$$

Chứng minh tam giác ABC đều.

Lời giải.

Ta có: $(\sin B + \sin C)^2 + (\cos B + \cos C)^2 = (2 \sin A)^2 + (2 \cos A)^2$

$$\Leftrightarrow 2(\sin B \sin C + \cos B \cos C) + 2 = 4 \Leftrightarrow \cos(B - C) = 1 \Leftrightarrow B - C = 0 \Leftrightarrow B = C$$

Khi đó: $\begin{cases} B = C \\ 2 \cos B = 2 \cos A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = C \\ B = A \end{cases} \Rightarrow A = B = C \Rightarrow \triangle ABC \text{ đều.}$ □

Bài 2. Cho tam giác ABC có:

$$\frac{a^2 \cos \frac{B-C}{2}}{2 \sin \frac{A}{2}} + \frac{b^2 \cos \frac{C-A}{2}}{2 \sin \frac{B}{2}} + \frac{c^2 \cos \frac{A-B}{2}}{2 \sin \frac{C}{2}} = a^2 + b^2 + c^2.$$

Chứng minh rằng $\triangle ABC$ đều.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a^2 \cos \frac{B-C}{2}}{2 \sin \frac{A}{2}} &= \frac{a(2R \sin A) \cos \frac{B-C}{2}}{2 \sin \frac{A}{2}} \\ &= 2aR \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} \\ &= 2aR \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} \\ &= aR (\sin B + \sin C) = \frac{a(b+c)}{2} \end{aligned}$$

Tương tự và suy ra ta có:

$$\begin{aligned} \frac{a^2 \cos \frac{B-C}{2}}{2 \sin \frac{A}{2}} + \frac{b^2 \cos \frac{C-A}{2}}{2 \sin \frac{B}{2}} + \frac{c^2 \cos \frac{A-B}{2}}{2 \sin \frac{C}{2}} &= \frac{a(b+c)}{2} + \frac{b(c+a)}{2} + \frac{c(a+b)}{2} = ab + bc + ca \\ &\leq \frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{c^2 + a^2}{2} = a^2 + b^2 + c^2 \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c \Leftrightarrow \triangle ABC$ đều. □

Dạng 8. Ứng dụng giải tam giác vào đo đạc

Sử dụng định lý sin và định lý cos để giải.

BÀI TẬP DẠNG 8

Ví dụ 1. Tính khoảng cách từ một điểm trên bờ sông đến một gốc cây trên một cù lao giữa sông.

Lời giải.

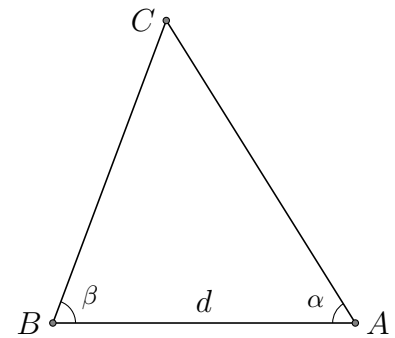
Để đo khoảng cách từ một điểm A trên bờ sông đến gốc cây C trên cù lao giữa sông, người ta chọn một điểm B cùng ở trên bờ với A sao cho từ A và B có thể nhìn thấy điểm C . Ta đo khoảng cách $AB = d$, góc $\widehat{CAB} = \alpha$ và $\widehat{CBA} = \beta$.

Khi đó, khoảng cách AC được tính như sau:

Áp dụng định lý sin vào tam giác ABC , ta có

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$$

$$\text{Vì } \sin C = \sin(\alpha + \beta) \text{ nên } AC = \frac{AB \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$



□

Ví dụ 2. Trong một buổi gặp nhau cuối tuần nghệ sĩ hài Xuân Bắc đặt ra một tình huống đối với giáo sư Cù Trọng Xoay như sau: “Một người có chiều cao từ chân đến mắt là lm . Với hai dụng cụ đo là thước dây và giác kế, người đó muốn đo chiều cao của một cái cây cao. Vậy làm thế nào để đo được chiều cao của cây”.

Nếu được ở vị trí của giáo sư Cù Trọng Xoay em làm cách nào để đo được chiều cao của cây? Hãy minh họa bằng một kết quả cụ thể.

Lời giải.

Chọn vị trí đứng là điểm C , gọi A là vị trí mắt người đó đứng tại C , O là vị trí gốc cây, B là vị trí đỉnh cây.

Các yếu tố có thể đo được bằng thước dây và giác kế là $\widehat{CAB}$, $\widehat{AOB}$, CO .

Dùng thước dây đo độ dài $CO = d$, áp dụng vào tam giác AOC để tính AO và góc $\widehat{AOC}$.

Dùng giác kế đo được góc BAO , từ đó áp dụng định lý sin để tính BO .

Ta có: $AO = \sqrt{AC^2 + CO^2} = \sqrt{l^2 + d^2}$ và $\cos \widehat{AOC} = \frac{OC}{OA}$, suy ra được góc $\widehat{AOC}$.

Để thấy $\beta = 90^\circ - \widehat{AOC}$. Áp dụng định lý sin cho tam giác ABO ta có:

$$\frac{OB}{\sin \alpha} = \frac{OA}{\sin \widehat{ABO}} \Rightarrow OB = \frac{OA \sin \alpha}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{\sqrt{l^2 + d^2} \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

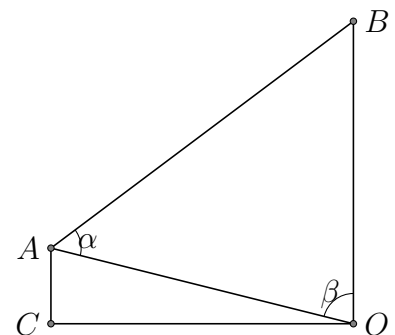
Giả sử người đó cao 1,6m, đứng cách cây 10m và nhìn ngọn cây và gốc cây một góc 30° .

$$\text{Ta có: } OA = \sqrt{1,6^2 + 10^2} = \frac{2\sqrt{641}}{5} \text{ và } \cos \widehat{AOC} = \frac{OC}{OA} = \frac{50}{2\sqrt{641}} \Rightarrow \widehat{AOC} \approx 9,1^\circ.$$

$$\text{Suy ra } \beta = 90 - 9,1 = 80,9^\circ.$$

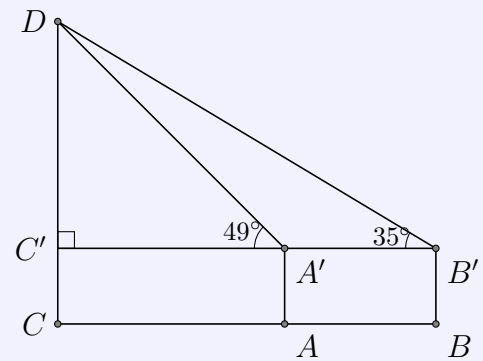
$$\text{Khi đó chiều cao của cây là: } OB = \frac{\sqrt{1,6^2 + 10^2} \sin 30^\circ}{\sin(30^\circ + 80,9^\circ)} \approx 5,42\text{m}$$

□



Ví dụ 3.

Muốn đo chiều cao của tháp Chàm Por Klong Garai ở Ninh Thuận người ta lấy hai điểm A, B trên mặt đất có khoảng cách $AB = 12\text{m}$ cùng thẳng hàng với chân C của tháp để đặt hai giác kế. Chân của giác kế có chiều cao $h = 1,3\text{m}$. Gọi D là đỉnh tháp và hai điểm A', B' cùng thẳng hàng với điểm C' thuộc chiều cao CD của tháp. Người ta đo được góc $\widehat{DA'C'} = 49^\circ$ và góc $\widehat{DB'C'} = 35^\circ$. Hãy tính chiều cao $CD = C'D + C'C$ của tháp đó.



Lời giải.

Ta có $CC' = 1,3\text{m}$.

Áp dụng định lý sin trong $\triangle A'B'D$ ta được $\frac{B'D}{\sin(180^\circ - \widehat{C'A'D})} = \frac{A'B'}{\sin(180^\circ - \widehat{C'A'D} - 35^\circ)} \Leftrightarrow \frac{B'D}{\sin 131^\circ} = \frac{12}{\sin 14^\circ} \Leftrightarrow B'D = \frac{12 \cdot \sin 131^\circ}{\sin 14^\circ}$.
 Xét $\triangle B'C'D$ có $C'D = B'D \cos 35^\circ = \frac{12 \cdot \sin 131^\circ \cdot \cos 35^\circ}{\sin 14^\circ} \approx 30,7\text{m}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

Bài 1. Bạn Tèo chỉ có dụng cụ là thước thẳng dài và bạn ấy muốn đo bán kính của đường tròn lớn của tượng đài ở công viên Sông Ray (tâm của đường tròn lớn này bị che khuất bởi tượng cây đuốc). Bạn Tèo đang loay hoay không biết làm cách nào để đo được bán kính của đường tròn này. Hãy tìm cách giúp bạn Tèo hoàn thành công việc.

Lời giải.

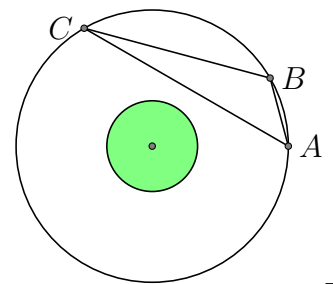
Lấy ba điểm A, B, C khác nhau thuộc đường tròn.

Đo độ dài các đoạn thẳng $BC = a, AC = b, AB = c$.

Áp dụng công thức Hê-rông tính diện tích tam giác ABC :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ với } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Suy ra bán kính của đường tròn là: $R = \frac{abc}{4S}$. □



Bài 2. Một ô tô đi từ A đến C nhưng ở giữa A và C là một ngọn núi cao nên ô tô phải chạy thành hai đoạn đường từ A đến B và từ B đến C , các đoạn đường này tạo thành tam giác ABC có $AB = 14\text{km}$, $BC = 18\text{km}$ và góc $\widehat{B} = 100^\circ$, biết rằng cứ 1km đường ô tô phải tốn $0,1$ lít xăng.

- Tính số xăng mà xe tiêu thụ khi chạy đoạn đường từ A đến C mà phải qua B .
- Giả sử không có ngọn núi và có con đường thẳng từ A đến C thì ô tô chạy hết con đường này tốn bao nhiêu lít xăng?

Lời giải.

- a) Tính số xăng mà xe tiêu thụ khi chạy đoạn đường từ A đến C mà phải qua B .

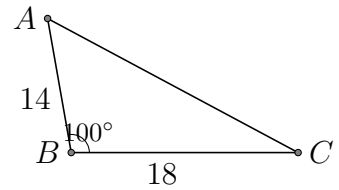
Tổng đoạn đường xe đi từ A đến C là $AB + BC = 14 + 18 = 32\text{km}$.

Do đó số xăng mà xe tiêu thụ là $32 \cdot 0,1 = 3,2\text{lit}$.

- b) Áp dụng định lý cosin ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos(\widehat{ABC}) = 14^2 + 18^2 - 2 \cdot 14 \cdot 18 \cdot \cos 100^\circ =$$

□



Bài 3. Người ta dự định xây một cây cầu bắc qua một con sông tương đối rộng và chảy xiết. Trong một đợt khảo sát người ta muốn đo khoảng cách giữa hai điểm A và B ở hai bên bờ sông. Khó khăn là người ta không thể qua sông bằng bất kì phương tiện gì. Em hãy đặt mình vào vị trí của người khảo sát để giải quyết tình huống này. Biết rằng em có dụng cụ ngắm đo góc và thước dây.

Lời giải.

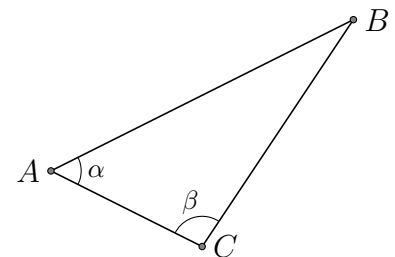
Để tính được chiều dài đoạn AB ta sẽ tạo một tam giác mà có AB là một cạnh. Ta chọn một điểm C nằm trên bờ (có thể cùng phía với A hoặc với B) và ta xem trong tam giác này ba yếu tố nào ta đo được bằng các dụng cụ đã có.

Giả sử điểm C nằm cùng bờ với điểm A như hình vẽ. Các yếu tố đo được là cạnh AC và hai góc $\widehat{BAC} = \alpha$ và $\widehat{ACB} = \beta$.

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC , ta có:

$$\frac{AB}{\sin \beta} = \frac{AC}{\sin(\alpha + \beta)} \Leftrightarrow AB = \frac{AC \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

□



Bài 4. Một cây cột điện cao 20m được đóng trên một triền dốc thẳng nghiêng hợp với phương nằm ngang một góc 17° . Người ta nối một dây cáp từ đỉnh cột điện đến cuối dốc. Tìm chiều dài của dây cáp biết rằng đoạn đường từ đáy cột đến cuối dốc bằng 72m.

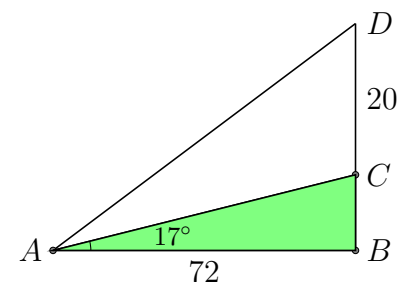
Lời giải.

Ta có $\widehat{ACD} = 180^\circ - (90^\circ - 17^\circ) = 107^\circ$.

Trong tam giác ABC vuông tại B có $AC = \frac{AB}{\cos 17^\circ} \approx 75,3\text{m}$.

Áp dụng định lý cos trong tam giác ACD , ta có:

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2 \cdot AC \cdot CD \cdot \cos \widehat{ACD} = 75,3^2 + 20^2 - 2 \cdot 75,3 \cdot 20 \cdot \cos 107^\circ \approx 6950,7 \Rightarrow AD \approx 83,4\text{m}.$$



□

Bài 5. Hai chiếc tàu thủy P và Q cách nhau 300m. Từ P và Q thẳng hàng với chân A của tháp hải đăng AB ở trên bờ biển người ta nhìn chiều cao AB của tháp dưới các góc $\widehat{BPA} = 35^\circ$, $\widehat{BQA} = 48^\circ$. Tính chiều cao của tháp.

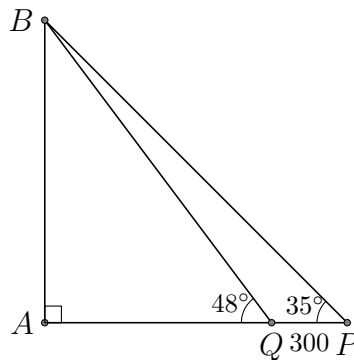
Lời giải.

Ta có: $AQ = AB \cot 48^\circ$.

$AP = AB \cot 35^\circ$.

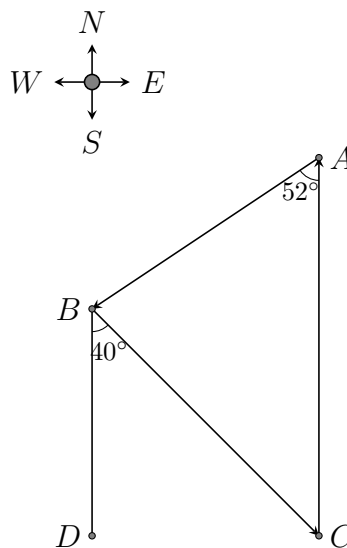
$$PQ = AP - AQ = AB (\cot 35^\circ - \cot 48^\circ)$$

$$\Rightarrow AB = \frac{PQ}{\cot 35^\circ - \cot 48^\circ} \approx 568,5 \text{m.}$$



□

Bài 6. Một cuộc đua thuyền xuất phát từ điểm A như hình vẽ bên và di chuyển theo hướng tây nam một góc 52° tới điểm B , sau đó di chuyển theo hướng đông nam 40° tới điểm C , cuối cùng quay trở lại điểm A . Điểm C cách điểm A một khoảng 8km. Tính gần đúng tổng khoảng cách của đường đua.



Lời giải.

Vì đường thẳng BD và AC song song, suy ra $\widehat{BCA} = \widehat{CBD} = 40^\circ$. Do đó, $\widehat{ABC} = 180^\circ - (52^\circ + 40^\circ) = 88^\circ$.

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC , ta được: $\frac{a}{\sin 52^\circ} = \frac{b}{\sin 88^\circ} = \frac{c}{\sin 40^\circ}$.

Vì $b = 8$ theo đề, nên: $a = \frac{8 \sin 52^\circ}{\sin 88^\circ} \approx 6,308 \text{km}$ và $c = \frac{8 \sin 40^\circ}{\sin 88^\circ} \approx 5,145 \text{km}$.

Tổng khoảng cách của đường đua là: $8 + 6,308 + 5,145 = 19,453 \text{km}$. □

Bài 7. Hai lực $\vec{f}_1$ và $\vec{f}_2$ cho trước cùng tác dụng lên một vật và tạo thành góc nhọn $(\vec{f}_1, \vec{f}_2) = \alpha$. Hãy lập công thức tính cường độ của hợp lực $\vec{f}$.

Lời giải.

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{f}_1$, $\overrightarrow{AD} = \vec{f}_2$ và vẽ hình bình hành $ABCD$.

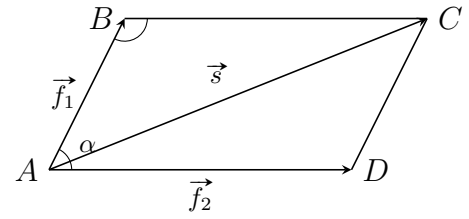
Khi đó $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = \vec{s}$.

Vậy $|\vec{s}| = |\overrightarrow{AC}| = |\vec{f}_1 + \vec{f}_2|$.

Theo định lí cosin đối với tam giác ABC , ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B, \text{ hay } |\vec{s}|^2 = |\vec{f}_1|^2 + |\vec{f}_2|^2 - 2 |\vec{f}_1| \cdot |\vec{f}_2| \cdot \cos(180^\circ - \alpha).$$

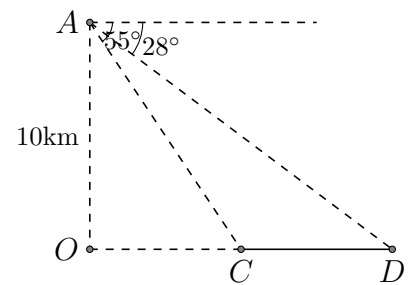
$$\text{Do đó: } |\vec{s}| = \sqrt{|\vec{f}_1|^2 + |\vec{f}_2|^2 + 2 |\vec{f}_1| \cdot |\vec{f}_2| \cdot \cos \alpha}.$$



□

Bài 8.

Một hành khách ngồi trong một máy bay, bay ở độ cao 10km nhìn xuống hai thị trấn dưới mặt đất. Góc hợp bởi phương ngang và hai thị trấn lần lượt là 28° và 55° (hình vẽ). Tính khoảng cách giữa hai thị trấn.



Lời giải.

Ta có $\widehat{CAD} = 55^\circ - 28^\circ = 27^\circ$.

Xét tam giác ACO có $\widehat{OAC} = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$ và $\cos \widehat{OAC} = \frac{AO}{AC} \Leftrightarrow AC = \frac{10}{\cos 35^\circ} \approx 12,2\text{km}$.

Trong tam giác ACD có $\widehat{ACD} = 180^\circ - \widehat{OCA} = 125^\circ$ và $\widehat{ADC} = 180^\circ - (125^\circ + 27^\circ) = 28^\circ$.

Áp dụng định lý sin trong tam giác ACD , ta có

$$\frac{CD}{\sin 27^\circ} = \frac{AC}{\sin 28^\circ} \Leftrightarrow CD = \frac{12,2 \sin 27^\circ}{\sin 28^\circ} \approx 11,79\text{km}.$$

Vậy khoảng cách giữa hai thị trấn khoảng 11,79km.

□

C CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho tam giác ABC có $\widehat{CAB} = 45^\circ$, $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính số đo $\widehat{AMC}$.

- A. $\widehat{AMC} = 30^\circ$. B. $\widehat{AMC} = 60^\circ$. C. $\widehat{AMC} = 45^\circ$. D. $\widehat{AMC} = 90^\circ$.

Lời giải.

Gọi $\widehat{CAM} = x$, khi đó $\widehat{MAB} = 45^\circ - x$. Áp dụng định lý Sin

$$\frac{BM}{\sin(45^\circ - x)} = \frac{AM}{\sin 30^\circ}, \quad \frac{CM}{\sin x} = \frac{AM}{\sin 105^\circ}.$$

$$\text{Vì } BM = CM \text{ nên } \frac{\sin 30^\circ}{\sin(45^\circ - x)} = \frac{\sin 105^\circ}{\sin x} \text{ hay}$$

$$\sin(45^\circ - x) = 2 \sin 105^\circ \sin x = 2 \sin x \cos 75^\circ \Leftrightarrow \sin(45^\circ - x) = \sin(x + 75^\circ) + \sin(x - 75^\circ)$$

$$\Leftrightarrow \sin(45^\circ - x) - \sin(x + 75^\circ) = \sin(x - 75^\circ) \Leftrightarrow 2 \cos 60^\circ \sin(-x - 15^\circ) = \sin(x - 75^\circ) \Leftrightarrow \sin(-x - 15^\circ) = \sin(x - 75^\circ) \Leftrightarrow x = 30^\circ. \text{ Vậy } \widehat{AMC} = 45^\circ.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 2. Tam giác ABC có $AB = 5$, $BC = 7$, $CA = 8$. Số đo góc $\hat{A}$ bằng

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Lời giải.

$$\text{Theo định lý hàm cô-sin, ta có } \cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{1}{2}.$$

Do đó, $\hat{A} = 60^\circ$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 3. Tam giác ABC có $AB = 2$, $AC = 1$ và $\hat{A} = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh BC .

- A. $BC = 1$. B. $BC = 2$. C. $BC = \sqrt{2}$. D. $BC = \sqrt{3}$.

Lời giải.

Theo định lý hàm cô-sin, ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = 2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = 3$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{3}.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 4. Tam giác ABC có đoạn thẳng nối trung điểm của AB và BC bằng 3, cạnh $AB = 9$ và $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh BC .

- A. $BC = 3 + 3\sqrt{6}$. B. $BC = 3\sqrt{6} - 3$. C. $BC = 3\sqrt{7}$. D. $BC = \frac{3 + 3\sqrt{33}}{2}$.

Lời giải.

Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AB , BC .

$$\Rightarrow MN \text{ là đường trung bình của } \triangle ABC \Rightarrow MN = \frac{1}{2}AC.$$

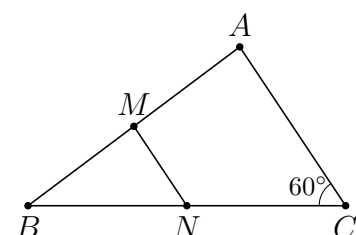
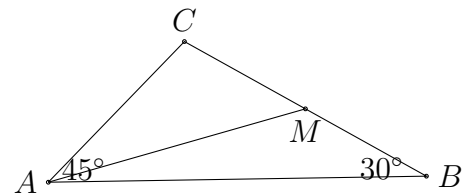
Mà $MN = 3$, suy ra $AC = 6$.

Theo định lý hàm cô-sin, ta có

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos \widehat{ACB}$$

$$\Leftrightarrow 9^2 = 6^2 + BC^2 - 2 \cdot 6 \cdot BC \cdot \cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow BC = 3 + 3\sqrt{6}.$$



Chọn đáp án **A**

□

Câu 5. Tam giác ABC có $AB = \sqrt{2}$, $AC = \sqrt{3}$ và $\widehat{C} = 45^\circ$. Tính độ dài cạnh BC .

- A. $BC = \sqrt{5}$. B. $BC = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$. C. $BC = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$. D. $BC = \sqrt{6}$.

Lời giải.

Theo định lí hàm cô-sin, ta có

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos \widehat{C} \Rightarrow (\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 + BC^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot BC \cdot \cos 45^\circ$$

$$\Rightarrow BC = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 6. Tam giác ABC có $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 45^\circ$ và $AB = 5$. Tính độ dài cạnh AC .

- A. $AC = \frac{5\sqrt{6}}{2}$. B. $AC = 5\sqrt{3}$. C. $AC = 5\sqrt{2}$. D. $AC = 10$.

Lời giải.

Theo định lí hàm sin, ta có $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \Leftrightarrow \frac{5}{\sin 45^\circ} = \frac{AC}{\sin 60^\circ} \Rightarrow AC = \frac{5\sqrt{6}}{2}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 7. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh bằng 1 cm và có $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh AC .

- A. $AC = \sqrt{3}$. B. $AC = \sqrt{2}$. C. $AC = 2\sqrt{3}$. D. $AC = 2$.

Lời giải.

Do $ABCD$ là hình thoi, có $\widehat{BAD} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 120^\circ$.

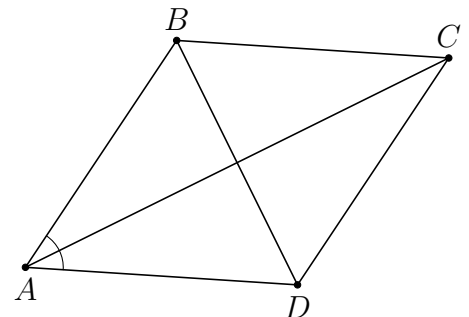
Theo định lí hàm cô-sin, ta có

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC}$$

$$= 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ$$

$$= 3.$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{3}.$$



Chọn đáp án **A**

□

Câu 8. Tam giác ABC có $AB = 4$, $BC = 6$, $AC = 2\sqrt{7}$. Điểm M thuộc đoạn BC sao cho $MC = 2MB$. Tính độ dài cạnh AM .

- A. $AM = 4\sqrt{2}$. B. $AM = 3$. C. $AM = 2\sqrt{3}$. D. $AM = 3\sqrt{2}$.

Lời giải.

Theo định lí hàm cô-sin, ta có

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{4^2 + 6^2 - (2\sqrt{7})^2}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{1}{2}.$$

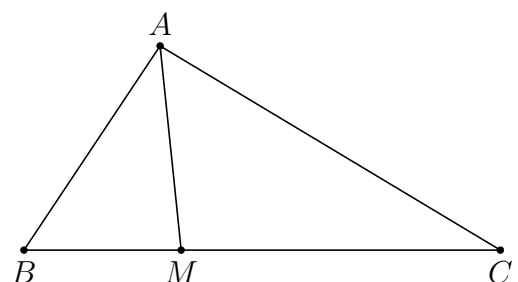
$$\text{Do } MC = 2MB \Rightarrow BM = \frac{1}{3}BC = 2.$$

Theo định lí hàm cô-sin, ta có

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2 \cdot AB \cdot BM \cdot \cos B$$

$$= 4^2 + 2^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 12.$$

$$\Rightarrow AM = 2\sqrt{3}.$$



Chọn đáp án **C**

□

Câu 9. Tam giác ABC có $AB = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$, $BC = \sqrt{3}$, $CA = \sqrt{2}$. Gọi D là chân đường phân giác trong góc $\widehat{A}$. Khi đó góc $\widehat{ADB}$ bằng

A. 45° .

B. 60° .

C. 75° .

D. 90° .

Lời giải.

Theo định lý hàm cô-sin, ta có

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = -\frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BAD} = 60^\circ.$$

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

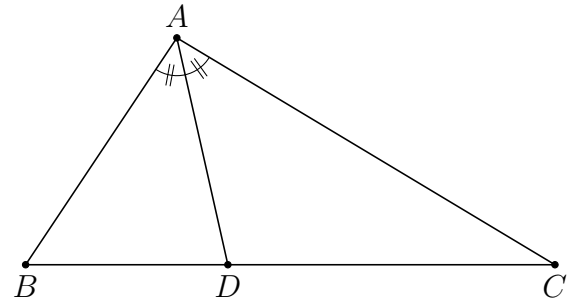
$$\Rightarrow \widehat{ABC} = 45^\circ.$$

Trong $\triangle ABD$ có $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{ABD} = 45^\circ$.

$$\Rightarrow \widehat{ADB} = 75^\circ.$$

Chọn đáp án **C**

□



Câu 10. Tam giác ABC vuông tại A , đường cao $AH = 32$ cm. Hai cạnh AB và AC tỉ lệ với 3 và 4. Cạnh nhỏ nhất của tam giác này có độ dài bằng bao nhiêu?

A. 38 cm.

B. 40 cm.

C. 42 cm.

D. 45 cm.

Lời giải.

Do tam giác ABC vuông tại A , có tỉ lệ 2 cạnh góc vuông $AB : AC$ là 3 : 4 nên AB là cạnh nhỏ nhất trong tam giác.

$$\text{Ta có } \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow AC = \frac{4}{3}AB.$$

Xét $\triangle ABC$ có đường cao AH . Ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{\left(\frac{4}{3}AB\right)^2} \Rightarrow \frac{1}{32^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{9}{16AB^2} \Rightarrow AB = 40.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 11. Tam giác MPQ vuông tại P . Trên cạnh MQ lấy hai điểm E, F sao cho các góc $\widehat{MPE}$, $\widehat{EPF}$, $\widehat{FPQ}$ bằng nhau. Đặt $MP = q$, $PQ = m$, $PE = x$, $PF = y$. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào **đúng**?

A. $ME = EF = FQ$.

B. $ME^2 = q^2 + x^2 - xq$.

C. $MF^2 = q^2 + y^2 - yq$.

D. $MQ^2 = q^2 + m^2 - 2qm$.

Lời giải.

Ta có $\widehat{MPE} = \widehat{EPF} = \widehat{FPQ} = \frac{\widehat{MPQ}}{3} = 30^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{MPF} = \widehat{EPQ} = 60^\circ$.

Theo định lí hàm cô-sin, ta có

$$ME^2 = PM^2 + PE^2 - 2 \cdot PM \cdot PE \cdot \cos \widehat{MPE}$$

$$= q^2 + x^2 - 2qx \cdot \cos 30^\circ = q^2 + x^2 - qx\sqrt{3}.$$

$$MF^2 = PM^2 + PF^2 - 2PM \cdot PF \cdot \cos \widehat{MPF}$$

$$= q^2 + y^2 - 2qy \cdot \cos 60^\circ$$

$$= q^2 + y^2 - qy.$$

$$MQ^2 = MP^2 + PQ^2 = q^2 + m^2.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 12. Cho góc $\widehat{xOy} = 30^\circ$. Gọi A và B là hai điểm di động lần lượt trên Ox và Oy sao cho $AB = 1$. Độ dài lớn nhất của đoạn OB bằng

A. $\frac{3}{2}$.

B. $\sqrt{3}$.

C. $2\sqrt{2}$.

D. 2.

Lời giải.

Theo định lí hàm sin, ta có

$$OB = \frac{AB}{\sin \widehat{AOB}} \cdot \sin \widehat{OAB}$$

$$= \frac{1}{\sin 30^\circ} \cdot \sin \widehat{OAB}$$

$$= 2 \sin \widehat{OAB}.$$

$$\geq 2$$

Suy ra $\max OB = 2$ khi $\sin \widehat{OAB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{OAB} = 90^\circ$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 13. Cho góc $\widehat{xOy} = 30^\circ$. Gọi A và B là hai điểm di động lần lượt trên Ox và Oy sao cho $AB = 1$. Khi OB có độ dài lớn nhất thì độ dài của đoạn OA bằng

A. $\frac{3}{2}$.

B. $\sqrt{3}$.

C. $2\sqrt{2}$.

D. 2.

Lời giải.

Theo định lí hàm sin, ta có

$$OB = \frac{AB}{\sin \widehat{AOB}} \cdot \sin \widehat{OAB} = 2 \sin \widehat{OAB} \geq 2.$$

Suy ra $\max OB = 2$ khi $\sin \widehat{OAB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{OAB} = 90^\circ$.

Xét tam giác OAB vuông tại A . Ta có

$$OA = \sqrt{OB^2 - AB^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 14. Tam giác ABC có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Các cạnh a , b , c liên hệ với nhau bởi đẳng thức $b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2)$. Khi đó góc $\widehat{BAC}$ bằng bao nhiêu độ?

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải.

Theo định lí hàm cô-sin, ta có $\cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}$.

Theo bài ra ta có

$$\begin{aligned} b(b^2 - a^2) &= c(a^2 - c^2) \Leftrightarrow b^3 - a^2b = a^2c - c^3 \\ \Leftrightarrow -a^2(b + c) + (b^3 + c^3) &= 0 \\ \Leftrightarrow (b + c)(b^2 + c^2 - a^2 - bc) &= 0 \\ \Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 - bc &= 0 \text{ (do } b > 0, c > 0) \\ \Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 &= bc. \end{aligned}$$

Khi đó, $\cos \widehat{BAC} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^\circ$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 15. Tam giác ABC vuông tại A , có $AB = c$, $AC = b$. Gọi l_a là độ dài đoạn phân giác trong góc $\widehat{BAC}$. Tính l_a theo b và c .

A. $l_a = \frac{\sqrt{2}bc}{b+c}$. B. $l_a = \frac{2(b+c)}{bc}$. C. $l_a = \frac{2bc}{b+c}$. D. $l_a = \frac{\sqrt{2}(b+c)}{bc}$.

Lời giải.

Ta có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{b^2 + c^2}$.

Do AD là phân giác trong của $\widehat{BAC}$ nên

$$BD = \frac{AB}{AC} \cdot DC = \frac{c}{b} \cdot DC = \frac{c}{b+c} \cdot BC = \frac{c\sqrt{b^2 + c^2}}{b+c}.$$

Theo định lí hàm cô-sin, ta có

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos \widehat{ABD}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c^2(b^2 + c^2)}{(b+c)^2} = c^2 + AD^2 - 2c \cdot AD \cdot \cos 45^\circ$$

$$\Rightarrow AD^2 - c\sqrt{2} \cdot AD + \left(c^2 - \frac{c^2 \cdot (b^2 + c^2)}{(b+c)^2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow AD^2 - c\sqrt{2} \cdot AD + \frac{2bc^3}{(b+c)^2} = 0.$$

$$\Leftrightarrow AD = \frac{\sqrt{2}bc}{b+c} \text{ hay } l_a = \frac{\sqrt{2}bc}{b+c}.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 16.

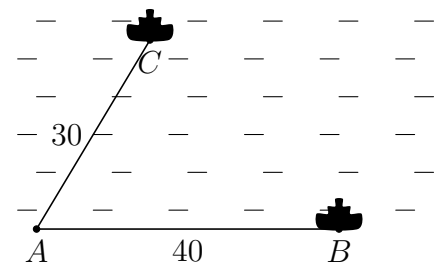
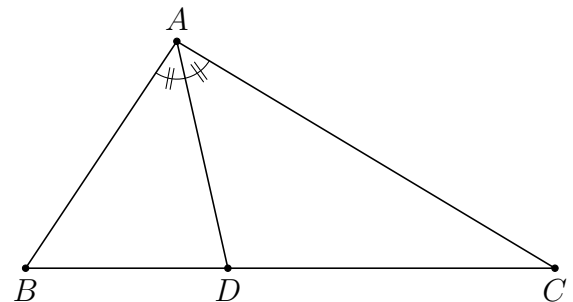
Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ một vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau góc 60° . Tàu B chạy với tốc độ 20 hải lí một giờ. Tàu C chạy với tốc độ 15 hải lí một giờ. Sau hai giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lí? Kết quả gần nhất với số nào sau đây?

A. 61 hải lí. B. 36 hải lí. C. 21 hải lí. D. 18 hải lí.

Lời giải.

Sau 2 giờ tàu B đi được 40 hải lí, tàu C đi được 30 hải lí.

Vậy tam giác ABC có $AB = 40$, $AC = 30$ và $\widehat{A} = 60^\circ$.



Áp dụng định lý cô-sin vào tam giác ABC , ta có

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A = 30^2 + 40^2 - 2 \cdot 30 \cdot 40 \cdot \cos 60^\circ = 1300 \Rightarrow a \simeq 36.$$

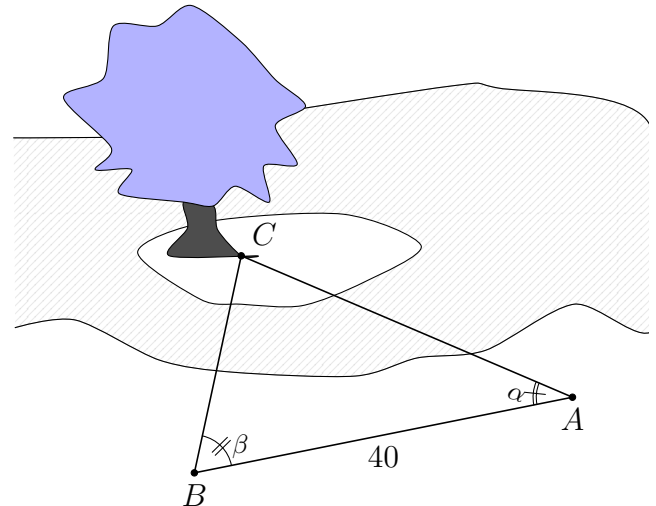
Vậy sau 2 giờ, hai tàu cách nhau khoảng 36 hải lý.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 17.

Để đo khoảng cách từ một điểm A trên bờ sông đến gốc cây C trên cù lao giữa sông, người ta chọn một điểm B cùng ở trên bờ với A sao cho từ A và B có thể nhìn thấy điểm C . Ta đo được khoảng cách $AB = 40$ m, $\widehat{CAB} = 45^\circ$ và $\widehat{CBA} = 70^\circ$. Vậy sau khi đo đạc và tính toán được khoảng cách AC gần nhất với giá trị nào sau đây?



- A. 53 m.
- B. 30 m.
- C. 41,5 m.
- D. 41 m.

Lời giải.

$\widehat{C} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 115^\circ$. Áp dụng định lý sin vào tam giác ABC , ta có

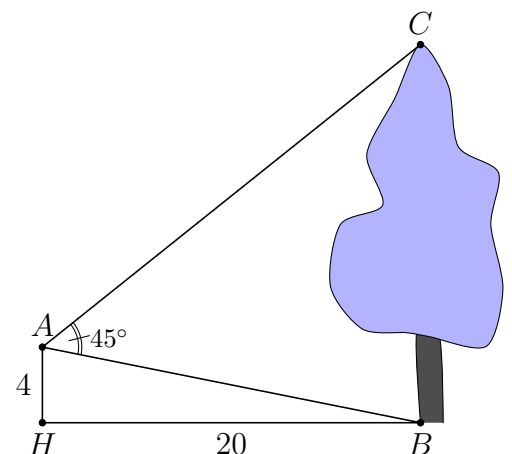
$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow AC = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{40 \cdot \sin 70^\circ}{\sin 115^\circ} \simeq 41,47 \text{ m.}$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 18.

Từ vị trí A người ta quan sát một cây cao (hình vẽ). Biết $AH = 4$ m, $HB = 20$ m, $\widehat{BAC} = 45^\circ$. Chiều cao của cây gần nhất với giá trị nào sau đây?



- A. 17,5 m.
- B. 17 m.
- C. 16,5 m.
- D. 16 m.

Lời giải.

Trong tam giác AHB , ta có $\tan \widehat{ABH} = \frac{AH}{BH} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} \Rightarrow \widehat{ABH} \simeq 11^\circ 19'$.

Suy ra $\widehat{ABC} = 90^\circ - \widehat{ABH} = 78^\circ 41'$.

Suy ra $\widehat{ACB} = 180^\circ - (\widehat{BAC} + \widehat{ABC}) = 56^\circ 19'$.

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC , ta được

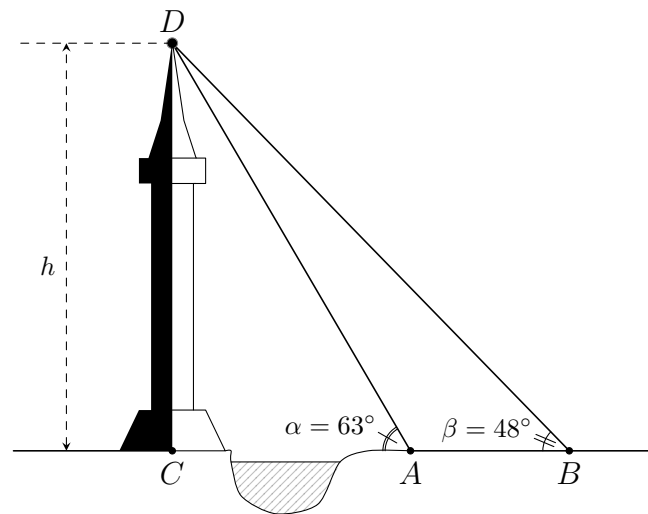
$$\frac{AB}{\sin \widehat{ACB}} = \frac{CB}{\sin \widehat{BAC}} \Rightarrow CB = \frac{AB \cdot \sin \widehat{BAC}}{\sin \widehat{ACB}} \simeq 17 \text{ m.}$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 19.

Giả sử $CD = h$ là chiều cao của tháp trong đó C là chân tháp. Chọn hai điểm A, B trên mặt đất sao cho ba điểm A, B và C thẳng hàng. Ta đo được $AB = 24$ m, $\widehat{CAD} = 63^\circ$, $\widehat{CBD} = 48^\circ$. Chiều cao h của tháp gần với giá trị nào sau đây?



- A. 18 m.
- B. 18,5 m.
- C. 60 m.
- D. 60,5 m.

Lời giải.

Ta có $\alpha = \widehat{D} + \beta$ nên $\widehat{D} = \alpha - \beta = 63^\circ - 48^\circ = 15^\circ$.

Áp dụng định lý sin vào tam giác ABD , ta có

$$\frac{AD}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin D} \Rightarrow AD = \frac{AB \cdot \sin \beta}{\sin D} = \frac{24 \cdot \sin 48^\circ}{\sin 15^\circ} \simeq 68,91 \text{ m.}$$

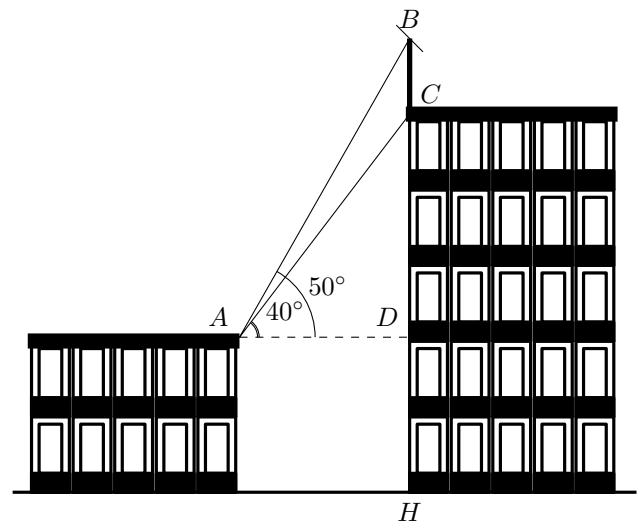
Trong tam giác vuông ACD , có $h = CD = AD \cdot \sin \alpha \simeq 61,4$ m.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 20.

Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten cao 5 m. Từ vị trí quan sát A cao 7 m so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten dưới góc 50° và 40° so với phương nằm ngang. Chiều cao của tòa nhà gần nhất với giá trị nào sau đây?



- A. 12 m.
- B. 19 m.
- C. 24 m.
- D. 29 m.

Lời giải.

Từ hình vẽ, suy ra $\widehat{BAC} = 10^\circ$ và $\widehat{ABD} = 180^\circ - (\widehat{BAD} + \widehat{ADB}) = 180^\circ - (50^\circ + 90^\circ) = 40^\circ$.

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC , ta có

$$\frac{BC}{\sin \widehat{BAC}} = \frac{AC}{\sin \widehat{ABC}} \Rightarrow AC = \frac{BC \cdot \sin \widehat{ABC}}{\sin \widehat{BAC}} = \frac{5 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 10^\circ} \simeq 18,5 \text{ m.}$$

Trong tam giác vuông ADC , ta có $\sin \widehat{CAD} = \frac{CD}{AC} \Rightarrow CD = AC \cdot \sin \widehat{CAD} = 11,9$ m.

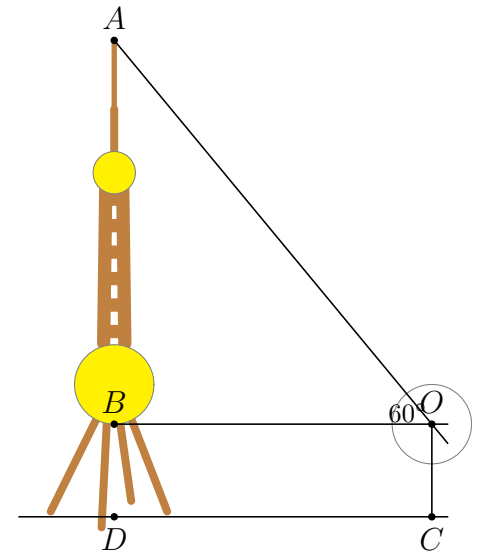
Vậy $CH = CD + DH = 11,9 + 7 = 18,9$ m.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 21.

Xác định chiều cao của một tháp mà không cần lên đỉnh của tháp. Đặt kế giác thẳng đứng cách chân tháp một khoảng $CD = 60$ m, giả sử chiều cao của giác kế là $OC = 1$ m. Quay thanh giác kế sao cho khi ngắm theo thanh ta nhìn thấy đỉnh A của tháp. Đọc trên giác kế số đo của góc $\widehat{AOB} = 60^\circ$. Chiều cao của ngọn tháp gần với giá trị nào sau đây:



- A. 40 m.
- B. 114 m.
- C. 105 m.
- D. 110 m.

Lời giải.

Tam giác OAB vuông tại B , có $\tan \widehat{AOB} = \frac{AB}{OB} \Rightarrow AB = \tan 60^\circ \cdot OB = 60\sqrt{3}$ m.

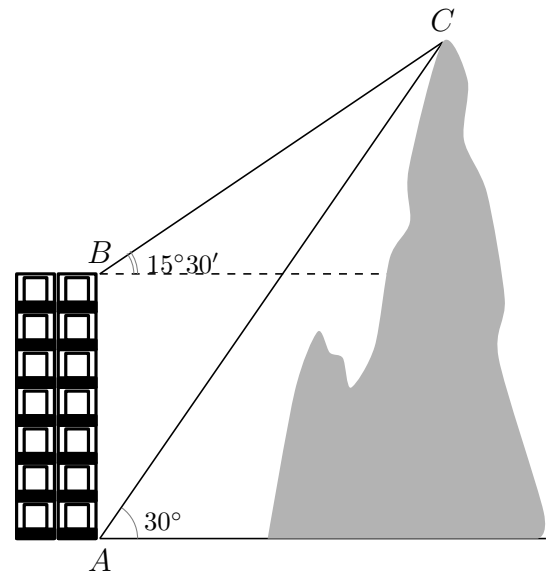
Vậy chiều cao của ngọn tháp là $h = AB + OC = (60\sqrt{3} + 1) \simeq 105$ m.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 22.

Từ hai vị trí A và B của một tòa nhà, người ta quan sát đỉnh C của ngọn núi. Biết rằng độ cao $AB = 70$ m, phương nhìn AC tạo với phương nằm ngang góc 30° , phương nhìn BC tạo với phương nằm ngang góc $15^\circ 30'$. Ngọn núi đó có độ cao so với mặt đất gần nhất với giá trị nào sau đây?



- A. 135 m.
- B. 234 m.
- C. 165 m.
- D. 195 m.

Lời giải.

Từ giả thiết, ta suy ra tam giác ABC có $\widehat{CAB} = 60^\circ$, $\widehat{ABC} = 105^\circ 30'$ và $AB = 70$.

Khi đó $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{C} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 180^\circ - 165^\circ 30' = 14^\circ 30'$.

Theo định lí sin, ta có $\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow AC = \frac{70 \cdot \sin 105^\circ 30'}{\sin 14^\circ 30'} \simeq 269,4$ m.

Gọi CH là khoảng cách từ C đến mặt đất.

Tam giác vuông ACH có cạnh CH đối diện với góc 30° nên $CH = \frac{AC}{2} = \frac{269,4}{2} = 134,7$ m.

Vậy ngọn núi cao khoảng 135 m.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 23. Tam giác ABC có $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm và $BC = 10$ cm. Độ dài đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A của tam giác bằng

A. 4 cm.

B. $\sqrt{3}$ cm.

C. 7 cm.

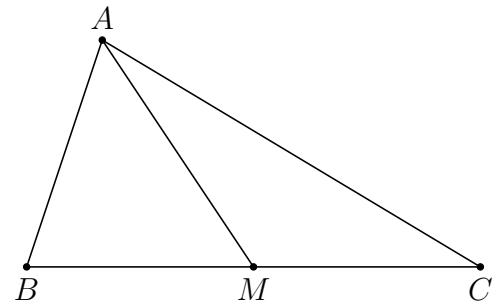
D. 5 cm.

Lời giải.

Áp dụng công thức đường trung tuyến ta có

$$\begin{aligned} m_a^2 &= \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \\ &= \frac{8^2 + 6^2}{2} - \frac{10^2}{4} \\ &= 25 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow m_a = 5.$$



Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 24. Tam giác ABC vuông tại A và có $AB = AC = a$. Tính độ dài đường trung tuyến BM của tam giác đã cho.

A. $BM = 1,5a$.

B. $BM = \sqrt{2}a$.

C. $BM = \sqrt{3}a$.

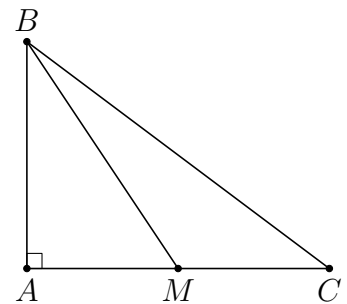
D. $BM = \frac{\sqrt{5}}{2}a$.

Lời giải.

M là trung điểm của $AC \Rightarrow AM = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2}$.

Xét tam giác BAM vuông tại A , ta có

$$BM = \sqrt{AB^2 + AM^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$



Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 25. Tam giác ABC có $AB = 9$ cm, $AC = 12$ cm và $BC = 15$ cm. Tính độ dài đường trung tuyến AM của tam giác đã cho.

A. $AM = \frac{15}{2}$ cm.

B. $AM = 10$ cm.

C. $AM = 9$ cm.

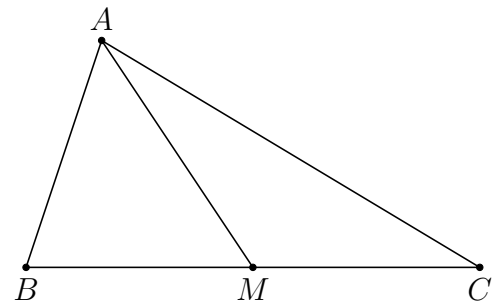
D. $AM = \frac{13}{2}$ cm.

Lời giải.

Áp dụng hệ thức đường trung tuyến. Ta có

$$\begin{aligned} m_a^2 &= \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \\ &= \frac{12^2 + 9^2}{2} - \frac{15^2}{4} \\ &= \frac{225}{4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow m_a = \frac{15}{2}.$$



Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 26. Tam giác ABC cân tại C , có $AB = 9$ cm và $AC = \frac{15}{2}$ cm. Gọi D là điểm đối xứng của B qua C . Tính độ dài cạnh AD

A. $AD = 6$ cm.

B. $AD = 9$ cm.

C. $AD = 12$ cm.

D. $AD = 12\sqrt{2}$ cm.

Lời giải.

Ta có D là điểm đối xứng của B qua C suy ra C là trung điểm của BD .

$\Rightarrow AC$ là trung tuyến của tam giác DAB .

Suy ra $BD = 2BC = 2AC = 15$.

Theo hệ thức trung tuyến ta có

$$AC^2 = \frac{AB^2 + AD^2}{2} - \frac{BD^2}{4}$$

$$\Rightarrow AD^2 = 2AC^2 + \frac{BD^2}{2} - AB^2$$

$$\Rightarrow AD^2 = 2 \cdot \left(\frac{15}{2}\right)^2 + \frac{15^2}{2} - 9^2 = 144.$$

$$\Rightarrow AD = 12.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 27. Tam giác ABC có $AB = 3$, $BC = 8$. Gọi M là trung điểm của BC . Biết $\cos \widehat{AMB} = \frac{5\sqrt{13}}{26}$ và $AM > 3$. Tính độ dài cạnh AC .

A. $AC = \sqrt{13}$.

B. $AC = \sqrt{7}$.

C. $AC = 13$.

D. $AC = 7$.

Lời giải.

Ta có M là trung điểm của $BC \Rightarrow BM = \frac{BC}{2} = 4$

Trong tam giác ABM ta có

$$\cos \widehat{AMB} = \frac{AM^2 + BM^2 - AB^2}{2AM \cdot BM}$$

$$\Leftrightarrow AM^2 - 2AM \cdot BM \cdot \cos \widehat{AMB} + BM^2 - AB^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow AM^2 - \frac{20\sqrt{13}}{13}AM + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AM = \sqrt{13} > 3 \text{ (thỏa mãn)} \\ AM = \frac{7\sqrt{13}}{13} < 3 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{13}.$$

Ta có $\widehat{AMB}$ và $\widehat{AMC}$ là hai góc kề bù nên $\cos \widehat{AMC} = -\cos \widehat{AMB} = -\frac{5\sqrt{13}}{26}$.

Trong tam giác AMC ta có

$$AC^2 = AM^2 + CM^2 - 2AM \cdot CM \cdot \cos \widehat{AMC} = 13 + 16 - 2 \cdot \sqrt{13} \cdot 4 \cdot \left(-\frac{5\sqrt{13}}{26}\right) = 49.$$

$$\Rightarrow AC = 7.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 28. Tam giác ABC có trọng tâm G . Hai trung tuyến $BM = 6$, $CN = 9$ và $\widehat{BGC} = 120^\circ$. Tính độ dài cạnh AB .

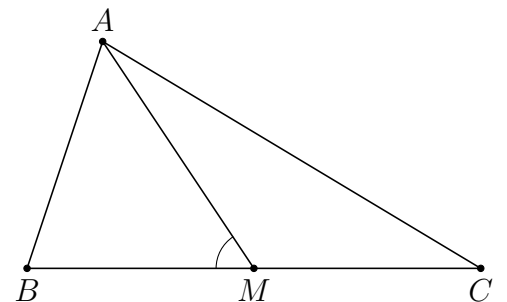
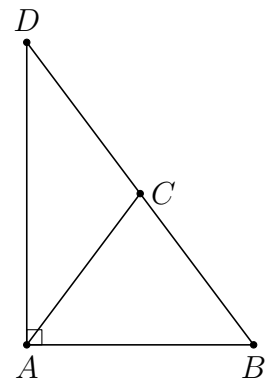
A. $AB = \sqrt{11}$.

B. $AB = \sqrt{13}$.

C. $AB = 2\sqrt{11}$.

D. $AB = 2\sqrt{13}$.

Lời giải.



Ta có

$$\widehat{BGN} = 180^\circ - \widehat{BGC} = 60^\circ.$$

$$\text{Do } G \text{ là trọng tâm của tam giác } ABC \text{ nên } \begin{cases} BG = \frac{2}{3}BM = 4 \\ GN = \frac{1}{3}CN = 3. \end{cases}$$

Trong tam giác BGN ta có

$$\begin{aligned} BN^2 &= GN^2 + BG^2 - 2GN \cdot BG \cdot \cos \widehat{BGN} \\ &= 9 + 16 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 13. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow BN = \sqrt{13}.$$

$$N \text{ là trung điểm của } AB \Rightarrow AB = 2BN = 2\sqrt{13}.$$

Chọn đáp án (D)

□

Câu 29. Tam giác ABC có độ dài ba trung tuyến lần lượt là 9, 12, 15. Diện tích của tam giác ABC bằng

A. 24.

B. $24\sqrt{2}$.

C. 72.

D. $72\sqrt{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = 81 \\ m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} = 144 \\ m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} = 225 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 292 \\ b^2 = 208 \\ c^2 = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2\sqrt{73} \\ b = 4\sqrt{13} \\ c = 10. \end{cases}$$

$$p = \frac{a + b + c}{2} = 5 + \sqrt{73} + 2\sqrt{13}.$$

$$\text{Diện tích tam giác } ABC \text{ là } S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 72.$$

Chọn đáp án (C)

□

Câu 30. Cho tam giác ABC có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Nếu giữa a, b, c có liên hệ $b^2 + c^2 = 2a^2$ thì độ dài đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A của tam giác tính theo a bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

C. $2a\sqrt{3}$.

D. $3a\sqrt{3}$.

Lời giải.

Hệ thức trung tuyến xuất phát từ đỉnh A của tam giác

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{2a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow m_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Chọn đáp án (A)

□

Câu 31. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = a$, $BC = b$, $BD = m$ và $AC = n$. Trong các biểu thức sau, biểu thức nào đúng?

A. $m^2 + m^2 = 3(a^2 + b^2)$.

B. $m^2 + m^2 = 2(a^2 + b^2)$.

C. $2(m^2 + m^2) = a^2 + b^2$.

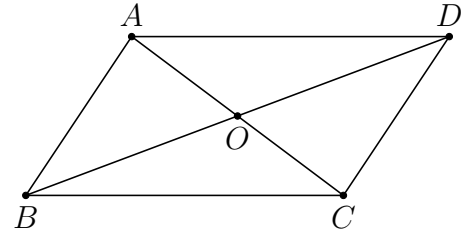
D. $3(m^2 + m^2) = a^2 + b^2$.

Lời giải.

Gọi O là giao điểm của AC và BD ta có $BO = \frac{1}{2}BD = \frac{m}{2}$.

Do BO là trung tuyến của tam giác ABC nên

$$\begin{aligned} BO^2 &= \frac{BA^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{m^2}{4} &= \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{n^2}{4} \\ \Leftrightarrow m^2 + n^2 &= 2(a^2 + b^2). \end{aligned}$$



Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 32. Tam giác ABC có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Các cạnh a , b , c liên hệ với nhau bởi đẳng thức $a^2 + b^2 = 5c^2$. Góc giữa hai trung tuyến AM và BN bằng

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Ta có

$$\begin{aligned} AM^2 &= \frac{AC^2 + AB^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \Rightarrow AG^2 = \frac{4}{9}AM^2 = \frac{2(b^2 + c^2)}{9} - \frac{a^2}{9}. \\ BN^2 &= \frac{BA^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} = \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4} \Rightarrow GN^2 = \frac{1}{9}BN^2 = \frac{c^2 + a^2}{18} - \frac{b^2}{36}. \end{aligned}$$

Trong tam giác AGN ta có

$$\begin{aligned} \cos \widehat{AGN} &= \frac{AG^2 + GN^2 - AN^2}{2 \cdot AG \cdot GN} = \frac{\frac{2(b^2 + c^2)}{9} - \frac{a^2}{9} + \frac{c^2 + a^2}{18} - \frac{b^2}{36} - \frac{b^2}{4}}{2 \cdot \sqrt{\frac{2(b^2 + c^2)}{9} - \frac{a^2}{9}} \cdot \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{18} - \frac{b^2}{36}}} \\ &= \frac{\frac{2(b^2 + c^2)}{9} - \frac{a^2}{9} + \frac{c^2 + a^2}{18} - \frac{b^2}{36} - \frac{b^2}{4}}{2 \cdot \sqrt{\frac{2(b^2 + c^2)}{9} - \frac{a^2}{9}} \cdot \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{18} - \frac{b^2}{36}}} = \frac{10c^2 - 2(a^2 + b^2)}{36 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{2(b^2 + c^2)}{9} - \frac{a^2}{9}} \cdot \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{18} - \frac{b^2}{36}}} = 0. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \widehat{AGN} = 90^\circ.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 33. Tam giác ABC có ba đường trung tuyến m_a , m_b , m_c thỏa mãn $5m_a^2 = m_b^2 + m_c^2$. Khi đó tam giác này là tam giác gì?

- A. Tam giác cân. B. Tam giác đều.
C. Tam giác vuông. D. Tam giác vuông cân.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 5m_a^2 &= m_b^2 + m_c^2 \\ \Leftrightarrow 5 \left(\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right) &= \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} + \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} \\ \Leftrightarrow 10b^2 + 10c^2 - 5a^2 &= 2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2 \\ \Leftrightarrow b^2 + c^2 &= a^2. \end{aligned}$$

Suy ra tam giác ABC vuông.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 34. Tam giác ABC có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Gọi m_a , m_b , m_c là độ dài ba đường trung tuyến, G trọng tâm. Xét các khẳng định sau:

$$\text{I. } m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2). \quad \text{II. } GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Trong các khẳng định đã cho có

- A. Chỉ (I) đúng. B. Chỉ (II) đúng. C. Cả hai cùng sai. D. Cả hai cùng đúng.

Lời giải.

Ta có

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2 + 2(a^2 + c^2) - b^2 + 2(a^2 + b^2) - c^2}{4} = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{4}{9}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 35. Tam giác ABC có $BC = 10$ và $\hat{A} = 30^\circ$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- A. $R = 5$. B. $R = 10$. C. $R = \frac{10}{\sqrt{3}}$. D. $R = 10\sqrt{3}$.

Lời giải.

Áp dụng định lý sin, ta có $\frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{BC}{2} \cdot \sin A = \frac{10}{2} \cdot \sin 30^\circ = 10$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 36. Tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 6$ và $\hat{A} = 60^\circ$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- A. $R = 3$. B. $R = 3\sqrt{3}$. C. $R = \sqrt{3}$. D. $R = 6$.

Lời giải.

Áp dụng định lý cô-sin, ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = 3^2 + 6^2 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ = 27.$$

Ta có $BC^2 + AB^2 = AC^2$. Suy ra tam giác ABC vuông tại B .

$$\text{Suy ra bán kính } R = \frac{AC}{2} = 3.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 37. Tam giác ABC có $BC = 21$ cm, $CA = 17$ cm, $AB = 10$ cm. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- A. $R = \frac{85}{2}$ cm. B. $R = \frac{7}{4}$ cm. C. $R = \frac{85}{8}$ cm. D. $R = \frac{7}{2}$ cm.

Lời giải.

Đặt $p = \frac{AB + BC + CA}{2} = 24$. Áp dụng công thức Hê – rông, ta có

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p - AB)(p - BC)(p - CA)} = \sqrt{24 \cdot (24 - 21) \cdot (24 - 17) \cdot (24 - 10)} = 84 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Vậy bán kính cần tìm là } R = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4 \cdot S_{\Delta ABC}} = \frac{21 \cdot 17 \cdot 10}{4 \cdot 84} = \frac{85}{8} \text{ cm}.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 38. Tam giác đều cạnh a nội tiếp trong đường tròn bán kính R . Khi đó bán kính R bằng

- A. $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $R = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. C. $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $R = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.

Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.

Vậy bán kính cần tính là $R = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4 \cdot S_{\Delta ABC}} = \frac{a^3}{4 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 39. Tam giác ABC vuông tại A có đường cao $AH = \frac{12}{5}$ cm và $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- A. $R = 2,5$ cm. B. $R = 1,7$ cm. C. $R = 2$ cm. D. $R = 3,5$ cm.

Lời giải.

Tam giác ABC vuông tại A , có đường cao $AH \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$. (*)

Mặt khác $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow AB = \frac{3}{4}AC$ thế vào (*), ta được

$$\frac{16}{9AC^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{25}{144} \Leftrightarrow \frac{25}{9AC^2} = \frac{25}{144} \Leftrightarrow AC = 4.$$

Suy ra $AB = \frac{3}{4} \cdot 4 = 3 \Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 5$.

Vậy bán kính cần tìm là $R = \frac{BC}{2} = \frac{5}{2}$ cm.

Chọn đáp án **A** □

Câu 40. Cho tam giác ABC có $AB = 3\sqrt{3}$, $BC = 6\sqrt{3}$ và $CA = 9$. Gọi D là trung điểm BC . Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD .

- A. $R = \frac{9}{6}$. B. $R = 3$. C. $R = 3\sqrt{3}$. D. $R = \frac{9}{2}$.

Lời giải.

Vì D là trung điểm của $BC \Rightarrow AD^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = 27 \Rightarrow AD = 3\sqrt{3}$.

Tam giác ABD có $AB = BD = DA = 3\sqrt{3} \Rightarrow$ tam giác ABD đều.

Suy ra bán kính đường tròn ngoại tiếp là $R = \frac{\sqrt{3}}{3}AB = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 3$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 41. Tam giác nhọn ABC có $AC = b$, $BC = a$, BB' là đường cao kẻ từ B và $\widehat{CBB'} = \alpha$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp R của tam giác ABC được tính theo a , b và α là

- A. $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}}{2 \sin \alpha}$. B. $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}}{2 \sin \alpha}$.
C. $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \sin \alpha}}{2 \cos \alpha}$. D. $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \sin \alpha}}{2 \cos \alpha}$.

Lời giải.

Xét tam giác $BB'C$ vuông tại B' , có

$$\sin \widehat{CBB'} = \frac{B'C}{BC} \Rightarrow B'C = a \cdot \sin \alpha.$$

Mà $AB' + B'C = AC \Leftrightarrow AB' = b - a \cdot \sin \alpha$ và $BB'^2 = a^2 \cdot \cos^2 \alpha$.

Tam giác ABB' vuông tại B' , có

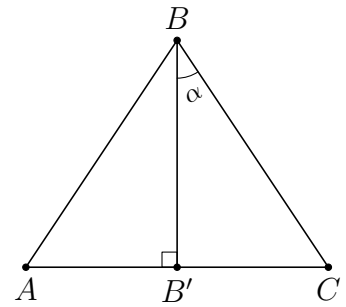
$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{BB'^2 + AB'^2} \\ &= \sqrt{(b - a \cdot \sin \alpha)^2 + a^2 \cdot \cos^2 \alpha} \\ &= \sqrt{b^2 - 2ab \cdot \sin \alpha + a^2 \sin^2 \alpha + a^2 \cos^2 \alpha} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \sin \alpha}. \end{aligned}$$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp cần tính là

$$R = \frac{AB}{2 \sin \widehat{ACB}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \sin \alpha}}{2 \cos \alpha}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□



Câu 42. Tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 6$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC .

- A. $S_{\Delta ABC} = 9\sqrt{3}$. B. $S_{\Delta ABC} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$. C. $S_{\Delta ABC} = 9$. D. $S_{\Delta ABC} = \frac{9}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 43. Tam giác ABC có $AC = 4$, $\widehat{BAC} = 30^\circ$, $\widehat{ACB} = 75^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC .

- A. $S_{\Delta ABC} = 8$. B. $S_{\Delta ABC} = 4\sqrt{3}$. C. $S_{\Delta ABC} = 4$. D. $S_{\Delta ABC} = 8\sqrt{3}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \widehat{ABC} = 180^\circ - (\widehat{BAC} + \widehat{ACB}) = 75^\circ = \widehat{ACB}.$$

Suy ra tam giác ABC cân tại A nên $AB = AC = 4$.

$$\text{Diện tích tam giác } ABC \text{ là } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \widehat{BAC} = 4.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 44. Tam giác ABC có $a = 21$, $b = 17$, $c = 10$. Diện tích của tam giác ABC bằng

- A. $S_{\Delta ABC} = 16$. B. $S_{\Delta ABC} = 48$. C. $S_{\Delta ABC} = 24$. D. $S_{\Delta ABC} = 84$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } p = \frac{21 + 17 + 10}{2} = 24.$$

$$\text{Do đó } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{24(24-21)(24-17)(24-10)} = 84.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 45. Tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 6$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính độ dài đường cao h_a của tam giác.

- A. $h_a = 3\sqrt{3}$. B. $h_a = \sqrt{3}$. C. $h_a = 3$. D. $h_a = \frac{3}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Áp dụng định lý hàm số cô-sin, ta có } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A = 27 \Rightarrow BC = 3\sqrt{3}.$$

$$\text{Ta có } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Lại có } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{BC} = 3.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 46. Tam giác ABC có $AC = 4$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Tính độ dài đường cao h xuất phát từ đỉnh A của tam giác.

- A. $h = 2\sqrt{3}$. B. $h = 4\sqrt{3}$. C. $h = 2$. D. $h = 4$.

Lời giải.

Gọi H là chân đường cao xuất phát từ đỉnh A .

Tam giác vuông AHC , có $\sin \widehat{ACH} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AH = AC \cdot \sin \widehat{ACH} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 47. Tam giác ABC có $a = 21$, $b = 17$, $c = 10$. Gọi B' là hình chiếu vuông góc của B trên cạnh AC . Tính BB' .

- A. $BB' = 8$. B. $BB' = \frac{84}{5}$. C. $BB' = \frac{168}{17}$. D. $BB' = \frac{84}{17}$.

Lời giải.

Ta có $p = \frac{21 + 17 + 10}{2} = 24$.

Suy ra $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{24(24-21)(24-17)(24-10)} = 84$.

Lại có $S = \frac{1}{2}b \cdot BB' \Leftrightarrow 84 = \frac{1}{2} \cdot 17 \cdot BB' \Rightarrow BB' = \frac{168}{17}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 48. Tam giác ABC có $AB = 8$ cm, $AC = 18$ cm và có diện tích bằng 64 cm². Tính $\sin A$.

- A. $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\sin A = \frac{3}{8}$. C. $\sin A = \frac{4}{5}$. D. $\sin A = \frac{8}{9}$.

Lời giải.

Ta có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} \Leftrightarrow 64 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 18 \cdot \sin A \Leftrightarrow \sin A = \frac{8}{9}$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 49. Hình bình hành $ABCD$ có $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$ và $\widehat{BAD} = 45^\circ$. Khi đó hình bình hành có diện tích bằng

- A. $2a^2$. B. $a^2\sqrt{2}$. C. a^2 . D. $a^2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Diện tích tam giác ABD là $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ = \frac{a^2}{2}$.

Vậy diện tích hình bình hành $ABCD$ là $S_{ABDD} = 2 \cdot S_{\triangle ABD} = 2 \cdot \frac{a^2}{2} = a^2$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 50. Tam giác ABC vuông tại A có $AB = AC = 30$ cm. Hai đường trung tuyến BF và CE cắt nhau tại G . Diện tích tam giác GFC bằng

- A. 50 cm². B. $50\sqrt{2}$ cm². C. 75 cm². D. $15\sqrt{105}$ cm².

Lời giải.

Vì F là trung điểm của $AC \Rightarrow FC = \frac{1}{2}AC = 15$ cm.

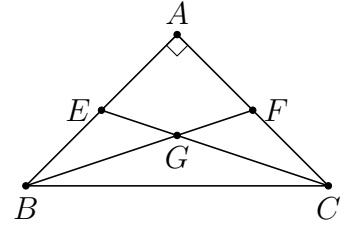
Do G là trọng tâm tam giác ABC nên $\frac{d(B; (AC))}{d(G; (AC))} = \frac{BF}{GF} = 3$.

$\Rightarrow d(G; (AC)) = \frac{1}{3}d(B; (AC)) = \frac{AB}{3} = 10$ cm.

Vậy diện tích tam giác GFC là

$$S_{\Delta GFC} = \frac{1}{2} \cdot d(G; (AC)) \cdot FC = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 15 = 75 \text{ cm}^2.$$

Chọn đáp án **C**



□

Câu 51. Tam giác đều nội tiếp đường tròn bán kính $R = 4$ cm có diện tích bằng

- A. 13 cm^2 . B. $13\sqrt{2} \text{ cm}^2$. C. $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$. D. 15 cm^2 .

Lời giải.

Xét tam giác ABC đều, có độ dài cạnh bằng a .

Theo định lý sin, ta có $\frac{BC}{\sin \widehat{BAC}} = 2R \Leftrightarrow \frac{a}{\sin 60^\circ} = 2 \cdot 4 \Leftrightarrow a = 8 \cdot \sin 60^\circ = 4\sqrt{3}$.

Vậy diện tích cần tính là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \cdot (4\sqrt{3})^2 \cdot \sin 60^\circ = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 52. Tam giác ABC có $BC = 2\sqrt{3}$, $AC = 2AB$ và độ dài đường cao $AH = 2$. Tính độ dài cạnh AB .

- A. $AB = 2$. B. $AB = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.
C. $AB = 2$ hoặc $AB = \frac{2\sqrt{21}}{3}$. D. $AB = 2$ hoặc $AB = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $S = \frac{1}{2}BC \cdot AH = 2\sqrt{3}$, $p = \frac{AB + BC + CA}{2} = \frac{2\sqrt{3} + 3AB}{2}$.

Suy ra

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{\left(\frac{3AB + 2\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{3AB - 2\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{2\sqrt{3} - AB}{2}\right) \left(\frac{2\sqrt{3} + AB}{2}\right)} \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{3} &= \sqrt{\left(\frac{3AB + 2\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{3AB - 2\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{2\sqrt{3} - AB}{2}\right) \left(\frac{2\sqrt{3} + AB}{2}\right)} \\ \Leftrightarrow 12 &= \frac{(9AB^2 - 12)(12 - AB^2)}{16} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} AB = 2 \\ AB = \frac{2\sqrt{21}}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 53. Tam giác ABC có $BC = a$ và $CA = b$. Tam giác ABC có diện tích lớn nhất khi góc C bằng

- A. 60° . B. 90° . C. 150° . D. 120° .

Lời giải.

Diện tích tam giác ABC là

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot \sin \widehat{ACB} = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \sin \widehat{ACB} \leq \frac{ab}{2} \text{ do } 0 < \sin \widehat{ACB} \leq 1.$$

$$\text{Suy ra } \max S_{\Delta ABC} = \frac{ab}{2} \text{ khi } \sin \widehat{ACB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{ACB} = 90^\circ.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 54. Tam giác ABC có hai đường trung tuyến BM , CN vuông góc với nhau và có $BC = 3$, góc $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC .

A. $S_{\Delta ABC} = 3\sqrt{3}$. B. $S_{\Delta ABC} = 6\sqrt{3}$. C. $S_{\Delta ABC} = 9\sqrt{3}$. D. $S_{\Delta ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Vì $BM \perp CN \Rightarrow 5a^2 = b^2 + c^2$ (Áp dụng hệ quả đã có trước).

$$\text{Trong tam giác } ABC, \text{ ta có } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A = 5a^2 - 2bc \cos A \Rightarrow bc = \frac{2a^2}{\cos A}.$$

$$\text{Khi đó } S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a^2}{\cos A} \cdot \sin A = a^2 \tan A = 3\sqrt{3}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 55. Tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 8$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

A. $r = 1$. B. $r = 2$. C. $r = \sqrt{3}$. D. $r = 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Áp dụng định lý hàm số cô-sin, ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A = 49 \Rightarrow BC = 7$.

$$\text{Diện tích } S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}.$$

$$\text{Lại có } S = p \cdot r \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{2S}{AB + BC + CA} = \sqrt{3}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 56. Tam giác ABC có $a = 21$, $b = 17$, $c = 10$. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

A. $r = 16$. B. $r = 7$. C. $r = \frac{7}{2}$. D. $r = 8$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } p = \frac{21 + 17 + 10}{2} = 24.$$

$$\text{Suy ra } S = \sqrt{24(24-21)(24-17)(24-10)} = 84.$$

$$\text{Lại có } S = p \cdot r \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{84}{24} = \frac{7}{2}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 57. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đều cạnh a .

A. $r = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $r = \frac{a\sqrt{2}}{5}$. C. $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. D. $r = \frac{a\sqrt{5}}{7}$.

Lời giải.

$$\text{Diện tích tam giác đều cạnh } a \text{ bằng } S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Lại có } S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{3a}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 58. Tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6$ cm, $BC = 10$ cm. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho.

- A. $r = 1$ cm. B. $r = \sqrt{2}$ cm. C. $r = 2$ cm. D. $r = 3$ cm.

Lời giải.

Dùng Pitago tính được $AC = 8$, suy ra $p = \frac{AB + BC + CA}{2} = 12$.

Diện tích tam giác vuông $S = \frac{1}{2}AB \cdot AC = 24$.

Lại có $S = p \cdot r \Rightarrow r = \frac{S}{p} = 2$ cm.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 59. Cho $\triangle ABC$ với các cạnh $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Gọi R , r , S lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và diện tích của tam giác ABC . Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

- A. $S = \frac{abc}{4R}$. B. $R = \frac{a}{\sin A}$.
C. $S = \frac{1}{2}ab \sin C$. D. $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos C$.

Lời giải.

Theo định lí Sin trong tam giác, ta có $\frac{a}{\sin A} = 2R$.

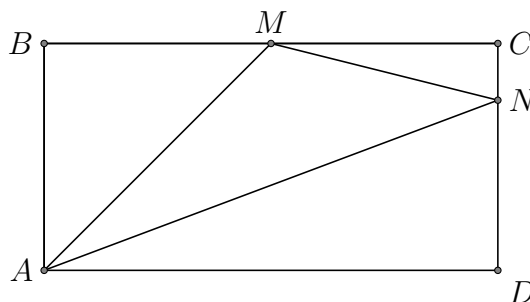
Chọn đáp án **B**

□

Câu 60. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB = 4$, $BC = 6$, M là trung điểm của BC , N là điểm trên cạnh CD sao cho $ND = 3NC$. Khi đó bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN bằng

- A. $3\sqrt{5}$. B. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$. C. $5\sqrt{2}$. D. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.



Ta có $MN = \sqrt{MC^2 + NC^2} = \sqrt{10}$; $AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = 5$; $AN = \sqrt{AD^2 + DN^2} = \sqrt{45}$.

Do đó

$$p = \frac{AM + AN + MN}{2} = \frac{\sqrt{10} + 5 + \sqrt{45}}{2}$$

và

$$S_{AMN} = \sqrt{p(p - AM)(p - AN)(p - MN)} = \frac{15}{2}.$$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN là

$$R = \frac{AM \cdot AN \cdot MN}{4S_{AMN}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 61. Cho $\triangle ABC$ với các cạnh $AB = c, AC = b, BC = a$. Gọi R, r, S lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và diện tích của tam giác ABC . Trong các phát biểu sau, phát biểu nào sai?

- A. $S = \frac{abc}{4R}$. B. $R = \frac{a}{\sin A}$.
C. $S = \frac{1}{2}ab \sin C$. D. $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos C$.

Lời giải.

Theo định lý sin trong tam giác, ta có $\frac{a}{\sin A} = 2R$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 62. Cho hình chữ nhật $ABCD$, có $AB = 4, BC = 6$, M là trung điểm của BC , N là điểm trên cạnh CD sao cho $ND = 3NC$. Khi đó bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN bằng

- A. $3\sqrt{5}$. B. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$. C. $5\sqrt{2}$. D. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

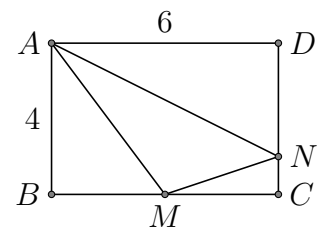
Ta có $AM = 5, MN = \sqrt{10}, AN = 3\sqrt{5}$.

$$\begin{aligned} S_{AMN} &= S_{ABCD} - S_{ABM} - S_{ADN} - S_{MCN} \\ &= 24 - 6 - 9 - \frac{3}{2} = \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

Do đó bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN bằng

$$R = \frac{5 \cdot \sqrt{10} \cdot 3\sqrt{5}}{4S_{AMN}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Chọn đáp án (D) □



Câu 63. Cho tam giác ABC có $AB = 6, AC = 8, \widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC .

- A. $48\sqrt{3}$. B. $12\sqrt{3}$. C. $24\sqrt{3}$. D. $4\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = 12\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 64. Cho $\triangle ABC$ với các cạnh $AB = c, AC = b, BC = a$. Gọi R, r, S lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và diện tích của tam giác ABC . Trong các phát biểu sau, phát biểu nào sai?

- A. $S = \frac{abc}{4R}$. B. $R = \frac{a}{\sin A}$.
C. $S = \frac{1}{2}ab \sin C$. D. $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos C$.

Lời giải.

Theo định lý Sin trong tam giác, ta có $\frac{a}{\sin A} = 2R$. Nên mệnh đề **sai** là " $R = \frac{a}{\sin A}$ ".

Chọn đáp án (B) □

Câu 65. Cho tam giác ABC có $AB = 2a$, $AC = 4a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC .

- A. $S = 8a^2$. B. $S = 2a^2\sqrt{3}$. C. $S = a^2\sqrt{3}$. D. $S = 4a^2$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 4a \cdot \sin 120^\circ = 2a^2\sqrt{3}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 66. Cho $\triangle ABC$ có $S = 84$, $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$. Độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp R của tam giác trên là

- A. 8, 125. B. 130. C. 8. D. 8, 5.

Lời giải.

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} = 8, 125.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 67. Cho $\triangle ABC$ có $a = 6$, $b = 8$, $c = 10$. Diện tích S của tam giác ABC là

- A. 48. B. 24. C. 12. D. 30.

Lời giải.

$$\text{Ta có } p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{6+8+10}{2} = 12.$$

$$\text{Suy ra } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{12(12-6)(12-8)(12-10)} = 24.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 68. Cho $\triangle ABC$ có $S = 10\sqrt{3}$, nửa chu vi $p = 10$. Độ dài bán kính đường tròn nội tiếp r của tam giác trên là

- A. 3. B. 2. C. $\sqrt{2}$. D. $\sqrt{3}$.

Lời giải.

$$\text{Bán kính đường tròn nội tiếp là } r = \frac{S}{p} = \frac{10\sqrt{3}}{10} = \sqrt{3}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 69. Cho tam giác ABC , chọn công thức đúng trong các đáp án sau.

- A. $m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} + \frac{a^2}{4}$. B. $m_a^2 = \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$.
C. $m_a^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$. D. $m_a^2 = \frac{2c^2+2b^2-a^2}{4}$.

Lời giải.

$$\text{Công thức đúng là } m_a^2 = \frac{2c^2+2b^2-a^2}{4}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 70. Gọi $S = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$ là tổng bình phương độ dài ba trung tuyến của tam giác ABC . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $S = \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$. B. $S = a^2+b^2+c^2$.
C. $S = \frac{3}{2}(a^2+b^2+c^2)$. D. $S = 3(a^2+b^2+c^2)$.

Lời giải.

$$S = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4} + \frac{2a^2+2c^2-b^2}{4} + \frac{2a^2+2b^2-c^2}{4} = \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2).$$

Chọn đáp án (A) □

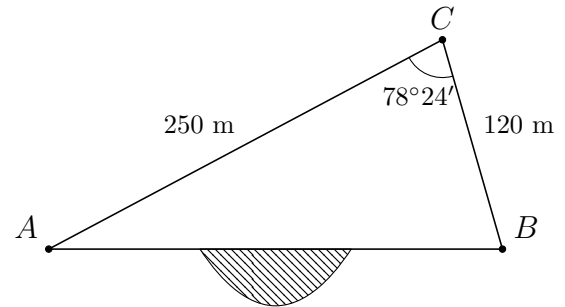
Câu 71. Khoảng cách từ A đến B không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm C mà từ đó có thể nhìn được A và B dưới một góc $78^\circ 24'$. Biết $CA = 250$ m, $CB = 120$ m. Khoảng cách AB bằng bao nhiêu?

- A. 266 m. B. 255 m. C. 166 m. D. 298 m.

Lời giải.

Áp dụng định lí cô-sin cho $\triangle ABC$, ta có

$$\begin{aligned} AB^2 &= CA^2 + CB^2 - 2CA \cdot CB \cdot \cos C \\ &= 250^2 + 120^2 - 2 \cdot 250 \cdot 120 \cdot \cos 78^\circ 24'. \\ &\approx 64835 \\ \Rightarrow AB &\approx 255 \text{ (m)}. \end{aligned}$$



Chọn đáp án **(B)**

□

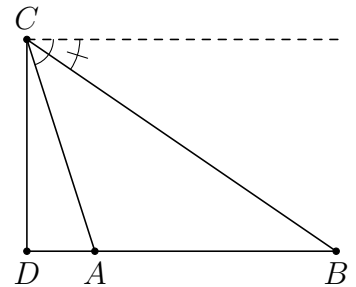
Câu 72. Từ một đỉnh tháp chiều cao $CD = 80$ m, người ta nhìn hai điểm A và B trên mặt đất dưới các góc nhìn là $72^\circ 12'$ và $34^\circ 26'$. Ba điểm A, B, D thẳng hàng. Tính khoảng cách AB .

- A. 71 m. B. 91 m. C. 79 m. D. 40 m.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} AB &= DB - DA \\ &= CD \cdot \tan(90^\circ - 34^\circ 26') - CD \cdot \tan(90^\circ - 72^\circ 12') \\ &= 80(\tan 55^\circ 34' - \tan 17^\circ 48') \\ &\approx 91 \text{ (m)}. \end{aligned}$$



Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 73. Cho tam giác ABC có $b = 7$, $c = 5$, $\cos A = \frac{3}{5}$. Đường cao h_a của tam giác ABC là

- A. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$. B. 8. C. $8\sqrt{3}$. D. $80\sqrt{3}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5} = 32 \Rightarrow a = 4\sqrt{2}.$$

$$\text{Vì } \cos A = \frac{3}{5} \text{ nên } \sin A = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Lại có } \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ah_a \Rightarrow h_a = \frac{bc \sin A}{a} = \frac{7 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5}}{4\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 74. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức $b + c = 2a$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $\cos B + \cos C = 2 \cos A$. B. $\sin B + \sin C = 2 \sin A$.
C. $\sin B + \sin C = \frac{1}{2} \sin A$. D. $\sin B + \cos C = 2 \sin A$.

Lời giải.

$$b + c = 2a \Leftrightarrow 2R \sin B + 2R \sin C = 4R \sin A \Leftrightarrow \sin B + \sin C = 2 \sin A.$$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 75. Cho $\triangle ABC$ với các cạnh $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Gọi R , r , S lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và diện tích của tam giác ABC . Trong các phát biểu sau, phát biểu nào sai?

A. $S = \frac{abc}{4R}$.

B. $R = \frac{a}{\sin A}$.

C. $S = \frac{1}{2}ab \sin C$.

D. $a^2 + b^2 - c^2 = 2ac \cos C$.

Lời giải.

Theo định lý sin trong tam giác, ta có $\frac{a}{\sin A} = 2R$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 76. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB = 4$, $BC = 6$, M là trung điểm của BC , N là điểm trên cạnh CD sao cho $ND = 3NC$. Khi đó bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN bằng

A. $3\sqrt{5}$.

B. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

C. $5\sqrt{2}$.

D. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có:

$$MC = 3, NC = 1 \Rightarrow MN = \sqrt{10}, BM = 3, AB = 4 \Rightarrow AM = 5,$$

$$AD = 6, ND = 3 \Rightarrow AN = \sqrt{45},$$

$$p = \frac{AM + AN + MN}{2} = \frac{\sqrt{10} + 5 + \sqrt{45}}{2},$$

$$S_{AMN} = \sqrt{p(p-AM)(p-AN)(p-MN)} = \frac{15}{2}$$

Bán kính của đường tròn ngoại tiếp của tam giác AMN là:

$$R = \frac{AM \cdot AN \cdot MN}{4S_{AMN}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Chọn đáp án (D)

□

Câu 77. Tam giác ABC có $\widehat{C} = 150^\circ$, $BC = \sqrt{3}$, $AC = 2$. Tính cạnh AB .

A. $\sqrt{13}$.

B. $\sqrt{3}$.

C. 10.

D. 1.

Lời giải.

Theo định lý cosin trong $\triangle ABC$ ta có

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA \cdot CB \cdot \cos \widehat{C} = 13 \Rightarrow AB = \sqrt{13}.$$

Chọn đáp án (A)

□

Câu 78.

Cho hai vị trí A, B cách nhau 615 m, cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ. Khoảng cách từ A và từ B đến bờ sông lần lượt là 118 m và 487 m. Một người đi từ A đến bờ sông lấy nước mang về B . Tính đoạn đường ngắn nhất mà người ấy có thể đi.

- A. 779,8 m. B. 671,4 m. C. 741,2 m. D. 596,5 m.

Lời giải.

Gọi H, K là hình chiếu của A, B trên bờ sông, lấy A' đối xứng với A qua bờ HK . Nối $A'B$ cắt bờ HK tại M . Suy ra $AM = A'M$.

Ta có $AM + MB = A'M + MB \geq A'B$ nên quãng đường ngắn nhất người đó đi là $AM + MB = A'B$.

Kẻ $AC \perp BK$ tại $C \Rightarrow AHKC$ là hình chữ nhật có $CK = AH = 118$ m.

Suy ra $CB = BK - CK = 487 - 118 = 369$ m.

Tam giác CAB vuông tại $C \Rightarrow AC = HK = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 492$ m.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } HA' \parallel BK &\Rightarrow \frac{HM}{MK} = \frac{A'M}{MB} = \frac{A'H}{BK} = \frac{118}{487} \\ \Rightarrow \frac{HM}{MK} = \frac{118}{487} &\Rightarrow \frac{HM}{HM + MK} = \frac{118}{118 + 487} = \frac{118}{605} \Leftrightarrow \frac{HM}{HK} = \frac{118}{605} \\ \Leftrightarrow \frac{HM}{492} = \frac{118}{605} &\Rightarrow HM = \frac{58056}{605}. \end{aligned}$$

Xét tam giác HMA' có $MA' = \sqrt{HM^2 + HA'^2} = \sqrt{\left(\frac{58056}{605}\right)^2 + 118^2} \approx 152,093$.

$$\text{Từ đó } \frac{A'M}{MB} = \frac{118}{487} \Rightarrow \frac{A'M}{A'M + MB} = \frac{118}{118 + 487} \Leftrightarrow \frac{A'M}{A'B} = \frac{118}{605} \Leftrightarrow A'B = \frac{A'M \cdot 605}{118} \approx 779,8 \text{ m.}$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 79. Tam giác ABC có $AB = 9$ cm, $AC = 12$ cm và $BC = 15$ cm. Khi đó đường trung tuyến AM của tam giác có độ dài là:

- A. 8 cm. B. 10 cm. C. 9 cm. D. 7,5 cm.

Lời giải.

$$\text{Cách 1: Ta có } AM = \sqrt{\frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}} = \sqrt{\frac{9^2 + 12^2}{2} - \frac{15^2}{4}} = 7,5.$$

$$\text{Cách 2: Tam giác } ABC \text{ vuông tại } A \text{ nên } AM = \frac{BC}{2} = 7,5.$$

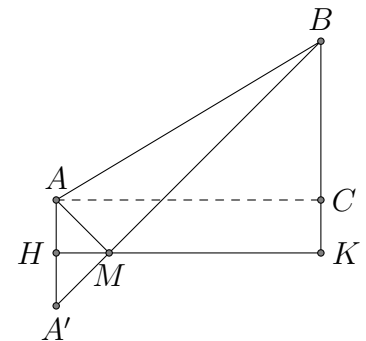
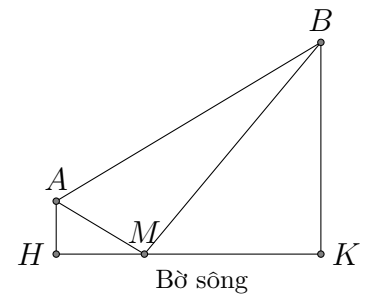
Chọn đáp án **D**

□

Câu 80. Cho tam giác ABC vuông tại A , có đường cao AH . Biết $BH = 25$ cm và $HC = 64$ cm. Tính diện tích S của tam giác ABC .

- A. $S = 3560 \text{ cm}^2$. B. $S = 445 \text{ cm}^2$. C. $S = 1780 \text{ cm}^2$. D. $S = 890 \text{ cm}^2$.

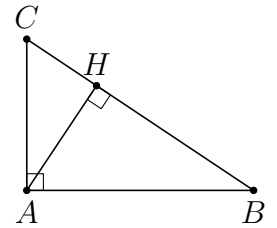
Lời giải.



Áp dụng hệ thức lượng trong $\triangle ABC$ vuông, có đường cao AH , ta có

$$AH^2 = BH \cdot CH = 25 \cdot 64 = 1600 \Rightarrow AH = 40 \text{ (cm)}.$$

$$\text{Do đó } S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot (25 + 64) = 1780 \text{ (cm}^2\text{)}.$$



Chọn đáp án **C** □

Câu 81. Cho tam giác ABC vuông tại C , có đường cao CK . Biết $AC = 10$ cm và $AK = 6$ cm. Tính diện tích S của tam giác ABC .

A. $S = \frac{400}{3} \text{ cm}^2$. B. $S = 100 \text{ cm}^2$. C. $S = \frac{200}{3} \text{ cm}^2$. D. $S = \frac{100}{3} \text{ cm}^2$.

Lời giải.

Áp dụng hệ thức lượng trong $\triangle ABC$ vuông tại C , đường cao CK ta có

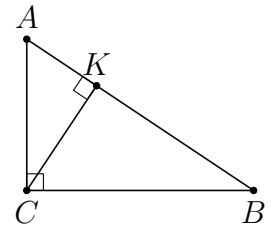
$$AC^2 = AK \cdot AB \Rightarrow AB = \frac{AC^2}{AK} = \frac{10^2}{6} = \frac{50}{3} \text{ (cm)}.$$

Áp dụng định lý Pi-ta-go cho $\triangle ABC$ vuông tại C ta có

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 \Rightarrow CB = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{\left(\frac{50}{3}\right)^2 - 10^2} = \frac{40}{3} \text{ (cm)}.$$

$$\text{Vậy } S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot CA \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{40}{3} = \frac{200}{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Chọn đáp án **C** □



Câu 82. Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức đúng với mọi tam giác ABC ?

A. $\frac{AB}{\sin A} = \frac{BC}{\sin B} = \frac{CA}{\sin C}$. B. $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$.
C. $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB \cdot AC \cdot \cos A$. D. $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB \cdot BC \cdot \cos B$.

Lời giải.

Theo định lý sin trong tam giác, ta có $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 83. Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức đúng với mọi tam giác ABC ?

A. $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC}$. B. $\sin A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC}$.
C. $\sin B = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC}$. D. $\cos B = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC}$.

Lời giải.

Theo định lý cosin trong tam giác ta có

$$AB^2 + AC^2 - BC^2 = 2AB \cdot AC \cdot \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC}.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 84. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức **sai**?

A. $\frac{AH}{\sin \widehat{HAC}} = \frac{BH}{\sin \widehat{HAB}}$. B. $\frac{AH}{\sin \widehat{HAB}} = \frac{CH}{\sin \widehat{HAC}}$.

C. $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AB.AC.\cos \widehat{HAB}$. D. $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC.\cos \widehat{HAC}$.

Lời giải.

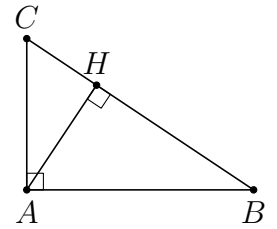
Theo định lý cosin ta có

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C.$$

Ta lại có $\widehat{HAB} = \widehat{ACB}$ (cùng phụ với $\widehat{CAH}$).

Do đó $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AB.AC.\cos \widehat{HAB}$.

Chọn đáp án **C**



Câu 85. Cho tam giác ABC vuông tại B , đường cao BK . Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức sai?

A. $\frac{BK}{\cos \widehat{ABK}} = \frac{AK}{\cos \widehat{CBK}}$. B. $\frac{BK}{\sin \widehat{CBK}} = \frac{CK}{\sin \widehat{ABK}}$.
C. $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.AC.\sin \widehat{CBK}$. D. $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos \widehat{CBK}$.

Lời giải.

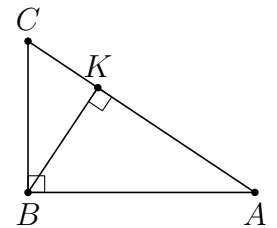
Áp dụng định lý sin trong $\triangle BCK$, ta có $\frac{BK}{\sin \widehat{BCK}} = \frac{CK}{\sin \widehat{CBK}}$.

Mà $\widehat{ABK} = \widehat{BCK}$ (cùng phụ với $\widehat{CBK}$).

Do đó $\frac{BK}{\sin \widehat{ABK}} = \frac{CK}{\sin \widehat{CBK}}$.

Vì vậy đẳng thức $\frac{BK}{\sin \widehat{CBK}} = \frac{CK}{\sin \widehat{ABK}}$ sai.

Chọn đáp án **B**



Câu 86. Cho $ABCD$ là tứ giác nội tiếp. Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức sai?

A. $\frac{AC^2}{AB} = \frac{BA^2}{BC} + 2AB.BC.\cos \widehat{ADC}$. B. $\frac{AC^2}{AD} = \frac{AD^2}{CD} + 2AD.CD.\cos \widehat{ABC}$.
C. $\frac{\sin \widehat{ADB}}{\sin \widehat{BDC}} = \frac{AD}{CD}$. D. $\frac{\sin \widehat{ABD}}{\sin \widehat{BCD}} = \frac{AD}{CD}$.

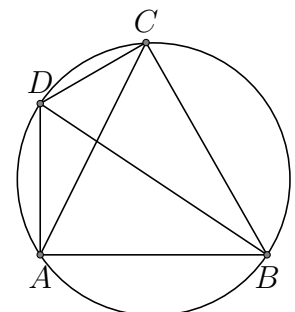
Lời giải.

Áp dụng định lý sin trong $\triangle ACD$ ta có $\frac{AD}{\sin \widehat{ACD}} = \frac{CD}{\sin \widehat{DAC}}$.

Do $ABCD$ nội tiếp nên $\widehat{ACD} = \widehat{ABD}$ và $\widehat{DAC} = \widehat{DBC}$.

Do đó $\frac{AD}{\sin \widehat{ABD}} = \frac{CD}{\sin \widehat{DBC}}$.

Vậy đẳng thức $\frac{AD}{\sin \widehat{ABD}} = \frac{CD}{\sin \widehat{BCD}}$ sai.



Chọn đáp án **D**

Câu 87. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(1;3)$, $B(5;0)$, $C(7;11)$. Giá trị sin của các góc $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$ lần lượt là

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}, 1, \frac{2\sqrt{5}}{5}$. B. $1, \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{2\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

Ta có

$$AB = \sqrt{(5-1)^2 + (0-3)^2} = 5, AC = \sqrt{(7-1)^2 + (11-3)^2} = 10, BC = \sqrt{(7-5)^2 + (11-0)^2} = 5\sqrt{5}.$$

Ta thấy rằng $AB^2 + AC^2 = 25 + 100 = 125 = BC^2$. Do đó $\triangle ABC$ vuông tại A .

Do đó ta có

$$\begin{aligned}\sin \widehat{BAC} &= \sin 90^\circ = 1, \\ \sin \widehat{ABC} &= \frac{AC}{BC} = \frac{10}{5\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \\ \sin \widehat{BCA} &= \frac{AB}{BC} = \frac{5}{5\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 88. Cho tam giác ABC có $c = 7$, $b = 4$ và $\hat{A} = 60^\circ$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

A. $R = \sqrt{\frac{37}{3}}$. B. $R = \sqrt{13}$. C. $R = 3, 6$. D. $R = 3, 5$.

Lời giải.

Áp dụng định lý côsin ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A = 7^2 + 4^2 - 2 \cdot 7 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = 37 \Rightarrow a = \sqrt{37}$.

Ta có $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ = 7\sqrt{3}$.

Mặt khác $S_{ABC} = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{\sqrt{37} \cdot 4 \cdot 7}{4 \cdot 7\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{37}{3}}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 89. Cho tam giác ABC vuông tại A . Khẳng định nào **đúng** trong các khẳng định sau?

A. $AB^2 + AC^2 = BC^2$. B. $AB + AC = BC$.
C. $AC^2 + BC^2 = AB^2$. D. $AB^2 + BC^2 = AC^2$.

Lời giải.

$\triangle ABC$ vuông tại A nên theo định lý Pi-ta-go ta có $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Chọn đáp án **(A)** □

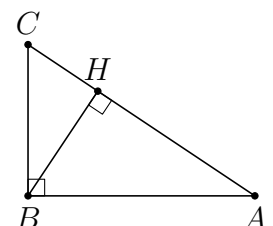
Câu 90. Cho tam giác ABC vuông tại B , đường cao BH . Khẳng định nào **đúng** trong các khẳng định sau?

A. $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$. B. $\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$.
C. $\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BC^2}$. D. $\frac{1}{BH} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{BC}$.

Lời giải.

Công thức hệ thức lượng trong $\triangle ABC$ vuông tại B , đường cao BH

$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BC^2}.$$



Chọn đáp án **(C)** □

Câu 91. Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = 6$ và $AC = 8$. Tính độ dài cạnh BC .

- A. $BC = 10$. B. $BC = 14$. C. $BC = 100$. D. $BC = 2$.

Lời giải.

Áp dụng lý Pi-ta-go trong $\triangle ABC$ vuông tại A ta có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 92. Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = 5$ và $AC = 12$. Tính diện tích S của tam giác ABC .

- A. $S = 30$. B. $S = 20\sqrt{2}$. C. $S = 48$. D. $S = 60$.

Lời giải.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 93. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Khẳng định nào **sai** trong các khẳng định sau?

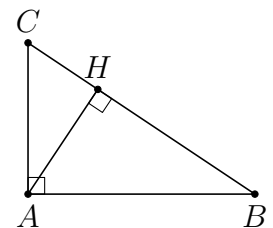
- A. $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$. B. $BH \cdot BC = AB^2$.
C. $CH \cdot BC = AC^2$. D. $AB \cdot BC = AH \cdot AC$.

Lời giải.

$\triangle ABC$ vuông tại A nên $BC > AC$.

$\triangle AHB$ vuông tại H nên $AB > AH$.

Do đó $AB \cdot BC > AH \cdot AC$.



Chọn đáp án (D) □

Câu 94. Tam giác ABC vuông tại A , $AB = 5$ và $AC = 12$. Tìm độ dài đường cao AH .

- A. $AH = 17$. B. $AH = \frac{13}{60}$. C. $AH = \frac{60}{13}$. D. $AH = 7$.

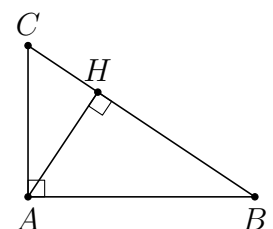
Lời giải.

Áp dụng hệ thức lượng trong $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{12^2} = \frac{169}{3600}.$$

Suy ra $AH = \sqrt{\frac{3600}{169}} = \frac{60}{13}.$

Chọn đáp án (C) □



Câu 95. Cho tam giác MNP vuông tại M , $NP = 10$ cm và I là trung điểm NP . Tìm độ dài đường trung tuyến MI .

- A. $MI = 5$ cm. B. $MI = 10$ cm. C. $MI = 20$ cm. D. $MI = 1$ cm.

Lời giải.

$\triangle MNP$ vuông tại M nên trung tuyến MI bằng một nửa cạnh huyền NP .

Vì vậy $MI = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$ cm.

Chọn đáp án (A) □

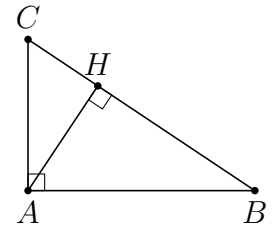
Câu 96. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH , $BC = 12$ và $BH = 8$. Tính độ dài cạnh AB .

- A. $AB = 96$. B. $AB = 20$. C. $AB = 4\sqrt{6}$. D. $AB = \sqrt{20}$.

Lời giải.

Áp dụng hệ thức lượng trong $\triangle ABC$ vuông tại A , đường cao AH ta có

$$AB^2 = BH \cdot BC = 8 \cdot 12 = 96 \Rightarrow AB = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}.$$



Chọn đáp án **C**

□

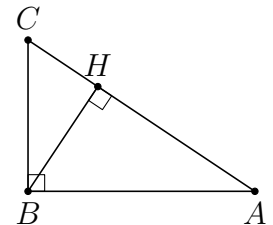
Câu 97. Cho tam giác ABC vuông tại B , BH là đường cao, $AH = 5$ và $CH = 8$. Tìm độ dài đường cao BH .

- A. $BH = 13$. B. $BH = 40$. C. $BH = 3\sqrt{10}$. D. $BH = 2\sqrt{10}$.

Lời giải.

Áp dụng hệ thức lượng trong $\triangle ABC$ vuông tại B , đường cao BH ta có

$$BH^2 = AH \cdot CH = 5 \cdot 8 = 40 \Rightarrow BH = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$



Chọn đáp án **D**

□

Câu 98. Cho tam giác MNP vuông tại M , $NP = 16$ và $\widehat{PNM} = 30^\circ$. Tính độ dài cạnh MP .

- A. $MP = 8$. B. $MP = 32$. C. $MP = 8\sqrt{3}$. D. $MP = 16$.

Lời giải.

Ta có $MP = PN \sin \widehat{MNP} = 16 \cdot \sin 30^\circ = 8$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 99. Cho tam giác ABC vuông tại A có diện tích S . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. $S = AB \cdot AC$. B. $S = \frac{1}{2} AB \cdot BC$. C. $S = \frac{1}{2} AC \cdot BC$. D. $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC$.

Lời giải.

Ta có $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 100. Cho tam giác MNP không vuông có diện tích là S , p là nửa chu vi, r là bán kính đường tròn nội tiếp và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

- A. $S = \frac{1}{2} MN \cdot MP$. B. $S = p \cdot r$.
C. $S = \frac{MN \cdot MP \cdot NP}{4R}$. D. $S = \frac{1}{2} NM \cdot NP \cdot \sin N$.

Lời giải.

Khẳng định sai là $S = \frac{1}{2} MN \cdot MP$. Sửa lại cho đúng: $S = \frac{1}{2} MN \cdot MP \cdot \sin M$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 101. Tính diện tích S của tam giác ABC có độ dài 3 cạnh là 5 cm, 7 cm và 8 cm.

- A. $S = 140 \text{ cm}^2$. B. $S = 10\sqrt{3} \text{ cm}^2$. C. $S = 20 \text{ cm}^2$. D. $S = 60\sqrt{13} \text{ cm}^2$.

Lời giải.

Nửa chu vi $p = 10 \text{ cm}$. Do đó diện tích tam giác là

$$S = \sqrt{p(p-5)(p-7)(p-8)} = 10\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 102. Cho tam giác ABC có $AB = 3 \text{ cm}$, $AC = 7 \text{ cm}$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp $R = 5 \text{ cm}$. Biết diện tích của tam giác ABC bằng $5,25 \text{ cm}^2$. Tìm độ dài cạnh BC .

- A. $BC = 8,5 \text{ cm}$. B. $BC = 4,125 \text{ cm}$. C. $BC = 5 \text{ cm}$. D. $BC = 6,7 \text{ cm}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R} \Rightarrow BC = \frac{4 \cdot 5 \cdot 5,25}{3 \cdot 7} = 5 \text{ cm}.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 103. Tính diện tích S của tam giác ABC biết $AB = 5 \text{ cm}$, $AC = 8 \text{ cm}$ và $\hat{A} = 60^\circ$.

- A. $S = 10 \text{ cm}^2$. B. $S = 10\sqrt{3} \text{ cm}^2$. C. $S = 20 \text{ cm}^2$. D. $S = 20\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = 5 \cdot 8 \cdot \sin 60^\circ = 10\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 104. Cho tam giác ABC có 3 cạnh là 4 cm, 8 cm và 6 cm. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

- A. $r = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ cm}$. B. $r = \sqrt{5} \text{ cm}$. C. $r = \sqrt{15} \text{ cm}$. D. $r = \frac{\sqrt{15}}{3} \text{ cm}$.

Lời giải.

$$\text{Nửa chu vi } p = 9 \text{ cm và diện tích } S = \sqrt{9(9-4)(9-8)(9-6)} = 3\sqrt{15} \text{ nên } r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{15}}{3} \text{ cm}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 105. Cho tam giác ABC có $AB = 6 \text{ cm}$, $AC = 9 \text{ cm}$ và $BC = 5 \text{ cm}$. Tính độ dài đường cao AH của tam giác ABC .

- A. $AH = 8\sqrt{2} \text{ cm}$. B. $AH = 6\sqrt{2} \text{ cm}$. C. $AH = 4\sqrt{2} \text{ cm}$. D. $AH = 10\sqrt{2} \text{ cm}$.

Lời giải.

$$\text{Nửa chu vi } p = 10 \text{ cm và diện tích } S = \sqrt{10(10-6)(10-9)(10-5)} = 10\sqrt{2} \text{ cm}^2 \text{ nên}$$

$$AH = \frac{2S}{BC} = 4\sqrt{2} \text{ cm}.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 106. Cho tam giác ABC có $AC = 5 \text{ cm}$, $BC = 8 \text{ cm}$ và diện tích $S = 10\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Tìm số đo góc ACB .

- A. $\widehat{ACB} = 60^\circ$. B. $\widehat{ACB} = 45^\circ$. C. $\widehat{ACB} = 90^\circ$. D. $\widehat{ACB} = 30^\circ$.

Lời giải.

Ta có $S = \frac{1}{2}CA \cdot BC \sin C$ nên $\sin C = \frac{2S}{CA \cdot CB} = \frac{3}{2}$, do đó $\widehat{ACB} = 60^\circ$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 107. Cho tam giác ABC bất kì có $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức đúng?

A. $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = R$.

B. $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

C. $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{1}{2R}$.

D. $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{1}{R}$.

Lời giải.

Theo công thức SGK ta có $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 108. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 45^\circ$, $\widehat{C} = 75^\circ$ và cạnh $BC = 5$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

A. 5.

B. $\frac{5}{2}$.

C. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\widehat{A} = 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 60^\circ$ nên $R = \frac{BC}{2 \sin A} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 109. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 30^\circ$, $\widehat{B} = 45^\circ$ và $AC = 10\sqrt{2}$. Độ dài cạnh BC là

A. 10.

B. $5\sqrt{2}$.

C. $\frac{5}{\sqrt{2}}$.

D. 5.

Lời giải.

Ta có $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$ nên $BC = 10$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 110. Cho tam giác ABC có độ dài 3 cạnh là a , b , c . Gọi h_a là độ dài đường cao kẻ từ đỉnh A và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. $a = 2R \sin A$.

B. $h_a = 2R \sin B \sin C$.

C. $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$.

D. $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{b}{a}$.

Lời giải.

Vì $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ nên $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 111. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Một đường tròn có bán kính bằng $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ đi qua hai đỉnh A , C và cắt đường thẳng BC tại E . Tính độ dài AE và góc BAE .

A. $AE = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $\widehat{BAE} = 30^\circ$.

B. $AE = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ và $\widehat{BAE} = 30^\circ$.

C. $AE = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ và $\widehat{BAE} = 60^\circ$.

D. $AE = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $\widehat{BAE} = 60^\circ$.

Lời giải.

Xét tam giác ACE có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Ta có $\frac{AE}{\sin \widehat{ACE}} = 2R$ nên $AE = 2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \sin 45^\circ = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Ta có $\frac{AC}{\sin \widehat{AEC}} = 2R$ nên $\sin \widehat{AEC} = \frac{AC}{2R} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, do đó $\widehat{BAE} = 30^\circ$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 112. Cho tam giác ABC có $\sin^2 C = \sin^2 A + \sin^2 B$. Tam giác ABC là tam giác gì?

A. Tam giác ABC vuông tại A .

B. Tam giác ABC vuông tại B .

C. Tam giác ABC vuông tại C .

D. Tam giác ABC đều.

Lời giải.

Ta có $\sin^2 C = \sin^2 A + \sin^2 B \Leftrightarrow \left(\frac{c}{2R}\right)^2 = \left(\frac{a}{2R}\right)^2 + \left(\frac{b}{2R}\right)^2 \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2$ nên tam giác ABC vuông tại C .

Chọn đáp án (C) □

Câu 113. Cho tam giác ABC vuông tại A , cạnh $BC = 5$. Tính tỉ số $k = \frac{AC}{\sin B}$.

A. $k = 10$.

B. $k = 5$.

C. $k = \frac{5}{2}$.

D. $k = \frac{5}{4}$.

Lời giải.

Vì tam giác ABC vuông tại A nên $k = \frac{AC}{\sin B} = BC = 5$

Chọn đáp án (B) □

Câu 114. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 50^\circ$, $\widehat{B} = 70^\circ$ và $AB = 20$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

A. $\frac{10}{\sqrt{3}}$.

B. 10.

C. $10\sqrt{3}$.

D. $\frac{20}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Ta có $\widehat{C} = 60^\circ$ nên $R = \frac{AB}{2 \sin C} = \frac{20}{\sqrt{3}}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 115. Cho tam giác ABC biết $\frac{\sin A}{\sin B} = \sqrt{3}$ và $BC = 2\sqrt{3}$. Tính AC .

A. $AC = 2$.

B. $AC = 2\sqrt{3}$.

C. $AC = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

D. $AC = \frac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{3} = \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{BC}{AC} = \frac{2\sqrt{3}}{AC}$ nên $AC = 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 116. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^\circ$. Biết bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R = 6$. Tính độ dài cạnh BC .

A. $BC = 6\sqrt{3}$.

B. $BC = \frac{6}{\sqrt{3}}$.

C. $BC = 12\sqrt{3}$.

D. $BC = 12$.

Lời giải.

Ta có $BC = 2R \sin A = 2 \cdot 6 \sin 60^\circ = 6\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 117. Cho tam giác ABC có $\sin A = \frac{2 \sin B}{\sqrt{3}} = 2 \sin C$. Số đo ba góc A, B, C của tam giác lần lượt là

A. $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.

B. $60^\circ, 30^\circ, 90^\circ$.

C. $90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$.

D. $90^\circ, 30^\circ, 60^\circ$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \sin A = \frac{2 \sin B}{\sqrt{3}} = 2 \sin C \Rightarrow \frac{a}{2R} = \frac{2b}{2R\sqrt{3}} = \frac{2c}{2R} \text{ nên } b = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ và } c = \frac{a}{2}.$$

Do đó $a^2 = b^2 + c^2$ hay tam giác ABC vuông tại A .

$$\text{Ta có } \sin B = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ nên } \widehat{B} = 60^\circ, \text{ suy ra } \widehat{C} = 30^\circ.$$

Chọn đáp án **C** □**Câu 118.** Cho tam giác MNP đồng dạng với tam giác ABC theo tỉ số $k = 2$. Biết $AB = 4$ cm, $AC = 6$ cm và $NP = 16$ cm. Tính diện tích S của tam giác ABC .

$$\text{A. } S = \sqrt{15} \text{ cm}^2. \quad \text{B. } S = 3\sqrt{15} \text{ cm}^2. \quad \text{C. } S = 5\sqrt{15} \text{ cm}^2. \quad \text{D. } S = 7\sqrt{15} \text{ cm}^2.$$

Lời giải.

$$\triangle MNP \text{ đồng dạng } \triangle ABC \text{ theo tỉ số } k = 2 \text{ nên } BC = \frac{NP}{2} = \frac{16}{2} = 8.$$

$$\text{Khi đó } p = \frac{AB + BC + CA}{2} = \frac{4 + 8 + 6}{2} = 9.$$

Sử dụng công thức He-ron ta có

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)} = \sqrt{9 \cdot (9-4) \cdot (9-8) \cdot (9-6)} = 3\sqrt{15} \text{ cm}^2.$$

Chọn đáp án **B** □**Câu 119.** Cho tam giác ABC vuông tại A . Khẳng định nào **đúng** trong các khẳng định sau?

$$\begin{array}{ll} \text{A. } AB^2 + AC^2 = BC^2. & \text{B. } AB + AC = BC. \\ \text{C. } AC^2 + BC^2 = AB^2. & \text{D. } AB^2 + BC^2 = AC^2. \end{array}$$

Lời giải.Tam giác ABC vuông tại A , ta có định lý Pi-ta-go $AB^2 + AC^2 = BC^2$.Chọn đáp án **A** □**Câu 120.** Cho tam giác ABC vuông tại B , đường cao BH . Khẳng định nào **đúng** trong các khẳng định sau?

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}. & \text{B. } \frac{1}{BH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}. \\ \text{C. } \frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BC^2}. & \text{D. } \frac{1}{BH} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{BC}. \end{array}$$

Lời giải.Tam giác ABC vuông tại B , đường cao BH nên ta có hệ thức đúng là $\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BC^2}$.Chọn đáp án **C** □**Câu 121.** Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = 6$ và $AC = 8$. Tính độ dài cạnh BC .

$$\text{A. } BC = 10. \quad \text{B. } BC = 14. \quad \text{C. } BC = 100. \quad \text{D. } BC = 2.$$

Lời giải.Áp dụng định lý Pi-ta-go ta được $BC^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow BC = 10$.Chọn đáp án **A** □**Câu 122.** Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = 5$ và $AC = 12$. Tính diện tích S của tam giác ABC .

$$\text{A. } S = 30. \quad \text{B. } S = 20\sqrt{2}. \quad \text{C. } S = 48. \quad \text{D. } S = 60.$$

Lời giải.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = 30.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 123. Cho tam giác MNP vuông tại M , $NP = 10$ cm và I là trung điểm NP . Tìm độ dài đường trung tuyến MI .

- A. $MI = 5$ cm. B. $MI = 10$ cm. C. $MI = 20$ cm. D. $MI = 1$ cm.

Lời giải.

Vì tam giác MNP vuông tại M nên $MI = \frac{1}{2} NP = 5$ cm.

Chọn đáp án (A) □

Câu 124. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH , $BC = 12$ và $BH = 8$. Tính độ dài cạnh AB .

- A. $AB = 96$. B. $AB = 20$. C. $AB = 4\sqrt{6}$. D. $AB = \sqrt{20}$.

Lời giải.

Ta có $AB^2 = BC \cdot BH = 12 \cdot 8 \Rightarrow AB = 4\sqrt{6}$.

Chọn đáp án (C) □

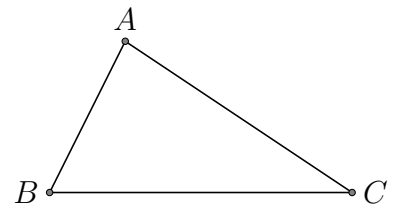
Câu 125. Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = 5$ và $BC = 13$. Tính độ dài cạnh AC .

- A. $AC = 8$. B. $AC = 12$. C. $AC = 144$. D. $AC = 18$.

Lời giải.

Tam giác ABC vuông tại A theo định lý Py-ta-go ta có

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 12.$$



Chọn đáp án (B) □

Câu 126. Cho tam giác nhọn MNP có $NP = a\sqrt{3}$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP là $R = 2a$. Tìm số đo góc M .

- A. $\widehat{M} = 30^\circ$. B. $\widehat{M} = 45^\circ$. C. $\widehat{M} = 120^\circ$. D. $\widehat{M} = 60^\circ$.

Lời giải.

Theo định lý sin ta có $\frac{NP}{\sin M} = R \Rightarrow \sin M = \frac{NP}{R} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 127. Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh là $BC = a, AC = b, AB = c$. Gọi m_a, m_b, m_c lần lượt là chiều dài các đường trung tuyến kẻ từ các đỉnh A, B, C . Có bao nhiêu mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau đây?

- $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4}$.
- $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.
- $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$.

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Lời giải.

Xét tam giác ABC , ta có

$$\bullet m_a^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4}.$$

$$\bullet \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

$$\bullet m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} + \frac{b^2 + a^2}{2} - \frac{c^2}{4} = \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{4}.$$

Vậy chỉ có mệnh đề 1 đúng.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 128. Cho tam giác ABC thỏa mãn $AB^2 + AC^2 < BC^2$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. Tam giác ABC là tam giác nhọn. B. Tam giác ABC có $\widehat{ABC} > 90^\circ$.
C. Tam giác ABC có $\widehat{BAC} > 90^\circ$. D. Tam giác ABC có $\widehat{ACB} > 90^\circ$.

Lời giải.

Tam giác ABC thỏa mãn $AB^2 + AC^2 < BC^2 \Rightarrow \widehat{BAC} > 90^\circ$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 129. Cho tam giác ABC với $AB = a$, $BC = 3a$ và $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Tính theo a cạnh AC .

- A. $a\sqrt{5}$. B. $a\sqrt{7}$. C. $a\sqrt{10}$. D. $a\sqrt{13}$.

Lời giải.

Theo định lý cosin ta có

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC} \\ &= a^2 + 9a^2 - 2 \cdot a \cdot 3a \cdot \frac{1}{2} = 7a^2. \\ \Rightarrow AC &= a\sqrt{7}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 130. Cho tam giác ABC có $AB = 4a$, $BC = 5a$ và $AC = 6a$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

- A. $0 < \cos A < \frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{4} < \cos A < \frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{2} < \cos A < \frac{2}{3}$. D. $\frac{2}{3} < \cos A < \frac{4}{5}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{16a^2 + 36a^2 - 25a^2}{2 \cdot 4a \cdot 6a} = \frac{27}{48} = \frac{9}{16}.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 131. Cho tam giác ABC có $AB = 4$ cm, $AC = 3$ cm và $BC = 6$ cm. Tính độ dài trung tuyến kẻ từ C của tam giác ABC .

- A. $\frac{\sqrt{74}}{2}$ cm. B. $\frac{\sqrt{65}}{2}$ cm. C. $\frac{\sqrt{61}}{2}$ cm. D. $\frac{\sqrt{57}}{2}$ cm.

Lời giải.

Theo công thức tính độ dài trung tuyến kẻ từ đỉnh C của tam giác ABC ta có

$$\begin{aligned} m_c^2 &= \frac{BC^2 + AC^2}{2} - \frac{AB^2}{4} = \frac{36 + 9}{2} - \frac{16}{4} = \frac{37}{2}. \\ \Rightarrow m_c &= \frac{\sqrt{74}}{2} \text{ cm.} \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 132. Tính độ dài đường chéo MP của hình bình hành $MNPQ$ biết $MN = 2$ m, $MQ = 3$ m và $\widehat{QMN} = 120^\circ$.

- A. $\sqrt{3}$ m. B. $\sqrt{5}$ m. C. $\sqrt{7}$ m. D. $\sqrt{11}$ m.

Lời giải.

Xét tam giác MNP , ta có

$$MP^2 = MN^2 + NP^2 - 2MN \cdot NP \cdot \cos 60^\circ = 4 + 9 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 7.$$

$$\Rightarrow MP = \sqrt{7} \text{ m.}$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 133. Cho tam giác DEF với $DE = 5a$, $EF = 7a$ và $DF = 9a$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF}$.

- A. $\frac{105a^2}{2}$. B. $\frac{57a^2}{2}$. C. $-\frac{7a^2}{2}$. D. $\frac{155a^2}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\cos(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}) = \cos \widehat{EDF} = \frac{DE^2 + DF^2 - EF^2}{2 \cdot DE \cdot DF} = \frac{25a^2 + 81a^2 - 49a^2}{2 \cdot 5a \cdot 9a} = \frac{19}{30}.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = DE \cdot DF \cdot \cos(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}) = 5a \cdot 9a \cdot \frac{19}{30} = \frac{57}{2}a^2.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 134. Cho tam giác ABC với trọng tâm G và $AB = 5$ cm, $BC = 7$ cm và $AC = 9$ cm. Tính $\sqrt{GA^2 + GB^2 + GC^2}$.

- A. $\sqrt{\frac{155}{3}}$ cm. B. $\sqrt{\frac{175}{3}}$ cm. C. $\sqrt{\frac{145}{3}}$ cm. D. $\sqrt{\frac{125}{3}}$ cm.

Lời giải.

Ta có

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{4}.$$

Suy ra

$$\sqrt{GA^2 + GB^2 + GC^2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} = \sqrt{\frac{25 + 49 + 81}{3}} = \sqrt{\frac{155}{3}} \text{ cm.}$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 135. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh 1 dm. Gọi K là trung điểm OA . Tính độ dài cạnh DK .

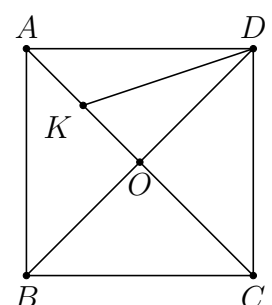
- A. $\frac{\sqrt{11}}{4}$ dm. B. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ dm. C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ dm. D. $\frac{\sqrt{10}}{4}$ dm.

Lời giải.

Ta có $AO = DO = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dm, $AD = 1$ dm.

$$DK^2 = \frac{2(AD^2 + DO^2) - AO^2}{4} = \frac{2\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}}{4} = \frac{5}{8}.$$

$$\Rightarrow DK = \frac{\sqrt{10}}{4} \text{ dm.}$$



Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 136. Cho tam giác ABC thỏa mãn $AC^2 = AB^2 + BC^2 + AB \cdot BC$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\widehat{ABC} = 60^\circ$. B. $\widehat{BAC} = 60^\circ$. C. $\widehat{ABC} = 120^\circ$. D. $\widehat{BAC} = 120^\circ$.

Lời giải.

Ta có $AC^2 = AB^2 + BC^2 + AB \cdot BC \Rightarrow \cos \widehat{ABC} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{ABC} = 120^\circ$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 137. Cho tam giác ABC vuông tại B . Tìm công thức tính diện tích S của tam giác ABC .

- A. $S = AB \cdot BC$. B. $S = \frac{1}{2}AB \cdot BC$. C. $S = \frac{1}{2}AB \cdot AC$. D. $S = AB \cdot AC$.

Lời giải.

Vì tam giác ABC vuông tại B nên ta có $S = \frac{1}{2}BA \cdot BC$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 138. Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = 6$ cm và $BC = 7,5$ cm. Tính diện tích S của tam giác ABC .

- A. $S = 13,5 \text{ cm}^2$. B. $S = 22,5 \text{ cm}^2$. C. $S = 27 \text{ cm}^2$. D. $S = 16,875 \text{ cm}^2$.

Lời giải.

Vì tam giác ABC vuông tại A nên ta có

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{7,5^2 - 6^2} = 4,5 \text{ cm.} \\ \Rightarrow S &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4,5 = 13,5 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 139. Cho tam giác ABC vuông tại B , $BC = 15$ cm và $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Tính diện tích S của tam giác ABC .

- A. $S = \frac{225\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$. B. $S = \frac{225\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$. C. $S = \frac{75\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$. D. $S = \frac{75\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$.

Lời giải.

Vì tam giác ABC vuông tại B nên ta có

$$\begin{aligned} AB &= \tan 30^\circ \cdot BC = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 15 = 5\sqrt{3} \text{ cm.} \\ \Rightarrow S &= \frac{1}{2} \cdot BA \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{3} \cdot 15 = \frac{75\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 140. Cho tam giác ABC vuông tại A , $BC = 72$ cm và $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Tính diện tích S của tam giác ABC .

- A. $S = 648 \text{ cm}^2$. B. $S = 648\sqrt{3} \text{ cm}^2$. C. $S = 324 \text{ cm}^2$. D. $S = 324\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Lời giải.

Vì tam giác ABC vuông tại A nên ta có

$$\begin{aligned} AC &= \sin 60^\circ \cdot BC = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 72 = 36\sqrt{3} \text{ cm.} \\ AB &= \cos 60^\circ \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 72 = 36 \text{ cm.} \\ \Rightarrow S &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 36\sqrt{3} \cdot 36 = 648\sqrt{3} \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 141. Cho tam giác ABC vuông tại A , có đường cao AH . Biết $BH = 25$ cm và $HC = 64$ cm. Tính diện tích S của tam giác ABC .

- A. $S = 3560 \text{ cm}^2$. B. $S = 445 \text{ cm}^2$. C. $S = 1780 \text{ cm}^2$. D. $S = 890 \text{ cm}^2$.

Lời giải.

Vì tam giác ABC vuông tại A nên ta có

$$\begin{aligned} AH &= \sqrt{BH \cdot CH} = \sqrt{25 \cdot 64} = 40 \text{ cm.} \\ \Rightarrow S &= \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 89 = 1780 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 142. Cho tam giác ABC vuông tại C , có đường cao CK . Biết $AC = 10$ cm và $CK = 6$ cm. Tính diện tích S của tam giác ABC .

- A. $S = \frac{15}{2} \text{ cm}^2$. B. $S = 100 \text{ cm}^2$. C. $S = \frac{75}{2} \text{ cm}^2$. D. $S = \frac{150}{2} \text{ cm}^2$.

Lời giải.

Vì tam giác ABC vuông tại C nên ta có

$$\begin{aligned} BC &= \frac{CH \cdot AC}{\sqrt{AC^2 - CH^2}} = \frac{6 \cdot 10}{\sqrt{10^2 - 6^2}} = \frac{15}{2} \text{ cm.} \\ \Rightarrow S &= \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{15}{2} = \frac{75}{2} \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 143. Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức **đúng** với mọi tam giác ABC ?

- A. $\frac{AB}{\sin A} = \frac{BC}{\sin B} = \frac{CA}{\sin C}$. B. $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$.
C. $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB \cdot AC \cdot \cos A$. D. $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB \cdot BC \cdot \cos B$.

Lời giải.

Theo định lý sin, ta có $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 144. Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức **đúng** với mọi tam giác ABC ?

- A. $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC}$. B. $\sin A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC}$.
C. $\sin B = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC}$. D. $\cos B = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC}$.

Lời giải.

Theo hệ quả định lý cosin ta có $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 145. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức sai?

- A. $\frac{CH}{\sin \widehat{HAC}} = \frac{BH}{\sin \widehat{HAB}}$. B. $\frac{BH}{\sin \widehat{HAB}} = \frac{CH}{\sin \widehat{HAC}}$.
C. $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{HAB}$. D. $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC}$.

Lời giải.

Xét tam giác ABC , ta có

- $\frac{CH}{\sin \widehat{HAC}} = \frac{BH}{\sin \widehat{HAB}}$.
- $\frac{BH}{\sin \widehat{HAB}} = \frac{CH}{\sin \widehat{HAC}}$.
- $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 146. Cho tam giác ABC vuông tại B , đường cao BK . Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức sai?

- A. $\frac{BK}{\cos \widehat{ABK}} = \frac{AK}{\cos \widehat{CBK}}$. B. $\frac{BK}{\sin \widehat{CBK}} = \frac{CK}{\sin \widehat{ABK}}$.
C. $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \sin \widehat{CBK}$. D. $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{CBK}$.

Lời giải.

- $\frac{BK}{\sin \widehat{CBK}} = BK \cdot \frac{AB}{BK} = AB$; $\frac{CK}{\sin \widehat{ABK}} = BC \cdot \frac{AK}{BK} = BC \cdot \frac{AB}{BC} = AB$,
suy ra $\frac{BK}{\cos \widehat{ABK}} = \frac{AK}{\cos \widehat{CBK}}$ đúng.
- Ta có $\sin \widehat{CBK} = \cos \widehat{BCA}$ suy ra $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \sin \widehat{CBK}$ đúng.
- Ta có $\widehat{CBK} = \widehat{BAC}$ suy ra $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{CBK}$ đúng.
- Ta có $\frac{BK}{\sin \widehat{CBK}} = BK \cdot \frac{AC}{BC}$; $\frac{CK}{\sin \widehat{ABK}} = CK \cdot \frac{AC}{AB}$, mà $\frac{BK}{BC} = \frac{AK}{AB} \neq \frac{CK}{AB}$,
do đó $\frac{BK}{\sin \widehat{CBK}} = \frac{CK}{\sin \widehat{ABK}}$ sai.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 147. Cho $ABCD$ là tứ giác nội tiếp. Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức sai?

- A. $AC^2 = BA^2 + BC^2 + 2AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ADC}$. B. $AC^2 = AD^2 + CD^2 + 2AD \cdot CD \cdot \cos \widehat{ABC}$.
C. $\frac{AB}{\sin \widehat{ADB}} = \frac{BC}{\sin \widehat{BDC}}$. D. $\frac{AD}{\sin \widehat{ABD}} = \frac{CD}{\sin \widehat{BCD}}$.

Lời giải.

- Ta có $\cos \widehat{ADC} = -\cos \widehat{ABC}$ suy ra $AC^2 = BA^2 + BC^2 + 2AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ADC}$
và $AC^2 = AD^2 + CD^2 + 2AD \cdot CD \cdot \cos \widehat{ABC}$ đúng.
- Áp dụng định lý sin ta có
 $\frac{AB}{\sin \widehat{ADB}} = \frac{BD}{\sin \widehat{BAD}} = \frac{BD}{\sin \widehat{BCD}} = \frac{BC}{\sin \widehat{BDC}}$ suy ra $\frac{AB}{\sin \widehat{ADB}} = \frac{BC}{\sin \widehat{BDC}}$ đúng.
- Ta có $\frac{AD}{\sin \widehat{ABD}} = \frac{BD}{\sin \widehat{BAD}} = \frac{BD}{\sin \widehat{BCD}} \neq \frac{CD}{\sin \widehat{BDC}}$ suy ra $\frac{AD}{\sin \widehat{ABD}} = \frac{CD}{\sin \widehat{BCD}}$ sai.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 148. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(1; 3)$, $B(5; 0)$, $C(7; 11)$. Giá trị sin của các góc

$\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$ lần lượt là

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}, 1, \frac{2\sqrt{5}}{5}$. B. $1, \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{2\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

Ta có $AB = 5$; $AC = 10$; $BC = 5\sqrt{5}$ và $BC^2 = AB^2 + AC^2$ suy ra tam giác ABC vuông tại A . Suy ra $\sin A = 1$; $\sin B = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 149. Cho tam giác ABC có $c = 7$, $b = 4$ và $\hat{A} = 60^\circ$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- A. $R = \sqrt{\frac{37}{3}}$. B. $R = \sqrt{13}$. C. $R = 3,6$. D. $R = 3,5$.

Lời giải.

Ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 37 \Rightarrow R = \frac{a}{2 \sin A} = \sqrt{\frac{37}{3}}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 150. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Khẳng định nào **sai** trong các khẳng định sau?

- A. $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$. B. $BH \cdot BC = AB^2$.
C. $CH \cdot BC = AC^2$. D. $AB \cdot BC = AH \cdot AC$.

Lời giải.

Vì tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH nên ta có các hệ thức đúng là $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$; $BH \cdot BC = AB^2$ và $CH \cdot BC = AC^2$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 151. Tam giác ABC vuông tại A , $AB = 5$ và $AC = 12$. Tìm độ dài đường cao AH .

- A. $AH = 17$. B. $AH = \frac{13}{60}$. C. $AH = \frac{60}{13}$. D. $AH = 7$.

Lời giải.

Áp dụng hệ thức $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$ ta được $AH = \frac{60}{13}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 152. Cho tam giác ABC vuông tại B , BH là đường cao, $AH = 5$ và $CH = 8$. Tìm độ dài đường cao BH .

- A. $BH = 13$. B. $BH = 40$. C. $BH = 3\sqrt{10}$. D. $BH = 2\sqrt{10}$.

Lời giải.

Ta có $BH^2 = AH \cdot CH = 5 \cdot 8 \Rightarrow BH = 2\sqrt{10}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 153. Cho tam giác MNP vuông tại M , $NP = 16$ và $\widehat{PNM} = 30^\circ$. Tính độ dài cạnh MP .

- A. $MP = 8$. B. $MP = 32$. C. $MP = 8\sqrt{3}$. D. $MP = 16$.

Lời giải.

Ta có $\sin 30^\circ = \frac{MP}{NP} \Rightarrow MP = 8$.

Chọn đáp án **(A)** □

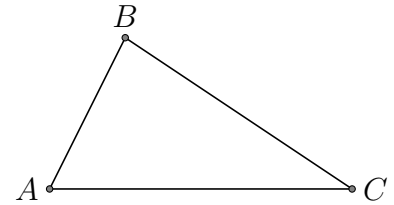
Câu 154. Cho tam giác ABC vuông tại B , $BC = 6$ và $BA = 8$. Tìm độ dài bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- A. $R = 5$. B. $R = 4\sqrt{2}$. C. $R = 5\sqrt{2}$. D. $R = 6$.

Lời giải.

Áp dụng định lý Py-ta-go ta có $AC = \sqrt{BC^2 + BA^2} = 10$.

Khi đó bán kính đường tròn ngoại tiếp $R = \frac{AC}{2} = 5$.



Chọn đáp án **A** □

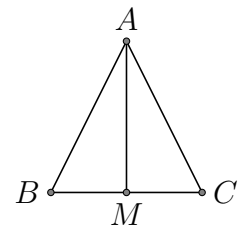
Câu 155. Cho tam giác ABC vuông cân tại A . M là trung điểm BC , $AC = 10$. Tìm độ dài đường trung tuyến AM .

- A. $AM = 5\sqrt{2}$. B. $AM = 5$. C. $AM = 10$. D. $AM = 20$.

Lời giải.

Ta có $BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} = 10\sqrt{2}$.

Khi đó $AM = \frac{BC}{2} = 5\sqrt{2}$.



Chọn đáp án **A** □

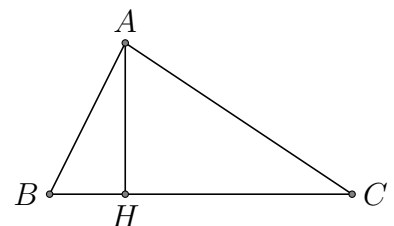
Câu 156. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH , $AC = 6$ và $AH = \frac{24}{5}$. Tính độ dài cạnh BC .

- A. $BC = \frac{6}{5}$. B. $BC = \frac{144}{5}$. C. $BC = 8$. D. $BC = 10$.

Lời giải.

Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AB = 8$.

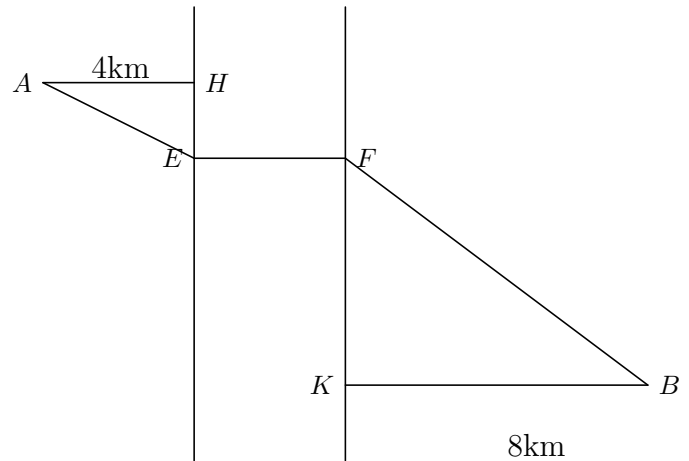
Suy ra $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 10$.



Chọn đáp án **D** □

Câu 157.

Hai thành phố A và B cách nhau một con sông. Người ta xây dựng một cây cầu $EF = 1$ km bắc qua sông và vuông góc với bờ sông, biết rằng thành phố A cách con sông một khoảng là 4 km và thành phố B cách con sông một khoảng là 8 km (hình vẽ), $HE = 3$ km, $KF = 6$ km. Tính tổng quãng đường d đi từ A đến B (đi theo đường $AEFB$).



- A. $d = 16$ km. B. $d = 15$ km.
C. $d = 22$ km. D. $d = 21$ km.

Lời giải.

Ta có $d = AE + EF + FB$, trong đó
$$\begin{cases} AE = \sqrt{AH^2 + HE^2} = 5 \\ EF = 1 \\ FB = \sqrt{FK^2 + KB^2} = 10 \end{cases} \Rightarrow d = 16.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 158. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH . Tìm khẳng định đúng.

- A. $AH^2 = AB \cdot AC$. B. $AH^2 = BH \cdot CH$.
C. $AH^2 = BH \cdot BC$. D. $\frac{1}{BC^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$.

Lời giải.

B đúng theo hệ thức lượng trong tam giác vuông. Do đó, A, C sai.

D sai vì $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AH^2}$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 159. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a\sqrt{2}$, $AC = a\sqrt{6}$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

- A. $a\sqrt{2}$. B. $2a\sqrt{2}$. C. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. D. $4a\sqrt{2}$.

Lời giải.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ bằng $\frac{1}{2} \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + (a\sqrt{6})^2} = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{8} = a\sqrt{2}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 160. Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = 13$, $AB = 5$. Tính độ dài đường cao kẻ từ đỉnh A của tam giác.

- A. $\frac{50}{13}$. B. 12. C. $\frac{60}{13}$. D. $\frac{13}{60}$.

Lời giải.

Áp dụng định lý Pytago ta có $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 12$.

Gọi h là độ dài đường cao kẻ từ đỉnh A , khi đó:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{169}{3600} \Rightarrow h = \frac{60}{13}.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 161. Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 12$, $BC = 13$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác là

- A. $\sqrt{255}$. B. 1. C. 2. D. 4.

Lời giải.

Từ gt suy ra $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Do đó $\triangle ABC$ vuông tại A .

$$\text{Ta có } S = p \cdot r \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{AB \cdot AC}{2}}{\frac{AB + AC + BC}{2}} = \frac{5 \cdot 12}{5 + 12 + 13} = 2.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 162. Cho tam giác ABC có $AB = \sqrt{5}$, $AC = 2$, $BC = \sqrt{13}$. Diện tích tam giác ABC là

- A. 4. B. 2. C. $\sqrt{5}$. D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ &= \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 2 + \sqrt{13}}{2} \left(\frac{\sqrt{5} + 2 + \sqrt{13}}{2} - \sqrt{5} \right) \left(\frac{\sqrt{5} + 2 + \sqrt{13}}{2} - 2 \right) \left(\frac{\sqrt{5} + 2 + \sqrt{13}}{2} - \sqrt{13} \right)} \\ &= \sqrt{\frac{(\sqrt{5} + 2 + \sqrt{13}) \cdot (-\sqrt{5} + 2 + \sqrt{13}) \cdot (\sqrt{5} - 2 + \sqrt{13}) \cdot (\sqrt{5} + 2 - \sqrt{13})}{16}} \\ &= \sqrt{\frac{(12 + 4\sqrt{13}) \cdot (-12 + 4\sqrt{13})}{16}} \\ &= \sqrt{\frac{64}{16}} = 2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **B** □

Câu 163. Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $BC = 4$, $AC = 5$. Độ dài đoạn trung tuyến AM là

- A. 13. B. $\sqrt{13}$. C. $\frac{\sqrt{26}}{2}$. D. $\frac{13}{2}$.

Lời giải.

Theo gt suy ra $\triangle ABC$ vuông tại B và $BM = \frac{1}{2}BC = 2$.

Do đó, trung tuyến AM được tính như sau:

$$AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}.$$

Chọn đáp án **B** □

Câu 164. Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 3\sqrt{3}$, $BC = 7$. Số đo góc lớn nhất của tam giác ABC xấp xỉ

- A. 115° . B. 114° . C. 101° . D. 110° .

Lời giải.

Góc lớn nhất của tam giác là $\hat{A}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cos \hat{A} \\ \Rightarrow \cos \hat{A} &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{-13}{18\sqrt{3}} \\ \Rightarrow \hat{A} &\approx 115^\circ. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 165. Cho tam giác MNP đồng dạng với tam giác ABC theo tỉ số $k = 2$. Biết $AB = 4$ cm, $AC = 6$ cm và $NP = 16$ cm. Tính diện tích S của tam giác ABC .

- A. $S = \sqrt{15} \text{ cm}^2$. B. $S = 3\sqrt{15} \text{ cm}^2$. C. $S = 5\sqrt{15} \text{ cm}^2$. D. $S = 7\sqrt{15} \text{ cm}^2$.

Lời giải.

Ta có $\frac{NP}{BC} = 2 \Rightarrow BC = 8 \Rightarrow p = \frac{a+b+c}{2} = 9$.

Sử dụng công thức Hê-rông ta có $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{9 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1} = 3\sqrt{15} \text{ cm}^2$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 166. Cho tam giác ABC bằng tam giác MNP . Biết $AB = 4$ cm, $AC = 6$ cm, $\widehat{N} = 60^\circ$ và $\widehat{P} = 75^\circ$. Tính diện tích S của tam giác ABC .

- A. $S = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2$. B. $S = 6\sqrt{3} \text{ cm}^2$. C. $S = 12\sqrt{2} \text{ cm}^2$. D. $S = 6\sqrt{2} \text{ cm}^2$.

Lời giải.

Ta có $\widehat{B} = \widehat{N} = 60^\circ$ và $\widehat{C} = \widehat{P} = 75^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 45^\circ$.

Do đó $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = 6\sqrt{2} \text{ cm}^2$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 167. Cho tam giác MNP đồng dạng với tam giác ABC theo tỉ số $k = 2$. Biết diện tích của tam giác ABC là 6 cm^2 và chu vi của tam giác MNP là 24 cm. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác MNP .

- A. $r = 0,5 \text{ cm}$. B. $r = 2 \text{ cm}$. C. $r = \sqrt{2} \text{ cm}$. D. $r = 1,5 \text{ cm}$.

Lời giải.

Ta có $\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = k^2 = 4 \Rightarrow S_{MNP} = 24 \text{ cm}^2$.

Áp dụng công thức $S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = 2 \text{ cm}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 168. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có $A(-3; 0)$, $B(0; 4)$ và $C(3; 2)$. Tính diện tích S của tam giác ABC .

- A. $S = 7$. B. $S = 8$. C. $S = 9$. D. $S = 9,2$.

Lời giải.

Ta có $AB = 5$, $AC = 2\sqrt{10}$, $BC = \sqrt{13}$. Áp dụng định lí cosin ta được

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B \Rightarrow \cos B = \frac{-1}{5\sqrt{13}} \Rightarrow \sin B = \frac{18}{5\sqrt{13}}$$

Do đó $S = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin B = 9$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 169. Cho tam giác ABC có $AB = 3$ cm, $AC = 8$ cm. Tìm số đo góc A để tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

- A. $\widehat{A} = 30^\circ$. B. $\widehat{A} = 45^\circ$. C. $\widehat{A} = 60^\circ$. D. $\widehat{A} = 90^\circ$.

Lời giải.

Ta có $S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8 \cdot \sin A$. Để $S_{\max} \Rightarrow \sin A$ lớn nhất, do đó $\widehat{A} = 90^\circ$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 170. Cho tam giác ABC có $AB = 1$ cm, $AC = 3$ cm. Biết độ dài cạnh BC là một số nguyên. Tính diện tích S của tam giác ABC .

A. $S = \frac{\sqrt{35}}{4} \text{ cm}^2$. B. $S = \frac{70}{4} \text{ cm}^2$. C. $S = \frac{35}{2} \text{ cm}^2$. D. $S = \frac{70}{2} \text{ cm}^2$.

Lời giải.

Gọi $BC = x > 0, x \in \mathbb{Z}$. Ta có $x^2 = 1 + 9 - 2 \cdot 3 \cdot \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{10 - x^2}{6}$.

Vì $0^\circ < \widehat{A} < 180^\circ \Rightarrow -1 < \frac{10 - x^2}{6} < 1 \Rightarrow 4 < x^2 < 11$ và $x \in \mathbb{Z}$ nên $x = 3$.

Do đó $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4} = \frac{\sqrt{35}}{4} \text{ cm}^2$.

Hoặc ta dùng bất đẳng thức $2 = 3 - 1 = AC - AB < BC < AC + AB = 3 + 1 = 4$ suy ra $BC = 3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 171. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AC = 6$ cm và $BC = 10$ cm. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

A. $r = 4$ cm. B. $r = 3$ cm. C. $r = 2$ cm. D. $r = 1$ cm.

Lời giải.

Ta có $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$ cm.

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24 \text{ cm}^2$.

Nửa chu vi tam giác ABC là $p = \frac{AB + BC + AC}{2} = \frac{10 + 8 + 6}{2} = 12$ cm.

Suy ra bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC là $r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{24}{12} = 2$ cm.

Chọn đáp án (C) □

Câu 172. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$ và $\widehat{BAD} = 45^\circ$. Tính diện tích S của hình bình hành $ABCD$ theo a .

A. $S = \frac{a^2}{2}$. B. $S = a^2$. C. $S = \frac{3a^2}{2}$. D. $S = 2a^2$.

Lời giải.

Diện tích hình bình hành $ABCD$ bằng

$$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \sin \widehat{BAD} = a \cdot a\sqrt{2} \sin 45^\circ = a^2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 173. Cho tam giác HIK có $\frac{\sin K}{\sin H} = \frac{1}{2}$ và $HI^2 + IK^2 = 45a^2$. Tính KI theo a .

A. $KI = a\sqrt{3}$. B. $KI = 6a$. C. $KI = a\sqrt{6}$. D. $KI = 3a$.

Lời giải.

Do $\frac{\sin K}{\sin H} = \frac{1}{2}$ nên áp dụng Định lý Sin, ta có $\frac{HI}{KI} = \frac{1}{2}$.

Do đó, $HI^2 + KI^2 = 45a^2 \Leftrightarrow HI^2 + 4HI^2 = 45a^2 \Leftrightarrow HI^2 = 9a^2 \Leftrightarrow HI = 3a$.

Suy ra $KI = 6a$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 174. Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh là a, b, c và $\sin^2 B + \sin^2 C = 2\sin^2 A$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. $a < b + c \leq 2a$. B. $a \leq b + c \leq 2a$. C. $b + c \geq 2a$. D. $b + c = 2a$.

Lời giải.

Ta có $a < b + c$.

Áp dụng Định lý Sin, ta có

$$\sin^2 B + \sin^2 C = 2\sin^2 A \Rightarrow b^2 + c^2 = 2a^2 \Rightarrow 4a^2 = 2(b^2 + c^2) \geq (b + c)^2.$$

Suy ra $2a \geq b + c$.

Vậy $a < b + c \leq 2a$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 175. Cho tam giác ABC có chu vi bằng 24, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác là 5. Tính tổng $S = \sin A + \sin B + \sin C$.

- A. $S = 4, 8$. B. $S = 2, 4$. C. $S = 2$. D. $S = 1, 4$.

Lời giải.

Áp dụng Định lý Sin, ta có $S = \frac{a + b + c}{2R} = \frac{24}{10} = 2,4$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 176. Cho tam giác ABC có $a = 3, b = 6$ và $c = \sqrt{15}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. $\sin^2 A + \sin^2 B = 3\sin^2 C$. B. $\sin^2 B + \sin^2 C = 3\sin^2 A$.
C. $\sin^2 A + \sin^2 C = 3\sin^2 B$. D. $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$.

Lời giải.

Từ giả thiết $a = 3, b = 6, c = \sqrt{15}$ suy ra $a^2 + b^2 = 3c^2$.

Áp dụng Định lý Sin, ta có $(2R \sin A)^2 + (2R \sin B)^2 = 3(2R \sin C)^2 \Rightarrow \sin^2 A + \sin^2 B = 3\sin^2 C$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 177. Cho tam giác ABC cân tại A và có $\widehat{A} = 100^\circ$. Giả sử P là một điểm thuộc phần kéo dài của đoạn thẳng AB về phía B sao cho $AP = BC$. Số đo $\widehat{APC}$ là

- A. 45° . B. 60° . C. 30° . D. 90° .

Lời giải.

Do ABC là tam giác cân tại A và $\widehat{A} = 100^\circ$ nên ta có $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 40^\circ$.

Suy ra $\widehat{PBC} = 140^\circ \Rightarrow \widehat{APC} + \widehat{BCP} = 40^\circ$.

Dùng phương pháp loại trừ suy ra $\widehat{APC} = 30^\circ$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 178. Cho tam giác ABC có $AB = 4$ cm, $BC = 6$ cm, $AC = 8$ cm. Gọi M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $BM = \frac{1}{3}BC$. Tính độ dài cạnh AM .

- A. 4 cm. B. $2\sqrt{5}$ cm. C. $2\sqrt{6}$ cm. D. $4\sqrt{2}$ cm.

Lời giải.

Trong tam giác ABC , ta có

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{4^2 + 6^2 - 8^2}{2 \cdot 4 \cdot 6} = -\frac{1}{4}.$$

Trong tam giác ABM , ta có

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2 \cdot AB \cdot BM \cos B = 4^2 + 2^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = 24.$$

Suy ra $AM = 2\sqrt{6}$ cm.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 179. Cho tam giác ABC có A, B là hai điểm cố định, C là điểm thay đổi thỏa mãn $AC^2 + BC^2 = k^2$ với k là số thực dương không đổi sao cho $k\sqrt{2} > AB$. Tập hợp tất cả các điểm C thuộc hình nào sau đây?

- A. Một đường thẳng. B. Một đường tròn.
C. Hình gồm 2 điểm trên mặt phẳng. D. Một tia.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của AB , ta có $MC^2 = \frac{AC^2 + BC^2}{2} - \frac{AB^2}{4} = \frac{2k^2 - AB^2}{4}$ suy ra C thuộc đường tròn tâm M , bán kính $\sqrt{\frac{2k^2 - AB^2}{4}}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 180. Cho tam giác ABC có $AB = 5, BC = 8$ và $AC = 10$. Gọi M là trung điểm của AC . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC}$.

- A. $-\frac{91}{4}$. B. $-\frac{139}{4}$. C. $\frac{125}{4}$. D. $\frac{117}{4}$.

Lời giải.

$$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{4} + \frac{BC^2}{2} = \frac{117}{4}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 181. Cho hai điểm cố định A, B sao cho $AB = a > 0$. Gọi $\mathcal{X}$ là tập hợp tất cả các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -\frac{a^2}{2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\mathcal{X} = \emptyset$. B. $\mathcal{X}$ là một đường tròn.
C. $\mathcal{X}$ là một đường thẳng. D. $\mathcal{X}$ có đúng 1 phần tử.

Lời giải.

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{MA^2 + MB^2 - a^2}{2} \Rightarrow MA^2 + MB^2 = 0, \text{ suy ra không có điểm } M \text{ nào thỏa mãn.}$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 182. Cho tam giác ABC có $AB = 3$ cm, $BC = 6$ cm, $AC = 8$ cm. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, AM . Tính độ dài cạnh BN .

- A. $\frac{\sqrt{11}}{2}$ cm. B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$ cm. C. $\frac{\sqrt{34}}{4}$ cm. D. $\frac{\sqrt{39}}{4}$ cm.

Lời giải.

Trong tam giác ABC , ta có

$$AM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{3^2 + 8^2}{2} - \frac{6^2}{4} = \frac{55}{2}.$$

Trong tam giác ABM , ta có

$$BN^2 = \frac{AB^2 + BM^2}{2} - \frac{AM^2}{4} = \frac{3^2 + 3^2}{2} - \frac{55}{8} = \frac{17}{8}.$$

Vậy $BN = \frac{\sqrt{34}}{4}$ cm.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 183. Cho tứ giác $ABCD$ có $AB = 2\sqrt{2}$, $BC = 2\sqrt{10}$, $CD = DA = 5$, $AC = 8$, $BD = \sqrt{29}$. Gọi M, N là trung điểm các cạnh AC, BD . Độ dài của MN gần với giá trị nào nhất?

A. 1,55.

B. 1,51.

C. 1,21.

D. 1,12.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}).\end{aligned}$$

Do đó, $MN^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC})^2 = \frac{1}{4}(AD^2 + BC^2 - 2 \cdot \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC})$.

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB}\end{aligned}$$

Ta có

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CA \cdot CB \cdot \cos \widehat{ACB} = CA \cdot CB \cdot \frac{CA^2 + CB^2 - AB^2}{2 \cdot CA \cdot CB} = \frac{CA^2 + CB^2 - AB^2}{2} = 48.$$

$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB} = CD \cdot CB \cdot \cos \widehat{BCD} = CD \cdot CB \cdot \frac{CD^2 + CB^2 - BD^2}{2 \cdot CD \cdot CB} = \frac{CD^2 + CB^2 - BD^2}{2} = 18.$$

Suy ra $MN^2 = \frac{1}{4}(25 + 40 - 2 \cdot 30) = \frac{5}{4}$.

Vậy $MN = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1,12$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 184. Cho tam giác ABC có diện tích bằng S . Đặt $AB = c$, $BC = a$ và $AC = b$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng với mọi tam giác ABC vuông tại A ?

A. $S = \frac{c^2 \cos C}{2 \cos A}$.

B. $S = \frac{a^2 \cos A}{2 \cos B}$.

C. $S = \frac{b^2 \cos B}{2 \cos C}$.

D. $S = \frac{bc \cos C}{2 \cos B}$.

Lời giải.

Tam giác ABC vuông tại A suy ra $\cos A = 0$. Do đó các khẳng định $S = \frac{c^2 \cos C}{2 \cos A}$ và $S = \frac{a^2 \cos A}{2 \cos B}$ là sai.

Do tam giác ABC vuông tại A nên $\frac{b^2 \cos B}{2 \cos C} = \frac{b^2 \cdot \frac{c}{a}}{2 \cdot \frac{a}{a}} = \frac{1}{2}bc = S$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 185. Cho tam giác ABC có diện tích bằng S . Đặt $AB = c$, $BC = a$ và $AC = b$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng với mọi tam giác ABC vuông tại C ?

- A. $S \leq \frac{c^2}{4}$. B. $S \leq \frac{a^2}{4}$. C. $S \leq \frac{b^2}{4}$. D. $S \leq \frac{a^2}{2}$.

Lời giải.

Áp dụng Bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương a, b ta có

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{4} = \frac{c^2}{4} + \frac{1}{2}ab.$$

$$\text{Suy ra } S = \frac{1}{2}ab \leq \frac{c^2}{4}.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 186. Cho tam giác ABC vuông tại A , có $BC = 12,5$ cm và diện tích $S = 31,25$ cm². Tính AB biết $AB < AC$.

- A. $AB = 5\sqrt{5}$ cm. B. $AB = \frac{5\sqrt{5}}{2}$ cm. C. $AB = \frac{5\sqrt{5}}{3}$ cm. D. $AB = \frac{5\sqrt{5}}{4}$ cm.

Lời giải.

Đặt $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Theo giả thiết ta có $c < b$.

Ta có hệ

$$\begin{cases} b^2 + c^2 = a^2 \\ S = \frac{1}{2}bc \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 + c^2 = 156,25 \\ bc = 62,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 + c^2 = 156,25 \\ b^2 c^2 = 3906,25. \end{cases}$$

Suy ra b^2, c^2 là nghiệm của phương trình

$$t^2 - 156,25t + 3906,25 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 125 \\ t = 31,25. \end{cases}$$

$$\text{Do } c < b \text{ nên } \begin{cases} b^2 = 125 \\ c^2 = 31,25. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } AB = c = \frac{5\sqrt{5}}{2}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 187. Cho tam giác ABC vuông tại B , có cạnh $AC = 15$ cm và chu vi bằng 36 cm. Tính diện tích S của tam giác ABC .

- A. $S = 54$ cm². B. $S = 90$ cm². C. $S = 67,5$ cm². D. $S = 135$ cm².

Lời giải.

Đặt $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Từ giả thiết ta có hệ

$$\begin{cases} b = 15 \\ a + b + c = 36 \\ a^2 + c^2 = b^2. \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a + c = 21 \\ a^2 + c^2 = 225 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = 21 \\ (a + c)^2 - 2ac = 225 \end{cases} \Rightarrow 2ac = (a + c)^2 - 225 = 216.$$

$$\text{Vậy } S = \frac{1}{2}ac = \frac{216}{4} = 54 \text{ cm}^2.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 188. Biết cạnh huyền của một tam giác vuông bằng 29 cm và tỉ số hai cạnh góc vuông bằng $\frac{5}{2}$.
 Tính diện tích S của tam giác vuông đó.

- A. $S = 250 \text{ cm}^2$. B. $S = 145 \text{ cm}^2$. C. $S = 290 \text{ cm}^2$. D. $S = 125 \text{ cm}^2$.

Lời giải.

Gọi tam giác đã cho là ABC vuông tại A và đặt $BC = a, AC = b, AB = c, b > c$. Khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} b^2 + c^2 = a^2 \\ \frac{b}{c} = \frac{5}{2} \\ a = 29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 + c^2 = 841 \\ \frac{b}{c} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Suy ra $\left(\frac{5}{2}c\right)^2 + c^2 = 841 \Leftrightarrow c^2 = 116 \Rightarrow c = 2\sqrt{29} \Rightarrow b = 5\sqrt{29}$.

Vậy $S = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{29} \cdot 2\sqrt{29} = 145 \text{ cm}^2$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 189. Cho tam giác ABC vuông ở A , $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{7}$ và đường cao $AH = 15 \text{ cm}$. Tính diện tích S của tam giác ABC .

- A. $S = \frac{1215}{7} \text{ cm}^2$. B. $S = \frac{1215}{14} \text{ cm}^2$. C. $S = \frac{1665}{7} \text{ cm}^2$. D. $S = \frac{1665}{14} \text{ cm}^2$.

Lời giải.

Đặt $BC = a, AC = b, AB = c, AH = h$. Khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} \frac{c}{b} = \frac{5}{7} \\ \frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \\ h = 15. \end{cases}$$

Suy ra $\frac{1}{225} = \frac{25}{49c^2} + \frac{1}{c^2} \Leftrightarrow c^2 = \frac{74 \cdot 225}{49} \Leftrightarrow c = \frac{15\sqrt{74}}{7} \Rightarrow b = 3\sqrt{74}$.

Vậy $S = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{74} \cdot \frac{15\sqrt{74}}{7} = \frac{1665}{7} \text{ cm}^2$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 190. Cho tam giác ABC vuông ở A , có AD là đường phân giác trong. Biết $BD = 15 \text{ cm}$ và $CD = 20 \text{ cm}$. Tính diện tích S của tam giác ABC .

- A. $S = 245 \text{ cm}^2$. B. $S = 294 \text{ cm}^2$. C. $S = 367,5 \text{ cm}^2$. D. $S = 490 \text{ cm}^2$.

Lời giải.

Đặt $BC = a, AC = b, AB = c$. Khi đó, ta có hệ

$$\begin{cases} b^2 + c^2 = a^2 \\ \frac{c}{b} = \frac{BD}{CD} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 + c^2 = 1225 \\ \frac{c}{b} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Suy ra $b^2 + \left(\frac{3}{4}b\right)^2 = 1225 \Leftrightarrow b^2 = 784 \Rightarrow b = 28 \Rightarrow c = 21$.

Vậy $S = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2} \cdot 28 \cdot 21 = 294 \text{ cm}^2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 191. Cho tam giác ABC vuông tại B , có BK là đường cao. Biết $BK = 14$ cm và $\frac{KA}{KC} = \frac{1}{4}$. Tính diện tích S của tam giác ABC .

- A. $S = 490$ cm². B. $S = 245$ cm². C. $S = 98$ cm². D. $S = 196$ cm².

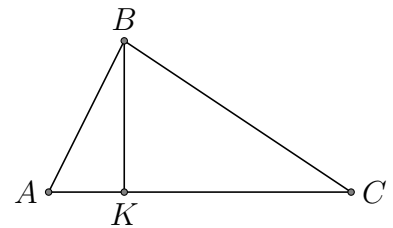
Lời giải.

$$\text{Ta có } \frac{S_{\triangle ABK}}{S_{\triangle BCK}} = \frac{KA}{KC} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Dễ thấy } \triangle ABK \sim \triangle BCK \Rightarrow \frac{BK}{CK} = \frac{1}{2} \Rightarrow CK = 28 \text{ cm}.$$

$$\text{Suy ra } KA = 7 \text{ cm} \Rightarrow AC = 35 \text{ cm}.$$

$$\text{Khi đó } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BK \cdot AC = 245 \text{ cm}^2.$$



Chọn đáp án (B) □

Câu 192. Trong một tam giác vuông, đường cao ứng với cạnh huyền chia tam giác thành hai phần có diện tích lần lượt bằng 54 cm² và 96 cm². Tính độ dài l của cạnh huyền.

- A. $l = 24$ cm. B. $l = 25$ cm. C. $l = 34$ cm. D. $l = 36$ cm.

Lời giải.

Xét tam giác vuông $\triangle ABC$ tại B với đường cao BH .

Dễ thấy hai tam giác $\triangle ABH \sim \triangle BCH$.

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} \frac{BH^2}{CH^2} &= \frac{AH^2}{BH^2} = \frac{S_{ABH}}{S_{BHC}} = \frac{54}{96} = \frac{9}{16} \\ \Rightarrow \frac{BH}{CH} &= \frac{AH}{BH} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

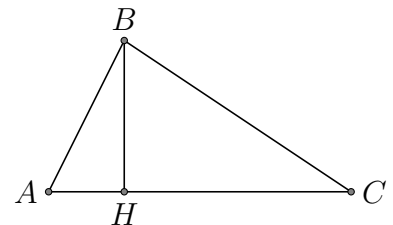
$$\text{Đặt } AH = 3x, BH = 4x \Rightarrow CH = \frac{4}{3}BH = \frac{16x}{3}.$$

$$\text{Khi đó } S_{ABH} = \frac{1}{2}AH \cdot BH = 6x^2 = 54 \Rightarrow x = 3.$$

$$\text{Suy ra } AH = 9, BH = 12, CH = 16.$$

$$\text{Vậy } l = AH + HC = 25 \text{ cm}.$$

Chọn đáp án (B) □



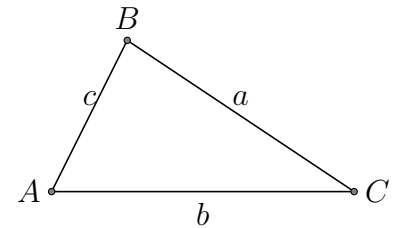
Câu 193. Cho tam giác ABC biết $a = \sqrt{24}$, $c = 2 + \sqrt{12}$ và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R = 2\sqrt{2}$. Tìm cạnh b của tam giác ABC , biết b là số nguyên.

- A. $b = 3$. B. $b = 8$. C. $b = 2$. D. $b = 4$.

Lời giải.

Theo định lí sin ta có

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sin A} &= \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{24}}{\sin A} &= \frac{2 + \sqrt{12}}{\sin C} = 4\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin C = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} = 60^\circ \\ \hat{C} = 75^\circ. \end{cases} \end{aligned}$$



Khi đó $\hat{B} = 45^\circ \Rightarrow \frac{b}{\sin B} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow b = 4$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 194. Cho tam giác ABC có $AB = 5\sqrt{6}$, $BC = 7\sqrt{6}$ và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R = \frac{35}{4}$. Gọi M là trung điểm của AC . Tính bán kính R_1 của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM .

A. $R_1 = \frac{\sqrt{7}}{2}$ hoặc $R_1 = \frac{\sqrt{33}}{4}$.

B. $R_1 = \frac{3\sqrt{7}}{2}$ hoặc $R_1 = \frac{3\sqrt{33}}{4}$.

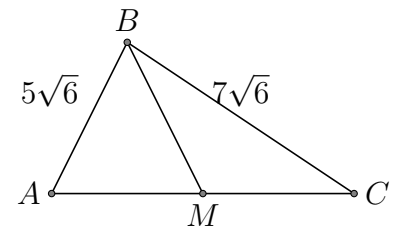
C. $R_1 = \frac{5\sqrt{7}}{2}$ hoặc $R_1 = \frac{5\sqrt{33}}{4}$.

D. $R_1 = \frac{7\sqrt{7}}{2}$ hoặc $R_1 = \frac{7\sqrt{33}}{4}$.

Lời giải.

Áp dụng định lí sin ta được

$$\begin{aligned} \frac{AB}{\sin C} &= \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} = 2R = \frac{35}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{5\sqrt{6}}{\sin C} &= \frac{AC}{\sin B} = \frac{7\sqrt{6}}{\sin A} = \frac{35}{2} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sin C = \frac{2\sqrt{6}}{7} \\ \sin A = \frac{2\sqrt{6}}{5} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \cos C = \pm \frac{5}{7} \\ \cos A = \pm \frac{1}{5}. \end{cases} \end{aligned}$$



Với $\cos A = \frac{1}{5}$, áp dụng định lí cosin ta được

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A \Leftrightarrow AC^2 - 2\sqrt{6}AC - 144 = 0 \Leftrightarrow AC = 6\sqrt{6} \Rightarrow AM = 3\sqrt{6}.$$

Suy ra $BM^2 = AB^2 + AM^2 - 2AB \cdot AM \cdot \cos A = 168 \Rightarrow BM = 2\sqrt{42}$.

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABM ta có $\frac{BM}{\sin A} = 2R_1 \Rightarrow R_1 = \frac{5\sqrt{7}}{2}$.

Tương tự đối với trường hợp $\cos A = -\frac{1}{5}$ ta được $R_1 = \frac{5\sqrt{33}}{4}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 195. Cho tam giác ABC có $BC = \sqrt{3}$, $AB = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$ và $\widehat{ABC} = 45^\circ$. AM là đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$ ($M \in BC$). Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMC .

A. $R = 2\sqrt{3} - 2$.

B. $R = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$.

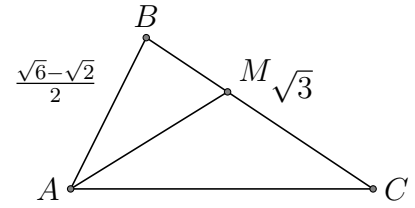
C. $R = \sqrt{3}$.

D. $R = \sqrt{3} - 1$.

Lời giải.

Áp dụng định lý cô-sin

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B = 2 \Rightarrow AC = \sqrt{2}.$$



Áp dụng định lý sin ta có

$$\begin{aligned} \frac{BC}{\sin A} &= \frac{AC}{\sin B} \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{\sin A} &= \frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ. \end{aligned}$$

Suy ra $\widehat{AMC} = \widehat{MAB} + \widehat{ABM} = 75^\circ$.

Áp dụng định lý sin ta có $\frac{AC}{\sin \widehat{AMC}} = 2R \Rightarrow R = \frac{AC}{2 \sin \widehat{AMC}} = \sqrt{3} - 1$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 196. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 60^\circ$, $h_c = 2\sqrt{3}$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng 10. Tính các cạnh AB , AC , BC .

A. $AB = 2 + 12\sqrt{2}$, $AC = 4$, $BC = 10\sqrt{3}$.

B. $AB = 1 + 12\sqrt{2}$, $AC = 4$, $BC = 10\sqrt{3}$.

C. $AB = 2 + 12\sqrt{2}$, $AC = 2$, $BC = 10\sqrt{3}$.

D. $AB = 2 + 6\sqrt{2}$, $AC = 4$, $BC = 10\sqrt{3}$.

Lời giải.

Kẻ $CH \perp AB$ tại H .

Xét tam giác AHC ta có $AC = \frac{CH}{\sin A} = 4$.

Áp dụng định lý sin ta được $BC = 2R \cdot \sin A = 10\sqrt{3}$.

Ta có $HB = \sqrt{BC^2 - HC^2} = 12\sqrt{2}$.

Tam giác vuông AHC có $HA = AC \cdot \cos A = 2$.

Suy ra $AB = AH + HB = 2 + 12\sqrt{2}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 197. Cho tam giác ABC cân có $\widehat{BAC} = 120^\circ$ và $AB = AC = \sqrt{7}$. Lấy điểm N trên cạnh BC sao cho $CN = \frac{3}{5}BC$. Tính độ dài AN .

A. $AN = \frac{\sqrt{7}}{5}$.

B. $AN = \frac{\sqrt{21}}{5}$.

C. $AN = \frac{7}{5}$.

D. $AN = \frac{11}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\hat{B} = \hat{C} = 30^\circ$.

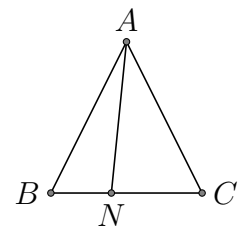
Áp dụng định lý cô-sin ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = 21 \Rightarrow BC = \sqrt{21}.$$

$$\text{Suy ra } CN = \frac{3}{5}BC = \frac{3\sqrt{21}}{5}.$$

Áp dụng định lý cô-sin trong tam giác ANC có

$$AN^2 = AC^2 + NC^2 - 2AC \cdot NC \cdot \cos C = \frac{49}{25} \Rightarrow AN = \frac{7}{5}.$$



Chọn đáp án **C**

□

Câu 198. Cho tam giác ABC cân tại A có cạnh $AB = 5$, nội tiếp trong đường tròn tâm O và bán kính $R = 3$. Tính cosin của các góc của tam giác ABC .

A. $\cos A = \frac{7}{18}, \cos B = \cos C = \frac{\sqrt{11}}{6}$.

B. $\cos A = \frac{\sqrt{11}}{6}, \cos B = \cos C = \frac{7}{18}$.

C. $\cos A = \frac{7}{9}, \cos B = \cos C = \frac{\sqrt{11}}{3}$.

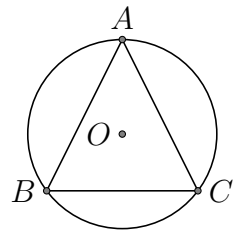
D. $\cos A = \frac{\sqrt{11}}{3}, \cos B = \cos C = \frac{7}{9}$.

Lời giải.

Áp dụng định lý sin ta được

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow \sin C = \frac{5}{6} = \sin B$$

Khi đó $\cos C = \cos B = \sqrt{1 - \sin^2 C} = \frac{\sqrt{11}}{6}$.



Chọn đáp án **A**

□

Câu 199. Cho tam giác ABC có các cạnh $BC = a, AC = b, AB = c$ và có diện tích bằng S . Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức đúng?

A. $\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$.

B. $\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2S}$.

C. $\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{S}$.

D. $\cot A = \frac{b^2 + c^2 + a^2}{4S}$.

Lời giải.

Áp dụng định lý cô-sin ta có $2bc \cos A = b^2 + c^2 - a^2 \Leftrightarrow \cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 200. Cho tam giác ABC có các cạnh $BC = a, AC = b$ và $AB = c$. Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức đúng?

A. $\frac{\tan B}{\tan A} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{c^2 + b^2 - a^2}$.

B. $\frac{\tan A}{\tan B} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{b^2 + c^2 - a^2}$.

C. $\frac{\tan A}{\tan B} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{c^2 + b^2 - a^2}$.

D. $\frac{\tan B}{\tan A} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{b^2 + c^2 - a^2}$.

Lời giải.

Áp dụng định lý cô-sin ta có $2bc \cos A = b^2 + c^2 - a^2 \Leftrightarrow \cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$

Suy ra $\tan A = \frac{4S}{b^2 + c^2 - a^2}$ tương tự ta có $\tan B = \frac{4S}{a^2 + c^2 - b^2}$.

Khi đó $\frac{\tan A}{\tan B} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{c^2 + b^2 - a^2}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 201. Cho tam giác ABC có các cạnh $BC = a, AC = b$ và $AB = c$. Tính $P = a^2 \sin B \cos B + b^2 \sin A \cos A$.

A. $P = S_{\triangle ABC}$.

B. $P = 2S_{\triangle ABC}$.

C. $P = 8S_{\triangle ABC}$.

D. $P = 4S_{\triangle ABC}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} P &= a^2 \sin B \cos B + b^2 \sin A \cos A \\ &= a^2 \frac{b}{2R} \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + b^2 \frac{a}{2R} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{ab(a^2 + c^2 - b^2 + b^2 + c^2 - a^2)}{4Rc} = \frac{abc}{4R} = 2S_{\triangle ABC}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 202. Nếu tam giác ABC có $\frac{\sin B}{\sin C} = 2 \cos A$ thì tam giác ABC là tam giác gì?

- A. Tam giác tù. B. Tam giác vuông (không cân).
C. Tam giác cân. D. Tam giác đều.

Lời giải.

Giả sử tam giác ABC có độ dài các cạnh tương ứng lần lượt là a, b, c khi đó

$$\begin{cases} \sin B = \frac{2S}{ac} \\ \sin C = \frac{2S}{ab} \\ \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \end{cases} \Rightarrow \frac{\sin B}{\sin C} = 2 \cos A \Leftrightarrow c^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow a = c.$$

Suy ra tam giác ABC cân.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 203. Cho tam giác ABC thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} \sin A + \sin B = 2 \sin C \\ \cos A + \cos B = 2 \cos C \end{cases}$. Hỏi tam giác ABC là tam giác gì?

- A. Tam giác tù. B. Tam giác vuông (không cân).
C. Tam giác cân. D. Tam giác đều.

Lời giải.

Từ điều kiện $\begin{cases} \sin A + \sin B = 2 \sin C \\ \cos A + \cos B = 2 \cos C \end{cases}$ bình phương hai vế điều kiện thứ nhất và điều kiện thứ hai rồi cộng vế với vế lại ta có

$$\begin{aligned} 2 + 2(\cos B \cos C + \sin B \sin C) &= 4 \\ \Leftrightarrow \cos(B - C) &= 1 \\ \Leftrightarrow \widehat{B} &= \widehat{C}. \end{aligned}$$

Thay vào điều kiện đề bài ta có $\begin{cases} \sin B = \sin A \\ \cos B = \cos A \end{cases} \Leftrightarrow \widehat{B} = \widehat{A}.$

Suy ra tam giác ABC là tam giác đều.

Chọn đáp án **(D)**

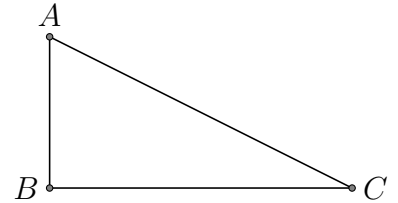
□

Câu 204. Một người đứng trên một ngọn tháp $AB = 100$ m, chân tháp là B , quan sát một vật đặt tại C trên mặt đất theo hướng tạo với AB một góc 60° . Tính khoảng cách h từ chân tháp B tới vật đặt tại C .

- A. $h = 100$ m. B. $h = 100\sqrt{3}$ m. C. $h = \frac{100\sqrt{3}}{3}$ m. D. $h = 50$ m.

Lời giải.

Xét tam giác vuông ABC có $h = BC = \frac{AB}{\tan C} = 100\sqrt{3}$ m.

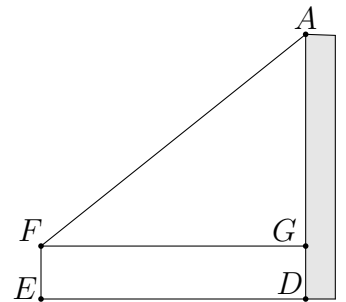


Chọn đáp án **(B)** □

Câu 205.

Một người đứng tại vị trí E , có chiều cao $EF = 1,8$ m, quan sát một cái cây AD , góc nhìn $\widehat{AFG} = 45^\circ$. Khoảng cách từ người tới vị trí cái cây là $ED = 20$ m. Tính chiều cao AD của cái cây (Hình vẽ bên).

- A. $AD = 21,8$ m. B. $AD = 20$ m.
C. $AD = 18,2$ m. D. $AD = 30$ m.



Lời giải.

Xét tam giác vuông AFG ta có $AG = GF \tan F = DE \tan F = 20$.

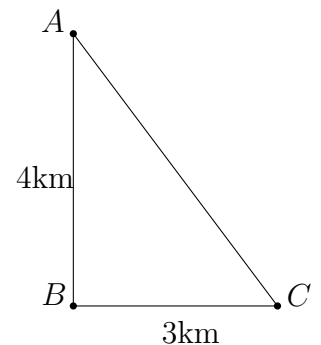
Khi đó $AD = AG + GD = 21,8$ m.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 206.

Bạn Hoa đi từ nhà ở vị trí A đến trường học tại vị trí C phải đi qua một cây cầu. Trận lũ lụt vừa qua cây cầu bị ngập nước, do đó bạn Hoa phải đi 4 km từ A đến B , rồi đi tiếp 3 km từ B đến trường ở vị trí C . Biết vận tốc đi bộ trung bình của Hoa là 5 km/h. Biết tam giác ABC vuông tại B . Hỏi nếu Hoa đi thẳng từ A đến C thì tốn ít hơn bao nhiêu thời gian so với việc đi từ A đến B , sau đó đi từ B đến C ?

- A. 36 phút. B. 48 phút. C. 24 phút. D. 12 phút.



Lời giải.

Xét tam giác vuông ABC có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5$ km.

Thời gian Hoa đi từ A thẳng đến C là $t_1 = \frac{AC}{5} = 1$ h.

Thời gian hoa đi từ A đến C vòng qua B là $t_2 = \frac{AB + BC}{5} = \frac{7}{5}$.

Suy ra thời gian đi vòng từ A đến C mà qua B nhiều hơn đi thẳng từ A đến C là $t_2 - t_1 = \frac{2}{5} = 24$ phút.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 207. Cho tam giác ABC có diện tích $S = 2R^2 \cdot \sin B \cdot \sin C$, với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC . Tìm số đo góc A .

- A. $\hat{A} = 30^\circ$. B. $\hat{A} = 45^\circ$. C. $\hat{A} = 60^\circ$. D. $\hat{A} = 90^\circ$.

Lời giải.

$$S = 2R^2 \cdot \sin B \cdot \sin C = 2 \cdot \frac{b}{2 \sin B} \cdot \frac{c}{2 \sin C} \cdot \sin B \cdot \sin C = \frac{1}{2}bc$$

$$\text{Mặt khác } S = \frac{1}{2}bc \sin A \Rightarrow \sin A = 1 \Rightarrow A = 90^\circ.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 208. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} < 90^\circ$ và AH, CK là các đường cao. Biết $S_{\triangle ABC} = 9S_{\triangle BHK}$ và $HK = 2\sqrt{2}$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

A. $R = \frac{9}{2}$.

B. $R = \frac{11}{2}$.

C. $R = \frac{13}{2}$.

D. $R = \frac{15}{2}$.

Lời giải.

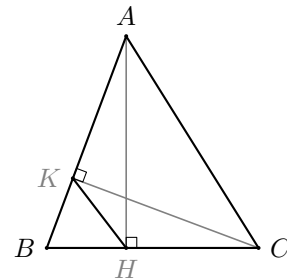
$\triangle BHK \sim \triangle BAC$ theo tỉ số k .

$$S_{\triangle ABC} = 9S_{\triangle BHK} \Rightarrow k = \frac{1}{3}.$$

$$\Rightarrow AC = 3HK = 6\sqrt{2}, AB = 3BH.$$

$$\Rightarrow \cos B = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin B = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$R = \frac{AC}{2 \sin B} = \frac{9}{2}.$$



Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 209. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính AC , $BD = a$, $\widehat{BAC} = \alpha$ và $\widehat{CAD} = \beta$. Tính diện tích S của tứ giác $ABCD$ theo a , α và β .

A. $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 \cos \alpha \sin \alpha}{\sin^2(\alpha + \beta)}.$

B. $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 \cos \beta \sin \beta}{\sin^2(\alpha + \beta)}.$

C. $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2(\cos \alpha \sin \alpha + \cos \beta \sin \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)}.$

D. $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2(\cos \alpha \sin \alpha - \cos \beta \sin \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)}.$

Lời giải.

$$AC = 2R = \frac{BD}{\sin \widehat{BAD}} = \frac{a}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

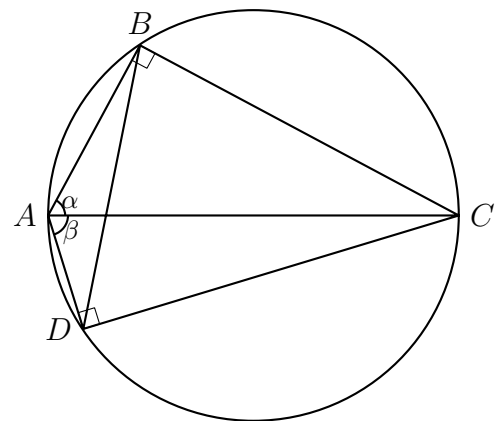
$$AB = AC \cdot \cos \alpha = \frac{a \cdot \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 \cos \alpha \sin \alpha}{\sin^2(\alpha + \beta)}.$$

$$AD = AC \cdot \cos \beta = \frac{a \cdot \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

$$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}AD \cdot AC \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 \cos \beta \sin \beta}{\sin^2(\alpha + \beta)}.$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2(\cos \alpha \sin \alpha + \cos \beta \sin \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)}.$$



Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 210. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ và diện tích là S . Biết $S = \frac{1}{4}(a + b - c)(a - b + c)$. Tìm số đo góc A .

A. $\widehat{A} = 30^\circ$.

B. $\widehat{A} = 60^\circ$.

C. $\widehat{A} = 90^\circ$.

D. $\widehat{A} = 120^\circ$.

Lời giải.

$$S = \frac{1}{4}(a + b - c)(a - b + c) = \frac{1}{4}(a^2 - b^2 - c^2 + 2bc) = \frac{1}{2}bc(1 - \cos A).$$

$$\Leftrightarrow \sin A = 1 - \cos A \Leftrightarrow \sqrt{1 - \cos^2 A} = 1 - \cos A \Leftrightarrow \begin{cases} \cos A = 0 \\ \cos A = 1 \end{cases} \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ.$$

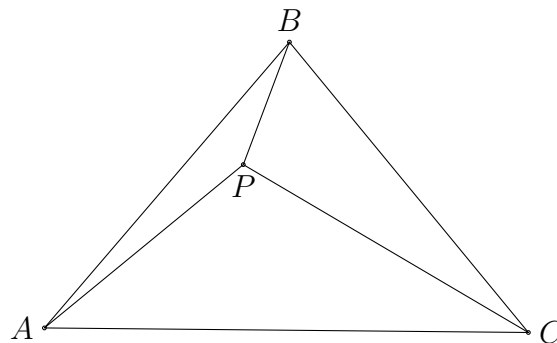
Chọn đáp án **C**

□

Câu 211. Cho tam giác ABC có tính chất sau: tồn tại một điểm P nằm trong tam giác sao cho $\widehat{PAB} = 10^\circ$, $\widehat{PBA} = 20^\circ$, $\widehat{PCA} = 30^\circ$ và $\widehat{PAC} = 40^\circ$. Khi đó tam giác ABC là tam giác gì?

- A. Tam giác ABC cân tại A .
B. Tam giác ABC cân tại B .
C. Tam giác ABC cân tại C .
D. Tam giác ABC đều.

Lời giải.



Đặt $\widehat{PCB} = x$ suy ra $\widehat{PBC} = 80^\circ - x$. Áp dụng định lý Sin ta có

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{PA}{PB} \cdot \frac{PB}{PC} \cdot \frac{PC}{PA} = \frac{\sin \widehat{PBA}}{\sin \widehat{PAB}} \cdot \frac{\sin \widehat{PCB}}{\sin \widehat{PBC}} \cdot \frac{\sin \widehat{PAC}}{\sin \widehat{PCA}} \\ &= \frac{\sin 20^\circ}{\sin 10^\circ} \cdot \frac{\sin x}{\sin(80^\circ - x)} \cdot \frac{\sin 40^\circ}{\sin 30^\circ} \\ &= \frac{\sin x(1 + 2 \cos 40^\circ)}{\sin(80^\circ - x)} \end{aligned}$$

Điều này cho ta $x = 40^\circ - x \Leftrightarrow x = 20^\circ$. Do vậy ta có $\widehat{ACB} = \widehat{BAC} = 50^\circ$.

Vậy tam giác ABC cân tại B .

Chọn đáp án **B**

□

Câu 212. Cho tam giác ABC cân tại A có $\hat{A} = 100^\circ$. Gọi P là một điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{PBC} = 20^\circ$ và $\widehat{PCB} = 30^\circ$. Biết $AB = 5$, độ dài cạnh BP là

- A. 10.
B. 5.
C. $5\sqrt{3}$.
D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải.

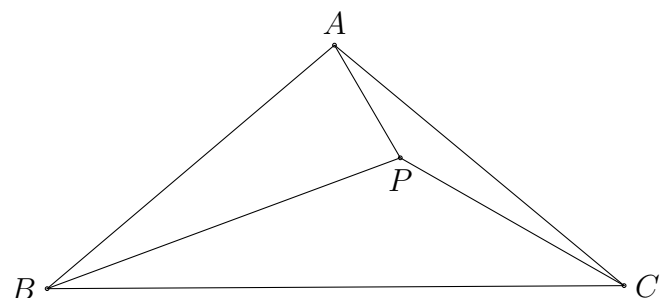
Áp dụng định lý sin cho tam giác ABC ta có:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} \text{ hay } BC = AB \cdot \frac{\sin 100^\circ}{\sin 40^\circ} = 2AB \cdot \sin 50^\circ.$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{BP}{\sin \widehat{BCP}} = \frac{BC}{\sin \widehat{BPC}}.$$

Vậy nên

$$BP = BC \cdot \frac{\sin 30^\circ}{\sin 130^\circ} = 2AB \cdot \sin 50^\circ \cdot \frac{\sin 30^\circ}{\sin 130^\circ} = 2AB \cdot \sin 30^\circ = AB = 5.$$



Chọn đáp án (B) □

Câu 213. Cho tam giác ABC thỏa mãn $b^2 = a(a + c)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. $\widehat{B} = 2\widehat{A}$. B. $\widehat{B} = \widehat{A}$. C. $\widehat{B} = \frac{1}{2}\widehat{A}$. D. $\widehat{B} = 3\widehat{A}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} b^2 = a(a + c) &\Leftrightarrow a^2 + c^2 - 2ac \cos B = a^2 + ac \\ &\Leftrightarrow c^2 - 2ac \cos B = ac \\ &\Leftrightarrow c - 2a \cos B = a \\ &\Leftrightarrow 2R \sin C - 4R \sin A \cos B = 2R \sin A \\ &\Leftrightarrow \sin C - 2 \sin A \cos B = \sin A \\ &\Leftrightarrow \sin(A + B) - 2 \sin A \cos B = \sin A \\ &\Leftrightarrow \cos A \sin B - \sin A \cos B = \sin A \\ &\Leftrightarrow \sin(B - A) = \sin A \\ &\Leftrightarrow B - A = A \Leftrightarrow B = 2A \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 214. Cho tam giác ABC cân với góc $A = 80^\circ$. Trên hai cạnh BC và AC lấy điểm D và E sao cho $\widehat{BAD} = 50^\circ$, $\widehat{ABE} = 30^\circ$. Tính $\widehat{BED}$.

- A. $\widehat{BED} = 30^\circ$. B. $\widehat{BED} = 40^\circ$. C. $\widehat{BED} = 50^\circ$. D. $\widehat{BED} = 60^\circ$.

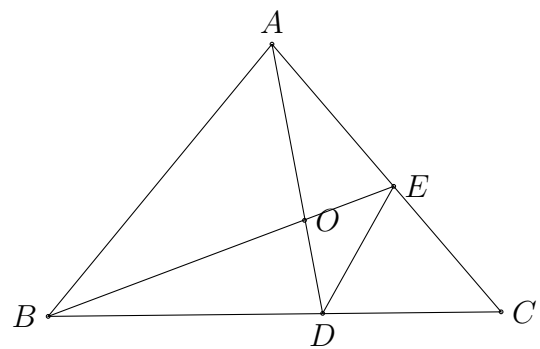
Lời giải.

Gọi O là giao điểm của AD và BE . Ta có $\widehat{ADB} = 80^\circ$, $\widehat{CBE} = 20^\circ$, $\widehat{AOB} = 100^\circ$, $\widehat{DAC} = 30^\circ$, $\widehat{AEB} = 70^\circ$.

Áp dụng định lý sin cho tam giác OBD ta có

$$\frac{OD}{OB} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 80^\circ}.$$

Tương tự $\frac{OB}{OA} = \frac{\sin 50^\circ}{\sin 30^\circ}$ và $\frac{OA}{OE} = \frac{\sin 70^\circ}{\sin 30^\circ}$.



$$\text{Nên } \frac{OD}{OE} = \frac{OD}{OB} \cdot \frac{OB}{OA} \cdot \frac{OA}{OE} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 80^\circ} \cdot \frac{\sin 50^\circ}{\sin 30^\circ} \cdot \frac{\sin 70^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{4 \sin 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 20^\circ}{\sin 80^\circ} = 1.$$

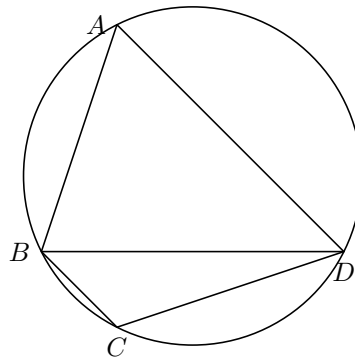
Vì vậy tam giác ODE cân tại O , mà $\widehat{ODE} = 100^\circ$ nên $\widehat{BED} = 40^\circ$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 215. Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ có $AB = CD = a$, $AD = b$, $BC = c$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\cos A = \frac{a - b}{c}$. B. $\cos A = \frac{c - b}{a}$. C. $\cos A = \frac{b - c}{2a}$. D. $\cos A = \frac{b - a}{2c}$.

Lời giải.



Ta có $BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos A = a^2 + c^2 - 2ac \cos C = a^2 + c^2 + 2ac \cos A$
cho nên $b^2 - c^2 = 2a(b + c) \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b - c}{2a}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 216. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm và tam giác GBC vuông tại G . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $2AB^2 + 2AC^2 = 9BC^2$.

B. $4AB^2 + 4AC^2 = 9BC^2$.

C. $2AB^2 + 2AC^2 = 7BC^2$.

D. $AB^2 + AC^2 = 5BC^2$.

Lời giải.

Tam giác GBC vuông tại G cho nên

$$\frac{4}{9}(m_b^2 + m_c^2) = a^2 \Leftrightarrow 2(a^2 + c^2) - b^2 + 2(a^2 + b^2) - c^2 = 9a^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 5a^2.$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 217. Cho tam giác ABC có $B = 60^\circ$, $AB = c$, $BC = a$ và $AC = b$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{2}{3a+b} + \frac{2}{3b+c} = \frac{3}{a+b+c}$.

B. $\frac{2}{a+3b} + \frac{2}{b+3c} = \frac{3}{a+b+c}$.

C. $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$.

D. $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{4}{a+2b+c}$.

Lời giải.

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c} \Leftrightarrow \frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} = 1 \Leftrightarrow \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos B = \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 218. Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AC = 12$ cm và diện tích $S = 54$ cm². Tính độ dài đường phân giác trong AD của tam giác ABC .

A. $AD = \frac{18\sqrt{2}}{7}$ cm.

B. $S = \frac{36\sqrt{2}}{7}$ cm.

C. $S = \frac{72\sqrt{2}}{7}$ cm.

D. $S = \frac{144\sqrt{2}}{7}$ cm.

Lời giải.

Gọi AH là đường cao của tam giác ABC . Ta có

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot AC = 54$$

$$\Rightarrow AB = 9, BC = 15, BD + DC = 15 \quad (1).$$

$$\text{Mà } \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow BD = \frac{3}{4}DC \quad (2).$$

$$\text{Từ (1), (2) giải ra } BD = \frac{45}{7}, DC = \frac{60}{7}.$$

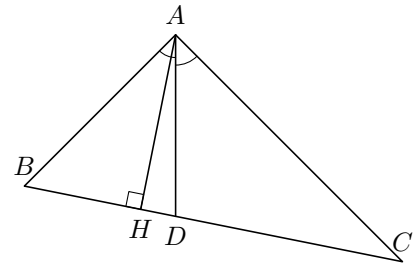
$$\text{Ta có } AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{108}{15} \Rightarrow BH = \frac{27}{5} < BD$$

$$\Rightarrow HD = BD - BH = \frac{45}{7} - \frac{27}{5} = \frac{36}{35}.$$

$$\text{Suy ra } AD = \sqrt{AH^2 + HD^2} = \frac{36\sqrt{2}}{7} \text{ cm}.$$

Sau khi giải ra BD , có thể tính $\cos B$ và áp dụng định lý Côsin cho tam giác ABD để tính AD .

Chọn đáp án (B) □



Câu 219. Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AB = 6$ cm và $AC = 8$ cm. Tia phân giác góc A cắt BC tại D . Tính diện tích S của tam giác ABD .

A. $S = \frac{48}{7} \text{ cm}^2$.

B. $S = \frac{72}{7} \text{ cm}^2$.

C. $S = \frac{96}{7} \text{ cm}^2$.

D. $S = \frac{144}{7} \text{ cm}^2$.

Lời giải.

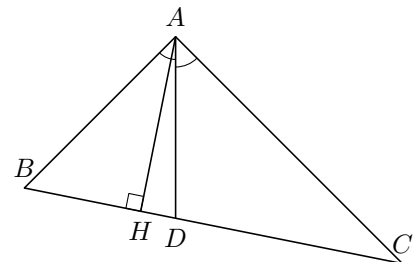
Gọi AH là đường cao của tam giác ABC .

$$\text{Ta có } S_{ABD} = \frac{1}{2}AH \cdot BD, S_{ADC} = \frac{1}{2}AH \cdot DC.$$

$$\text{Suy ra } \frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \quad (1).$$

$$\text{Mà } S_{ABD} + S_{ADC} = S_{ABC} = 24 \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) giải ra } S_{ABD} = \frac{72}{7} \text{ cm}^2.$$



Chọn đáp án (B) □

Câu 220. Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = 8$ cm và AM là đường trung tuyến. Biết $\sin \widehat{AMB} = 0,96$ và $AB < AC$. Tính diện tích S của tam giác ABC .

A. $S = 24 \text{ cm}^2$.

B. $S = \frac{128}{3} \text{ cm}^2$.

C. $S = 48 \text{ cm}^2$.

D. $S = \frac{256}{3} \text{ cm}^2$.

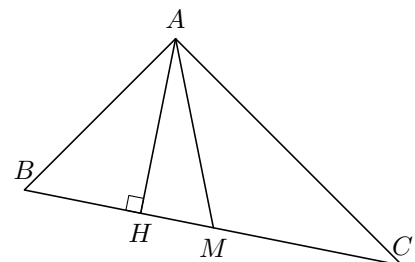
Lời giải.

Gọi AH là đường cao của tam giác ABC .

$$\text{Ta luôn có } \sin \widehat{AMB} = \frac{AH}{AM} = 0,96 = \frac{24}{25}.$$

$$\text{Đặt } AM = x, x > 0 \Rightarrow AH = \frac{24}{25}x, BC = 2x.$$

$$\text{Ta có } AC^2 = BC^2 - AB^2 = 4x^2 - 64 \quad (x > 4).$$



$$AH^2 = \frac{AB^2 \cdot AC^2}{BC^2} \Leftrightarrow \frac{24^2}{25^2}x^2 = \frac{64(4x^2 - 64)}{4x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 25 \\ x^2 = \frac{400}{9} \end{cases}$$

Vì $AB < AC$ nên $x^2 = \frac{400}{9} \Leftrightarrow x = \frac{20}{3}$ thỏa mãn. Suy ra $S = \frac{1}{2}AH \cdot BC = \frac{128}{3} \text{ cm}^2$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 221. Cho tam giác ABC nhọn, có đường cao CK và H là trực tâm. Gọi M là một điểm trên CK sao cho $\widehat{AMB} = 90^\circ$ và S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích tam giác ABC, AMB, ABH . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. $S_1 = S_2 S_3$. B. $S_1 = \sqrt{S_2 S_3}$. C. $S_2 = \sqrt{S_1 S_3}$. D. $S_3 = \sqrt{S_1 S_2}$.

Lời giải.

Xét tam giác AMB vuông, có đường cao MK .

Suy ra $MK^2 = KA \cdot KB$ (1). Xét tam giác AKH và

CKB có

$\widehat{AKH} = \widehat{CKB} = 90^\circ, \widehat{KAH} = \widehat{KCB}$ (cùng phụ góc $\widehat{ABC}$).

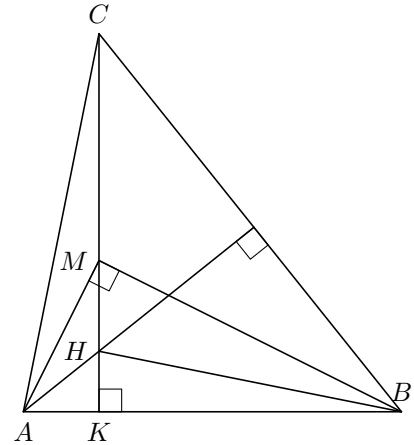
Suy ra $\triangle AKH \sim \triangle CKB \Rightarrow \frac{KA}{KC} = \frac{KH}{KB}$

$\Rightarrow KA \cdot KB = KC \cdot KH$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $MK^2 = KC \cdot KH \Rightarrow MK = \sqrt{KC \cdot KH}$.

Suy ra

$$\begin{aligned} S_2 = S_{AMB} &= \frac{1}{2}AB \cdot MK = \frac{1}{2}AB \cdot \sqrt{KC \cdot KH} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}AB \cdot KC \cdot \frac{1}{2}AB \cdot KH} = \sqrt{S_{ABC} \cdot S_{ABH}} = \sqrt{S_1 S_3}. \end{aligned}$$



Chọn đáp án **(C)** □

Câu 222. Cho tam giác ABC vuông tại A , có $BC = 2a$ và AH là đường cao. Kẻ HD vuông góc với AC tại D , HE vuông góc với AB tại E . Tính giá trị lớn nhất M của diện tích tứ giác $AEHD$ theo a .

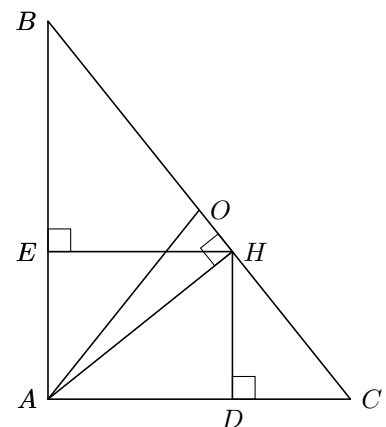
- A. $M = \frac{a^2}{2}$. B. $M = \frac{a^2}{3}$. C. $M = \frac{a^2}{4}$. D. $M = \frac{a^2}{6}$.

Lời giải.

Gọi O là trung điểm của BC , ta có $AO = \frac{1}{2}BC = a$.

Xét tam giác ABH có $AH^2 = AE \cdot AB \Rightarrow AE = \frac{AH^2}{AB}$.

Tương tự ta có $AD = \frac{AH^2}{AC}$.



$$\text{Suy ra } S_{AEHD} = AE \cdot AD = \frac{AH^4}{AB \cdot AC} = \frac{AH^4}{AH \cdot BC} = \frac{AH^3}{BC} \leq \frac{AO^3}{BC} = \frac{a^3}{2a} = \frac{a^2}{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi tam giác ABC vuông cân tại A . Suy ra $M = \frac{a^2}{2}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 223. Cho tam giác ABC có $BC = 10$. Gọi (I) là đường tròn có tâm I thuộc cạnh BC và tiếp xúc với các cạnh AB, AC . Biết (I) có bán kính bằng 3 và $2IB = 3IC$, tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- A. $R = 2(3\sqrt{3} - \sqrt{7})$. B. $R = 3\sqrt{3} - \sqrt{7}$. C. $R = 3(3\sqrt{3} - \sqrt{7})$. D. $R = 4(3\sqrt{3} - \sqrt{7})$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta suy ra $IB = 6, IC = 4$.

Gọi M, N là các tiếp điểm của (I) với AB, AC , ta có

$$\sin B = \frac{IM}{BI} = \frac{1}{2}, \sin C = \frac{IN}{CI} = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos C = \frac{\sqrt{7}}{4} \text{ (do } B, C \text{ nhọn)}.$$

Đặt $AB = c, AC = b$.

Do AI là phân giác góc A nên $\frac{c}{b} = \frac{6}{4} \Rightarrow 2c = 3b$.

Mặt khác, theo định lý cosin trong tam giác ABC ta có

$$\begin{cases} c^2 = b^2 + BC^2 - 2b \cdot BC \cdot \cos C \\ b^2 = c^2 + BC^2 - 2c \cdot BC \cdot \cos B. \end{cases}$$

Thay số vào ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} 2c = 3b \\ c^2 = b^2 + 100 - 5\sqrt{7}b \\ b^2 = c^2 + 100 - 10\sqrt{3}c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2(3\sqrt{3} - \sqrt{7}) \\ c = 3(3\sqrt{3} - \sqrt{7}). \end{cases}$$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R = \frac{b}{2 \sin B} = 2(3\sqrt{3} - \sqrt{7})$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 224. Cho tam giác ABC có $BC = 10$. Gọi (I) là đường tròn có tâm I thuộc cạnh BC và tiếp xúc với các cạnh AB, AC . Biết (I) có bán kính bằng 3 và $2IB = 3IC$, tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- A. $R = 2(3\sqrt{3} - \sqrt{7})$. B. $R = 3\sqrt{3} - \sqrt{7}$. C. $R = 3(3\sqrt{3} - \sqrt{7})$. D. $R = 4(3\sqrt{3} - \sqrt{7})$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta suy ra $IB = 6, IC = 4$.

Gọi M, N là các tiếp điểm của (I) với AB, AC , ta có:

$$\sin B = \frac{IM}{BI} = \frac{1}{2}, \sin C = \frac{IN}{CI} = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos C = \frac{\sqrt{7}}{4} \text{ (do } B, C \text{ nhọn)}.$$

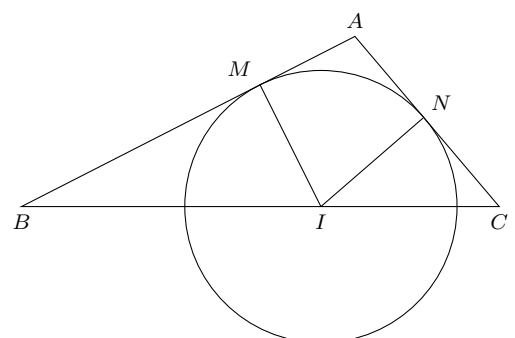
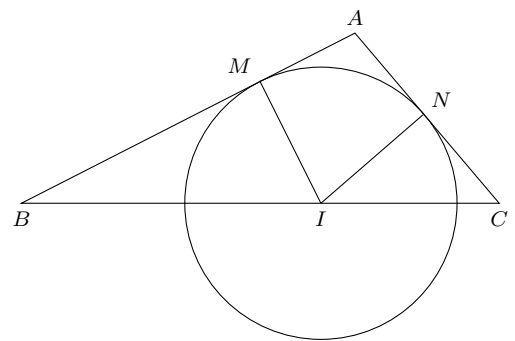
Đặt $AB = c, AC = b$. Do AI là phân giác góc A nên

$$\frac{c}{b} = \frac{6}{4} \Rightarrow 2c = 3b.$$

Mặt khác, theo định lý cosin trong tam giác ABC ta có

$$\begin{cases} c^2 = b^2 + BC^2 - 2b \cdot BC \cdot \cos C \\ b^2 = c^2 + BC^2 - 2c \cdot BC \cdot \cos B. \end{cases}$$

Thay số vào ta được hệ phương trình



$$\begin{cases} 2c = 3b \\ c^2 = b^2 + 100 - 5\sqrt{7} \cdot b \\ b^2 = c^2 + 100 - 10\sqrt{3} \cdot c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2(3\sqrt{3} - \sqrt{7}) \\ c = 3(3\sqrt{3} - \sqrt{7}). \end{cases}$$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R = \frac{b}{2 \cdot \sin B} = 2(3\sqrt{3} - \sqrt{7})$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 225. Cho tam giác ABC có $BC = 10$. Gọi (I) là đường tròn có tâm I thuộc cạnh BC và tiếp xúc với các cạnh AB, AC . Biết (I) có bán kính bằng 3 và $2IB = 3IC$, tính $\sin A$.

A. $\sin A = \frac{\sqrt{7} + 2\sqrt{3}}{4}$. B. $\sin A = \frac{\sqrt{7} + 3\sqrt{3}}{4}$. C. $\sin A = \frac{\sqrt{7} + 3\sqrt{3}}{8}$. D. $\sin A = \frac{\sqrt{7} + 3\sqrt{3}}{16}$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta suy ra $IB = 6, IC = 4$.

Gọi M, N là các tiếp điểm của (I) với AB, AC , ta có:

$$\sin B = \frac{IM}{BI} = \frac{1}{2}, \sin C = \frac{IN}{CI} = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos C = \frac{\sqrt{7}}{4} \text{ (do } B, C \text{ nhọn)}.$$

Đặt $AB = c, AC = b$. Do AI là phân giác góc A nên $\frac{c}{b} = \frac{6}{4} \Rightarrow 2c = 3b$.

Mặt khác, theo định lý cosin trong tam giác ABC ta có

$$\begin{cases} c^2 = b^2 + BC^2 - 2b \cdot BC \cdot \cos C \\ b^2 = c^2 + BC^2 - 2c \cdot BC \cdot \cos B \end{cases}$$

Thay số vào ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} 2c = 3b \\ c^2 = b^2 + 100 - 5\sqrt{7} \cdot b \\ b^2 = c^2 + 100 - 10\sqrt{3} \cdot c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2(3\sqrt{3} - \sqrt{7}) \\ c = 3(3\sqrt{3} - \sqrt{7}). \end{cases}$$

Vậy $\sin A = \frac{BC \cdot \sin B}{b} = \frac{\sqrt{7} + 3\sqrt{3}}{8}$.

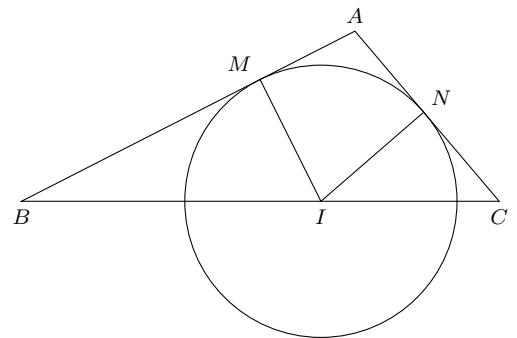
Chọn đáp án **C**

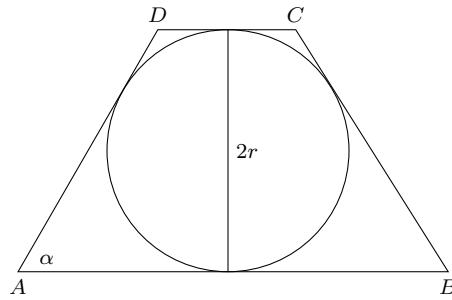
□

Câu 226. Cho hình thang cân $ABCD$ với đáy lớn AB ngoại tiếp một đường tròn bán kính r . Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp hình thang. Biết $\frac{R}{r} = \frac{2}{3}\sqrt{7}$. Tính $\widehat{BAD}$.

A. $\widehat{BAD} = 60^\circ$. B. $\widehat{BAD} = 30^\circ$. C. $\widehat{BAD} = 45^\circ$. D. $\widehat{BAD} = 15^\circ$.

Lời giải.





Đặt $\widehat{BAD} = \alpha$. Ta có $AD = BC = \frac{2r}{\sin \alpha}$.

Đặt $AB = x$, $CD = y$, ta có:

$$x - y = 4r \cot \alpha$$

$$x + y = \frac{4r}{\sin \alpha} \text{ (do hình thang ngoại tiếp đường tròn nên } AB + CD = AD + BC\text{)}.$$

Suy ra $x = 2r \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$, $y = 2r \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$.

Thay các giá trị của AB , AD tính được ở trên vào hệ thức $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos \alpha$ ta tìm được $BD = 2r \sqrt{1 + \frac{1}{\sin^2 \alpha}}$.

Mặt khác $BD = 2R \sin \alpha = 2r \sqrt{1 + \frac{1}{\sin^2 \alpha}}$ nên theo giả thiết $\frac{R}{r} = \frac{2}{3} \sqrt{7}$, suy ra

$$\frac{2}{3} \sqrt{7} \sin \alpha = \sqrt{1 + \frac{1}{\sin^2 \alpha}} \Leftrightarrow 28 \sin^4 \alpha - 9 \sin^2 \alpha - 9 = 0.$$

Giải ra ta được $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (do $\sin \alpha > 0$) suy ra $\alpha = 60^\circ$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 227. Khoảng cách từ A đến B không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm C mà từ đó có thể nhìn được A và B dưới một góc 60° . Biết $CA = 200$ m, $CB = 180$ m. Khoảng cách AB bằng bao nhiêu?

- A. $AB = 163$ m. B. $AB = 190$ m. C. $AB = 36400$ m. D. $AB = 20\sqrt{91}$ m.

Lời giải.

Xét tam giác ACB với $AC = 200$ m, $CB = 180$ m, $\widehat{ACB} = 60^\circ$.

Áp dụng định lí cos ta có

$$AB^2 = CB^2 + CA^2 - 2 \cdot CA \cdot CB \cdot \cos \widehat{ACB}.$$

$$\text{Nên } AB^2 = 200^2 + 180^2 - 2 \cdot 200 \cdot 180 \cdot \cos 60^\circ = 36400.$$

$$\text{Vậy } AB = 20\sqrt{91} \text{ m.}$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 228. Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc 60° . Tàu thứ nhất chạy với tốc độ 30 km/h, tàu thứ hai chạy với tốc độ 40 km/h. Hỏi sau 2 giờ hai tàu cách nhau bao nhiêu km?

- A. 5200 km. B. $20\sqrt{13}$ km. C. $10\sqrt{13}$ km. D. 1300 km.

Lời giải.

Gọi B là vị trí của tàu 1 đi được sau 2 giờ, khi đó $AB = 60$ km.

Gọi C là vị trí tàu 2 đi được sau 2 giờ, khi đó $AC = 80$ km.

Áp dụng định lí cos cho tam giác ABC , ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ = 5200.$$

Suy ra $BC = 20\sqrt{13}$.

Vậy khoảng cách giữa hai tàu là $20\sqrt{13}$ km.

Chọn đáp án (B) □

Câu 229. Từ một đỉnh tháp chiều cao $CD = 80$ m, người ta nhìn hai điểm A và B trên mặt đất dưới các góc nhìn là 60° và 45° . Ba điểm A, B, D thẳng hàng; B nằm giữa A và D . Tính khoảng cách AB .

A. $AB = 80(\sqrt{3} - 1)$ m.

B. $AB = 80\sqrt{3}$ m.

C. $AB = 80$ m.

D. $AB = 80(\sqrt{3} + 1)$ m.

Lời giải.

Xét tam giác ACD vuông tại D , $\widehat{ACD} = 60^\circ$.

Ta có $AD = CD \cdot \tan 60^\circ = 80\sqrt{3}$ m.

Xét tam giác BCD vuông tại D , $\widehat{BCD} = 45^\circ$.

Ta có $BD = CD \cdot \tan 45^\circ = 80$ m.

Vậy $AB = AD - BD = 80\sqrt{3} - 80$ m.

Chọn đáp án (A) □

Câu 230. Một người đứng trên ngọn hải đăng A ở bờ biển quan sát hai chiếc tàu ở hai điểm B và C . Khoảng cách từ người đó tới chiếc tàu ở điểm B và C lần lượt là 5 km và 6 km. Góc tạo bởi hai hướng nhìn AB và AC là 60° . Khi đó khoảng cách d giữa hai chiếc tàu là bao nhiêu?

A. $d = 31$ km.

B. $d = \sqrt{31}$ km.

C. $d = \sqrt{11}$ km.

D. $d = 11$ km.

Lời giải.

Xét tam giác ABC với $AC = 6$ km, $AB = 5$ km, $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

Áp dụng định lí cos ta có

$$BC^2 = AB^2 + CA^2 - 2 \cdot CA \cdot AB \cdot \cos \widehat{BAC}.$$

$$\text{Nên } BC^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ = 31.$$

Vậy $BC = \sqrt{31}$.

Vậy khoảng cách giữa hai chiếc tàu là $d = \sqrt{31}$ km.

Chọn đáp án (B) □

Câu 231. Để kéo một đường dây điện từ thôn A tới thôn B phải đi qua một ngọn núi nên người ta kéo dây từ thôn A tới một vị trí C trên đỉnh núi, sau đó kéo dây từ vị trí C tới thôn B . Biết $AC = 5$ km, $CB = 12$ km và $\widehat{ACB} = 90^\circ$. Nếu kéo thẳng dây điện từ thôn A tới thôn B giúp tiết kiệm bao nhiêu chi phí so với cách làm trên (biết chi phí mỗi km dây điện tốn chi phí 1,5 tỷ đồng)?

A. 7,5 tỷ đồng.

B. 19,5 tỷ đồng.

C. 6 tỷ đồng.

D. 18 tỷ đồng.

Lời giải.

Áp dụng định lí cos cho tam giác ACB , suy ra $AB = 13$ km.

Nếu kéo thẳng dây điện từ thôn A tới thôn B thì giúp tiết kiệm $12 + 5 - 13 = 4$ km.

Vậy số tiền tiết kiệm là $4 \times 1,5 = 6$ tỷ đồng.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 232. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $\hat{A} = 30^\circ$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{a}{\sqrt{3}}$. C. a . D. $a\sqrt{3}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{a}{2 \cdot \sin A} = \frac{a}{2 \cdot \frac{1}{2}} = a.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 233. Tam giác ABC có ba cạnh tương ứng là 5, 12 và 13 có diện tích bằng

- A. 30. B. 20. C. $10\sqrt{3}$. D. $20\sqrt{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có độ dài nửa chu vi } p = \frac{5 + 12 + 13}{2} = 15.$$

$$\text{Suy ra diện tích tam giác } S = \sqrt{15(15-5)(15-12)(15-13)} = 30.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 234. Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 8$, $\hat{A} = 60^\circ$. Độ dài cạnh BC là

- A. 8. B. $\sqrt{7}$. C. $\sqrt{9}$. D. $\sqrt{10}$.

Lời giải.

$$\text{Theo định lý cosin có } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A = 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ = 49 \\ \Rightarrow BC = 7.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 235. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 60^\circ$, $AC = 10$, $AB = 6$. Tính cạnh BC .

- A. $BC = 2\sqrt{19}$. B. $BC = 14$. C. $BC = 6\sqrt{2}$. D. $BC = 76$.

Lời giải.

$$\text{Theo định lý cosin thì } BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A} = 2\sqrt{19}.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 236. Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 4$, $\hat{A} = 60^\circ$. Độ dài đoạn BC là

- A. 5. B. $\sqrt{37}$. C. $3\sqrt{3}$. D. $\sqrt{13}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \hat{A} = 13 \text{ nên } BC = \sqrt{13}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 237. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 30^\circ$, $\hat{B} = 120^\circ$, $AC = 10$. Tính độ dài cạnh AB .

- A. $10\sqrt{3}$. B. $\frac{10}{\sqrt{3}}$. C. $8\sqrt{3}$. D. 15.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \hat{C} = 180^\circ - 30^\circ - 120^\circ = 30^\circ. \\ \text{Theo định lý Sin ta có } \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow AB = \frac{AC \cdot \sin C}{\sin B} = \frac{10}{\sqrt{3}}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

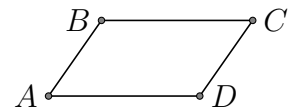
Câu 238. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = a$, $AD = 2a$, $\widehat{DAB} = 60^\circ$. Tính độ dài AC .

- A. $a\sqrt{7}$. B. $a\sqrt{3}$. C. $\frac{a\sqrt{7}}{2}$. D. $a\sqrt{5}$.

Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\widehat{DAB} + \widehat{ABC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 120^\circ$.

Theo định lý Côsin ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \widehat{ABC}} = a\sqrt{7}$.



Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 239. Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 12$, $BC = 13$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Tính độ dài đoạn thẳng AG .

- A. 13. B. $\frac{13}{3}$. C. $\frac{17}{2}$. D. $\frac{13}{2}$.

Lời giải.

Theo công thức đường trung tuyến ta có $m_a = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2} = \frac{12^2 + 5^2 - 13^2}{2} = \frac{13}{2}$.

Mà $AG = \frac{2}{3} \cdot m_a = \frac{13}{3}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 240. Cho tam giác ABC có $BC = 4$, $CA = 6$, $AB = 8$ và M là trung điểm BC . Tính độ dài AM .

- A. $AM = \sqrt{46}$. B. $AM = 4\sqrt{6}$. C. $AM = \sqrt{42}$. D. $AM = \sqrt{34}$.

Lời giải.

Ta có $AM^2 = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{4} = 46$ nên $AM = \sqrt{46}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 241. Cho tam giác ABC có $BC = 2$, $\widehat{A} = 60^\circ$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- A. $R = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. B. $R = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. C. $R = 4$. D. $R = 2$.

Lời giải.

Theo định lý Sin ta có $\frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{BC}{2 \sin A} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

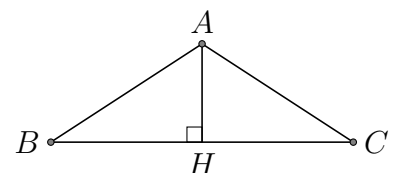
Câu 242. Cho tam giác ABC cân tại A có diện tích $S = 2\sqrt{3}$ và $BC = 2\sqrt{6}$. Tính độ dài cạnh AB .

- A. $AB = 2\sqrt{2}$. B. $AB = 2$. C. $AB = 2\sqrt{3}$. D. $AB = 4$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của BC ta có $S = \frac{1}{2}BC \cdot AH \Rightarrow AH = \frac{2S}{BC} = \sqrt{2}$.

$AB^2 = AH^2 + BH^2 = 8$ nên $AB = 2\sqrt{2}$



Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 243. Cho tam giác ABC có $BC^2 > AB^2 + AC^2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Tam giác ABC có $\hat{A}$ là góc tù.

B. Tam giác ABC có $\hat{A}$ là góc nhọn.

C. Tam giác ABC có $\hat{A}$ là góc vuông.

D. Tam giác ABC có $\hat{A}$ là góc nhỏ nhất.

Lời giải.

Ta có $\cos \hat{A} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} < 0$, suy ra $\hat{A}$ là góc tù.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 244. Cho tam giác ABC có $AB = c = 3$, $AC = b = 5$ và $\hat{A} = 60^\circ$. Gọi AD là đường phân giác trong góc A . Tính độ dài l_a của đoạn thẳng AD .

A. $l_a = \frac{15}{8}$.

B. $l_a = \frac{15\sqrt{3}}{16}$.

C. $l_a = \frac{15\sqrt{3}}{8}$.

D. $l_a = \frac{15}{4}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD} &= S_{\triangle ABC} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}AC \cdot AD \cdot \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2}AB \cdot AD \cdot \sin \frac{A}{2} &= \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}b \cdot l_a \cdot \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2}c \cdot l_a \cdot \sin \frac{A}{2} &= \frac{1}{2}b \cdot c \cdot \sin A, \end{aligned}$$

$$\text{hay } l_a = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{(b + c) \sin \frac{A}{2}}. \text{ Từ đó suy ra } l_a = \frac{5 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ}{(5 + 3) \cdot \sin 30^\circ} = \frac{15\sqrt{3}}{8}.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 245. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 6$ cm, $AC = 9$ cm và góc $A = 60^\circ$. Độ dài cạnh BC gần nhất với số nào dưới đây?

A. 7 cm.

B. 9 cm.

C. 8 cm.

D. 10 cm.

Lời giải.

Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = 36 + 81 - 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} = 63$. Vậy $BC \approx 8$ (cm).

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 246. Cho tam giác ABC có ba cạnh là 6, 10, 8. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC là

A. 5.

B. 2.

C. 3.

D. $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có độ dài nửa chu vi $p = \frac{6 + 10 + 8}{2} = 12$.

Suy ra diện tích tam giác $S = \sqrt{12(12 - 6)(12 - 10)(12 - 8)} = 24$. Mà $S = p \cdot r \Rightarrow r = \frac{S}{p} = 2$.

Vậy độ dài bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC là 2.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 247. Cho tam giác ABC có ba cạnh là $BC = 6$, $CA = 7$, $AB = 8$. Độ dài đường trung tuyến AM của tam giác ABC là

A. $\frac{\sqrt{151}}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{190}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{106}}{2}$.

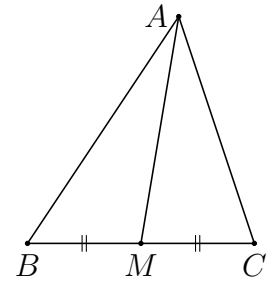
D. $\frac{\sqrt{151}}{4}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} AM^2 &= \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4} \\ &= \frac{2(8^2 + 7^2) - 6^2}{4} = \frac{95}{2}. \end{aligned}$$

Suy ra $AM = \frac{\sqrt{190}}{2}$.

Chọn đáp án (B) □



Câu 248. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 60^\circ$, $BC = a$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng

- A. $\frac{3a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{5a\sqrt{3}}{3}$. D. $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{BC}{2 \cdot \sin 60^\circ} = \frac{a}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 249. Cho tam giác ABC có $BC = 12$, $AC = 13$, trung tuyến $AM = 8$. Diện tích tam giác ABC là

- A. $\frac{9\sqrt{55}}{4}$. B. $\frac{9\sqrt{55}}{2}$. C. $\frac{3\sqrt{55}}{2}$. D. $\frac{9\sqrt{55}}{8}$.

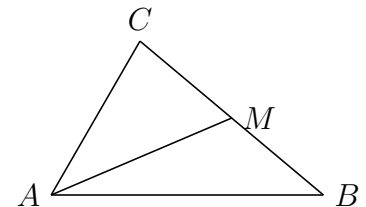
Lời giải.

Theo công thức Hê-rông, ta có

$$S_{AMC} = \sqrt{\frac{27}{2} \left(\frac{27}{2} - 13 \right) \left(\frac{27}{2} - 6 \right) \left(\frac{27}{2} - 8 \right)} = \frac{9\sqrt{55}}{4}.$$

Suy ra $S_{ABC} = 2S_{AMC} = \frac{9\sqrt{55}}{2}$.

Chọn đáp án (B) □



Câu 250. Diện tích tam giác có các cạnh lần lượt là 7; 9; 12 bằng

- A. $14\sqrt{5}$. B. $4\sqrt{57}$. C. 32. D. 31.

Lời giải.

Nửa chu vi $p = \frac{7 + 9 + 12}{2} = 14$ nên

$$S = \sqrt{p(p-7)(p-9)(p-12)} = 14\sqrt{5}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 251. Tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 9$ và trung tuyến $AM = 6$. Tính độ dài cạnh BC .

- A. $BC = 2\sqrt{17}$. B. $BC = \sqrt{17}$. C. $BC = \sqrt{127}$. D. $BC = 22$.

Ta có

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow 6^2 = \frac{5^2 + 9^2}{2} - \frac{a^2}{4} \Rightarrow a^2 = 68 \Rightarrow a = 2\sqrt{17}.$$

Câu 252. Tam giác ABC có ba cạnh lần lượt là 3; 8; 9. Góc lớn nhất của tam giác có cosin bằng

A. $-\frac{1}{6}$.

B. $\frac{1}{6}$.

C. $\frac{\sqrt{17}}{4}$.

D. $-\frac{4}{25}$.

Lời giải.

Góc lớn nhất là góc đối diện với cạnh lớn nhất nên cosin góc lớn nhất là

$$\cos B = \frac{3^2 + 8^2 - 9^2}{2 \cdot 3 \cdot 8} = -\frac{1}{6}.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 253. Tam giác ABC có $AB = 1, AC = 3, \hat{A} = 60^\circ$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

A. $R = \frac{\sqrt{21}}{3}$.

B. $R = \sqrt{7}$.

C. $R = \sqrt{3}$.

D. $R = \frac{5}{2}$.

Lời giải.

Ta có $BC^2 = 3^2 + 1^2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = 7 \Rightarrow BC = \sqrt{7}$.

Theo định lý sin

$$\frac{\sqrt{7}}{\sin 60^\circ} = 2R \Rightarrow R = \frac{\sqrt{21}}{3}.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 254. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. Nếu $AB + AC > BC$ thì tam giác ABC có góc tù.

B. Nếu $AB + AC < BC$ thì tam giác ABC có góc tù.

C. Nếu $AB^2 + AC^2 > BC^2$ thì tam giác ABC có góc tù.

D. Nếu $AB^2 + AC^2 < BC^2$ thì tam giác ABC có góc tù.

Lời giải.

Góc $\hat{A}$ tù khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} \cos A &< 0 \\ \Leftrightarrow \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} &< 0 \\ \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 &< BC^2 \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 255. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM và BN . Tính $AM^2 + BN^2$ theo các cạnh $AB = c, BC = a, CA = b$ của tam giác ta được kết quả

A. $\frac{4c^2 - a^2 - b^2}{4}$.

B. $\frac{4c^2 + a^2 + b^2}{4}$.

C. $\frac{4c^2 - a^2 - b^2}{2}$.

D. $\frac{4c^2 + a^2 + b^2}{2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} AM^2 + BN^2 &= \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} + \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4} \\ &= \frac{4c^2 + a^2 + b^2}{4} \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 256. Cho tam giác ABC , gọi M là điểm thỏa $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, N là trung điểm CM . Diện tích tam giác ABC gấp bao nhiêu lần diện tích tam giác BMN ?

A. 4.

B. 3.

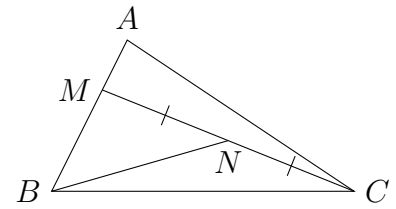
C. 5.

D. 6.

Lời giải.

Tam giác BMN và tam giác BMC có cùng đường cao kẻ từ C , đáy $MN = \frac{1}{2}MC$. Tam giác ABC và MBC có cùng đường cao kẻ từ C và $BM = \frac{2}{3}BA$. Từ đó ta có

$$S_{BMN} = \frac{1}{2}S_{BMC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.$$



Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 257. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 60^\circ$ và $AB = 3$. Tính độ dài đường cao kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC .

A. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Gọi H là chân đường cao kẻ từ A . Trong cả 3 trường hợp góc B nhọn, tù, vuông ta đều có $\sin B = \frac{AH}{AB}$ (chú ý, hai góc bù nhau có sin bằng nhau). Suy ra $AH = AB \cdot \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 258. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại A có $A(1;0)$ và trọng tâm $G(2;1)$. Biết $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ$, tính AC .

A. $AC = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

B. $AC = \frac{3\sqrt{6}}{4}$.

C. $AC = \frac{3\sqrt{6}}{2}$.

D. $AC = 3\sqrt{2}$.

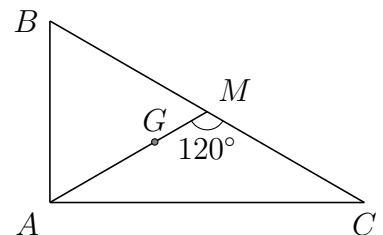
Lời giải.

Ta có $AG = \sqrt{2}$, suy ra $AM = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Gọi M là trung điểm của BC . Do tam giác ABC vuông tại A nên

$$CM = AM = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Lại có $\widehat{AMC} = (\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ$ nên

$$AC = \sqrt{AM^2 + MC^2 - 2AM \cdot MC \cdot \cos 120^\circ} = \frac{3\sqrt{6}}{2}.$$



Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 259. Cho ΔABC có $A(6;0)$, $B(3;1)$, $C(-1;-1)$. Số đo góc B trong ΔABC là

A. 15° .

B. 135° .

C. 120° .

D. 60° .

Lời giải.

$$\overrightarrow{BA} = (3; -1) \Rightarrow AB = \sqrt{10}; \overrightarrow{BC} = (-4; -2) \Rightarrow BC = 2\sqrt{5}.$$

$$\cos B = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{BA \cdot BC} = \frac{-10}{10\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow B = 135^\circ.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 260. Cho $\triangle ABC$ với $A(1; 4)$, $B(3; 2)$, $C(5; 4)$. Chu vi của $\triangle ABC$ bằng bao nhiêu?

- A. $4 + 2\sqrt{2}$. B. $4 + 4\sqrt{2}$. C. $8 + 8\sqrt{2}$. D. $2 + 2\sqrt{2}$.

Lời giải.

$AB = \sqrt{(3-1)^2 + (2-4)^2} = 2\sqrt{2}$, $AC = \sqrt{(5-1)^2 + (4-4)^2} = 4$ và $BC = \sqrt{(5-3)^2 + (4-2)^2} = 2\sqrt{2}$. Vậy chu vi tam giác ABC bằng $4 + 4\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 261. Cho $\triangle ABC$ thỏa mãn hệ thức $b + c = 2a$. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào đúng?

- A. $\cos B + \cos C = 2 \cos A$. B. $\sin B + \sin C = 2 \sin A$.
C. $\sin B + \sin C = \frac{1}{2} \sin A$. D. $\sin B + \cos C = 2 \sin A$.

Lời giải.

Theo định lý hàm số sin, ta có $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$ và $a = 2R \sin A$ với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Khi đó, $b + c = 2a \Leftrightarrow 2R \sin B + 2R \sin C = 2 \cdot 2R \sin A \Leftrightarrow \sin B + \sin C = 2 \sin A$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 262. Với tam giác ABC bất kì, đẳng thức nào dưới đây là đúng?

- A. $\cos B = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. B. $\cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B}$.
C. $\cos B = \cos(A + C)$. D. $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$.

Lời giải.

Áp dụng định lý hàm số cos, ta có $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 263. Cho tam giác ABC có $AB = 35$, $AC = 20$, $\hat{A} = 60^\circ$. Độ dài đường cao AH là

- A. $\frac{70\sqrt{3}}{\sqrt{37}}$. B. $5\sqrt{37}$. C. $\frac{140\sqrt{3}}{\sqrt{37}}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{37}}$.

Lời giải.

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \hat{A} = 35^2 + 20^2 - 2 \cdot 35 \cdot 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 925 \Rightarrow BC = 5\sqrt{37}$.

Diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ = \frac{350\sqrt{3}}{2}$.

Mà $S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH \Leftrightarrow AH = \frac{2S}{BC} = \frac{70\sqrt{3}}{\sqrt{37}}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 264. Cho tam giác ABC có $AB = 7$, $AC = 5$, $\hat{A} = 120^\circ$. Độ dài đường trung tuyến AM bằng bao nhiêu?

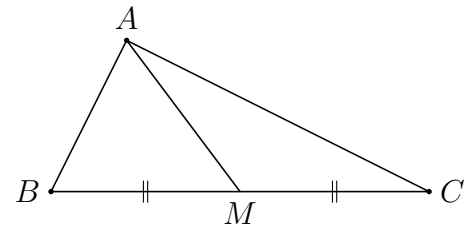
- A. $\frac{\sqrt{39}}{3}$. B. $\frac{35}{2}$. C. $\frac{\sqrt{109}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{39}}{2}$.

Lời giải.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \hat{A} = 109.$$

$$AM^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4} = \frac{2(49 + 25) - 109}{4} = \frac{39}{4}. \text{ Suy}$$

$$\text{ra } AM = \frac{\sqrt{39}}{2}.$$

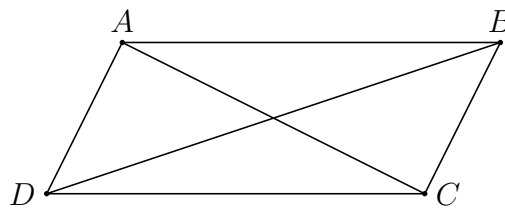


Chọn đáp án **(D)** □

Câu 265. Cho hình bình hành $ABCD$. Khẳng định nào đúng?

- A. $AC^2 + BD^2 = 2(AB + BC)^2$. B. $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$.
C. $AC^2 + BD^2 = 4(AB^2 + BC^2)$. D. $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2$.

Lời giải.



Theo quy tắc hình bình hành ta có

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \text{ và } \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}.$$

Suy ra $AC^2 = AD^2 + AB^2 + 2 \cdot \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ và $BD^2 = AB^2 + BC^2 + 2 \cdot \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

hay $AC^2 = AD^2 + AB^2 + 2 \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos \widehat{DAB}$ và $BD^2 = AB^2 + BC^2 + 2 \cdot |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos \widehat{ABC}$.

Mà $\widehat{DAB}$ và $\widehat{ABC}$ là hai góc bù của nhau nên $\cos \widehat{DAB} = -\cos \widehat{ABC}$.

Tức là $AC^2 = AD^2 + AB^2 - 2 \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos \widehat{ABC}$ và $BD^2 = AB^2 + BC^2 + 2 \cdot |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos \widehat{ABC}$.

Cộng vế với vế hai đẳng thức trên ta được

$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + AB^2 + AB^2 + BC^2 = 2(AB^2 + BC^2).$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 266. Cho tam giác ABC . Nếu tăng độ lớn cạnh AB lên 2 lần đồng thời tăng độ lớn cạnh BC lên 4 lần và giữ nguyên độ lớn góc B thì diện tích tam giác mới được tạo thành tăng lên bao nhiêu lần?

- A. 2. B. 4. C. 8. D. 6.

Lời giải.

Diện tích tam giác ABC ban đầu là $S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin B$.

Diện tích tam giác sau khi tăng độ dài cạnh AB, BC là

$$S' = \frac{1}{2} \cdot 2AB \cdot 4BC \cdot \sin B = 8 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin B \right) = 8S.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 267. Tam giác ABC vuông cân tại A nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R . Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Khi đó tỉ số $\frac{R}{r}$ bằng?

- A. $1 + \sqrt{2}$. B. $\frac{\sqrt{2} - 1}{2}$. C. $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{1 + \sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Đặt $BC = a, AC = b, AB = c$.

Theo đề thì $b = c$ nên ta có diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c = \frac{1}{2}b^2$ và $a = b\sqrt{2}$.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R = \frac{1}{2}a = \frac{b\sqrt{2}}{2}$.

Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC là $r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2}b^2}{\frac{a+b+c}{2}} = \frac{b^2}{b\sqrt{2} + 2b} = \frac{b}{\sqrt{2} + 2}$.

$$\text{Khi đó } \frac{R}{r} = \frac{\frac{b\sqrt{2}}{2}}{\frac{b}{\sqrt{2} + 2}} = 1 + \sqrt{2}.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 268. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 1, AC = 2$. Tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$ cắt BC tại D . Độ dài đoạn AD là

- A. $2\sqrt{2}$. B. $\frac{2\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{8}{9}$.

Lời giải.

Theo tính chất đường phân giác trong tam giác, ta có $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$ suy ra $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{BD}$ suy ra $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AB}$, do đó $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Ta có $AD^2 = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right)^2 = \frac{8}{9}$ suy ra $AD = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 269. Tam giác ABC có $AB = 7, AC = 5, \cos(B + C) = -\frac{1}{5}$. Tính BC .

- A. $BC = 2\sqrt{15}$. B. $BC = 4\sqrt{22}$. C. $BC = 4\sqrt{15}$. D. $BC = 2\sqrt{22}$.

Lời giải.

Ta có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$, suy ra $\cos A = \cos(180^\circ - B - C) = -\cos(B + C) = \frac{1}{5}$.

Vậy $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A = 60 \Rightarrow BC = 2\sqrt{15}$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 270. Tam giác ABC có $\widehat{A} = 75^\circ; \widehat{B} = 45^\circ; AC = 2$. Tính cạnh AB .

- A. $\sqrt{6}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\widehat{C} = 180^\circ - 75^\circ - 45^\circ = 60^\circ$.

Theo định lý sin

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{2}{\sin 45^\circ} = \frac{AB}{\sin 60^\circ} \Rightarrow AB = \sqrt{6}.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 271. Cho tam giác ABC có diện tích S . Nếu tăng cạnh BC 2 lần, đồng thời tăng cạnh AC lên 3 lần và giữ nguyên độ lớn của góc C . Hỏi diện tích S' của tam giác mới được tạo nên bằng bao nhiêu?

- A. $S' = 4S$. B. $S' = 2S$. C. $S' = 3S$. D. $S' = 6S$.

Lời giải.

$$S' = \frac{1}{2}(2a) \cdot (3b) \sin C = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C = 6S.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 272. Gọi S là diện tích tam giác ABC . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2}$. B. $S = \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2}$.
C. $S = \frac{1}{2} \sqrt{(\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2 - AB^2 \cdot AC^2}$. D. $S = \sqrt{(\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2 - AB^2 \cdot AC^2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A \\ &= \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sqrt{1 - \cos^2 A} \\ &= \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \cdot AC} \right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2} \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 273. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC biết $A(1; 2)$, $B(3; -4)$, $C(-19, -2)$. Tính diện tích S của tam giác ABC .

- A. $32\sqrt{2}$. B. 72. C. 128. D. 64.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= (2; -6) \Rightarrow AB = \sqrt{40}, \\ \vec{AC} &= (-20; -4) \Rightarrow AC = \sqrt{416}, \\ \cos A &= \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \cdot AC} = \frac{-40 + 24}{\sqrt{40} \cdot \sqrt{416}} = -\frac{1}{\sqrt{65}}, \\ \sin A &= \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{8}{\sqrt{65}}, \\ S &= \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{40} \cdot \sqrt{416} \cdot \frac{8}{\sqrt{65}} = 64. \end{aligned}$$

Chú ý. Ngoài ra ta còn có công thức $S = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -20 & -4 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |2 \cdot (-4) - (-20) \cdot (-6)| = 64$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 274. Cho tam giác ABC có $BC = AC\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của góc B là

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 75° .

Lời giải.

Đặt $BC = a$, $CA = b$ và $AB = c$. Ta có

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{b^2 + c^2}{2\sqrt{2}bc} \geq \frac{2bc}{2\sqrt{2}bc} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Suy ra $B \leq 45^\circ$. Dấu bằng xảy ra khi $b = c = \frac{a}{\sqrt{2}}$ hay tam giác ABC vuông cân tại A . Vậy giá trị lớn nhất của góc B là 45° .

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 275. Cho tam giác ABC có chu vi bằng 6. Tìm giá trị lớn nhất S của diện tích tam giác ABC .

- A. $S = \frac{3\sqrt{3}}{4}$. B. $S = \sqrt{3}$. C. $S = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. D. $S = 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Gọi s, p lần lượt là diện tích và nửa chu vi của tam giác ABC . Theo giả thiết ta có

$$p = \frac{BC + CA + AB}{2} = 3.$$

Ta lại có

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{p(p - BC)(p - CA)(p - AB)} \\ &\leq \sqrt{p \left(\frac{p - BC + p - CA + p - AB}{3} \right)^3} \\ &= \sqrt{p \left(\frac{3p - 2p}{3} \right)^3} \\ &= \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi tam giác ABC là tam giác đều. Vậy $S = \sqrt{3}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 276. Cho tam giác ABC có $BC = 6$ thỏa mãn $4 \sin A \tan A = 2 \sin B \sin C$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Tính giá trị của biểu thức $S = GB^2 + GC^2$.

- A. $S = 18$. B. $S = 24$. C. $S = 12$. D. $S = 36$.

Lời giải.

Đặt $BC = a, AC = b$ và $AB = c$. Ta có

$$\begin{aligned} 4 \sin A \tan A &= 2 \sin B \sin C \\ \Leftrightarrow 4 \sin^2 A &= 2 \sin B \sin C \cos A \\ \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{a^2}{4R^2} &= 2 \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R} \cdot \cos A \\ \Leftrightarrow 4a^2 &= 2bc \cos A \\ \Leftrightarrow 4a^2 &= b^2 + c^2 - a^2 \\ \text{hay } b^2 + c^2 &= 5a^2. \end{aligned}$$

Suy ra

$$GB^2 + GC^2 = \frac{4}{9} (m_b^2 + m_c^2) = \frac{4}{9} \left(\frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} + \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} \right) = \frac{4}{9} \left(a^2 + \frac{b^2 + c^2}{4} \right) = a^2.$$

Vậy $S = 36$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 277. Cho tam giác ABC có độ dài ba đường trung tuyến ứng với các cạnh BC , CA , AB lần lượt là $m_a = 4$, $m_b = 6$ và $m_c = 8$. Tính diện tích S của tam giác ABC .

- A. $S = 3\sqrt{15}$. B. $S = 4\sqrt{15}$. C. $S = 5\sqrt{5}$. D. $S = 6\sqrt{15}$.

Lời giải.

Dựng hình bình hành $ABCD$. Gọi M , N , P , Q lần lượt là trung điểm của BC , CA , AB và CD . Khi đó

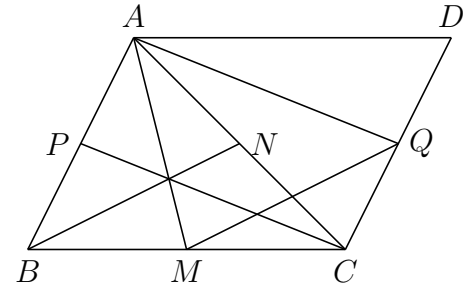
$$MQ = BN = m_b, \quad AQ = CP = m_c.$$

Gọi S_m là diện tích tam giác AMQ , ta có

$$S_m = S_{ABCD} - S_{ABM} - S_{ADQ} - S_{CMQ} = 2S - \frac{S}{2} - \frac{S}{2} - \frac{S}{4} = \frac{3S}{4}.$$

Đặt $p = \frac{m_a + m_b + m_c}{2}$, áp dụng công thức Hê-rông ta có

$$S = \frac{4}{3}S_m = \frac{4}{3}\sqrt{p(p - m_a)(p - m_b)(p - m_c)} = 4\sqrt{15}.$$



Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 278. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm $(O; 4)$ có hai đường chéo vuông góc. Tính $S = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$.

- A. $S = 80$. B. $S = 96$. C. $S = 112$. D. $S = 128$.

Lời giải.

Gọi H là giao điểm của AC và BD . Dễ thấy $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2 = HA^2 + HB^2 + HC^2 + HD^2$. Ta có

$$\begin{aligned} AB^2 + CD^2 &= (\vec{OA} - \vec{OB})^2 + (\vec{OC} - \vec{OD})^2 \\ &= 4R^2 - 2(\vec{OA} \cdot \vec{OB} + \vec{OC} \cdot \vec{OD}) \\ &= 4R^2 - 2R^2(\cos \widehat{AOB} + \cos \widehat{DOC}), \end{aligned}$$

ở đó R là bán kính đường tròn tâm O .

Do tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O nên $\widehat{AOB} + \widehat{DOC} = 2(\widehat{ADB} + \widehat{DAC}) = 180^\circ$. Suy ra $\cos \widehat{AOB} + \cos \widehat{DOC} = 0$ hay $AB^2 + CD^2 = 4R^2$.

Vậy $S = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 8R^2 = 128$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 279. Cho tam giác ABC có $a = 8$, $b = 4$ và $c = 6$. Biết tập hợp các điểm M thỏa mãn

$$(\vec{MB} + \vec{MC})(\vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MC}) = 0$$

là một đường tròn cố định. Tìm đường kính d của đường tròn đó.

- A. $d = 1$. B. $d = 2$. C. $d = 3$. D. $d = 4$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của BC và J là điểm thoả mãn $\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}$. Theo giả thiết ta có

$$0 = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) = 2\overrightarrow{MI} \cdot 6\overrightarrow{MJ}$$

hay $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0$. Do đó M nằm trên đường tròn đường kính IJ . Từ cách xác định điểm J ta có

$$\vec{0} = \overrightarrow{JA} - \overrightarrow{JB} + 3(\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC}) = \overrightarrow{BA} + 6\overrightarrow{JI}.$$

Vậy $d = IJ = \frac{AB}{6} = 1$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 280. Cho tam giác ABC với $AB = 5, BC = 12, CA = 13$. Tính bán kính đường tròn nội tiếp r của tam giác đó.

- A. $r = 2$. B. $r = 2\sqrt{2}$. C. $r = 2\sqrt{3}$. D. $r = 3$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có nửa chu vi $p = 15$. Theo công thức Hêrông ta có diện tích tam giác là $S = \sqrt{15 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 2} = 30$. Từ công thức tính diện tích $S = p \cdot r$ ta có $r = \frac{S}{p} = 2$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 281. Cho $\triangle ABC$ có $BC = 12, CA = 13$ và trung tuyến $AM = 8$. Tính diện tích S của $\triangle ABC$.

- A. $S = \frac{9\sqrt{55}}{2}$. B. $S = \frac{9\sqrt{55}}{3}$. C. $S = 12$. D. $S = \frac{9\sqrt{11}}{2}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức Hê-rông ta tính được diện tích $\triangle AMC$ là $S_{AMC} = \frac{9\sqrt{55}}{4}$.

Từ đó suy ra $S = 2S_{AMC} = \frac{9\sqrt{55}}{2}$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 282. Tam giác ABC thoả mãn $a^2 + b^2 - c^2 - \sqrt{2}ab = 0$. Khi đó đẳng thức nào dưới đây là đúng?

- A. $C = 30^\circ$. B. $C = 45^\circ$. C. $C = 60^\circ$. D. $C = 75^\circ$.

Lời giải.

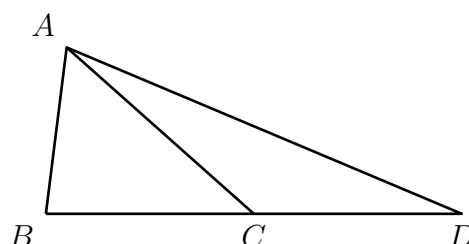
Từ giả thiết ta suy ra $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, hay $\cos C = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Suy ra $C = 45^\circ$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 283. Cho tam giác ABC có $AB = 4, BC = 5$ và $AC = 6$. Gọi D là điểm đối xứng với B qua C . Tính độ dài đoạn AD .

- A. $AD = 8$. B. $AD = 10$. C. $AD = \sqrt{106}$. D. $AD = \sqrt{178}$.

Lời giải.



Từ giả thiết ta thấy AC chính là đường trung tuyến của tam giác ABD .

Theo công thức đường trung tuyến ta có $AC^2 = \frac{AB^2 + AD^2}{2} - \frac{BD^2}{4}$.

Từ đó, thay số vào ta suy ra $AD = \sqrt{106}$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 284. Tam giác ABC có $AB = 3, AC = 4$ và $\tan A = -2\sqrt{2}$. Tính cạnh BC .

- A. $BC = \sqrt{17}$. B. $BC = \sqrt{33}$. C. $BC = 4\sqrt{2}$. D. $BC = 3\sqrt{2}$.

Lời giải.

Từ $\tan A = -2\sqrt{2} < 0$ suy ra A là góc tù, nên $\cos A < 0$.

Lại có: $\frac{1}{\cos^2 A} = 1 + \tan^2 A = 9 \Rightarrow \cos A = -\frac{1}{3}$

Áp dụng định lý cos ta được $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A = 17 \Rightarrow BC = \sqrt{17}$.

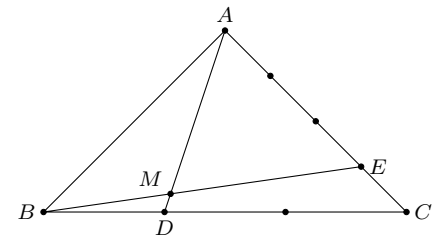
Chọn đáp án **A**

□

Câu 285.

Tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = AC = a$. Lấy điểm D thuộc cạnh BC sao cho $CD = 2DB$, điểm E thuộc cạnh AC sao cho $AE = 3CE$. Gọi $M = AD \cap BE$. Tính độ dài AM theo a .

- A. $AM = \frac{3a\sqrt{5}}{10}$. B. $AM = \frac{a\sqrt{5}}{3}$.
C. $AM = \frac{10a\sqrt{5}}{27}$. D. $AM = \frac{9a}{10}$.



Lời giải.

Ta có: $AD^2 = BA^2 + BD^2 - 2 \cdot BA \cdot BD \cdot \cos B = \frac{5a^2}{9} \Rightarrow AD = \frac{a\sqrt{5}}{3}$.

Kẻ $DF \parallel BE, F \in AC$, khi đó $\frac{CF}{CE} = \frac{CD}{CB} = \frac{2}{3} \Rightarrow EF = \frac{1}{3}EC = \frac{1}{9}AE = \frac{1}{10}AF$

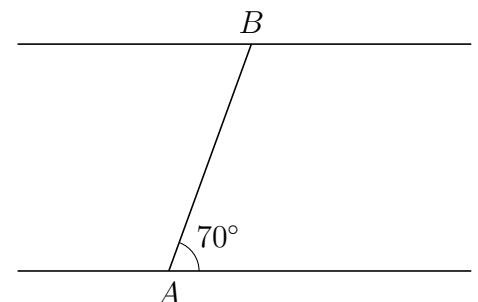
$\Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{9}{10} = \frac{AM}{AD} \Rightarrow AM = \frac{9}{10}AD = \frac{9}{10} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{3} = \frac{3a\sqrt{5}}{10}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 286.

Một con thuyền từ điểm A ở bờ bên này sông di chuyển sang bờ sông bên kia với vận tốc 2 km/h. Do tác động của dòng nước nên đường đi của con thuyền tạo với bờ sông một góc 70° . Biết thuyền đi từ A đến B mất 5 phút và coi hai bờ sông là hai đường thẳng song song, tính độ rộng w của con sông (làm tròn đến hàng đơn vị).



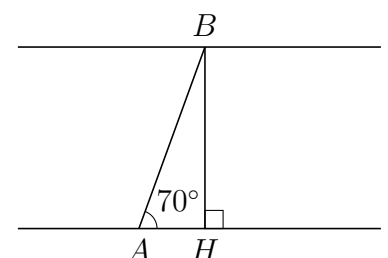
- A. $w = 134$ m. B. $w = 157$ m. C. $w = 168$ m. D. $w = 142$ m.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của B trên bờ sông chứa điểm xuất phát A .

Khi đó độ rộng của con sông là

$$w = BH = BA \cdot \sin 70^\circ = 2 \cdot \frac{5}{60} \cdot \sin 70^\circ \approx 157 \text{ (m)}.$$



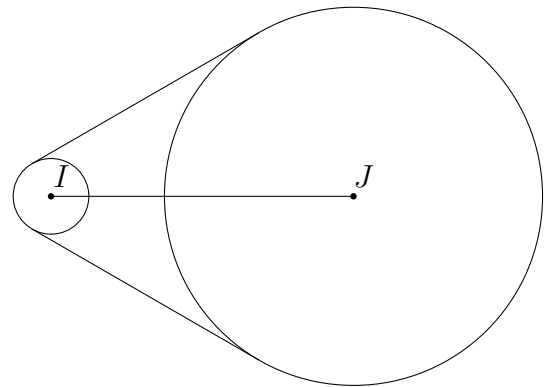
Chọn đáp án (B)

□

Câu 287.

Một dây curoa quấn quanh hai trục tròn tâm I bán kính 1 dm và tâm J bán kính 5 dm. Độ dài của dây curoa biết $IJ = 8$ dm (làm tròn đến chữ số thứ hai sau dấu phẩy) là

- A. 29,97 dm. B. 25,38 dm.
C. 36,89 dm. D. 37,70 dm.



Lời giải.

Dễ thấy dây độ dài dây curoa là tổng độ dài của hai tiếp tuyến chung AB, CD của hai đường tròn và độ dài các cung AC nhỏ, cung BD lớn.

Gọi E là điểm đối xứng với A qua I và F là giao điểm của BA với IJ .

Ta có $\frac{FI}{IA} = \frac{FJ}{JB} = \frac{FJ - FI}{JB - IA} = 2$. Suy ra

$$\widehat{FIA} = 60^\circ,$$

từ đó cung nhỏ AC và cung lớn BD có số đo lần lượt

là 120° và 240° .

Ta lại có

$$\frac{AB}{IJ} = \frac{FA}{FI} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

nên $AB = 4\sqrt{3}$ dm.

Vậy độ dài của dây curoa là $4\sqrt{3} + \frac{\pi \cdot 120}{180} + 4\sqrt{3} + \frac{\pi \cdot 5 \cdot 240}{180} \approx 36,89$ dm.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 288. Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $AC = 4$, trung tuyến $BM = \sqrt{33}$. Tính diện tích S của tam giác ABC .

- A. $S = 3\sqrt{6}$. B. $S = 4\sqrt{6}$. C. $S = 2\sqrt{13}$. D. $S = 24\sqrt{33}$.

Lời giải.

Do M là trung điểm của AC nên $AM = \frac{1}{2}AC = 2$. Xét tam giác AMB ta có

$$\cos \widehat{BAM} = \frac{AB^2 + AM^2 - BM^2}{2 \times AB \times AM} = \frac{25 + 4 - 33}{2 \times 5 \times 2} = -\frac{1}{5}.$$

Có $\sin \widehat{BAM} = \sqrt{1 - \cos^2 \widehat{BAM}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$, suy ra diện tích tam giác ABC là

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \widehat{BAM} = \frac{1}{2} \times 5 \times 4 \times \frac{2\sqrt{6}}{5} = 4\sqrt{6}.$$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 289. Cho tam giác ABC vuông cân tại B có $AC = 2\sqrt{2}$. Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

- A. $r = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$. B. $r = \frac{2}{2 - \sqrt{2}}$. C. $r = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$. D. $r = \frac{2}{2 + \sqrt{2}}$.

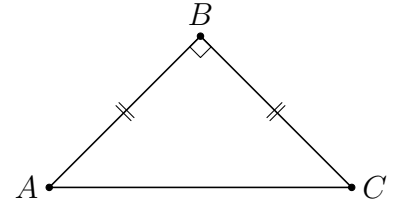
Lời giải.

$$\text{Độ dài } BA = BC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = 2.$$

$$\text{Diện tích tam giác } ABC \text{ là } S_{ABC} = \frac{1}{2}BA \cdot BC = 2.$$

$$p = \frac{BA + BC + AC}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2}.$$

$$\text{Bán kính đường tròn nội tiếp là } r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{2}{2 + \sqrt{2}}.$$



Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 290. Cho tam giác ABC có $AB = \sqrt{2}$, $\widehat{B} = 60^\circ$, $\widehat{C} = 45^\circ$. Tính độ dài đoạn AC .

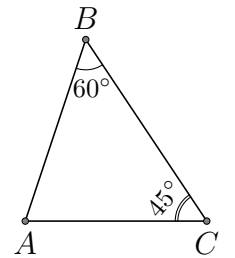
- A. $AC = \sqrt{3}$. B. $AC = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $AC = 3$. D. $AC = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \widehat{A} = 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ.$$

$$\text{Theo định lý Sin ta có: } \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}.$$

$$\text{Suy ra } AC = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \sqrt{3}.$$



Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 291. Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $BC = \sqrt{7}$, $CA = 5$. Gọi m_a , m_b , m_c lần lượt là độ dài các đường trung tuyến đi qua các đỉnh A , B , C của tam giác. Khi đó $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$ bằng

- A. $\frac{234}{5}$. B. $\frac{125}{4}$. C. $\frac{123}{5}$. D. $\frac{123}{4}$.

Lời giải.

Đặt $c = AB = 3$, $a = BC = \sqrt{7}$, $b = CA = 5$ ta có

$$\begin{aligned} m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 &= \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} + \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} \\ &= \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{3}{4}(9 + 7 + 25) = \frac{123}{4}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 292. Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 4$, $\cos A = \frac{3}{4}$. Tính độ dài cạnh BC .

- A. 43. B. $\sqrt{7}$. C. 7. D. $\sqrt{43}$.

Lời giải.

Trong tam giác ABC , ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{3}{4} = 7.$$

Vậy $BC = \sqrt{7}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 293. Cho tam giác có độ dài ba cạnh là 5; 6; 7. Độ dài của đường trung tuyến ngắn nhất của tam giác đó là

- A. 18,25. B. $\frac{\sqrt{73}}{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. $2\sqrt{7}$.

Lời giải.

Đường trung tuyến có độ dài ngắn nhất ứng với cạnh có độ dài lớn nhất.

Vậy độ dài của đường trung tuyến ngắn nhất của tam giác đó là

$$\sqrt{\frac{5^2 + 6^2}{2} - \frac{7^2}{4}} = \sqrt{\frac{61}{2} - \frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{73}{4}} = \frac{\sqrt{73}}{2}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 294. Cho tam giác ABC có $AB = 10$, $\cos(A + B) = \frac{2}{3}$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- A. $3\sqrt{5}$. B. $6\sqrt{5}$. C. 15. D. 30.

Lời giải.

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Ta có

$$\cos(A + B) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \cos(180^\circ - C) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \cos C = -\frac{2}{3}.$$

$$\text{Suy ra } \sin C = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Theo định lí sin, ta có

$$\frac{AB}{\sin C} = 2R \Leftrightarrow R = \frac{AB}{2 \sin C} \Leftrightarrow R = \frac{10}{2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}} \Leftrightarrow R = 3\sqrt{5}.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

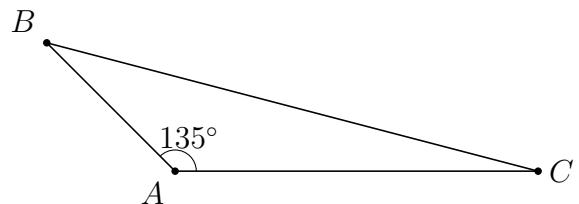
Câu 295. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ có $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$. Tính $T = |\vec{a} - 3\vec{b}|$.

- A. $T = \sqrt{45 - 18\sqrt{2}}$. B. $T = 45 + 18\sqrt{2}$. C. $T = \sqrt{45 + 18\sqrt{2}}$. D. $T = 45 - 18\sqrt{2}$.

Lời giải.

Xét tam giác ABC , có $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = 3\vec{b}$. Khi đó $\widehat{BAC} = 135^\circ$ và

$$\begin{aligned} T &= |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = BC \\ &= \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}} \\ &= \sqrt{45 + 18\sqrt{2}}. \end{aligned}$$



Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 296. Cho tam giác ABC có $A(1; 5)$, $B(-1; 1)$, $C(3; 1)$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A. Tam giác ABC cân. B. Tam giác ABC vuông cân tại A .
C. Tam giác ABC đều. D. Tọa độ trung điểm I của BC là $I(2; 2)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; -4); \overrightarrow{AC} = (2; -4); \overrightarrow{BC} = (4; 0)$.

$$AB = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{5}; AC = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{5}; BC = 4.$$

Vì $AB = AC$ nên tam giác ABC cân tại A .

Chọn đáp án **(A)**

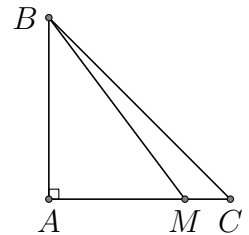
□

Câu 297. Cho tam giác ABC vuông cân tại A , trên cạnh AC lấy điểm M sao cho diện tích tam giác ABC bằng $\frac{4}{3}$ diện tích tam giác ABM . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $AC = 3AM$. B. $AM = \frac{3}{4}MC$. C. $AM = \frac{1}{4}MC$. D. $AM = 3MC$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } S_{ABC} = \frac{4}{3}S_{ABM} \Leftrightarrow \frac{1}{2}BA \cdot AC = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}BA \cdot AM \Leftrightarrow AC = \frac{4}{3}AM \Leftrightarrow AM = 3MC.$$



Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 298. Cho tam giác ABC có $A(1; 5), B(-1; 1), C(3; 1)$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A. Tam giác ABC cân. B. Tam giác ABC vuông cân tại A .
C. Tam giác ABC đều. D. Tọa độ trung điểm I của BC là $I(2; 2)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2; -4); \overrightarrow{AC} = (2; -4); \overrightarrow{BC} = (4; 0)$.

$$AB = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{5}; AC = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{5}; BC = 4.$$

Vì $AB = AC$ nên tam giác ABC cân tại A .

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 299. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC thỏa mãn $b^2 + c^2 - a^2 = \sqrt{3}bc$. Khi đó

- A. $\hat{A} = 45^\circ$. B. $\hat{A} = 30^\circ$. C. $\hat{A} = 60^\circ$. D. $\hat{A} = 75^\circ$.

Lời giải.

Theo định lý cô-sin ta có

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Theo bài ra

$$b^2 + c^2 - a^2 = \sqrt{3}bc \Rightarrow \cos A = \frac{\sqrt{3}bc}{2bc} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = 30^\circ.$$

Vậy $\hat{A} = 30^\circ$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 300. Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b$. Tam giác ABC có diện tích lớn nhất khi góc C bằng

- A. 60° . B. 150° . C. 120° . D. 90° .

Lời giải.

Diện tích tam giác $S_{ABC} = \frac{1}{2}CB.CA \sin \widehat{ACB} \leq \frac{1}{2}a.b$.

Do đó diện tích tam giác ABC đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{2}ab$, đạt được khi $\sin \widehat{ACB} = 1 \Rightarrow \widehat{ACB} = 90^\circ$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 301. Từ hai điểm A và B trên mặt đất người ta nhìn thấy đỉnh C và chân D của tháp CD dưới các góc nhìn là $72^\circ 12'$ và $34^\circ 26'$ so với phương nằm ngang. Biết tháp CD cao 80 m. Khoảng cách AB gần đúng bằng

- A. 91 m. B. 71 m. C. 79 m. D. 40 m.

Lời giải.

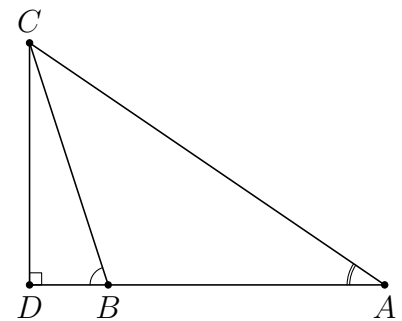
Ta có $\widehat{DBC} = 72^\circ 12'$, $\widehat{DAC} = 34^\circ 26'$.

Suy ra $\widehat{ACB} = \widehat{DBC} - \widehat{DAC} = 37^\circ 46'$.

$$BC = \frac{CD}{\cos \widehat{DBC}} \simeq 84 \text{ m.}$$

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC ta có

$$AB = \frac{BC}{\sin \widehat{DAC}} \cdot \sin \widehat{ACB} \simeq 91 \text{ m.}$$



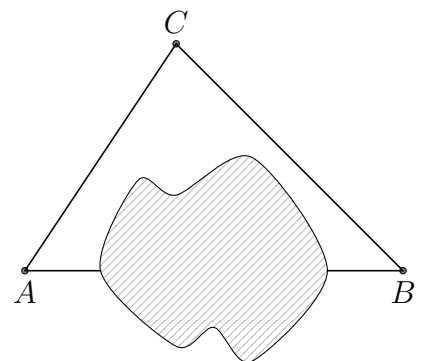
Chọn đáp án **(A)** □

Câu 302. Khoảng cách từ A đến B không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm C mà từ đó có thể nhìn được A và B dưới một góc 60° . Biết $CA = 200$ m, $CB = 180$ m. Khoảng cách AB bằng bao nhiêu?

- A. 228 m. B. $20\sqrt{91}$ m. C. 112 m. D. 168 m.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có} \\ AB^2 &= CA^2 + CB^2 - 2 \cdot CA \cdot CB \cdot \cos 60^\circ \\ &= 36400. \\ \Rightarrow AB &= 20\sqrt{91} \text{ m.} \end{aligned}$$



Chọn đáp án **(B)** □

Câu 303. Cho tam giác ABC không vuông thỏa mãn $m_c = R$. Tính $P = \tan A \cdot \tan B$.

- A. $P = \frac{1}{2}$. B. $P = -\frac{1}{3}$. C. $P = \frac{1}{4}$. D. $P = -\frac{1}{5}$.

Lời giải.

Có $m_c = R \Rightarrow R^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$. Kết hợp định lý sin ta có

$$\begin{aligned} 2\sin^2 A + 2\sin^2 B - \sin^2 C &= 1 \\ \Rightarrow 1 - \cos 2A + 1 - \cos 2B - \sin^2 C &= 1 \\ \Rightarrow \cos^2 C - 2\cos(A+B)\cos(A-B) &= 0 \\ \Rightarrow \cos C [\cos C + 2\cos(A-B)] &= 0 \\ \Rightarrow \cos C + 2\cos(A-B) &= 0 \\ \Rightarrow \cos(A+B) &= 2\cos(A-B) \\ \Rightarrow \cos A \cos B - \sin A \sin B &= 2\cos A \cos B + 2\sin A \sin B \\ \Rightarrow 3\sin A \sin B &= -\cos A \cos B \\ \Rightarrow \tan A \tan B &= -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 304. Cho tam giác ABC có $a + c = 2b$. Tính $P = \tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2}$.

A. $P = \frac{1}{2}$. B. $P = \frac{1}{3}$. C. $P = \frac{2}{3}$. D. $P = \frac{3}{4}$.

Lời giải.

Từ giả thiết, kết hợp định lý sin ta có

$$\begin{aligned} \sin A + \sin C &= 2\sin B \Rightarrow 2\sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2} = 4\sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \\ \Rightarrow \cos \left(\frac{A}{2} - \frac{C}{2} \right) &= 2\cos \left(\frac{A}{2} + \frac{C}{2} \right) \left(\text{do } \cos \frac{B}{2} = \sin \frac{A+C}{2} \neq 0 \text{ và } \sin \frac{B}{2} = \cos \frac{A+C}{2} \right) \\ \Rightarrow \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} &= 2\cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} - 2\sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} \\ \Rightarrow 3\sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} &= \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} \\ \Rightarrow \tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 305. Cho tam giác ABC có r, r_a lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp, bán kính đường tròn bàng tiếp góc A . Định nghĩa tương tự cho r_b, r_c . Biết $r_a = r + r_b + r_c$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Tam giác ABC đều.
- B. Tam giác ABC cân ở đỉnh A (không nhất thiết đều).
- C. Tam giác ABC là tam giác vuông tại A .
- D. Tam giác ABC là tam giác tù đỉnh A .

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $p \tan \frac{A}{2} = (p-a) \tan \frac{A}{2} + p \tan \frac{B}{2} + p \tan \frac{C}{2}$ hay $a \tan \frac{A}{2} = p \left(\tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \right)$ (1).

Ta có

$$\begin{aligned}\sin A + \sin B + \sin C &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} \\ &= 2 \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right) \\ &= 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.\end{aligned}$$

Kết hợp (1) ta có

$$\begin{aligned}2R \sin A \cdot \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}} &= R(\sin A + \sin B + \sin C) \cdot \frac{\sin \frac{B+C}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} \\ \Rightarrow \sin^2 \frac{A}{2} &= \cos^2 \frac{A}{2} \Rightarrow \tan^2 \frac{A}{2} = 1 \Rightarrow \tan \frac{A}{2} = 1 \\ \Rightarrow A &= 90^\circ.\end{aligned}$$

Vậy tam giác ABC vuông tại A .

Chọn đáp án **C**

□

Câu 306. Tam giác ABC có độ dài ba đường trung tuyến thỏa mãn $5m_a^2 = m_b^2 + m_c^2$. Khi đó ABC là tam giác

A. Vuông.

B. Cân.

C. Đều.

D. Vuông cân.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính độ dài đường trung tuyến, ta có

$$\begin{aligned}5 \cdot \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} &= \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4} + \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4} \\ \Leftrightarrow 10(b^2 + c^2) - 5a^2 &= 4a^2 + c^2 + b^2 \\ \Leftrightarrow a^2 &= b^2 + c^2.\end{aligned}$$

Do đó tam giác ABC vuông tại A .

Chọn đáp án **A**

□

Câu 307. Nếu tam giác ABC có $a^2 < b^2 + c^2$ thì

A. $\hat{A}$ là góc tù.

B. $\hat{A}$ là góc vuông.

C. $\hat{A}$ là góc nhọn.

D. $\hat{A}$ là góc nhỏ nhất.

Lời giải.

$$\text{Ta có } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}. \text{ Do } a^2 < b^2 + c^2 \text{ nên } \cos A > 0.$$

Vậy $\hat{A}$ là góc nhọn.

Chọn đáp án **C**

□

ĐÁP ÁN

1. C	2. C	3. D	4. A	5. B	6. A	7. A	8. C	9. C	10. B
11. C	12. D	13. B	14. C	15. A	16. B	17. C	18. B	19. D	20. B
21. C	22. A	23. D	24. D	25. A	26. C	27. D	28. D	29. C	30. A
31. B	32. D	33. C	34. D	35. B	36. A	37. C	38. C	39. A	40. B
41. D	42. B	43. C	44. D	45. C	46. A	47. C	48. D	49. C	50. C
51. C	52. C	53. B	54. A	55. C	56. C	57. C	58. C	59. B	60. D
61. B	62. D	63. B	64. B	65. B	66. A	67. B	68. D	69. D	70. A
71. B	72. B	73. A	74. B	75. B	76. D	77. A	78. A	79. D	80. C
81. C	82. B	83. A	84. C	85. B	86. D	87. B	88. A	89. A	90. C
91. A	92. A	93. D	94. C	95. A	96. C	97. D	98. A	99. D	100. A
101. B	102. C	103. B	104. D	105. C	106. A	107. B	108. C	109. A	110. D
111. B	112. C	113. B	114. D	115. A	116. A	117. C	118. B	119. A	120. C
121. A	122. A	123. A	124. C	125. B	126. D	127. A	128. C	129. B	130. C
131. A	132. C	133. B	134. A	135. D	136. C	137. B	138. A	139. C	140. B
141. C	142. C	143. B	144. A	145. C	146. B	147. D	148. B	149. A	150. D
151. C	152. D	153. A	154. A	155. A	156. D	157. A	158. B	159. A	160. C
161. C	162. B	163. B	164. A	165. B	166. D	167. B	168. C	169. D	170. A
171. C	172. B	173. B	174. A	175. B	176. A	177. C	178. C	179. B	180. D
181. A	182. C	183. D	184. C	185. A	186. B	187. A	188. B	189. C	190. B
191. B	192. B	193. D	194. C	195. D	196. A	197. C	198. A	199. A	200. C
201. B	202. C	203. D	204. B	205. A	206. C	207. D	208. A	209. C	210. C
211. B	212. B	213. A	214. B	215. C	216. D	217. C	218. B	219. B	220. B
221. C	222. A	223. A	224. A	225. C	226. A	227. D	228. B	229. A	230. B
231. C	232. C	233. A	234. B	235. A	236. D	237. B	238. A	239. B	240. A
241. B	242. A	243. A	244. C	245. C	246. B	247. B	248. B	249. B	250. A
251. A	252. A	253. A	254. D	255. B	256. B	257. C	258. C	259. B	260. B
261. B	262. D	263. A	264. D	265. B	266. C	267. A	268. C	269. A	270. A
271. D	272. A	273. D	274. B	275. B	276. D	277. B	278. D	279. A	280. A
281. A	282. B	283. C	284. A	285. A	286. B	287. C	288. B	289. D	290. A
291. D	292. B	293. B	294. A	295. C	296. A	297. D	298. A	299. B	300. D
301. A	302. B	303. B	304. B	305. C	306. A	307. C			

Chương 3: PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG

§1 PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT VÀ PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ CỦA ĐƯỜNG THẲNG

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 VÉC-TƠ CHỈ PHƯƠNG CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Định nghĩa. Véc-tơ $\vec{u}$ gọi là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với Δ .

2 PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Định nghĩa. Cho đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0; y_0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (u_1; u_2)$. Phương trình tham số của Δ :
$$\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases} \quad (1) \quad (t \text{ là tham số}).$$

! Nhận xét: $M(x; y) \in \Delta \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases}$

3 PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Định nghĩa. Cho đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0; y_0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (u_1; u_2)$, trong đó u_1 và $u_2 \neq 0$. Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$

4 VÉC-TƠ PHÁP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Định nghĩa. Véc-tơ $\vec{n}$ gọi là véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng Δ nếu $\vec{n} \neq \vec{0}$ và giá của $\vec{n}$ vuông góc với Δ .

5 PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA ĐƯỜNG THẲNG

Định nghĩa. Phương trình $Ax + By + C = 0$ (với $A^2 + B^2 \neq 0$) được gọi là phương trình tổng quát của đường thẳng.

Nhận xét:

- Nếu đường thẳng Δ có phương trình $Ax + By = C$ thì đường thẳng Δ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B)$, véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (B; -A)$ hoặc $\vec{u}' = (-B; A)$.
- Nếu đường thẳng Δ đi qua $M(x_0; y_0)$ và có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B)$ thì phương trình đường thẳng Δ : $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.
- Đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(a; 0)$, $B(0; b)$ (với $a, b \neq 0$) thì phương trình đường thẳng Δ có dạng: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Đây gọi là phương trình đường thẳng theo đoạn chắn.
- Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ và có hệ số góc k thì phương trình đường thẳng Δ là: $y - y_0 = k(x - x_0)$. Đây là phương trình đường thẳng theo hệ số góc.
- Nếu đường thẳng Δ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (u_1; u_2)$ thì nó có hệ số góc là $k = \frac{u_2}{u_1}$. Ngược lại, nếu đường thẳng Δ có hệ số góc $k = \frac{a}{b}$ thì một véc-tơ chỉ phương của nó là $\vec{u} = (1; k)$.

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Viết phương trình tham số của đường thẳng

Để lập phương trình tham số của đường thẳng Δ ta cần xác định một điểm $M(x_0; y_0) \in \Delta$ và một véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (u_1; u_2)$.

Vậy phương trình tham số đường thẳng Δ :
$$\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases}$$

BÀI TẬP DẠNG 1

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng Oxy , viết phương trình tham số đường thẳng Δ biết Δ đi qua $M(1; 2)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (-1; 3)$.

Lời giải.

Phương trình tham số đường thẳng Δ :
$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \end{cases}.$$

□

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng Oxy , đường thẳng d đi qua $A(1; 2)$, $B(3; 1)$. Viết phương trình tham số đường thẳng d .

Lời giải.

Đường thẳng d qua $A(1; 2)$ và nhận $\overrightarrow{AB} = (2; -1)$ làm véc-tơ chỉ phương.

Vậy phương trình tham số đường thẳng d :
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \end{cases}.$$

□

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng Oxy , đường thẳng d đi qua $M(-2; 3)$ và song song với đường thẳng EF . Biết $E(0; -1), F(-3; 0)$. Viết phương trình đường thẳng d .

Lời giải.

$$\overrightarrow{EF} = (-3; 1).$$

$$\text{Phương trình tham số đường thẳng } d: \begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = 3 + t \end{cases}.$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $A(3; -4), B(0, 6)$. Viết phương trình tham số của đường thẳng AB .

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} = (-3; 10).$$

Đường thẳng (AB) qua $A(3; -4)$ và nhận $\overrightarrow{AB} = (-3; 10)$ làm véc-tơ chỉ phương.

$$\text{Vậy phương trình đường thẳng } (AB): \begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = -4 + 10t \end{cases}.$$

□

Bài 2. Trong mặt phẳng Oxy , viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $A(1; -4)$ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (5; 1)$.

Lời giải.

$$\text{Phương trình đường thẳng } (d): \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 5 + t \end{cases}.$$

□

Bài 3. Trong mặt phẳng Oxy , viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M(1; -1)$ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (0; 1)$.

Lời giải.

$$\text{Phương trình đường thẳng } (d): \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + t \end{cases}.$$

□

Bài 4. Trong mặt phẳng Oxy , viết phương trình tham số đường thẳng d đi qua điểm $A(0; -4)$ và song song với đường thẳng Δ có phương trình tham số $\begin{cases} x = 2017 + 2t \\ y = 2018 - t \end{cases}$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ : có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (2; -1)$.

Vì đường thẳng d song song với đường thẳng Δ nên d nhận $\vec{u} = (2; -1)$ làm véc-tơ chỉ phương.

$$\text{Lại có } d \text{ đi qua điểm } A(0; -4) \text{ nên phương trình tham số đường thẳng } d: \begin{cases} x = 2m \\ y = -4 - m \end{cases}$$

□

➤ Dạng 2. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng

Để lập phương trình tổng quát của đường thẳng Δ ta cần xác định một điểm $M(x_0; y_0) \in \Delta$ và một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B)$.

Vậy phương trình đường thẳng Δ : $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

Vậy phương trình tổng quát đường thẳng $\Delta: Ax + By = C$ với $C = -(Ax_0 + By_0)$.

🔗🔗🔗 BÀI TẬP DẠNG 2 🔗🔗🔗

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng Oxy , viết phương trình tổng quát đường thẳng Δ đi qua điểm $M(-1; 5)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (-2; 3)$.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng $\Delta: -2(x + 1) + 3(y - 5) = 0 \Leftrightarrow -2x + 3y - 17 = 0$.

Vậy phương trình tổng quát đường thẳng $\Delta: -2x + 3y - 17 = 0$. □

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng Oxy , viết phương trình tổng quát đường thẳng Δ đi qua điểm $N(2; 3)$ và vuông góc với đường thẳng AB với $A(1; 3), B(2; 1)$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1; -2)$.

Đường thẳng Δ qua $N(2; 3)$ và nhận $\overrightarrow{AB} = (1; -2)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

Phương trình đường thẳng $\Delta: (x - 2) - 2(y - 3) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 4 = 0$.

Vậy phương trình tổng quát đường thẳng $\Delta: x - 2y + 4 = 0$. □

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng Oxy , viết phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua $A(-1; 2)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: 2x - y + 4 = 0$.

Lời giải.

Cách 1:

Phương trình đường thẳng d có dạng: $x + 2y + C = 0$.

Vì d đi qua $A(-1; 2)$ nên ta có phương trình: $-1 + 2 \cdot 2 + C = 0 \Leftrightarrow C = -3$. Vậy phương trình tổng quát đường thẳng của đường thẳng $d: x + 2y - 3 = 0$.

Cách 2:

Đường thẳng Δ có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 2)$.

Vì d vuông góc với Δ nên d nhận $\vec{u} = (1; 2)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

Phương trình đường thẳng $d: (x + 1) + 2(y - 2) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 3 = 0$. □

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = -2t \\ y = 1 + t \end{cases}$ và $\Delta': \begin{cases} x = -2 - t' \\ y = t' \end{cases}$. Viết phương trình tham số của đường thẳng d đối xứng với Δ' qua Δ .

A. $d: \begin{cases} x = l \\ y = 22 - 7l \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 22 - 7l \\ y = l \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -6 + 3l \\ y = 4 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = -6 + 7l \\ y = 4 + l \end{cases}$.

Lời giải.

Gọi $M = \Delta \cap \Delta' \Rightarrow M(-6; 4)$

Có $A(-2; 0) \in \Delta'$ khác M .

Tìm tọa độ hình chiếu của A lên Δ là $H\left(\frac{-6}{5}; \frac{8}{5}\right)$.

Tọa độ điểm đối xứng của A qua Δ là $A'\left(-\frac{2}{5}; \frac{16}{5}\right)$.

Vậy đường thẳng cần tìm là $\begin{cases} x = 22 - 7l \\ y = l \end{cases}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho đường thẳng Δ có phương trình tham số: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 - t \end{cases}$.

a) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ .

b) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng l đi qua điểm $N(4; 2)$ và vuông góc với Δ .

Lời giải.

a) Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; -1)$ nên có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 2)$.

Chọn tham số $t = 0$ ta có ngay điểm $A(1; -3)$ nằm trên Δ .

Phương trình tổng quát của đường thẳng Δ là:

$$1. (x - 1) + 2. [y - (-3)] = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 5 = 0$$

b) Đường thẳng l vuông góc với Δ nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_l = (2; -1)$. Phương trình tổng quát của đường thẳng l là: $2(x - 4) - 1(y - 2) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 6 = 0$ □

Bài 2. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng d có hệ số góc bằng -3 và $A(1; 2)$ nằm trên d . Lập phương trình tổng quát của đường thẳng d .

Lời giải.

Đường thẳng d có hệ số góc bằng -3 nên có véc-tơ pháp tuyến là $(3; 1)$.

Đường thẳng d đi qua điểm $A(1; 2)$ và có véc-tơ pháp tuyến là $(3; 1)$ nên có phương trình tổng quát là: $3(x - 1) + 1(y - 2) = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 5 = 0$ □

Bài 3. Trong mặt phẳng Oxy , viết phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua $A(2; -5)$ và nó tạo với trục Ox một góc 60° .

Lời giải.

Hệ số góc của đường thẳng d là $k = \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Phương trình đường thẳng d là: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 2) - 5 \Leftrightarrow \sqrt{3}x - 3y - 15 - 2\sqrt{3} = 0$ □

Bài 4. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng $d: y = 2x + 1$, viết phương trình đường thẳng d' đi qua điểm B là điểm đối xứng của điểm $A(0; -5)$ qua đường thẳng d và song song với đường thẳng $y = -3x + 2$.

Lời giải.

Đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng d nên ta có: $k_{AB} \cdot 2 = -1 \Leftrightarrow k_{AB} = -\frac{1}{2}$.

Phương trình đường thẳng AB là: $y = -\frac{1}{2}(x - 0) - 5 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x - 5$.

Vì A và B đối xứng nhau qua đường thẳng d nên trung điểm N của chúng sẽ là giao điểm của hai

đường thẳng d và AB .

Suy ra tọa độ của điểm N là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -\frac{1}{2}x - 5 \end{cases} \Rightarrow N\left(-\frac{12}{5}; -\frac{19}{5}\right)$. Từ đó

ta tính được $A\left(-\frac{24}{5}; -\frac{13}{5}\right)$. Đường thẳng d' song song với đường thẳng $y = -3x + 2$ nên $k_{d'} = -3$.

Phương trình đường thẳng d' là: $y = -3\left(x + \frac{24}{5}\right) - \frac{13}{5} \Leftrightarrow y = -3x - 17$ $\square$

Bài 5. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng $d: 2x - 3y + 1 = 0$ và điểm $A(-1; 3)$. Viết phương trình đường thẳng d' đi qua A và cách điểm $B(2; 5)$ khoảng cách bằng 3.

Lời giải.

Phương trình d' có dạng: $ax + by + c = 0$. Do $A \in d'$ nên: $(-1)a + 3b + c = 0 \Leftrightarrow c = a - 3b$ (1).

Hơn nữa $d(B, d') = 3 \Leftrightarrow \frac{|2a + 5b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 3$ (2).

Thay (1) vào (2) ta có: $\frac{|3a + 2b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 3 \Leftrightarrow 5b^2 - 12ab = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = \frac{12a}{5} \end{cases}$

Với $b = 0$ thay vào (1) ta có $c = a \Rightarrow d': ax + a = 0 \Leftrightarrow d': x + 1 = 0$

Với $b = \frac{12a}{5}$ ta chọn $a = 5, b = 12$ thay vào (1) ta được: $c = 5 - 3.12 = -31 \Rightarrow d': 5x + 12y - 31 = 0$

$\square$

Bài 6. Trong mặt phẳng Oxy , viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(2; 5)$ và cách đều $A(-1; 2)$ và $B(5; 4)$.

Lời giải.

Gọi phương trình đường thẳng d cần tìm là $ax + by + c = 0$ ($a^2 + b^2 \neq 0$) (1).

Do $M(2; 5) \in d$ nên ta có: $2a + 5b + c = 0 \Leftrightarrow c = -2a - 5b$. Thay $c = -2a - 5b$ vào (1) ta có phương trình đường thẳng d trở thành: $ax + by - 2a - 5b = 0$ (2).

Vì d cách đều hai điểm A và B nên:

$$\frac{|(-1)a + 2b - 2a - 5b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|5a + 4b - 2a - 5b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow |3a + 3b| = |3a - b| \Leftrightarrow 9a^2 + 18ab + 9b^2 = 9a^2 - 6ab +$$

$$b^2 \Leftrightarrow 8b^2 + 24ab = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = -3a \end{cases}$$

Trường hợp 1: Với $b = 0$ thay vào (2) ta được phương trình đường thẳng d là:

$$ax + 0y - 2a - 5.0 = 0 \Leftrightarrow ax - 2a = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0$$

Trường hợp 2: Với $b = -3a$ ta chọn $a = 1, b = -3$ thay vào (2) ta được phương trình đường thẳng d là: $1x - 3y - 2 - 5.(-3) = 0 \Leftrightarrow x - 3y + 13 = 0$ $\square$

Dạng 3. Vị trí tương đối và góc giữa hai đường thẳng

Cho các đường thẳng $\Delta: Ax + By + C = 0$ và $\Delta': A'x + B'y + C' = 0$. Khi đó ta có $\vec{n} = (A, B)$ và $\vec{n}' = (A', B')$ lần lượt là véc-tơ pháp tuyến của Δ và Δ' .

- a) Để xét vị trí tương đối của Δ và Δ' trước hết ta dựa vào các véc-tơ $\vec{n}$ và $\vec{n}'$. Nếu các véc-tơ $\vec{n}$ và $\vec{n}'$ không cộng tuyến thì Δ và Δ' cắt nhau. Nếu véc-tơ $\vec{n}$ và $\vec{n}'$ cộng tuyến, nghĩa là $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$ thì Δ và Δ' là hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau. Cụ thể ta có:

Δ cắt Δ' khi và chỉ khi $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$, hơn nữa nếu $AA' + BB' = 0$ thì $\Delta \perp \Delta'$.

$\Delta \equiv \Delta'$ khi và chỉ khi $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$.

$\Delta \parallel \Delta'$ khi và chỉ khi $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$.

b) Nếu Δ cắt Δ' và gọi φ là góc giữa các đường thẳng Δ, Δ' thì $\cos \varphi = |\cos(\vec{n}, \vec{n}')|$

Chú ý rằng việc xét vị trí tương đối của hai đường thẳng cũng được xét qua số điểm chung của Δ và Δ' . Việc xét vị trí tương đối và tính góc giữa hai đường thẳng cắt nhau cũng được thực hiện qua các véc-tơ chỉ phương của Δ và Δ' .

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 3 ❖❖❖

Ví dụ 1. Cho ba đường thẳng: $d_1 : 2x + y - 1 = 0$, $d_2 : x + 2y + 1 = 0$, $d_3 : mx - y - 7 = 0$. Chứng minh rằng các đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau và tìm giá trị của tham số m để ba đường thẳng trên đồng quy.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Từ đó suy ra d_1, d_2 cắt nhau tại điểm $A(1; -1)$.

Ba đường thẳng đã cho đồng quy khi và chỉ khi d_3 cũng đi qua điểm A , hay $A \in d_3$, suy ra

$$m \cdot 1 - (-1) - 7 = 0 \Leftrightarrow m = 6.$$

□

Ví dụ 2. Cho các đường thẳng $\Delta : 2x + 3y - 5 = 0$, $\Delta' : 3x - 2y - 1 = 0$ và điểm $M(2; 3)$.

a) Xét vị trí tương đối giữa các đường thẳng Δ và Δ' .

b) Biết d là đường thẳng đi qua điểm M và tạo với các đường thẳng Δ, Δ' một tam giác cân.

Tính góc giữa các đường thẳng Δ và d .

Lời giải.

a) Ta có $\vec{n} = (2, 3)$ và $\vec{n}' = (3, -2)$ là các véc-tơ pháp tuyến của Δ và Δ' .

Ta thấy $\vec{n}$ và $\vec{n}'$ không cùng phương vì $\frac{2}{3} \neq \frac{3}{-2}$, từ đó suy ra Δ và Δ' là các đường thẳng cắt nhau.

b) Ta có $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) = 0$, do đó Δ và Δ' là các đường thẳng vuông góc với nhau.

Gọi $A = \Delta \cap \Delta'$, $B = \Delta \cap d$, $C = d \cap \Delta'$. Khi đó tam giác ABC là vuông tại A do đó nếu tam giác ABC cân thì $\widehat{B} = \widehat{C} = \frac{\pi}{4}$.

Từ đó suy ra góc giữa các đường thẳng Δ và d bằng $\frac{\pi}{4}$.

□

Ví dụ 3. Cho hai đường thẳng $\Delta : (m + 3)x + 3y - 2m + 3 = 0$ và $\Delta' : 2x + 2y + 2 - 3m = 0$.

Tìm giá trị của tham số m để

a) Đường thẳng Δ song song với Δ' .

b) Đường thẳng Δ cắt đường thẳng Δ' .

Lời giải.

a) Δ cắt Δ' khi và chỉ khi $\frac{m+3}{2} \neq \frac{3}{2} \Leftrightarrow m \neq 0$.

b) Theo câu a), để Δ song song với Δ' thì trước hết ta phải có $m = 0$.

Với $m = 0$, khi đó dễ dàng nhận thấy $\Delta \equiv \Delta'$.

Vậy không tồn tại m để $\Delta \parallel \Delta'$.

Chú ý: Ta có thể làm theo cách sau: Δ song song với Δ' khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{m+3}{2} = \frac{3}{2} \neq \frac{-2m+3}{2-3m} \\ 2-3m \neq 0 \end{cases}$$

Hệ trên vô nghiệm, do đó không tồn tại m để $\Delta \parallel \Delta'$.

□

Ví dụ 4. Tìm các giá trị của k để góc giữa các đường thẳng $\Delta : kx - y + 1 = 0$ và $\Delta' : x - y = 0$ bằng 60° .

Lời giải.

Ta có $\vec{n} = (k; 1)$ và $\vec{n}' = (1; -1)$ là véc-tơ pháp tuyến của các đường thẳng Δ và Δ' .

Theo bài ra ta có $\cos 60^\circ = |\cos(\vec{n}, \vec{n}')| \Leftrightarrow \frac{|k+1|}{\sqrt{k^2+1}\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(k+1)^2 = k^2 + 1$. Giải phương trình

$$\text{trên ta được } \begin{cases} k = -2 + \sqrt{3} \\ k = -2 - \sqrt{3} \end{cases}.$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm m sao cho hai đường thẳng $\Delta : x + 5my - 4 = 0$ và $\Delta' : 2x + 3y - 2 = 0$ song song với nhau.

Lời giải.

$$\Delta \parallel \Delta' \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{5m}{3} \Leftrightarrow m = \frac{3}{10}.$$

□

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho 3 đường thẳng $d_1: 2x + y - 4 = 0$, $d_2: 5x - 2y + 3 = 0$, $d_3: mx + 3y - 2 = 0$. a) Xét vị trí tương đối giữa d_1 và d_2 .

b) Tìm giá trị của tham số m để 3 đường thẳng trên đồng quy.

Lời giải.

a) Nhận thấy $\frac{2}{5} \neq \frac{1}{-2}$, từ đó suy ra các đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau.

b) Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ 5x - 2y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{9} \\ y = \frac{26}{9} \end{cases}.$$

Vậy d_1 và d_2 cắt nhau tại điểm $M\left(\frac{5}{9}; \frac{26}{9}\right)$.

Vì d_1, d_2, d_3 đồng quy nên $M \in d_3$, ta có: $m \cdot \frac{5}{9} + 3 \cdot \frac{26}{9} - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -12$ □

Bài 3. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho các đường thẳng $\Delta_1 : x + 2y - \sqrt{2} = 0$ và $\Delta_2 : x - y = 0$. Tính cosin của góc giữa các đường thẳng Δ_1 và Δ_2 .

Lời giải.

Ta có $\vec{n} = (1; 2)$ và $\vec{n}' = (1; -1)$ là véc-tơ pháp tuyến của các đường thẳng Δ và Δ' .

Gọi φ là góc giữa các đường thẳng Δ và Δ' . Khi đó

$$\cos \varphi = |\cos(\vec{n}, \vec{n}')| = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

□

Bài 4. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho các đường thẳng $\Delta : 3x + 5y + 15 = 0$ và

$\Delta' : \begin{cases} x = 10 - 3t \\ y = 1 + 5t \end{cases}$. Tính góc φ giữa Δ_1 và Δ_2 .

Lời giải.

Ta có $\vec{n} = (3; 5)$ là một véc-tơ pháp tuyến của Δ .

$\vec{u}' = (-3; 5)$ là một véc-tơ chỉ phương của Δ' , suy ra Δ' có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}' = (5; 3)$.

Do $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0 \Rightarrow \Delta \perp \Delta'$. □

Bài 5. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho 2 đường thẳng $\Delta : x + 2y - 5 = 0$, $\Delta' : 3x + my - 1 = 0$. Tìm m để góc giữa hai đường thẳng Δ, Δ' bằng 45° .

Lời giải.

$\Delta : x + 2y - 5 = 0$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 2)$,

$\Delta' : 3x + my - 1 = 0$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}' = (3; m)$.

Theo bài ra ta có: $\cos 45^\circ = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}'|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}'|} = \frac{|3 + 2m|}{\sqrt{5}\sqrt{3^2 + m^2}}.$

Từ đó suy ra $\begin{cases} m = 1 \\ m = -9 \end{cases}$ □

Dạng 4. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Cho điểm $M(x_0; y_0)$ và đường thẳng $\Delta: Ax + By + C = 0$. Khi đó, khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ được tính theo công thức

$$d(M, \Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

🔗🔗🔗 BÀI TẬP DẠNG 4 🔗🔗🔗

Ví dụ 1. Tìm khoảng cách từ điểm $M(1; 2)$ đến đường thẳng $(D): 4x + 3y - 2 = 0$.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính khoảng cách ta có

$$d(M, D) = \frac{|4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 2|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{8}{5}.$$

□

Ví dụ 2. Tìm những điểm nằm trên đường thẳng $\Delta: 2x + y - 1 = 0$ và có khoảng cách đến $(D): 4x + 3y - 10 = 0$ bằng 2.

Lời giải.

Giả sử có điểm $M \in \Delta$, khi đó $M(m; 1 - 2m)$.

$$\text{Theo đề } d(M, \Delta) = 2 \Leftrightarrow \frac{|4m + 3(1 - 2m) - 10|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2 \Leftrightarrow |-2m - 7| = 10$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 7 = 10 \\ 2m + 7 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ m = -\frac{17}{2} \end{cases}.$$

Vậy có hai điểm thỏa mãn điều kiện là $M_1\left(\frac{3}{2}; -2\right)$ và $M_2\left(-\frac{17}{2}; 18\right)$.

□

Ví dụ 3. Viết phương trình của đường thẳng đi qua điểm $A(1, -3)$ và có khoảng cách đến điểm $M_0(2, 4)$ bằng 1.

Lời giải.

Giả sử đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1; -3)$ có hệ số góc k . Khi đó phương trình Δ có dạng:

$$y + 3 = k(x - 1) \Leftrightarrow kx - y - k - 3 = 0.$$

$$\text{Theo đề ta có } d(M_0, \Delta) = \frac{|2k - 4 - k - 3|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1 \Leftrightarrow |k - 7| = \sqrt{k^2 + 1} \Leftrightarrow (k - 7)^2 = k^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow k^2 - 14k + 49 = k^2 + 1 \Leftrightarrow 14k = 48 \Leftrightarrow k = \frac{24}{7}.$$

Vậy phương trình $\Delta: 24x - 7y - 45 = 0$.

□

Ví dụ 4. Viết phương trình của đường thẳng (D) song song với $(D'): 3x + 4y - 1 = 0$ và cách (D') một đoạn bằng 2.

Lời giải.

Đường thẳng $(D) \parallel (D')$ nên phương trình đường thẳng $(D): 3x + 4y + c = 0$.

Lấy điểm $M(-1; 1) \in (D')$, theo đề ta có:

$$d(D, D') = d(M, D) = 2 \Leftrightarrow \frac{|-3 + 4 + c|}{5} = 2 \Leftrightarrow |c + 1| = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 9 \\ c = -11 \end{cases}.$$

Với $c = 9$ ta có $D: 3x + 4y + 9 = 0$.

Với $c = -11$ ta có $D: 3x + 4y - 11 = 0$.

□

Ví dụ 5. Cho điểm $A(-1, 2)$ và hai đường $(\Delta): x - y - 1 = 0, (\Delta'): x + 2y - 5 = 0$. Tìm trên đường thẳng (Δ) một điểm M sao cho khoảng cách từ M đến (Δ') bằng AM .

Lời giải.

Ta có $M \in \Delta$, suy ra $M(m, m - 1)$.

$$\overrightarrow{AM} = (m + 1; m - 3) \Rightarrow AM = \sqrt{(m + 1)^2 + (m - 3)^2} = \sqrt{2m^2 - 4m + 10}.$$

Theo đề $\frac{|m + 2(m - 1) - 5|}{\sqrt{5}} = \sqrt{2m^2 - 4m + 10} \Leftrightarrow |3m - 7| = \sqrt{5(2m^2 - 4m + 10)}$
 $\Leftrightarrow (3m - 7)^2 = 10m^2 - 20m + 50 \Leftrightarrow m^2 + 22m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -11 \pm 2\sqrt{30}$.

Vậy có hai điểm thỏa mãn là $M_1(-11 - 2\sqrt{30}; -12 - 2\sqrt{30})$ và $M_2(-11 + 2\sqrt{30}; -12 + 2\sqrt{30})$. $\square$

Ví dụ 6. Tìm phương trình của đường thẳng cách điểm $M(1, 1)$ một khoảng bằng 2 và cách điểm $M'(2, 3)$ một khoảng bằng 4.

Lời giải.

Giả sử phương trình cần tìm là $\Delta: Ax + By + C = 0$.

Theo đề ta có:

$$d(M, \Delta) = 2 \Leftrightarrow \frac{|A + B + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 2 \Leftrightarrow |A + B + C| = 2\sqrt{A^2 + B^2} \quad (1)$$

$$d(M', \Delta) = 4 \Leftrightarrow \frac{|2A + 3B + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 4 \Leftrightarrow |2A + 3B + C| = 4\sqrt{A^2 + B^2} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } |2A + 3B + C| = 2|A + B + C| \Leftrightarrow \begin{cases} 2A + 3B + C = 2(A + B + C) \\ 2A + 3B + C = -2(A + B + C) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B - C = 0 \\ 4A + 5B + 3C = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Thay } B = C \text{ và (1) ta được } |A + 2B| = 2\sqrt{A^2 + B^2} \Rightarrow 3A^2 - 4BA = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ A = \frac{4}{3}B \end{cases}.$$

Với $A = 0$, chọn $B = C = 1$, ta được đường thẳng $\Delta_1: y + 1 = 0$.

Với $A = \frac{4}{3}B$, chọn $B = 3 \Rightarrow A = 4, C = 3$. Ta có đường thẳng $\Delta_2: 4x + 3y + 3 = 0$.

Từ $4A + 5B + 3C = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{3}(4A + 5B)$ và (1) ta được

$$|A + 2B| = 6\sqrt{A^2 + B^2} \Rightarrow 35A^2 - 4BA + 32B^2 = 0.$$

Giải phương trình bậc hai theo ẩn A , ta có

$$\Delta' = 4B^2 - 1020B^2 = -1016B^2 \leq 0.$$

Trường hợp $B = 0$, ta có $\Delta' = 0$, phương trình có nghiệm kép $A = 0$, vô lý.

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn yêu cầu. $\square$

Dạng 5. Viết phương trình đường phân giác của góc do Δ_1 và Δ_2 tạo thành

Cho đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$ và hai điểm $M(x_M; y_M), N(x_N; y_N) \notin \Delta$. Khi đó:

a) M, N nằm cùng phía so với Δ khi và chỉ khi $(ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) > 0$.

b) M, N nằm khác phía so với Δ khi và chỉ khi $(ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) < 0$.

Để viết phương trình đường phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$ ta có nhiều cách. Dưới đây là 3 cách thường sử dụng:

Cách 1:

Dựa vào tính chất đường phân giác là tập hợp các điểm cách đều hai đường thẳng $AB: ax +$

$by + c = 0$ và $AC : mx + ny + p = 0$, ta có:

$$\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|mx + ny + p|}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

Hai đường thu được là phân giác trong và phân giác ngoài của góc $\widehat{ABC}$.

Sau đó, ta cần dựa vào vị trí tương đối của hai điểm B, C với hai đường vừa tìm được để phân biệt phân giác trong, phân giác ngoài. Cụ thể, nếu B, C ở cùng một phía thì đó là phân giác ngoài, ở khác phía thì là phân giác trong.

Cách 2:

Lấy B', C' lần lượt thuộc AB, AC sao cho:

$$\overrightarrow{AB'} = \frac{1}{AB} \cdot \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC'} = \frac{1}{AC} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

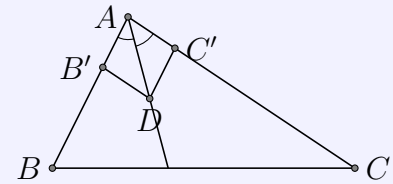
Giả sử $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'}$ Khi đó tứ giác $AB'DC'$ là hình thoi.

Do đó, $\overrightarrow{AD}$ là vectơ chỉ phương của đường phân giác cần tìm.

Cách 3:

Giả sử $\vec{u} = (a; b)$ là vectơ chỉ phương của đường phân giác cần tìm. Ta có:

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \vec{u}) = \cos(\overrightarrow{AC}, \vec{u}) \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \vec{u}}{|\overrightarrow{AC}|}$$



❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 5 ❖❖❖

Ví dụ 1. Viết phương trình đường phân giác trong góc A của tam giác ABC biết $A(1; 1)$, $B(4; 5)$, $C(-4; -11)$.

Lời giải.

Cách 1. Ta có phương trình các cạnh:

$$AB : 4x - 3y - 1 = 0; AC : 12x - 5y - 7 = 0$$

Phương trình hai đường phân giác góc A là:

$$\begin{cases} \frac{4x - 3y - 1}{5} = \frac{12x - 5y - 7}{13} \\ \frac{4x - 3y - 1}{5} = -\frac{12x - 5y - 7}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 7y - 11 = 0 (d_1) \\ 56x - 32y - 24 = 0 (d_2) \end{cases}$$

Ta có:

$$(4x_C + 7y_C - 11)(4x_B + 7y_B - 11) < 0$$

Do đó B, C khác phía so với (d_1) hay (d_1) là đường phân giác cần tìm.

Cách 2. Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; 4)$; $AB = 5$; $\overrightarrow{AB'} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$

$$\overrightarrow{AC} = (-5; -12); AC = 13; \overrightarrow{AC'} = \frac{1}{13}\overrightarrow{AC} = \left(-\frac{5}{13}; -\frac{12}{13}\right)$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} = \left(\frac{14}{65}; -\frac{8}{65}\right).$$

Vậy vectơ chỉ phương của đường phân giác cần tìm là: $\vec{u} = (7; -4)$. Do đó phương trình đường phân giác cần tìm là:

$$4(x - 1) + 7(y - 1) = 0 \Leftrightarrow 4x + 7y - 11 = 0$$

Cách 3. Giả sử $\vec{u} = (a; b)$ là vectơ chỉ phương của đường phân giác cần tìm.

$$\text{Ta có } \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \vec{u}}{|\overrightarrow{AC}|} \Leftrightarrow \frac{3a + 4b}{5} = \frac{-5a - 12b}{13} \Leftrightarrow a = -\frac{7}{4}b.$$

Vậy vectơ chỉ phương của đường phân giác cần tìm là: $\vec{u} = (7; -4)$. Do đó phương trình đường phân giác cần tìm là:

$$4(x - 1) + 7(y - 1) = 0 \Leftrightarrow 4x + 7y - 11 = 0$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

Bài 1. Tính khoảng cách từ điểm $M(3; 5)$ đến đường thẳng $\Delta: x + y + 1 = 0$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } d(M, \Delta) = \frac{|3 + 5 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{9}{\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{2}.$$

□

Bài 2. Tính khoảng cách từ điểm $M(4; -5)$ đến đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$.

Lời giải.

Viết phương trình dưới dạng tổng quát $\Delta: 3x - 2y + 4 = 0$.

$$\text{Khi đó } d(M, \Delta) = \frac{|3 \cdot 4 - 2 \cdot (-5) + 4|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{26}{\sqrt{13}} = 2\sqrt{13}.$$

□

Bài 3. Cho tam giác ABC . Tính diện tích tam giác ABC , với: $A(-2; 14), B(4; -2), C(5; -4)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BC} = (1; -2) \Rightarrow BC = \sqrt{5}$. Phương trình đường thẳng BC đi qua B có dạng $2(x - 4) + 1(y + 2) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 6 = 0$.

$$\text{Đường cao } AH \text{ của tam giác } ABC: AH = \frac{|2(-2) + 14 - 6|}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Do đó } S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = \frac{4\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{10} = 2(\text{đvdt})$$

□

Bài 4. Viết phương trình đường thẳng (D) song song với đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ và cách đường thẳng Δ một khoảng bằng 3.

Lời giải.

Vì $(D) \parallel \Delta$ nên phương trình đường thẳng (D) có dạng:

$$(D): 4x - 3y + c = 0.$$

Chọn điểm $M(0; 2) \in \Delta$, theo đề ta có

$$d(M, \Delta) = \frac{|4 \cdot 0 - 3 \cdot 2 + c|}{5} = 3 \Leftrightarrow |c - 6| = 15 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 21 \\ c = -9 \end{cases}.$$

Vậy có hai phương trình thỏa mãn là $(D_1): 4x - 3y + 21 = 0$ và $(D_2): 4x - 3y - 9 = 0$. $\square$

Bài 5. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(1; 3)$ và cách điểm $B(-2; 1)$ một khoảng bằng 3.

Lời giải.

Giả sử $\vec{n} = (a; b)$, $(a^2 + b^2 > 0)$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng cần tìm. Phương trình đường thẳng có dạng:

$$a(x - 1) + b(y - 3) = 0 \Leftrightarrow ax + by - a - 3b = 0$$

Khi đó:

$$d_{(B; \Delta)} = 3 \Leftrightarrow \frac{|-2a + b - a - 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 3 \Leftrightarrow 5a^2 - 12ab = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = \frac{12}{5}a \end{cases}$$

• $b = 0$, chọn $a = 1$ ta có $\Delta_1: x - 1 = 0$.

• $b = \frac{12}{5}a$, chọn $a = 5$, $b = 12$ ta có $\Delta_2: 5x + 12y - 41 = 0$.

Vậy có hai đường thẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $\Delta_1: x - 1 = 0$; $\Delta_2: 5x + 12y - 41 = 0$. $\square$

Bài 6. Cho đường thẳng $\Delta: 5x - 12y + 32 = 0$ và hai điểm $A(1; -1)$, $B(5; -3)$. Tìm một điểm M cách Δ một khoảng bằng 4 và cách đều hai điểm A, B .

Lời giải.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm cần tìm, ta có hệ

$$\begin{cases} (x_0 - 1)^2 + (y_0 + 1)^2 = (x_0 - 5)^2 + (y_0 + 3)^2 \\ \frac{|5x_0 - 12y_0 + 32|}{13} = 4 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được $29x_0 - 64 = \pm 52$ cho ta hai điểm $M(4; 0)$ và $M'(\frac{12}{29}; \frac{108}{29})$. $\square$

Bài 7. Cho tam giác ABC có $A(4; -13)$, $B(4; 12)$, $C(-8; 3)$. Viết phương trình đường phân giác trong góc B .

Lời giải.

Phương trình cạnh BC là $3(x - 4) - 4(y - 12) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y + 36 = 0$.

Phương trình cạnh BA là $x - 4 = 0$.

Phương trình đường phân giác trong và phân giác ngoài của góc B là

$$\frac{|3x - 4y + 36|}{5} = \frac{|x - 4|}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y + 36 = x - 4 \\ 3x - 4y + 36 = -x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 20 = 0 (d_1) \\ x - y + 8 = 0 (d_2) \end{cases}.$$

Ta thấy A và C nằm khác phía so với (d_2) , suy ra đường phân giác trong góc B là đường $x - y + 8 = 0$.

$\square$

Dạng 6. Phương trình đường thẳng trong tam giác

Ta có công thức viết nhanh phương trình đường thẳng qua hai điểm $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ là:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$$

Chú ý: Công thức phương trình đường thẳng Δ qua $M(x_0; y_0)$ và vuông góc với đường thẳng

$d: Ax + By + C = 0$ là: $B(x - x_0) - A(y - y_0) = 0$.

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 6 ❖❖❖

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có đỉnh $A(3; -4)$ và hai đường cao BH và CH có phương trình: $7x - 2y - 1 = 0$ và $2x - 7y - 6 = 0$. Hãy tìm phương trình hai cạnh AB và AC .

Lời giải.

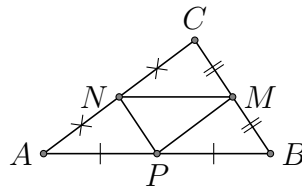
Cạnh AC : là đường thẳng đi qua $A(3; -4)$ và vuông góc với $BH: 7x - 2y - 1 = 0$ nên có phương trình: $2(x - 3) + 7(y + 4) = 0 \Leftrightarrow 2x + 7y + 22 = 0$.

Cạnh AB : là đường thẳng qua $A(3; -4)$ và vuông góc với $CH: 2x - 7y - 6 = 0$ nên có phương trình: $7(x - 3) + 2(y + 4) = 0 \Leftrightarrow 7x + 2y - 73 = 0$. □

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC , biết trung điểm các cạnh là $M(-1; -1)$, $N(1; 9)$, $P(9; 1)$.

- Lập phương trình các cạnh của tam giác ABC .
- Lập phương trình các đường trung trực của tam giác ABC .

Lời giải.



- Cạnh AB qua điểm $P(9; 1)$ và song song với MN nên nhận véc-tơ $\overrightarrow{MN} = (2; 10)$ làm véc-tơ chỉ phương.

Phương trình cạnh AB là: $\frac{x - 9}{2} = \frac{y - 1}{10} \Leftrightarrow 5x - y - 44 = 0$.

Tương tự, ta có phương trình cạnh BC là: $x + y - 2 = 0$.

Phương trình cạnh AC là: $x - 5y + 44 = 0$.

- Gọi các đường trung trực kẻ từ M , N , P theo thứ tự là (d_M) , (d_N) , (d_P) .

Đường thẳng (d_M) qua điểm $M(-1; -1)$ và vuông góc với PN nên nhận véc-tơ $\overrightarrow{PN} = (8; -8)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

Ta có phương trình đường thẳng (d_M) là: $x - y = 0$.

Tương tự, $(d_N): 5x + y - 14 = 0$.

$(d_P): x + 5y - 14 = 0$. □

Ví dụ 3. Cho tam giác ABC , biết đỉnh $A(2; 2)$, các đường cao xuất phát từ các đỉnh B , C có phương trình lần lượt là $x + y - 2 = 0$ và $9x - 3y - 4 = 0$. Hãy lập phương trình các cạnh của tam giác ABC .

Lời giải.

Theo giả thiết ta có phương trình các đường cao: $BH: x + y - 2 = 0$, $CK: 9x - 3y - 4 = 0$.

- Lập phương trình cạnh AC .

Cạnh AC là đường thẳng qua A và vuông góc với BH nên phương trình AC có dạng: $x - y + c = 0$.

Do $A(2; 2) \in AC$ nên $2 - 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = 0$.

Vậy phương trình AC là: $x - y = 0$.

- Phương trình cạnh AB .

Cạnh AB vuông góc với CK nên phương trình cạnh AB có dạng: $3x + 9y + m = 0$.

Do $A(2; 2) \in AB \Leftrightarrow 3 \cdot 2 + 9 \cdot 2 + m = 0 \Leftrightarrow m = -24$.

Phương trình cạnh AB là: $3x + 9y - 24 = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 8 = 0$.

- Phương trình cạnh BC :

Ta có $C = CK \cap AC$ nên tọa độ điểm C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 9x - 3y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

Lại có: $B = AB \cap BH$ nên tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x + 3y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow B(-1; 3).$$

Phương trình cạnh BC qua hai điểm B và C nên có phương trình:

$$\frac{x - x_C}{x_B - x_C} = \frac{y - y_C}{y_B - y_C} \Leftrightarrow \frac{x + 1}{\frac{2}{3} + 1} = \frac{y - 3}{\frac{2}{3} - 3} \Leftrightarrow 7x + 5y - 8 = 0.$$

□

Ví dụ 4. Tam giác ABC có phương trình cạnh AB là $5x - 3y + 2 = 0$, các đường cao qua đỉnh A và B lần lượt là $4x - 3y + 1 = 0$; $7x + 2y - 22 = 0$. Lập phương trình hai cạnh AC , BC và đường cao thứ ba.

Lời giải.

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 5x - 3y + 2 = 0 & (AB) \\ 4x - 3y + 1 = 0 & (AH) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow A(-1; -1)$$

Cạnh AC qua $A(-1; -1)$ và vuông góc với $BH: 7x + 2y - 11 = 0$ có phương trình:

$$2(x + 1) - 7(y + 1) = 0 \Leftrightarrow 2x - 7y - 5 = 0 \quad (AC)$$

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 5x - 3y + 2 = 0 \\ 7x + 2y - 22 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow B(2; 4)$$

Cạnh BC qua $B(2; 4)$ và vuông góc với $AH: 4x - 3y + 1 = 0$ có phương trình:

$$3(x - 2) + 4(y - 6) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 22 = 0 \quad (BC)$$

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - 7y - 5 = 0 \\ 3x + 4y - 22 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow C(6; 1)$$

Đường cao CH qua $C(6; 1)$ và vuông góc với $AB: 5x - 3y + 2 = 0$ có phương trình:

$$3(x - 6) + 5(y - 1) = 0 \Leftrightarrow 3x + 5y - 23 = 0$$

□

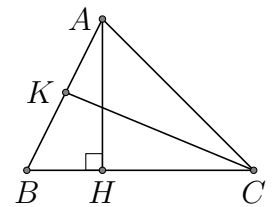
Ví dụ 5. Lập phương trình các cạnh của tam giác ABC biết $B(2; -1)$, đường cao và phân giác trong qua hai đỉnh A, C lần lượt là $3x - 4y + 27 = 0$ và $x + 2y - 5 = 0$.

Lời giải.

Cạnh BC là đường thẳng qua $B(2; -1)$ và vuông góc với phân giác $3x - 4y + 27 = 0$ nên có phương trình: $4(x - 2) + 3(y + 1) = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y - 5 = 0$.

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 5 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow C(-1; 3)$$



Đường phân giác ứng với phương trình $x + 2y - 5 = 0$ có véc-tơ chỉ phương: $\vec{v} = (2; -1)$.

Ta có: $\tan(\widehat{CB}, \vec{v}) = \tan(\vec{v}, \widehat{CA})$ (1)

Biết $\vec{CB} = (-3; 4)$, $\vec{CA} = (x_A + 1; y_A - 3)$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow \frac{3 - 8}{-6 - 4} = \frac{2(y_A - 3) + (x_A + 1)}{2(x_A + 1) - (y_A - 3)} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{x_A + 2y_A - 5}{2x_A - y_A + 5} \Leftrightarrow y_A = 3$.

Ta có: $y_A - y_C = 3$. Vậy phương trình đường AC là $y = 3$.

Thay $y_A = 3$ vào $3x - 4y + 27 = 0$, ta có: $A(-5; 3)$.

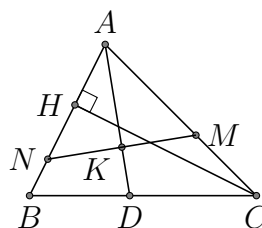
Suy ra $\vec{AB} = (7; -4)$.

Phương trình cạnh AB là: $4(x + 5) + 7(y - 3) = 0 \Leftrightarrow 4x + 7y - 1 = 0$.

□

Ví dụ 6. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có đường phân giác trong $(AD): x - y = 0$, đường cao $(CH): 2x + y + 3 = 0$, cạnh AC qua $M(0; -1)$, $AB = 2AM$. Viết phương trình ba cạnh của tam giác ABC .

Lời giải.



Gọi N là điểm đối xứng của M qua AD (theo tính chất của đường phân giác trong), suy ra N nằm trên tia AB .

Mặt khác ta có: $AN = AM \Rightarrow AB = 2AN$. Suy ra N là trung điểm của AB . Do $MN \perp AD$ nên phương trình MN là: $x + y + m_1 = 0$;

$M(0; -1) \in MN \Rightarrow -1 + m_1 = 0 \Leftrightarrow m_1 = 1$. Suy ra $(MN): x + y + 1 = 0$.

Gọi $K = MN \cap AD$, tọa độ K là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow K\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

Vì K là trung điểm của MN nên $\begin{cases} x_N = 2x_K - x_M = -1 \\ y_N = 2y_K - y_M = 0 \end{cases} \Rightarrow N(-1; 0)$.

Do $AB \perp CH$ nên phương trình AB là: $2 - 2y + m_2 = 0$;

$N(-1; 0) \in AB \Leftrightarrow -1 + m_2 = 0 \Leftrightarrow m_2 = 1$.

Suy ra $AB: x - 2y + 1 = 0$.

Vì $A = AB \cap AD$ nên tọa độ A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(1; 1)$$

Suy ra: $AC: 2x - y - 1$.

Vì $C = AC \cap CH$ nên tọa độ C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x + y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow C\left(-\frac{1}{2}; -2\right)$$

Do N là trung điểm của AB nên $\begin{cases} x_B = 2x_N - x_A = -2 \\ y_B = 2y_N - y_A = -1 \end{cases} \Rightarrow B(-2; -1)$.

Phương trình đường thẳng BC qua hai điểm $B(-2; -1)$ và $C\left(-\frac{1}{2}; -2\right)$ là:

$$\frac{x + 3}{-\frac{1}{2} + 3} = \frac{y + 1}{-2 + 1} \Leftrightarrow 2x + 5y + 11 = 0$$

Vậy $BC: 2x + 5y + 11 = 0$. □

Ví dụ 7. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh $A(-1; 2)$. Trung tuyến $CM: 5x + 7y - 20 = 0$ và đường cao $BH: 5x - 2y - 4 = 0$. Viết phương trình các cạnh AC và BC .

Lời giải.

Do $AC \perp BH$ nên phương trình AC có dạng: $2x + 5y + m = 0$.

Do $A(-1; 2) \in AC \Leftrightarrow -2 + 10 + m = 0 \Leftrightarrow m = -8$.

Suy ra $AC: 2x + 5y - 8 = 0$.

Do $C = AC \cap CM$ nên tọa độ C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 8 \\ 5x + 7y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow C(4; 0)$$

Đặt $B(a; b)$. Do $B \in BH$ nên $5a - 2b - 4 = 0$.

Vì M là trung điểm của AB nên tọa độ M là $M\left(\frac{-1+a}{2}; \frac{2+b}{2}\right) \in CM \Leftrightarrow 5 \cdot \frac{-1+a}{2} + 7 \cdot \frac{2+b}{2} - 20 = 0 \Leftrightarrow 5a + 7b - 31 = 0$

Tọa độ M là nghiệm của hệ:
$$\begin{cases} 5a - 2b = 4 \\ 5a + 7b = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow B(2; 3)$$

Phương trình cạnh BC là $BC: 3x + 2y - 12 = 0$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Lập phương trình các cạnh của tam giác ABC nếu cho $B(-4; -5)$ và hai đường cao có phương trình là: $5x + 3y - 4 = 0$ và $3x + 8y + 13 = 0$.

Lời giải.

Đáp số: $AB: 3x - 5y - 13 = 0$;

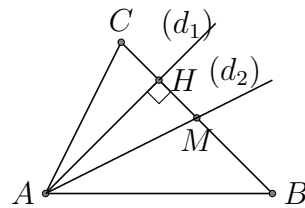
$BC: 8x - 3y + 17 = 0$;

$AC: 5x + 2y - 1 = 0$.

□

Bài 2. Cho $\triangle ABC$, biết đỉnh $C(4; -1)$, đường cao và đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A có phương trình tương ứng là $(d_1): 2x - 3y + 12 = 0$ và $(d_2): 2x + 3y = 0$. Lập phương trình các cạnh của $\triangle ABC$.

Lời giải.



- Lập phương trình cạnh BC .

Vì $BC \perp (d_1)$ nên phương trình (BC) có dạng: $-3x - 2y + c = 0$ (1)

Vì $C \in (BC)$ nên: $(-3) \cdot 4 - 2 \cdot (-1) + c = 0 \Leftrightarrow c = 10$.

Thay $c = 10$ vào (1) ta được phương trình $(BC): 3x + 2y - 10 = 0$.

- Lập phương trình cạnh AC .

Ta có điểm $A = (d_1) \cap (d_2)$ nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 12 = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-3; 2)$$

Phương trình đường thẳng (AC) qua hai điểm $A(-3; 2)$ và $C(4; 1)$ là:

$$\frac{x+3}{4+3} = \frac{y-2}{-1-2} \Leftrightarrow (AC): 3x + 7y - 5 = 0.$$

- Lập phương trình cạnh AB .

Gọi M là trung điểm của BC , khi đó điểm $M = (d_2) \cap (BC)$.

$$\text{Tọa độ điểm } M \text{ là nghiệm của hệ phương trình: } \begin{cases} 3x + 2y - 10 = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow M(6; 4).$$

Tọa độ điểm B được xác định bởi:

$$\begin{cases} x_B + x_C = 2x_M \\ y_B + y_C = 2y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 2x_M - x_C \\ y_B = 2y_M - y_C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 8 \\ y_B = -7 \end{cases}$$

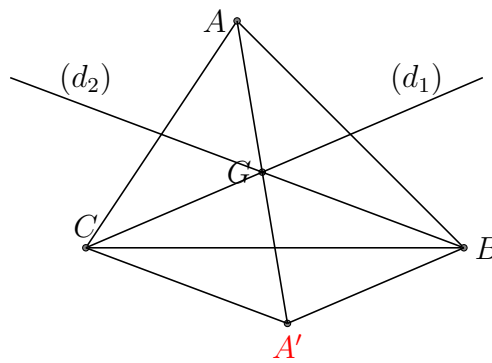
Phương trình đường thẳng (AB) qua hai điểm $A(-3; 2)$ và $B(8; -7)$ là:

$$\frac{x - 8}{-3 - 8} = \frac{y + 7}{2 + 7} \Leftrightarrow 9x + 11y + 5 = 0$$

□

Bài 3. Cho tam giác ABC , biết $A(1; 3)$ và hai trung tuyến có phương trình là $x - 2y + 1 = 0$ và $y - 1 = 0$. Lập phương trình các cạnh của $\triangle ABC$.

Lời giải.



Để có được phương trình các cạnh của $\triangle ABC$ ta đi xác định tọa độ điểm B, C .

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua trọng tâm G của $\triangle ABC$, khi đó:
$$\begin{cases} A'B \parallel (d_1) \\ A'C \parallel (d_2) \end{cases}.$$

Suy ra: Điểm B là giao điểm của $(A'B)$ và (d_2) .

Điểm (C) là giao điểm của $(A'C)$ và (d_1) .

Vậy ta lần lượt thực hiện theo các bước sau:

- Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$, khi đó tọa độ của G là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow G(1; 1).$$

- Điểm A' là điểm đối xứng với A qua G , tọa độ của A' được cho bởi:

$$\begin{cases} x_{A'} = 2x_G - x_A \\ y_{A'} = 2y_G - y_A \end{cases} \Rightarrow A'(1; -1)$$

- Tìm tọa độ điểm B .

Đường thẳng $A'B$ qua điểm $A'(1; -1)$ và song song với đường thẳng d_1 nên nhận véc-tơ $\overrightarrow{CG} = (2; 1)$ làm véc-tơ chỉ phương.

Phương trình đường thẳng $A'B$ là: $\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 1}{1} \Leftrightarrow x - 2y - 3 = 0$.

Điểm $B = A'B \cap d_2$, tọa độ điểm B là nghiệm hệ:
$$\begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(5; 1).$$

- Tương tự, ta có $C(-3; -1)$.
- Phương trình đường thẳng AC qua hai điểm $A(1; 3)$ và $C(-3; -1)$ là:

$$\frac{x-1}{-3-1} = \frac{y-3}{-1-3} \Leftrightarrow x-y+2=0.$$
- Tương tự ta có: phương trình cạnh AB là: $x+2y-7=0$;
 Phương trình cạnh BC là: $x-4y-1=0$.

□

Bài 4. Cho tam giác ABC có phân giác của góc A có phương trình là: $d_1: x+y+2=0$; đường cao vẽ từ B có phương trình là $d_2: 2x-y+1=0$, cạnh AB qua $M(1; -1)$. Tìm phương trình cạnh AC của tam giác.

Bài 5. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , hãy xác định tọa độ đỉnh C của tam giác ABC biết rằng hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AB là điểm $H(-1; -1)$, đường phân giác trong của góc A có phương trình $x-y+2=0$ và đường cao kẻ từ B có phương trình $4x+3y-1=0$.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng d qua $H(-1; -1)$ và vuông góc với $\Delta: x-y+2=0$ có dạng $1(x+1)+1(y+1)=0$.

Giao điểm I của d và Δ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y+2=0 \\ x-y+2=0 \end{cases} \Rightarrow I(-2; 0)$$

Gọi K là điểm đối xứng của H qua Δ thì $K(-3; 1)$.

AC qua K và vuông góc với đường cao: $4x+3y-1=0$.

Phương trình AC : $3(x+3)-4(y-1)=0 \Leftrightarrow 3x-4y+13=0$.

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x-4y+13=0 \\ x-y+2=0 \end{cases} \Rightarrow A(5; 7)$$

CH qua H và có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{HA}=2\vec{n}$ với $\vec{n}=(3; 4)$.

Phương trình CH : $3(x+1)+4(y+1)=0$.

Tọa độ C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x+4y+7=0 \\ 3x-4y+13=0 \end{cases} \Rightarrow C\left(-\frac{10}{3}; \frac{3}{4}\right)$$

□

C CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng song song với trục Ox ?

- A. $\vec{u}_1 = (1; 0)$. B. $\vec{u}_2 = (0; -1)$. C. $\vec{u}_3 = (-1; 1)$. D. $\vec{u}_4 = (1; 1)$.

Lời giải.

Trục $Ox: y = 0$ có VTCP $\vec{i}(1; 0)$ nên một đường thẳng song song với Ox cũng có VTCP là $\vec{i}(1; 0)$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 2. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng song song với trục Oy ?

- A. $\vec{u}_1 = (1; -1)$. B. $\vec{u}_2 = (0; 1)$. C. $\vec{u}_3 = (1; 0)$. D. $\vec{u}_4 = (1; 1)$.

Lời giải.

Trục $Oy: x = 0$ có VTCP $\vec{j}(0; 1)$ nên một đường thẳng song song với Oy cũng có VTCP là $\vec{j}(0; 1)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 3. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng đi qua hai điểm $A(-3; 2)$ và $B(1; 4)$?

- A. $\vec{u}_1 = (-1; 2)$. B. $\vec{u}_2 = (2; 1)$. C. $\vec{u}_3 = (-2; 6)$. D. $\vec{u}_4 = (1; 1)$.

Lời giải.

Đường thẳng đi qua hai điểm $A(-3; 2)$ và $B(1; 4)$ có VTCP là $\overrightarrow{AB} = (4; 2)$ hoặc $\vec{u}(2; 1)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 4. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng đi qua gốc tọa độ $O(0; 0)$ và điểm $M(a; b)$?

- A. $\vec{u}_1 = (0; a + b)$. B. $\vec{u}_2 = (a; b)$. C. $\vec{u}_3 = (a; -b)$. D. $\vec{u}_4 = (-a; b)$.

Lời giải.

$\overrightarrow{OM} = (a; b)$ suy ra đường thẳng OM có VTCP $\vec{u} = \overrightarrow{OM} = (a; b)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 5. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng đi qua hai điểm $A(a; 0)$ và $B(0; b)$?

- A. $\vec{u}_1 = (a; -b)$. B. $\vec{u}_2 = (a; b)$. C. $\vec{u}_3 = (b; a)$. D. $\vec{u}_4 = (-b; a)$.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB} = (-a; b)$ suy ra đường thẳng AB có VTCP $\overrightarrow{AB} = (-a; b)$ hoặc $\vec{u} = -\overrightarrow{AB} = (a; -b)$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 6. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của đường phân giác góc phần tư thứ nhất?

- A. $\vec{u}_1 = (1; 1)$. B. $\vec{u}_2 = (0; -1)$. C. $\vec{u}_3 = (1; 0)$. D. $\vec{u}_4 = (-1; 1)$.

Lời giải.

Đường phân giác góc phần tư thứ nhất là $x - y = 0$ suy ra VTPT $\vec{n}(1; -1)$ suy ra VTCP $\vec{u}(1; 1)$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 7. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng song song với trục Ox ?

- A. $\vec{n}_1 = (0; 1)$. B. $\vec{n}_2 = (1; 0)$. C. $\vec{n}_3 = (-1; 0)$. D. $\vec{n}_4 = (1; 1)$.

Lời giải.

Đường thẳng song song với $Ox: y + m = 0 (m \neq 0)$ suy ra VTPT $\vec{n}(0; 1)$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 8. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng song song với trục Oy ?

- A. $\vec{n}_1 = (1; 1)$. B. $\vec{n}_2 = (0; 1)$. C. $\vec{n}_3 = (-1; 1)$. D. $\vec{n}_4 = (1; 0)$.

Lời giải.

Đường thẳng song song với Oy : $x + m = 0$ với $(m \neq 0)$ VTPT $\vec{n}(1; 0)$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 9. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng đi qua hai điểm $A(2; 3)$ và $B(4; 1)$?

- A. $\vec{n}_1 = (2; -2)$. B. $\vec{n}_2 = (2; -1)$. C. $\vec{n}_3 = (1; 1)$. D. $\vec{n}_4 = (1; -2)$.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB} = (2; -2)$, suy ra đường thẳng AB có VTCP $\vec{u}(1; -1)$, suy ra VTPT $\vec{n}(1; 1)$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 10. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng đi qua gốc tọa độ và điểm $A(a; b)$?

- A. $\vec{n}_1 = (-a; b)$. B. $\vec{n}_2 = (1; 0)$. C. $\vec{n}_3 = (b; -a)$. D. $\vec{n}_4 = (a; b)$.

Lời giải.

$\overrightarrow{OA} = (a; b)$, suy ra đường thẳng OA có VTCP $\vec{u} = \overrightarrow{OA} = (a; b)$, suy ra VTPT $\vec{n}(b; -a)$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 11. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt $A(a; 0)$ và $B(0; b)$?

- A. $\vec{n}_1 = (b; -a)$. B. $\vec{n}_2 = (-b; a)$. C. $\vec{n}_3 = (b; a)$. D. $\vec{n}_4 = (a; b)$.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB} = (-a; b)$, suy ra đường thẳng AB có VTCP $\vec{u} = (-a; b)$, suy ra VTPT $\vec{n} = (b; a)$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 12. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của đường phân giác góc phần tư thứ hai?

- A. $\vec{n}_1 = (1; 1)$. B. $\vec{n}_2 = (0; 1)$. C. $\vec{n}_3 = (1; 0)$. D. $\vec{n}_4 = (-1; 1)$.

Lời giải.

Đường phân giác góc phần tư thứ hai $x + y = 0$, suy ra VTPT $\vec{n} = (1; 1)$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 13. Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; -1)$. Trong các véc-tơ sau, véc-tơ nào là một véc-tơ pháp tuyến của d ?

- A. $\vec{n}_1 = (-1; 2)$. B. $\vec{n}_2 = (1; -2)$. C. $\vec{n}_3 = (-3; 6)$. D. $\vec{n}_4 = (3; 6)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có VTCP $\vec{u}(2; -1)$, suy ra VTPT $\vec{n}(1; 2)$ hoặc $3\vec{n} = (3; 6)$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 14. Đường thẳng d có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (4; -2)$. Trong các véc-tơ sau, véc-tơ nào là một véc-tơ chỉ phương của d ?

- A. $\vec{u}_1 = (2; -4)$. B. $\vec{u}_2 = (-2; 4)$. C. $\vec{u}_3 = (1; 2)$. D. $\vec{u}_4 = (2; 1)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có VTPT $\vec{n}(4; -2)$, suy ra VTCP $\vec{u}(2; 4)$ hoặc $\frac{1}{2}\vec{u} = (1; 2)$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 15. Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (3; -4)$. Đường thẳng Δ vuông góc với d có một véc-tơ pháp tuyến là

- A. $\vec{n}_1 = (4; 3)$. B. $\vec{n}_2 = (-4; -3)$. C. $\vec{n}_3 = (3; 4)$. D. $\vec{n}_4 = (3; -4)$.

Lời giải.

$$\begin{cases} \vec{u}_d = (3; -4) \\ \Delta \perp d \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_\Delta = \vec{u}_d = (3; -4).$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 16. Đường thẳng d có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (-2; -5)$. Đường thẳng Δ vuông góc với d có một véc-tơ chỉ phương là

- A. $\vec{u}_1 = (5; -2)$. B. $\vec{u}_2 = (-5; 2)$. C. $\vec{u}_3 = (2; 5)$. D. $\vec{u}_4 = (2; -5)$.

Lời giải.

$$\begin{cases} \vec{n}_d = (-2; -5) \\ \Delta \perp d \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_\Delta = \vec{n}_d = (-2; -5) \text{ hay chọn } -\vec{n}_\Delta = (2; 5).$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 17. Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (3; -4)$. Đường thẳng Δ song song với d có một véc-tơ pháp tuyến là

- A. $\vec{n}_1 = (4; 3)$. B. $\vec{n}_2 = (-4; 3)$. C. $\vec{n}_3 = (3; 4)$. D. $\vec{n}_4 = (3; -4)$.

Lời giải.

$$\begin{cases} \vec{u}_d = (3; -4) \\ \Delta // d \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_\Delta = \vec{u}_d = (3; -4) \Rightarrow \vec{n}_\Delta = (4; 3).$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 18. Đường thẳng d có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (-2; -5)$. Đường thẳng Δ song song với d có một véc-tơ chỉ phương là

- A. $\vec{u}_1 = (5; -2)$. B. $\vec{u}_2 = (-5; -2)$. C. $\vec{u}_3 = (2; 5)$. D. $\vec{u}_4 = (2; -5)$.

Lời giải.

$$\begin{cases} \vec{n}_d = (-2; -5) \\ \Delta // d \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_\Delta = \vec{n}_d = (-2; -5) \Rightarrow \vec{u}_\Delta = (5; -2).$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 19. Một đường thẳng có bao nhiêu véc-tơ chỉ phương?

- A. 1. B. 2. C. 4. D. Vô số.

Lời giải.

Theo định nghĩa, có vô số véc-tơ chỉ phương.

Chọn đáp án **D** □

Câu 20. Đường thẳng d đi qua điểm $M(1; -2)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (3; 5)$ có phương trình tham số là

A. $d: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 5 - 2t \end{cases}$ B. $d: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + 5t \end{cases}$ C. $d: \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -2 - 3t \end{cases}$ D. $d: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 + t \end{cases}$.

Lời giải.

$\begin{cases} M(1; -2) \in d \\ \vec{u}_d = (3; 5) \end{cases}$, suy ra PTTS $d: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + 5t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 21. Đường thẳng d đi qua gốc tọa độ O và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (-1; 2)$ có phương trình tham số là

A. $d: \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$ B. $d: \begin{cases} x = 2t \\ y = t \end{cases}$ C. $d: \begin{cases} x = t \\ y = -2t \end{cases}$ D. $d: \begin{cases} x = -2t \\ y = t \end{cases}$

Lời giải.

$\begin{cases} O(0; 0) \in d \\ \vec{u}_d = -\vec{u} = (1; -2) \end{cases} \rightarrow \text{PTTS } d: \begin{cases} x = t \\ y = -2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 22. Đường thẳng d đi qua điểm $M(0; -2)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (3; 0)$ có phương trình tham số là

A. $d: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 0 \end{cases}$ B. $d: \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 + 3t \end{cases}$ C. $d: \begin{cases} x = 3 \\ y = -2t \end{cases}$ D. $d: \begin{cases} x = 3t \\ y = -2 \end{cases}$

Lời giải.

$\begin{cases} M(0; -2) \in d \\ \vec{u}_d = \vec{u} = (3; 0) \end{cases} \rightarrow \text{PTTS } d: \begin{cases} x = 3t \\ y = -2 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 23. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + 6t \end{cases}$?

A. $\vec{u}_1 = (6; 0)$. B. $\vec{u}_2 = (-6; 0)$. C. $\vec{u}_3 = (2; 6)$. D. $\vec{u}_4 = (0; 1)$.

Lời giải.

$d: \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + 6t \end{cases} \rightarrow \text{VTCP } \vec{u} = (0; 6) = 6(0; 1) \text{ hay chọn } \vec{u} = (0; 1)$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 24. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 5 - \frac{1}{2}t \\ y = -3 + 3t \end{cases}$?

A. $\vec{u}_1 = (-1; 6)$. B. $\vec{u}_2 = \left(\frac{1}{2}; 3\right)$. C. $\vec{u}_3 = (5; -3)$. D. $\vec{u}_4 = (-5; 3)$.

Lời giải.

$\Delta: \begin{cases} x = 5 - \frac{1}{2}t \\ y = -3 + 3t \end{cases} \rightarrow \text{VTCP } \vec{u} = \left(-\frac{1}{2}; 3\right) = \frac{1}{2}(-1; 6) \text{ hay chọn } \vec{u}(-1; 6)$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 25. Viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm $A(2; -1)$ và $B(2; 5)$.

A. $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + 6t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 2t \\ y = -6t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 5 + 6t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 6t \end{cases}$

Lời giải.

$$\begin{cases} A(2; -1) \in AB \\ \vec{u}_{AB} = \vec{AB} = (0; 6) \end{cases} \rightarrow AB: \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + 6t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 26. Viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm $A(-1; 3)$ và $B(3; 1)$.

A. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 3 - t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 + t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$

Lời giải.

$$\begin{cases} A(-1; 3) \in AB \\ \vec{u}_{AB} = \vec{AB} = (4; -2) = -2(-2; 1) \end{cases} \rightarrow AB: \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 3 + t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 27. Đường thẳng đi qua hai điểm $A(1; 1)$ và $B(2; 2)$ có phương trình tham số là

A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$

Lời giải.

$$\begin{cases} A(1; 1) \in AB \\ \vec{u}_{AB} = \vec{AB} = (1; 1) \end{cases} \rightarrow AB: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}) \xrightarrow{t=-1} O(0; 0) \in AB \rightarrow AB: \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 28. Đường thẳng đi qua hai điểm $A(3; -7)$ và $B(1; -7)$ có phương trình tham số là

A. $\begin{cases} x = t \\ y = -7 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = t \\ y = -7 - t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 1 - 7t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = t \\ y = 7 \end{cases}$

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} A(3; -7) \in AB \\ \vec{u}_{AB} = \vec{AB} = (-2; 0) = -2(1; 0) \end{cases} \rightarrow AB: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -7 \end{cases} \xrightarrow{t=-3} M(0; -7) \in AB \rightarrow AB: \begin{cases} x = t \\ y = -7 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 29. Phương trình nào dưới đây **không phải** là phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm $O(0; 0)$ và $M(1; -3)$?

A. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 - 3t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -3 + 6t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = -t \\ y = 3t \end{cases}$

Lời giải.

$$\text{Kiểm tra đường thẳng nào không chứa } O(0; 0) \rightarrow \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3t \end{cases}$$

Nếu cần thì có thể kiểm tra đường thẳng nào không chứa điểm $M(1; -3)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 30. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(2; 0)$, $B(0; 3)$ và $C(-3; -1)$. Đường thẳng đi qua điểm B và song song với AC có phương trình tham số là

A. $\begin{cases} x = 5t \\ y = 3 + t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 + 3t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = t \\ y = 3 - 5t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = t \end{cases}$

Lời giải.

Gọi d là đường thẳng qua B và song song với AC .

Ta có $\begin{cases} B(0; 3) \in d \\ \vec{u}_d = \vec{AC} = (-5; -1) = -1 \cdot (5; 1) \end{cases} \rightarrow d: \begin{cases} x = 5t \\ y = 3 + t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 31. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(3; 2)$, $P(4; 0)$ và $Q(0; -2)$. Đường thẳng đi qua điểm A và song song với PQ có phương trình tham số là

A. $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 + t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2 + t \end{cases}$

Lời giải.

Gọi d là đường thẳng qua A và song song với PQ .

Ta có $\begin{cases} A(3; 2) \in d \\ \vec{u}_d = \vec{PQ} = (-4; -2) = -2(2; 1) \end{cases} \rightarrow d: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 + t \end{cases} \xrightarrow{t=-2} M(-1; 0) \in d$

$\rightarrow d: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 32. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ có đỉnh $A(-2; 1)$ và phương trình đường thẳng chứa cạnh CD là $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 3t \end{cases}$. Viết phương trình tham số của đường thẳng chứa cạnh AB .

A. $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = -2 - 2t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -2 - 4t \\ y = 1 - 3t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = 1 - 4t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = 1 + 4t \end{cases}$

Lời giải.

$\begin{cases} A(-2; 1) \in AB, \vec{u}_{CD} = (4; 3) \\ AB \parallel CD \rightarrow \vec{u}_{AB} = -\vec{u}_{CD} = (-4; -3) \end{cases} \rightarrow AB: \begin{cases} x = -2 - 4t \\ y = 1 - 3t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 33. Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M(-3; 5)$ và song song với đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

A. $\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 5 - t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 5 + t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -5 + t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 5 - t \\ y = -3 + t \end{cases}$

Lời giải.

Góc phần tư (I) $x - y = 0 \rightarrow \text{VTCP} : \vec{u}(1; 1) = \vec{u}_d \rightarrow d: \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 5 + t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 34. Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M(4; -7)$ và song song với trục Ox .

A. $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -7t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 4 \\ y = -7 + t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -7 + t \\ y = 4 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = t \\ y = -7 \end{cases}$

Lời giải.

$$\vec{u}_{Ox} = (1; 0) \rightarrow \vec{u}_d = (1; 0) \rightarrow d: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -7 \end{cases} \Rightarrow t = -4A(0; -7) \in d \rightarrow d: \begin{cases} x = t \\ y = -7 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 35. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(1; 4)$, $B(3; 2)$ và $C(7; 3)$. Viết phương trình tham số của đường trung tuyến CM của tam giác.

A. $\begin{cases} x = 7 \\ y = 3 + 5t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 3 - 5t \\ y = -7 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 7 + t \\ y = 3 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 - t \end{cases}$

Lời giải.

$$\begin{cases} A(1; 4) \\ B(3; 2) \end{cases} \rightarrow M(2; 3) \rightarrow \overrightarrow{MC} = (5; 0) = 5(1; 0) \rightarrow CM: \begin{cases} x = 7 + t \\ y = 3 \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 36. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(2; 4)$, $B(5; 0)$ và $C(2; 1)$. Trung tuyến BM của tam giác đi qua điểm N có hoành độ bằng 20 thì tung độ bằng

A. -12. B. $-\frac{25}{2}$. C. -13. D. $-\frac{27}{2}$.

Lời giải.

$$\begin{cases} A(2; 4) \\ C(2; 1) \end{cases} \rightarrow M\left(2; \frac{5}{2}\right) \rightarrow \overrightarrow{MB} = \left(3; -\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}(6; -5) \rightarrow MB: \begin{cases} x = 5 + 6t \\ y = -5t \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } N(20; y_N) \in BM \rightarrow \begin{cases} 20 = 5 + 6t \\ y_N = -5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{5}{2} \\ y_N = -\frac{25}{2} \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 37. Một đường thẳng có bao nhiêu véc-tơ pháp tuyến?

A. 1. B. 2. C. 4. D. Vô số.

Lời giải.

Theo định nghĩa.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 38. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của $d: x - 2y + 2017 = 0$?

A. $\vec{n}_1 = (0; -2)$. B. $\vec{n}_2 = (1; -2)$. C. $\vec{n}_3 = (-2; 0)$. D. $\vec{n}_4 = (2; 1)$.

Lời giải.

$$d: x - 2y + 2017 = 0 \rightarrow \vec{n}_d = (1; -2).$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 39. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của $d: -3x + y + 2017 = 0$?

A. $\vec{n}_1 = (-3; 0)$. B. $\vec{n}_2 = (-3; -1)$. C. $\vec{n}_3 = (6; 2)$. D. $\vec{n}_4 = (6; -2)$.

Lời giải.

$$d: -3x + y + 2017 = 0 \rightarrow \vec{n}_d = (-3; 1) \text{ hay chọn } -2\vec{n}_d = (6; -2).$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 40. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của $d: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - t \end{cases}$?

- A. $\vec{n}_1 = (2; -1)$. B. $\vec{n}_2 = (-1; 2)$. C. $\vec{n}_3 = (1; -2)$. D. $\vec{n}_4 = (1; 2)$.

Lời giải.

$$d: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - t \end{cases} \rightarrow \vec{u}_d = (2; -1) \rightarrow \vec{n}_d = (1; 2).$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 41. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của $d: 2x - 3y + 2018 = 0$?

- A. $\vec{u}_1 = (-3; -2)$. B. $\vec{u}_2 = (2; 3)$. C. $\vec{u}_3 = (-3; 2)$. D. $\vec{u}_4 = (2; -3)$.

Lời giải.

$$d: 2x - 3y + 2018 = 0 \rightarrow \vec{n}_d = (2; -3) \rightarrow \vec{u}_d = (3; 2) \text{ hay chọn } -\vec{n}_d = (-3; -2).$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 42. Đường trung trực của đoạn thẳng AB với $A = (-3; 2)$, $B = (-3; 3)$ có một véc-tơ pháp tuyến là

- A. $\vec{n}_1 = (6; 5)$. B. $\vec{n}_2 = (0; 1)$. C. $\vec{n}_3 = (-3; 5)$. D. $\vec{n}_4 = (-1; 0)$.

Lời giải.

$$\text{Gọi } d \text{ là trung trực đoạn } AB, \text{ ta có } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0; 1) \\ d \perp AB \end{cases} \rightarrow \vec{n}_d = \overrightarrow{AB} = (0; 1).$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 43. Cho đường thẳng $\Delta: x - 3y - 2 = 0$. Véc-tơ nào sau đây **không phải** là véc-tơ pháp tuyến của Δ ?

- A. $\vec{n}_1 = (1; -3)$. B. $\vec{n}_2 = (-2; 6)$. C. $\vec{n}_3 = \left(\frac{1}{3}; -1\right)$. D. $\vec{n}_4 = (3; 1)$.

Lời giải.

$$\Delta: x - 3y - 2 = 0 \rightarrow \vec{n}_\Delta = (1; -3) \rightarrow \begin{cases} \vec{n}_1(1; -3) = \vec{n}_\Delta \\ \vec{n}_2(-2; 6) = -2\vec{n}_\Delta \\ \vec{n}_3\left(\frac{1}{3}; -1\right) = \frac{1}{3}\vec{n}_\Delta \end{cases}$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 44. Đường thẳng d đi qua điểm $A(1; -2)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (-2; 4)$ có phương trình tổng quát là

- A. $d: x + 2y + 4 = 0$. B. $d: x - 2y - 5 = 0$. C. $d: -2x + 4y = 0$. D. $d: x - 2y + 4 = 0$.

Lời giải.

$$\begin{cases} A(1; -2) \in d \\ \vec{n}_d = (-2; 4) = -2(1; -2) \end{cases} \rightarrow d: (x - 1) - 2(y + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow d: -2x + 4y + 10 = 0 \Leftrightarrow d: x - 2y - 5 = 0.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 45. Đường thẳng d đi qua điểm $M(0; -2)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (3; 0)$ có phương trình tổng quát là

- A. $d: x = 0$. B. $d: y + 2 = 0$. C. $d: y - 2 = 0$. D. $d: x - 2 = 0$.

Lời giải.

$$\begin{cases} M(0; -2) \in d \\ \vec{u}_d = (3; 0) = 3(1; 0) \rightarrow \vec{n}_d = (0; 1) \end{cases} \rightarrow d: y + 2 = 0.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 46. Đường thẳng d đi qua điểm $A(-4; 5)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (3; 2)$ có phương trình tham số là

A. $\begin{cases} x = -4 - 2t \\ y = 5 + 3t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -2t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -4 + 3t \end{cases}$

Lời giải.

$$\begin{cases} A(-4; 5) \in d \\ \vec{n}_d = (3; 2) \rightarrow \vec{u}_d = (-2; 3) \end{cases} \Rightarrow d: \begin{cases} x = -4 - 2t \\ y = 5 + 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 47. Phương trình nào sau đây là phương trình tổng quát của đường thẳng $d: \begin{cases} x = 3 - 5t \\ y = 1 + 4t \end{cases}$?

A. $4x + 5y + 17 = 0$. B. $4x - 5y + 17 = 0$. C. $4x + 5y - 17 = 0$. D. $4x - 5y - 17 = 0$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } d: \begin{cases} x = 3 - 5t \\ y = 1 + 4t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A(3; 1) \in d \\ \vec{u}_d = (-5; 4) \rightarrow \vec{n}_d = (4; 5) \end{cases} \Rightarrow d: 4(x - 3) + 5(y - 1) = 0 \Leftrightarrow d: 4x + 5y - 17 = 0.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 48. Phương trình nào sau đây là phương trình tổng quát của đường thẳng $d: \begin{cases} x = 15 \\ y = 6 + 7t \end{cases}$?

A. $x - 15 = 0$. B. $x + 15 = 0$. C. $6x - 15y = 0$. D. $x - y - 9 = 0$.

Lời giải.

$$d: \begin{cases} x = 15 \\ y = 6 + 7t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A(15; 6) \in d \\ \vec{u}_d = (0; 7) = 7(0; 1) \rightarrow \vec{n}_d = (1; 0) \end{cases} \Rightarrow d: x - 15 = 0.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 49. Phương trình nào sau đây là phương trình tham số của đường thẳng $d: x - y + 3 = 0$?

A. $\begin{cases} x = t \\ y = 3 + t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 3 \\ y = t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \end{cases}$

Lời giải.

$$d: x - y + 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 3 \\ \vec{n}_d = (1; -1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A(0; 3) \in d \\ \vec{u}_d = (1; 1) \end{cases} \Rightarrow d: \begin{cases} x = t \\ y = 3 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 50. Phương trình nào sau đây là phương trình tham số của đường thẳng $d: 3x - 2y + 6 = 0$?

A. $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2t + 3 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{3}{2}t + 3 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = t \\ y = -\frac{3}{2}t + 3 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 2t \\ y = \frac{3}{2}t + 3 \end{cases}$

Lời giải.

$$d: 3x - 2y + 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 3 \\ \vec{n}_d = (3; -2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A(0; 3) \in d \\ \vec{u}_d = (2; 3) = 2\left(1; \frac{3}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow d: \begin{cases} x = t \\ y = 3 + \frac{3}{2}t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 51. Cho đường thẳng $d: 3x + 5y + 2018 = 0$. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau

- A. d có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3; 5)$.
- B. d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (5; -3)$.
- C. d có hệ số góc $k = \frac{5}{3}$.
- D. d song song với đường thẳng $\Delta: 3x + 5y = 0$.

Lời giải.

$$d: 3x + 5y + 2018 = 0 \rightarrow \begin{cases} \vec{n}_d = (3; 5) \\ \vec{u}_d = (5; -3) \\ k_d = -\frac{3}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{n} = (3; 5) = \vec{n}_d \\ \vec{u} = (5; -3) = \vec{u}_d \\ k = \frac{5}{3} \neq k_d \end{cases}$$

Mặt khác ta có $d: 3x + 5y + 2018 = 0 \rightarrow d \parallel \Delta: 3x + 5y = 0 \rightarrow D$ đúng

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 52. Đường thẳng d đi qua điểm $M(1; 2)$ và song song với đường thẳng $\Delta: 2x + 3y - 12 = 0$ có phương trình tổng quát là

- A. $2x + 3y - 8 = 0$.
- B. $2x + 3y + 8 = 0$.
- C. $4x + 6y + 1 = 0$.
- D. $4x - 3y - 8 = 0$.

Lời giải.

$$\begin{cases} M(1; 2) \in d \\ d \parallel \Delta: 2x + 3y - 12 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M(1; 2) \in d \\ d: 2x + 3y + c = 0 (c \neq -12) \end{cases} \rightarrow 2.1 + 3.2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -8. \text{ Vậy } d: 2x + 3y - 8 = 0.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 53. Phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua O và song song với đường thẳng $\Delta: 6x - 4x + 1 = 0$ là

- A. $3x - 2y = 0$.
- B. $4x + 6y = 0$.
- C. $3x + 12y - 1 = 0$.
- D. $6x - 4y - 1 = 0$.

Lời giải.

$$\begin{cases} O(0; 0) \in d \\ d \parallel \Delta: 6x - 4x + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} O(0; 0) \in d \\ d: 6x - 4x + c = 0 (c \neq 1) \end{cases} \rightarrow 6.0 - 4.0 + c = 0 \Leftrightarrow c = 0. \text{ Vậy } d: 6x - 4y = 0 \Leftrightarrow d: 3x - 2y = 0.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 54. Đường thẳng d đi qua điểm $M(-1; 2)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: 2x + y - 3 = 0$ có phương trình tổng quát là

- A. $2x + y = 0$.
- B. $x - 2y - 3 = 0$.
- C. $x + y - 1 = 0$.
- D. $x - 2y + 5 = 0$.

Lời giải.

$$\begin{cases} M(-1; 2) \in d \\ d \perp \Delta: 2x + y - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M(-1; 2) \in d \\ d: x - 2y + c = 0 \end{cases} \rightarrow -1 - 2.2 + c = 0 \Leftrightarrow c = 5. \text{ Vậy } d: x - 2y + 5 = 0.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 55. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(4; -3)$ và song song với đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + 3t \end{cases}.$$

- A. $3x + 2y + 6 = 0$. B. $-2x + 3y + 17 = 0$. C. $3x + 2y - 6 = 0$. D. $3x - 2y + 6 = 0$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} A(4; -3) \in d \\ \vec{u}_d = (-2; 3) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A(4; -3) \in d \\ \vec{u}_\Delta = (-2; 3) \rightarrow \vec{n}_\Delta = (3; 2) \end{cases}$$

$$\Delta \parallel d$$

$$\rightarrow \Delta: 3(x - 4) + 2(y + 3) = 0 \Leftrightarrow \Delta: 3x + 2y - 6 = 0.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 56. Cho tam giác ABC có $A(2; 0)$, $B(0; 3)$, $C(3; 1)$. Đường thẳng d đi qua B và song song với AC có phương trình tổng quát là

- A. $5x + y + 3 = 0$. B. $5x + y - 3 = 0$. C. $x + 5y - 15 = 0$. D. $x - 15y + 15 = 0$.

Lời giải.

$$\begin{cases} B(0; 3) \in d \\ \vec{u}_{AC} = \overrightarrow{AC} = (-5; 1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B(0; 3) \in d \\ \vec{n}_d = (1; 5) \end{cases}$$

$$d \parallel AC$$

$$\rightarrow d: 1(x - 0) + 5(y - 3) = 0 \Leftrightarrow d: x + 5y - 15 = 0.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 57. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua điểm $M(-1; 0)$ và vuông góc với

đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = -2t \end{cases}.$

- A. $2x + y + 2 = 0$. B. $2x - y + 2 = 0$. C. $x - 2y + 1 = 0$. D. $x + 2y + 1 = 0$.

Lời giải.

$$\begin{cases} M(-1; 0) \in d \\ \vec{u}_\Delta = (1; -2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M(-1; 0) \in d \\ \vec{n}_d = (1; -2) \end{cases} \rightarrow d: 1(x + 1) - 2(y - 0) = 0 \Leftrightarrow d: x - 2y + 1 = 0.$$

$$d \perp \Delta$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 58. Đường thẳng d đi qua điểm $M(-2; 1)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -2 + 5t \end{cases}$ có

phương trình tham số là

- A. $\begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = 1 + 5t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 + 5t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$.

Lời giải.

$$\begin{cases} M(-2; 1) \in d \\ \vec{u}_\Delta = (-3; 5) \rightarrow \begin{cases} M(-2; 1) \in d \\ \vec{n}_d = (-3; 5) \rightarrow \vec{u}_d = (5; 3) \end{cases} \rightarrow d: \begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = 1 + 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R}). \\ d \perp \Delta \end{cases}$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 59. Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $A(-1; 2)$ và song song với đường thẳng $\Delta: 3x - 13y + 1 = 0$.

A. $\begin{cases} x = -1 + 13t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 + 13t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -1 - 13t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 13t \end{cases}$

Lời giải.

$$\begin{cases} A(-1; 2) \in d \\ \vec{n}_\Delta = (3; -13) \rightarrow \begin{cases} A(-1; 2) \in d \\ \vec{n}_d = (3; -13) \rightarrow \vec{u}_d = (13; 3) \end{cases} \rightarrow d: \begin{cases} x = -1 + 13t \\ y = 2 + 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R}). \\ d \parallel \Delta \end{cases}$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 60. Viết phương trình tham số của đường thẳng d qua điểm $A(-1; 2)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: 2x - y + 4 = 0$.

A. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = t \\ y = 4 + 2t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \end{cases}$

Lời giải.

$$\begin{cases} A(-1; 2) \in d \\ \vec{n}_\Delta = (2; -1) \rightarrow \begin{cases} A(-1; 2) \in d \\ \vec{u}_d = (2; -1) \end{cases} \rightarrow d: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R}). \\ d \perp \Delta \end{cases}$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 61. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua điểm $M(-2; -5)$ và song song với đường phân giác góc phần tư thứ nhất.

A. $x + y - 3 = 0$. B. $x - y - 3 = 0$. C. $x + y + 3 = 0$. D. $2x - y - 1 = 0$.

Lời giải.

$$\begin{cases} M(-2; -5) \in d \\ (I): x - y = 0 (\Delta) \rightarrow \begin{cases} M(-2; -5) \in d \\ d: x - y + c = 0 (c \neq 0) \end{cases} \rightarrow -2 - (-5) + c = 0 \Leftrightarrow c = -3. \text{ Vậy } d: x - y - 3 = 0. \\ d \parallel \Delta \end{cases}$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 62. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua điểm $M(3; -1)$ và vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ hai.

A. $x + y - 4 = 0$. B. $x - y - 4 = 0$. C. $x + y + 4 = 0$. D. $x - y + 4 = 0$.

Lời giải.

$$\begin{cases} M(3; -1) \in d \\ (II): x + y = 0 (\Delta) \rightarrow \begin{cases} M(3; -1) \\ d: x - y + c = 0 \end{cases} \\ d \perp \Delta \end{cases} \rightarrow 3 - (-1) + c = 0 \Leftrightarrow c = -4 \rightarrow d: x - y - 4 = 0.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 63. Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M(-4; 0)$ và vuông góc với đường phân giác góc phần tư thứ hai.

A. $\begin{cases} x = t \\ y = -4 + t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -4 + t \\ y = -t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = t \\ y = 4 + t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = t \\ y = 4 - t \end{cases}$

Lời giải.

$$\begin{cases} M(-4; 0) \in d \\ (II): x + y = 0 (\Delta) \rightarrow \vec{n}_{\Delta} = (1; 1) \rightarrow \begin{cases} x = -4 + t \\ y = t \end{cases} \xrightarrow{t=4} A(0; 4) \in d \\ d \perp \Delta \rightarrow \vec{u}_d = (1; 1) \end{cases} \rightarrow d: \begin{cases} x = t \\ y = 4 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 64. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua điểm $M(-1; 2)$ và song song với trục Ox .

A. $y + 2 = 0$. B. $x + 1 = 0$. C. $x - 1 = 0$. D. $y - 2 = 0$.

Lời giải.

$$\begin{cases} M(-1; 2) \in d \\ d \parallel Ox: y = 0 \end{cases} \rightarrow d: y = 2.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 65. Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M(6; -10)$ và vuông góc với trục Oy .

A. $\begin{cases} x = 10 + t \\ y = 6 \end{cases}$ B. $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -10 \end{cases}$ C. $d: \begin{cases} x = 6 \\ y = -10 - t \end{cases}$ D. $d: \begin{cases} x = 6 \\ y = -10 + t \end{cases}$

Lời giải.

$$\begin{cases} M(6; -10) \in d \\ d \perp Oy: x = 0 \rightarrow \vec{u}_d = (1; 0) \end{cases} \rightarrow d: \begin{cases} x = 6 + t \\ y = -10 \end{cases} \xrightarrow{t=-4} A(2; -10) \in d \rightarrow d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -10 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 66. Phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua hai điểm $A(3; -1)$ và $B(1; 5)$ là

- A. $-x + 3y + 6 = 0$. B. $3x - y + 10 = 0$. C. $3x - y + 6 = 0$. D. $3x + y - 8 = 0$.

Lời giải.

$$\begin{cases} A(3; -1) \in AB \\ \vec{u}_{AB} = \overrightarrow{AB} = (-2; 6) \rightarrow \vec{n}_{AB} = (3; 1) \end{cases} \rightarrow AB: 3(x - 3) + 1(y + 1) = 0 \Leftrightarrow AB: 3x + y - 8 = 0.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 67. Phương trình đường thẳng cắt hai trục tọa độ tại $A(2; 0)$ và $B(0; 3)$ là

- A. $2x - 3y + 4 = 0$. B. $3x2y + 6 = 0$. C. $3x2y - 6 = 0$. D. $2x3y - 4 = 0$.

Lời giải.

$$\begin{cases} A(-2; 0) \in Ox \\ B(0; 3) \in Oy \end{cases} \rightarrow AB: \frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1 \Leftrightarrow 3x - 2y + 6 = 0.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 68. Phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua hai điểm $A(2; -1)$ và $B(2; 5)$ là

- A. $x + y - 1 = 0$. B. $2x - 7y + 9 = 0$. C. $x + 2 = 0$. D. $x - 2 = 0$.

Lời giải.

$$\begin{cases} A(2; -1) \in AB \\ \vec{u}_{AB} = \overrightarrow{AB} = (0; 6) \rightarrow \vec{n}_{AB} = (1; 0) \end{cases} \rightarrow AB: x - 2 = 0.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 69. Phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua hai điểm $A(3; -7)$ và $B(1; -7)$ là

- A. $y - 7 = 0$. B. $y + 7 = 0$. C. $x + y + 4 = 0$. D. $x + y + 6 = 0$.

Lời giải.

$$\begin{cases} A(3; -7) \in AB \\ \vec{u}_{AB} = \overrightarrow{AB} = (-4; 0) \rightarrow \vec{n}_{AB} = (0; 1) \end{cases} \rightarrow AB: y + 7 = 0.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 70. Cho tam giác ABC có $A(1; 1)$, $B(0; -2)$, $C(4; 2)$. Lập phương trình đường trung tuyến của tam giác ABC kẻ từ A .

- A. $x + y - 2 = 0$. B. $2x + y - 3 = 0$. C. $x + 2y - 3 = 0$. D. $x - y = 0$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC . Ta cần viết phương trình đường thẳng AM .

$$\text{Ta có } \begin{cases} B(0; -2) \\ C(4; 2) \end{cases} \rightarrow M(2; 0) \rightarrow \vec{u}_{AM} = \overrightarrow{AM} = (1; -1) \rightarrow \vec{n}_{AM} = (1; 1) \rightarrow AM: x + y - 2 = 0.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 71. Đường trung trực của đoạn AB với $A(1; -4)$ và $B(5; 2)$ có phương trình là

- A. $2x + 3y - 3 = 0$. B. $3x + 2y + 1 = 0$. C. $3x - y + 4 = 0$. D. $x + y - 1 = 0$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của AB và d là trung trực đoạn AB .

$$\text{Ta có } \begin{cases} A(1; -4), B(5; 2) \Rightarrow I(3; -1) \in d \\ d \perp AB \Rightarrow \vec{n}_d = \overrightarrow{AB} = (4; 6) = 2(2; 3) \end{cases} \Rightarrow d: 2x + 3y - 3 = 0.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 72. Đường trung trực của đoạn AB với $A(4; -1)$ và $B(1; -4)$ có phương trình là

- A. $x + y = 1$. B. $x + y = 0$. C. $y - x = 0$. D. $x - y = 1$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của AB và d là trung trực đoạn AB .

$$\text{Ta có } \begin{cases} A(4; -1), B(1; -4) \Rightarrow I\left(\frac{5}{2}; -\frac{5}{2}\right) \in d \\ d \perp AB \Rightarrow \vec{n}_d = \overrightarrow{AB} = (-3; -3) = -3(1; 1) \end{cases} \Rightarrow d: x + y = 0.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 73. Đường trung trực của đoạn AB với $A(1; -4)$ và $B(1; 2)$ có phương trình là

- A. $y + 1 = 0$. B. $x + 1 = 0$. C. $y - 1 = 0$. D. $x - 4y = 0$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của AB và d là trung trực đoạn AB .

$$\text{Ta có } \begin{cases} A(1; -4), B(1; 2) \Rightarrow I(1; -1) \in d \\ d \perp AB \Rightarrow \vec{n}_d = \overrightarrow{AB} = (0; 6) = 6(0; 1) \end{cases} \Rightarrow d: y + 1 = 0.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 74. Đường trung trực của đoạn AB với $A(1; -4)$ và $B(3; -4)$ có phương trình là

- A. $y + 4 = 0$. B. $x + y - 2 = 0$. C. $x - 2 = 0$. D. $y - 4 = 0$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của AB và d là trung trực đoạn AB .

$$\text{Ta có } \begin{cases} A(1; -4), B(3; -4) \Rightarrow I(2; -4) \in d \\ d \perp AB \Rightarrow \vec{n}_d = \overrightarrow{AB} = (2; 0) = 2(1; 0) \end{cases} \Rightarrow d: x - 2 = 0.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 75. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(2; -1)$, $B(4; 5)$ và $C(-3; 2)$.

Lập phương trình đường cao của tam giác ABC kẻ từ A .

- A. $7x + 3y - 11 = 0$. B. $-3x + 7y + 13 = 0$. C. $3x + 7y + 1 = 0$. D. $7x + 3y + 13 = 0$.

Lời giải.

Gọi h_A là đường cao kẻ từ A của tam giác ABC .

$$\text{Ta có } \begin{cases} A(2; -1) \in h_A \\ h_A \perp BC \Rightarrow \vec{n}_{h_A} = \overrightarrow{BC} = (-7; -3) = -(7; 3) \end{cases} \Rightarrow h_A: 7x + 3y - 11 = 0.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 76. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(2; -1)$, $B(4; 5)$ và $C(-3; 2)$.

Lập phương trình đường cao của tam giác ABC kẻ từ B .

- A. $3x - 5y - 13 = 0$. B. $3x + 5y - 20 = 0$. C. $3x + 5y - 37 = 0$. D. $5x - 3y - 5 = 0$.

Lời giải.

Gọi h_B là đường cao kẻ từ B của tam giác ABC .

$$\text{Ta có } \begin{cases} B(4; 5) \in h_B \\ h_B \perp AC \Rightarrow \vec{n}_{h_B} = \vec{AC} = (-5; 3) = -(5; -3) \end{cases} \Rightarrow h_B : 5x - 3y - 5 = 0.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 77. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(2; -1)$, $B(4; 5)$ và $C(-3; 2)$.
Lập phương trình đường cao của tam giác ABC kẻ từ C .

- A. $x + y - 1 = 0$. B. $x + 3y - 3 = 0$. C. $3x + y + 11 = 0$. D. $3x - y + 11 = 0$.

Lời giải.

Gọi h_C là đường cao kẻ từ C của tam giác ABC .

$$\text{Ta có } \begin{cases} C(-3; 2) \in h_C \\ h_C \perp AB \Rightarrow \vec{n}_{h_C} = \vec{AB} = (2; 6) = 2(1; 3) \end{cases} \Rightarrow h_C : x + 3y - 3 = 0.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 78. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng $d_1 : x - 2y + 1 = 0$ và $d_2 : -3x + 6y - 10 = 0$.

- A. Trùng nhau. B. Song song.
C. Vuông góc với nhau. D. Cắt nhau nhưng không vuông góc nhau.

Lời giải.

$$\begin{cases} d_1 : x - 2y + 1 = 0 \\ d_2 : -3x + 6y - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{-3} = \frac{-2}{6} \neq \frac{1}{-10} \Rightarrow d_1 \parallel d_2.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 79. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng $d_1 : 3x - 2y - 6 = 0$ và $d_2 : 6x - 2y - 8 = 0$.

- A. Trùng nhau. B. Song song.
C. Vuông góc với nhau. D. Cắt nhau nhưng không vuông góc nhau.

Lời giải.

$$\begin{cases} d_1 : 3x - 2y - 6 = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 = (3; -2) \\ d_2 : 6x - 2y - 8 = 0 \Rightarrow \vec{n}_2 = (6; -2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{6} \neq \frac{-2}{-2} \\ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow d_1, d_2 \text{ cắt nhau nhưng không vuông góc}$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 80. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng $d_1 : \frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1$ và $d_2 : 3x + 4y - 10 = 0$.

- A. Trùng nhau. B. Song song.
C. Vuông góc với nhau. D. Cắt nhau nhưng không vuông góc nhau.

Lời giải.

$$\begin{cases} d_1 : \frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1 \Rightarrow \vec{n}_1 = \left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{4}\right) \\ d_2 : 3x + 4y - 10 = 0 \Rightarrow \vec{n}_2 = (3; 4) \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Rightarrow d_1 \perp d_2.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 81. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -2 - 2t \end{cases}$ và $d_2 : \begin{cases} x = 2 - 2t' \\ y = -8 + 4t' \end{cases}$.

- A. Trùng nhau. B. Song song.
C. Vuông góc với nhau. D. Cắt nhau nhưng không vuông góc nhau.

Lời giải.

$$\left. \begin{aligned} d_1 : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -2 - 2t \end{cases} &\Rightarrow \vec{u}_1 = (1; -2) \\ d_2 : \begin{cases} x = 2 - 2t' \\ y = -8 + 4t' \end{cases} &\Rightarrow B(2; -8) \in d_2, \vec{u}_2 = (-2; 4) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{-2} = \frac{-2}{4} \\ B \in d_1 \leftrightarrow t = 3 \end{cases} \Rightarrow d_1 \equiv d_2.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 82. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 2 - 6t \end{cases}$ và $d_2 : \begin{cases} x = 2 - 2t' \\ y = -8 + 4t' \end{cases}$.

A. Trùng nhau.

B. Song song.

C. Vuông góc với nhau.

D. Cắt nhau nhưng không vuông góc nhau.

Lời giải.

$$\left. \begin{aligned} d_1 : \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 2 - 6t \end{cases} &\Rightarrow A(-3; 2) \in d_1, \vec{u}_1 = (2; -3) \\ d_2 : \begin{cases} x = 1 - 2t' \\ y = 4 + 3t' \end{cases} &\Rightarrow \vec{u}_2 = (-2; 3) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{-2} = \frac{-3}{3} \\ A \notin d_2 \end{cases} \Rightarrow d_1 \parallel d_2.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 83. Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng $\Delta_1 : \begin{cases} x = 3 + \frac{3}{2}t \\ y = -1 + \frac{4}{3}t \end{cases}$ và $\Delta_2 : \begin{cases} x = \frac{9}{2} + 9t' \\ y = \frac{1}{3} + 8t' \end{cases}$.

A. Trùng nhau.

B. Song song.

C. Vuông góc với nhau.

D. Cắt nhau nhưng không vuông góc nhau.

Lời giải.

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 : \begin{cases} x = 3 + \frac{3}{2}t \\ y = -1 + \frac{4}{3}t \end{cases} &\Rightarrow A(3; -1) \in \Delta_1, \vec{u}_1 = \left(\frac{3}{2}; \frac{4}{3}\right) \\ \Delta_2 : \begin{cases} x = \frac{9}{2} + 9t' \\ y = \frac{1}{3} + 8t' \end{cases} &\Rightarrow \vec{u}_2 = (9; 8) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\frac{3}{2}}{9} = \frac{\frac{4}{3}}{8} \\ A \in \Delta_2 \leftrightarrow t' = -\frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow \Delta_1 \equiv \Delta_2.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 84. Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng $\Delta_1 : 7x + 2y - 1 = 0$ và $\Delta_2 : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 - 5t \end{cases}$.

A. Trùng nhau.

B. Song song.

C. Vuông góc với nhau.

D. Cắt nhau nhưng không vuông góc nhau.

Lời giải.

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 : 7x + 2y - 1 = 0 &\Rightarrow \vec{n}_1 = (7; 2) \\ \Delta_2 : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 - 5t \end{cases} &\Rightarrow \vec{u}_2 = (1; -5) \Rightarrow \vec{n}_2 = (5; 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \frac{7}{5} \neq \frac{2}{1} \\ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2 \text{ cắt nhau nhưng không}$$

vuông góc

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 85. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 1 - 3t \end{cases}$ và $d_2 : 3x + 2y - 14 = 0$.

- A. Trùng nhau. B. Song song.
C. Vuông góc với nhau. D. Cắt nhau nhưng không vuông góc nhau.

Lời giải.

$$\left. \begin{aligned} d_1 : \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 1 - 3t \end{cases} &\Rightarrow A(4; 1) \in d_1, \vec{u}_1 = (2; -3) \\ d_2 : 3x + 2y - 14 = 0 &\Rightarrow \vec{n}_2 = (3; 2) \Rightarrow \vec{u}_2 = (2; -3) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_1 = \vec{u}_2 \\ A \in d_2 \end{cases} \Rightarrow d_1 \equiv d_2.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 86. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 1 - 5t \end{cases}$ và $d_2 : 5x + 2y - 14 = 0$.

- A. Trùng nhau. B. Song song.
C. Vuông góc với nhau. D. Cắt nhau nhưng không vuông góc nhau.

Lời giải.

$$\left. \begin{aligned} d_1 : \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 1 - 5t \end{cases} &\Rightarrow A(4; 1) \in d_1, \vec{u}_1 = (2; -5) \\ d_2 : 5x + 2y - 14 = 0 &\Rightarrow \vec{n}_2 = (5; 2) \Rightarrow \vec{u}_2 = (2; -5) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_1 = \vec{u}_2 \\ A \notin d_2 \end{cases} \Rightarrow d_1 \parallel d_2.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 87. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -2t \end{cases}$ và $d_2 : \begin{cases} x = 2t' \\ y = -2 + 3t' \end{cases}$.

- A. Trùng nhau. B. Song song.
C. Vuông góc với nhau. D. Cắt nhau nhưng không vuông góc nhau.

Lời giải.

$$\left. \begin{aligned} d_1 : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -2t \end{cases} &\Rightarrow \vec{u}_1 = (3; -2) \\ d_2 : \begin{cases} x = 2t' \\ y = -2 + 3t' \end{cases} &\Rightarrow \vec{u}_2 = (2; 3) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0 \Rightarrow d_1 \perp d_2.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 88. Cho hai đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$ và $d_2 : \begin{cases} x = 5 - t_1 \\ y = -7 + 3t_1 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây là

đúng:

- A. d_1 song song d_2 . B. d_1 và d_2 cắt nhau tại $M(1; 3)$.
C. d_1 trùng với d_2 . D. d_1 và d_2 cắt nhau tại $M(3; 1)$.

Lời giải.

Ta có

$$\left. \begin{aligned} d_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 2t \end{cases} &\Rightarrow d_1 : 2x - y - 7 = 0 \\ d_2 : \begin{cases} x = 5 - t_1 \\ y = -7 + 3t_1 \end{cases} &\Rightarrow d_2 : 3x + y - 8 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} d_1 : 2x - y - 7 = 0 \\ d_2 : 3x + y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d_1 \cap d_2 = M(3; -1).$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 89. Cho hai đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 5 + 3t \end{cases}$ và $d_2 : x - 2y + 1 = 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng:

A. d_1 song song d_2 .

B. d_2 song song với trục Ox .

C. d_2 cắt trục Oy tại $M\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

D. d_1 và d_2 cắt nhau tại $M\left(\frac{1}{8}; \frac{3}{8}\right)$.

Lời giải.

$$d_1 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 5 + 3t \end{cases} \Rightarrow d_1 : 3x + y - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} d_1 : 3x + y - 8 = 0 \\ d_2 : x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{15}{7} \\ y = \frac{11}{7} \end{cases} \Rightarrow \text{A, B, D sai. } Oy \cap d_2 :$$

$$x - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \Rightarrow d_2 \cap Oy = M\left(0; \frac{1}{2}\right).$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 90. Cho bốn điểm $A(4; -3)$, $B(5; 1)$, $C(2; 3)$ và $D(-2; 2)$. Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng AB và CD .

A. Trùng nhau.

B. Song song.

C. Vuông góc với nhau.

D. Cắt nhau nhưng không vuông góc nhau.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 4)$, $\overrightarrow{CD} = (-4; -1)$. Suy ra AB và CD cắt nhau nhưng không vuông góc.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 91. Cho bốn điểm $A(1; 2)$, $B(4; 0)$, $C(1; -3)$ và $D(7; -7)$. Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng AB và CD .

A. Trùng nhau.

B. Song song.

C. Vuông góc với nhau.

D. Cắt nhau nhưng không vuông góc nhau.

Lời giải.

Vì $\overrightarrow{AB} = (3; -2)$, $\overrightarrow{CD} = (6; -4)$ và $\overrightarrow{AC} = (0; -5)$ nên $AB \parallel CD$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 92. Các cặp đường thẳng nào sau đây vuông góc với nhau?

$$\text{A. } d_1 : \begin{cases} x = t \\ y = -1 - 2t \end{cases} \text{ và } d_2 : 2x + y + 1 = 0. \quad \text{B. } d_1 : x - 2 = 0 \text{ và } d_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}.$$

$$\text{C. } d_1 : 2x - y + 3 = 0 \text{ và } d_2 : x - 2y + 1 = 0.$$

$$\text{D. } d_1 : 2x - y + 3 = 0 \text{ và } d_2 : 4x - 2y + 1 = 0.$$

Lời giải.

$$(i) \begin{cases} d_1 : \begin{cases} x = t \\ y = -1 - 2t \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_1 = (1; -2) \\ d_2 : 2x + y - 1 = 0 \Rightarrow \vec{n}_2 = (2; 1) \Rightarrow \vec{u}_2 = (1; -2) \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 \neq 0 \Rightarrow \text{loại A.}$$

$$(ii) \begin{cases} d_1 : x - 2 = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 = (1; 0) \\ d_2 : d_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_2 = (1; 0) \Rightarrow \vec{n}_2 = (0; 1) \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Rightarrow d_1 \perp d_2. \text{ Tương tự, kiểm tra và}$$

loại các đáp án C, D.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 93. Đường thẳng nào sau đây song song với đường thẳng $2x + 3y - 1 = 0$?

A. $2x + 3y + 1 = 0$. B. $x - 2y + 5 = 0$. C. $2x - 3y + 3 = 0$. D. $4x - 6y - 2 = 0$.

Lời giải.

Xét đáp án A: $\begin{cases} d : 2x + 3y - 1 = 0 \\ d_A : 2x + 3y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{2} = \frac{3}{3} \neq \frac{-1}{-1} \Rightarrow d \nparallel d_A$. Để ý rằng một đường thẳng song song với $2x + 3y - 1 = 0$ sẽ có dạng $2x + 3y + c = 0$ ($c \neq -1$). Do đó kiểm tra chỉ thấy có đáp án A thỏa mãn, các đáp án còn lại không thỏa mãn.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 94. Đường thẳng nào sau đây không có điểm chung với đường thẳng $x - 3y + 4 = 0$?

A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 + t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 - t \end{cases}$.

Lời giải.

Kí hiệu $d : x - 3y + 4 = 0 \Rightarrow \vec{n}_d = (1; -3)$. (i) Xét đáp án A: $d_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 3t \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_1 = (1; 3) \Rightarrow \vec{n}_1, \vec{n}$ không cùng phương nên loại A.

(ii) Xét đáp án B: $d_2 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_2 = (3; 1) \Rightarrow \vec{n}_2, \vec{n}$ không cùng phương nên loại B.

(iii) Xét đáp án C: $d_3 : \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 + t \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_3 = (1; 3) \Rightarrow \vec{n}_3, \vec{n}$ không cùng phương nên loại C.

(iv) Xét đáp án D: $d_4 : \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(1; 2) \in d_4 \\ \vec{n}_4 = (1; -3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n}_4 = \vec{n} \\ M \notin d \end{cases} \Rightarrow d \parallel d_4$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 95. Đường thẳng nào sau đây vuông góc với đường thẳng $4x - 3y + 1 = 0$?

A. $\begin{cases} x = 4t \\ y = -3 - 3t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 4t \\ y = -3 + 3t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = -4t \\ y = -3 - 3t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 8t \\ y = -3 + t \end{cases}$.

Lời giải.

Kí hiệu $d : 4x - 3y + 1 = 0 \Rightarrow \vec{n}_d = (4; -3)$.

(i) Xét đáp án A: $d_1 : \begin{cases} x = 4t \\ y = -3 - 3t \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_1 = (3; 4) \Rightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_d = 0$.

(ii) Tương tự kiểm tra và loại các đáp án B, C, D.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 96. Đường thẳng nào sau đây có vô số điểm chung với đường thẳng $\begin{cases} x = t \\ y = -1 \end{cases}$?

A. $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 + 2018t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -1 + 2018t \\ y = -1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + t \end{cases}$

Lời giải.

Hai đường thẳng có hai điểm chung thì chúng trùng nhau.

Như vậy bài toán trở thành tìm đường thẳng trùng với đường thẳng đã cho lúc đầu.

Ta có $d: \begin{cases} x = t \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(0; -1) \in d \\ \vec{u}_d = (1; 0) \end{cases}$.

Kiểm tra đường thẳng nào chứa điểm $A(0; -1)$ và có VTCP cùng phương với $\vec{u}_d$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 97. Đường thẳng nào sau đây có đúng một điểm chung với đường thẳng $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 5 - 7t \end{cases}$?

A. $7x + 3y - 1 = 0$. B. $7x + 3y + 1 = 0$.
C. $3x - 7y + 2018 = 0$. D. $7x + 3y + 2018 = 0$.

Lời giải.

Ta cần tìm đường thẳng cắt $d: \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 5 - 7t \end{cases} \Rightarrow d: 7x + 3y - 1 = 0$.

Mà $d_1: 7x + 3y - 1 = 0 \Rightarrow d_1 \equiv d$ loại d_1 .

Ta có $d_2: 7x + 3y + 1 = 0, d_3: 7x + 3y + 2018 = 0$ suy ra $d_2 \parallel d$ và $d_3 \parallel d$ loại d_2, d_3 .

Chọn đáp án **C**

□

Câu 98. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng $d_1: 3x + 4y + 10 = 0$ và $d_2: (2m - 1)x + m^2y + 10 = 0$ trùng nhau?

A. $m \pm 2$. B. $m = \pm 1$. C. $m = 2$. D. $m = -2$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} d_2: (2m - 1)x + m^2y + 10 = 0 \\ d_1: 3x + 4y + 10 = 0 \end{cases}$

Khi đó $d_1 \equiv d_2 \Leftrightarrow \frac{2m - 1}{3} = \frac{m^2}{4} = \frac{10}{10} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 1 = 3 \\ m^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 99. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng có phương trình $d_1: mx + (m - 1)y + 2m = 0$ và $d_2: 2x + y - 1 = 0$. Nếu d_1 song song d_2 thì

A. $m = 2$. B. $m = -1$. C. $m = -2$. D. $m = 1$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} d_1: mx + (m - 1)y + 2m = 0 \\ d_2: 2x + y - 1 = 0 \end{cases}$

Khi đó $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow \frac{m}{2} = \frac{m - 1}{1} \neq \frac{2m}{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m = 2m - 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 100. Tìm m để hai đường thẳng $d_1: 2x - 3y + 4 = 0$ và $d_2: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 - 4mt \end{cases}$ cắt nhau.

A. $m \neq -\frac{1}{2}$. B. $m \neq 2$. C. $m \neq \frac{1}{2}$. D. $m = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $d_1: 2x - 3y + 4 = 0$ và $d_2: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 - 4mt \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} \vec{n}_1 = (2; -3) \\ \vec{n}_2 = (4m; -3) \end{cases}$.

Khi đó $d_1 \cap d_2 = M \Leftrightarrow \frac{4m}{2} \neq \frac{-3}{-3} \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 101. Với giá trị nào của a thì hai đường thẳng $d_1: 2x - 4y + 1 = 0$ và $d_2: \begin{cases} x = -1 + at \\ y = 3 - (a + 1)t \end{cases}$ vuông góc với nhau?

A. $a = -2$. B. $a = 2$. C. $a = -1$. D. $a = 1$.

Lời giải.

Ta có $d_1: 2x - 4y + 1 = 0$ và $d_2: \begin{cases} x = -1 + at \\ y = 3 - (a + 1)t \end{cases}$ nên $\begin{cases} \vec{n}_1 = (1; -2) \\ \vec{n}_2 = (a + 1; a) \end{cases}$.

Khi đó $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow a + 1 - 2a = 0 \Leftrightarrow a = 1$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 102. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -3t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x = 2 + mt \\ y = -6 + (1 - 2m)t \end{cases}$ trùng nhau?

A. $m = \frac{1}{2}$. B. $m = -2$. C. $m = 2$. D. $m \neq \pm 2$.

Lời giải.

Ta có

- $d_1: \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -3t \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_1 = (2; -3), d_1: 3x + 2y + 6 = 0.$
- $d_2: \begin{cases} x = 2 + mt \\ y = -6 + (1 - 2m)t \end{cases} \Rightarrow A(2; -6) \in d_2, \vec{u}_2 = (m; 1 - 2m).$

Khi đó $d_1 \equiv d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} A \in d_1 \\ \frac{m}{2} = \frac{1 - 2m}{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-6) + 6 = 0 \text{ (Đúng)} \\ m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 103. Tìm tất cả các giá trị của m để hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + mt \end{cases}$ và $d_2: 4x - 3y + m = 0$ trùng nhau?

A. $m = -3$. B. $m = 1$. C. $m = \frac{4}{3}$. D. $m \in \emptyset$.

Lời giải.

Ta có

- $d_1: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + mt \end{cases} \Rightarrow A(2; 1) \in d_1, \vec{u}_1 = (2; m).$
- $d_2: 4x - 3y + m = 0 \Rightarrow \vec{u}_2 = (3; 4).$

$$\text{Khi đó } d_1 \equiv d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} A \in d_2 \\ \frac{2}{3} = \frac{m}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 + m = 0 \\ m = \frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -5 \\ m = \frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 104. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng $d_1: 2x + y + 4 - m = 0$ và $d_2: (m + 3)x + y + 2m - 1 = 0$ song song?

- A. $m = 1$. B. $m = -1$. C. $m = 2$. D. $m = 3$.

Lời giải.

$$\text{Với } m = 4 \Rightarrow \begin{cases} d_1: 2x + y = 0 \\ d_2: 7x + y + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow d_1 \cap d_2 \neq \emptyset. \text{ Nên loại } m = 4.$$

$$\text{Với } m \neq 4 \text{ thì } \begin{cases} d_1: 2x + y + 4 - m = 0 \\ d_2: (m + 3)x + y - 2m - 1 = 0 \end{cases} \xrightarrow{d_1 \parallel d_2} \frac{m + 3}{2} = \frac{1}{1} \neq \frac{-2m - 1}{4 - m} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m \neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 105. Tìm tất cả các giá trị của m để hai đường thẳng $\Delta_1: 2x - 3my + 10 = 0$ và $\Delta_2: mx + 4y + 1 = 0$ cắt nhau.

- A. $1 < m < 10$. B. $m = 1$. C. Không có m . D. Với mọi m .

Lời giải.

- Với $m = 0$ ta có $\begin{cases} \Delta_1: x + 5 = 0 \\ \Delta_2: 4y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 0$ (thỏa mãn).
- Với $m \neq 0$ ta có $\Delta_1 \cap \Delta_2 = M \Leftrightarrow \frac{2}{m} \neq \frac{-3m}{4} \Leftrightarrow \forall m \neq 0$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 106. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng $\Delta_1: mx + y - 19 = 0$ và $\Delta_2: (m - 1)x + (m + 1)y - 20 = 0$ vuông góc?

- A. Với mọi m . B. $m = 2$. C. Không có m . D. $m = \pm 1$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \Delta_1: mx + y - 19 = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 = (m; 1) \\ \Delta_2: (m - 1)x + (m + 1)y - 20 = 0 \Rightarrow \vec{n}_2 = (m - 1; m + 1) \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow m(m - 1) + 1(m + 1) = 0 \Leftrightarrow m \in \emptyset.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 107. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng $d_1: 3mx + 2y + 6 = 0$ và $d_2: (m^2 + 2)x + 2my + 6 = 0$ cắt nhau?

- A. $m \neq -1$. B. $m \neq 1$. C. $m \in \mathbb{R}$. D. $m \neq 1$ và $m \neq -1$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} d_1: 3mx + 2y + 6 = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 = (3m; 2) \\ d_2: (m^2 + 2)x + 2my + 6 = 0 \Rightarrow \vec{n}_2 = (m^2 + 2; 2m). \end{cases}$$

Suy ra

- $m = 0$, khi đó $\begin{cases} d_1: y + 3 = 0 \\ d_2: x + y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 0$ (thỏa mãn điều kiện).
- $m \neq 0$, khi đó $d_1 \cap d_2 = M \Leftrightarrow \frac{m^2 + 2}{3m} \neq \frac{2m}{2} \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 108. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng $d_1: 2x - 3y - 10 = 0$ và $d_2: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 - 4mt \end{cases}$ vuông góc?

- A. $m = \frac{1}{2}$. B. $m = \frac{9}{8}$. C. $m = -\frac{9}{8}$. D. $m = -\frac{5}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} d_1: 2x - 3y - 10 = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 = (2; -3) \\ d_2: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 - 4mt \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_2 = (4m; -3) \end{cases}$

Khi đó $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 4m + (-3) \cdot (-3) = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{9}{8}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 109. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng $d_1: 4x - 3y + 3m = 0$ và $d_2: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 4 + mt \end{cases}$ trùng nhau?

- A. $m = -\frac{8}{3}$. B. $m = \frac{8}{3}$. C. $m = -\frac{4}{3}$. D. $m = \frac{4}{3}$.

Lời giải.

$\begin{cases} d_1: 4x - 3y + 3m = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 = (4; -3). \\ d_2: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 4 + mt \end{cases} \Rightarrow A(1; 4) \in d_2, \vec{n}_2 = (m; -2) \end{cases}$

Khi đó $d_1 \equiv d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} A \in d_1 \\ \vec{n}_1 \text{ cùng phương với } \vec{n}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \in d_1 \\ \frac{m}{4} = \frac{-2}{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m - 8 = 0 \\ m = \frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{8}{3}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 110. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng $d_1: 3mx + 2y - 6 = 0$ và $d_2: (m^2 + 2)x + 2my - 3 = 0$ song song?

- A. $m = 1; m = -1$. B. $m \in \emptyset$. C. $m = 2$. D. $m = -1$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} d_1: 3mx + 2y - 6 = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 = (3m; 2) \\ d_2: (m^2 + 2)x + 2my - 3 = 0 \Rightarrow \vec{n}_2 = (m^2 + 2; 2m) \end{cases}$

- $m = 0 \Rightarrow \begin{cases} d_1: y - 3 = 0 \\ d_2: 2x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 0$ không thỏa mãn.
- $m \neq 0$, khi đó $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow \frac{m^2 + 2}{3m} = \frac{2m}{2} \neq \frac{-3}{-6} \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 111. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 8 - (m + 1)t \\ y = 10 + t \end{cases}$ và $d_2: mx + 2y - 14 = 0$ song song?

- A. $\begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$. B. $m = 1$. C. $m = -2$. D. $m \in \emptyset$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} d_1: \begin{cases} x = 8 - (m + 1)t \\ y = 10 + t \end{cases} \Rightarrow A(8; 10) \in d_1, \vec{n}_1 = (1; m + 1) \\ d_2: mx + 2y - 14 = 0 \Rightarrow \vec{n}_2 = (m; 2). \end{cases}$

Khi đó $d_1 \parallel d_2$ khi và chỉ khi $\begin{cases} A \notin d_2 \\ \vec{n}_1 \text{ cùng phương với } \vec{n}_2 = (0; 2). \end{cases}$

- Với $m = 0$ ta có $\begin{cases} A \notin d_2 \\ \vec{n}_1 = (1; 1), \vec{n}_2 = (0; 2) \end{cases}$. Suy ra $m = 0$ không thỏa mãn.
- Với $m \neq 0$ ta có $\begin{cases} A \notin d_2 \\ \frac{1}{m} = \frac{m + 1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8m + 6 \neq 0 \\ m^2 + m - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -\frac{3}{4} \\ m = 1; m = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 112. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng $d_1: (m - 3)x + 2y + m^2 - 1 = 0$ và $d_2: -x + my + m^2 - 2m + 1 = 0$ cắt nhau?

- A. $m \neq 1$. B. $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 2 \end{cases}$. C. $m \neq 2$. D. $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 2 \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} d_1: (m - 3)x + 2y + m^2 - 1 = 0 \\ d_2: -x + my + m^2 - 2m + 1 = 0. \end{cases}$

Khi đó $d_1 \cap d_2 = M$ khi và chỉ khi

- Với $m = 0$ ta có $\begin{cases} d_1: -3x + 2y - 1 = 0 \\ d_2: -x + 1 = 0 \end{cases}$ (thỏa mãn).
- Với $m \neq 0$ ta có $\frac{m - 3}{-1} \neq \frac{2}{m} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 2 \end{cases}$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 113. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x = m + 2t \\ y = 1 + (m^2 + 1)t \end{cases}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = 1 + mt \\ y = m + t \end{cases}$ trùng nhau?

- A. Không có m . B. $m = \frac{4}{3}$. C. $m = 1$. D. $m = -3$.

Lời giải.

Ta có
$$\begin{cases} \Delta_1: \begin{cases} x = m + 2t \\ y = 1 + (m^2 + 1)t \end{cases} \Rightarrow A(m; 1) \in d_1, \vec{u}_1 = (2; m^2 + 1). \\ \Delta_2: \begin{cases} x = 1 + mt \\ y = m + t \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_2 = (m; 1). \end{cases}$$

Khi đó $d_1 \equiv d_2$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} A \in d_2 \\ \frac{m}{2} = \frac{1}{m^2 + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 + mt \\ 1 = m + t \\ m^3 + m - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 + m(1 - m) \\ (m - 1)(m^2 + m + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 114. Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng $\Delta: 5x + 2y - 10 = 0$ và trục hoành.

- A. (0; 2). B. (0; 5). C. (2; 0). D. (-2; 0).

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của đường thẳng Δ với trục hoành là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = 0 \\ 5x + 2y - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 115. Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2t \\ y = -5 + 15t \end{cases}$ và trục tung.

- A. $\left(\frac{2}{3}; 0\right)$. B. (0; -5). C. (0; 5). D. (-5; 0).

Lời giải.

Gọi $M(x; y)$ là giao điểm của đường thẳng d với trục tung.

Khi đó tọa độ của M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -5 + 15t \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = 0 \\ t = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{2}{3}; 0\right).$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 116. Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng $7x - 3y + 16 = 0$ và $x + 10 = 0$.

- A. (-10; -18). B. (10; 18). C. (-10; 18). D. (10; -18).

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} 7x - 3y + 16 = 0 \\ x + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -10 \\ y = -18. \end{cases}$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 117. Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 2 + 5t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x = 1 + 4t' \\ y = 7 - 5t' \end{cases}$.

A. (1; 7). B. (-3; 2). C. (2; -3). D. (5; 1).

Lời giải.

$$\text{Xét hệ phương trình } \begin{cases} -3 + 4t = 1 + 4t' \\ 2 + 5t = 7 - 5t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t - t' = 1 \\ t + t' = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t' = 0. \end{cases}$$

$$\text{Thay } t = 1 \text{ vào đường thẳng } d_1 \text{ ta được } \begin{cases} x = 1 \\ y = 7. \end{cases}$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 118. Cho hai đường thẳng $d_1: 2x + 3y - 19 = 0$ và $d_2: \begin{cases} x = 22 + 2t \\ y = 55 + 5t \end{cases}$. Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng đã cho.

A. (2; 5). B. (10; 25). C. (-1; 7). D. (5; 2).

Lời giải.

Gọi $M(x; y)$ là giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 .

$$\text{Khi đó tọa độ giao điểm của } M \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} 2x + 3y - 19 = 0 \\ x = 22 + 2t \\ y = 55 + 5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \\ t = -10 \end{cases} \Rightarrow M(2; 5).$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 119. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(2; 0)$, $B(1; 4)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = -t \\ y = 2 - t \end{cases}$.

Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng AB và d .

A. (2; 0). B. (-2; 0). C. (0; 2). D. (0; -2).

Lời giải.

Phương trình đường thẳng AB có dạng $4x - 3y + 8 = 0$.

Gọi $M(x; y)$ là giao điểm của AB với d . Khi đó tọa độ của M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 4x - 3y + 8 = 0 \\ x = -t \\ y = 2 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow M(-2; 0).$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 120. Xác định a để hai đường thẳng $d_1: ax + 3y - 4 = 0$ và $d_2: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 + 3t \end{cases}$ cắt nhau tại một điểm nằm trên trục hoành.

A. $a = 1$. B. $a = -1$. C. $a = 2$. D. $a = -2$.

Lời giải.

Gọi $A(x; y)$ là giao điểm của đường thẳng d_2 với trục Ox . Khi đó tọa độ của A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 + 3t \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \\ t = -1 \end{cases} \Rightarrow A(-2; 0).$$

Vì $A \in d_1 \Rightarrow -2a - 4 = 0 \Leftrightarrow a = -2$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 121. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hai đường thẳng $d_1: 4x + 3my - m^2 = 0$ và

$d_2: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 6 + 2t \end{cases}$ cắt nhau tại một điểm thuộc trục tung.

A. $m = 0$ hoặc $m = -6$.

B. $m = 0$ hoặc $m = 2$.

C. $m = 0$ hoặc $m = -2$.

D. $m = 0$ hoặc $m = 6$.

Lời giải.

Gọi $A(x; y)$ là giao điểm của đường thẳng d_2 với trục Oy . khi đó tọa độ của A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 6 + 2t \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ t = -2 \end{cases} \Rightarrow A(0; 2).$$

Vì $A \in d_1 \Rightarrow 6m - m^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 6. \end{cases}$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 122. Cho ba đường thẳng $d_1: 3x - 2y + 5 = 0$, $d_2: 2x + 4y - 7 = 0$, $d_3: 3x + 4y - 1 = 0$. Phương trình đường thẳng d đi qua giao điểm của d_1 và d_2 , và song song với d_3 là

A. $24x + 32y - 53 = 0$.

B. $24x + 32y + 53 = 0$.

C. $24x - 32y + 53 = 0$.

D. $24x - 32y - 53 = 0$.

Lời giải.

Gọi $A(x; y)$ là giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 nên tọa độ của nó là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x - 2y + 5 = 0 \\ 2x + 4y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{8} \\ y = \frac{31}{16} \end{cases} \Rightarrow A\left(-\frac{3}{8}; \frac{31}{16}\right).$$

Đường thẳng d song song với d_3 nên $d: 3x + 4y + c = 0$. Vì $A \in d \Rightarrow -\frac{9}{8} + \frac{31}{4} + c = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{53}{8}$.

Vậy $d: 3x + 4y - \frac{53}{8} = 0 \Leftrightarrow d: 24x + 32y - 53 = 0$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 123. Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua giao điểm của hai đường thẳng $d_1: x + 3y - 1 = 0$, $d_2: x - 3y - 5 = 0$ và vuông góc với đường thẳng $d_3: 2x - y + 7 = 0$.

A. $3x + 6y - 5 = 0$.

B. $6x + 12y - 5 = 0$.

C. $6x + 12y + 10 = 0$.

D. $x + 2y + 10 = 0$.

Lời giải.

Gọi $A(x; y)$ là giao điểm của d_1 và d_2 nên tọa độ của nó là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + 3y - 1 = 0 \\ x - 3y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow A\left(3; -\frac{2}{3}\right).$$

Đường thẳng $\Delta \perp d_3$ nên $\Delta: x + 2y + c = 0$. Vì $A \in \Delta \Rightarrow 3 + 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + c = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{5}{3}$.

Vậy $\Delta: x + 2y - \frac{5}{3} = 0 \Leftrightarrow \Delta: 3x + 6y - 5 = 0$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 124. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho ba đường thẳng lần lượt có phương trình $d_1: 3x - 4y + 15 = 0$, $d_2: 5x + 2y - 1 = 0$ và $d_3: mx - (2m - 1)y + 9m - 13 = 0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để ba đường thẳng đã cho cùng đi qua một điểm.

- A. $m = \frac{1}{5}$. B. $m = -5$. C. $m = -\frac{1}{5}$. D. $m = 5$.

Lời giải.

Gọi $A(x; y)$ là giao điểm của d_1 và d_2 nên tọa độ của nó là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x - 4y + 15 = 0 \\ 5x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow A(-1; 3).$$

Vì $A \in d_3 \Rightarrow -m - 6m + 3 + 9m - 13 = 0 \Leftrightarrow m = 5$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 125. Nếu ba đường thẳng $d_1: 2x + y - 4 = 0$, $d_2: 5x - 2y + 3 = 0$ và $d_3: mx + 3y - 2 = 0$ đồng quy thì m nhận giá trị nào sau đây?

- A. $\frac{12}{5}$. B. $-\frac{12}{5}$. C. 12. D. -12.

Lời giải.

Gọi $A(x; y)$ là giao điểm của d_1 và d_2 nên tọa độ của nó là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ 5x - 2y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{9} \\ y = \frac{26}{9} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{5}{9}; \frac{26}{9}\right).$$

Vì $A \in d_3 \Rightarrow \frac{5m}{9} + \frac{26}{3} - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -12$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 126. Với giá trị nào của m thì ba đường thẳng $d_1: 3x - 4y + 15 = 0$, $d_2: 5x + 2y - 1 = 0$ và $d_3: mx - 4y + 15 = 0$ đồng quy?

- A. $m = -5$. B. $m = 5$. C. $m = 3$. D. $m = -3$.

Lời giải.

Gọi $A(x; y)$ là giao điểm của d_1 và d_2 nên tọa độ của nó là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x - 4y + 15 = 0 \\ 5x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow A(-1; 3).$$

Vì $A \in d_3 \Rightarrow -m - 12 + 15 = 0 \Leftrightarrow m = 3$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 127. Với giá trị nào của m thì ba đường thẳng $d_1: 2x + y - 1 = 0$, $d_2: x + 2y + 1 = 0$ và $d_3: mx - y - 7 = 0$ đồng quy?

- A. $m = -6$. B. $m = 6$. C. $m = -5$. D. $m = 5$.

Lời giải.

Gọi $A(x; y)$ là giao điểm của d_1 và d_2 nên tọa độ của nó là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow A(1; -1).$$

Vì $A \in d_3 \Rightarrow m + 1 - 7 = 0 \Leftrightarrow m = 6$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 128. Đường thẳng $d: 51x - 30y + 11 = 0$ đi qua điểm nào sau đây?

- A. $M\left(-1; -\frac{4}{3}\right)$. B. $N\left(-1; \frac{4}{3}\right)$. C. $P\left(1; \frac{3}{4}\right)$. D. $Q\left(-1; -\frac{3}{4}\right)$.

Lời giải.

Thử từng tọa độ của các điểm M, N, P, Q ta thấy tọa độ của M thỏa mãn.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 129. Điểm nào sau đây thuộc đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \end{cases}$?

- A. $M(2; 1)$. B. $N(7; 0)$. C. $P(3; 5)$. D. $Q(3; 2)$.

Lời giải.

Ta có $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \end{cases} \Leftrightarrow x + 2y - 7 = 0$.

Thử từng tọa độ của các điểm M, N, P, Q ta thấy tọa độ của Q thỏa mãn.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 130. Đường thẳng $12x - 7y + 5 = 0$ không đi qua điểm nào sau đây?

- A. $M(1; 1)$. B. $N(-1; -1)$. C. $P\left(-\frac{5}{12}; 0\right)$. D. $Q\left(1; \frac{17}{7}\right)$.

Lời giải.

Thay tọa độ của các điểm M, N, P, Q ta thấy điểm M không thuộc đường thẳng.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 131. Điểm nào sau đây không thuộc đường thẳng $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - 5t \end{cases}$?

- A. $M(-1; 3)$. B. $N(1; -2)$. C. $P(3; 1)$. D. $Q(-3; 8)$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - 5t \end{cases} \Leftrightarrow 5x + 2y - 1 = 0$.

Thay tọa độ của các điểm M, N, P, Q ta thấy điểm P không thuộc đường thẳng.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 132. Tính góc tạo bởi giữa hai đường thẳng $d_1: 2x - y - 10 = 0$ và $d_2: x - 3y + 9 = 0$

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 135° .

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} d_1: 2x - y - 10 = 0 \rightarrow \vec{n}_1 = (2; -1) \\ d_2: x - 3y + 9 = 0 \rightarrow \vec{n}_2 = (1; -3) \end{cases} \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \cos \varphi = \frac{|2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-3)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \varphi = 45^\circ.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 133. Tính góc tạo bởi giữa hai đường thẳng $d_1: 7x - 3y + 6 = 0$ và $d_2: 2x - 5y - 4 = 0$.

- A. $\frac{\pi}{4}$. B. $\frac{\pi}{3}$. C. $\frac{2\pi}{3}$. D. $\frac{3\pi}{4}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} d_1: 7x - 3y + 6 = 0 \rightarrow \vec{n}_1 = (7; -3) \\ d_2: 2x - 5y - 4 = 0 \rightarrow \vec{n}_2 = (2; -5) \end{cases} \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \cos \varphi = \frac{|14 + 15|}{\sqrt{49 + 9} \cdot \sqrt{4 + 25}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 134. Tính góc tạo bởi giữa hai đường thẳng $d_1: 2x + 2\sqrt{3}y + 5 = 0$ và $d_2: y - 6 = 0$.

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} d_1: 2x + 2\sqrt{3}y + 5 = 0 \rightarrow \vec{n}_1 = (1; \sqrt{3}) \\ d_2: y - 6 = 0 \rightarrow \vec{n}_2 = (0; 1) \end{cases} \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \cos \varphi = \frac{|\sqrt{3}|}{\sqrt{1 + 3} \cdot \sqrt{0 + 1}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \varphi = 30^\circ.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 135. Tính góc tạo bởi giữa hai đường thẳng $d_1: x + \sqrt{3}y = 0$ và $d_2: x + 10 = 0$.

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Lời giải.

$$\begin{cases} d_1: x + \sqrt{3}y = 0 \rightarrow \vec{n}_1 = (1; \sqrt{3}) \\ d_2: x + 10 = 0 \rightarrow \vec{n}_2 = (1; 0) \end{cases} \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \cos \varphi = \frac{|1 + 0|}{\sqrt{1 + 3} \cdot \sqrt{1 + 0}} = \frac{1}{2} \rightarrow \varphi = 60^\circ.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 136. Tính góc tạo bởi giữa hai đường thẳng $d_1: 6x - 5y + 15 = 0$ và $d_2: \begin{cases} x = 10 - 6t \\ y = 1 + 5t \end{cases}$.

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Lời giải.

$$\begin{cases} d_1: 6x - 5y + 15 = 0 \rightarrow \vec{n}_1 = (6; -5) \\ d_2: \begin{cases} x = 10 - 6t \\ y = 1 + 5t \end{cases} \rightarrow \vec{n}_2 = (5; 6) \end{cases} \rightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \varphi = 90^\circ.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 137. Cho đường thẳng $d_1: x + 2y - 7 = 0$ và $d_2: 2x - 4y + 9 = 0$. Tính cosin của góc tạo bởi giữa hai đường thẳng đã cho.

- A. $-\frac{3}{5}$. B. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. C. $\frac{3}{5}$. D. $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Lời giải.

$$\begin{cases} d_1: x + 2y - 7 = 0 \rightarrow \vec{n}_1 = (1; 2) \\ d_2: 2x - 4y + 9 = 0 \rightarrow \vec{n}_2 = (1; -2) \end{cases} \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \cos \varphi = \frac{|1 - 4|}{\sqrt{1 + 4} \cdot \sqrt{1 + 4}} = \frac{3}{5}.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 138. Cho đường thẳng $d_1: x + 2y - 2 = 0$ và $d_2: x - y = 0$. Tính cosin của góc tạo bởi giữa hai đường thẳng đã cho.

- A. $\frac{\sqrt{10}}{10}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $\sqrt{3}$.

Lời giải.

$$\begin{cases} d_1: x + 2y - 2 = 0 \rightarrow \vec{n}_1 = (1; 2) \\ d_2: x - y = 0 \rightarrow \vec{n}_2 = (1; -1) \end{cases} \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \cos \varphi = \frac{|1 - 2|}{\sqrt{1+4} \cdot \sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 139. Cho đường thẳng $d_1: 10x + 5y - 1 = 0$ và $d_2: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \end{cases}$. Tính cosin của góc tạo bởi giữa hai đường thẳng đã cho.

- A. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$. B. $\frac{3}{5}$. C. $\frac{\sqrt{10}}{10}$. D. $\frac{3}{10}$.

Lời giải.

$$\begin{cases} d_1: 10x + 5y - 1 = 0 \rightarrow \vec{n}_1 = (2; 1) \\ d_2: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \end{cases} \rightarrow \vec{n}_2 = (1; 1) \end{cases} \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \cos \varphi = \frac{|2 + 1|}{\sqrt{4+1} \cdot \sqrt{1+1}} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 140. Cho đường thẳng $d_1: 3x + 4y + 1 = 0$ và $d_2: \begin{cases} x = 15 + 12t \\ y = 1 + 5t \end{cases}$. Tính cosin của góc tạo bởi giữa hai đường thẳng đã cho.

- A. $\frac{56}{65}$. B. $-\frac{33}{65}$. C. $\frac{6}{65}$. D. $\frac{33}{65}$.

Lời giải.

$$\begin{cases} d_1: 3x + 4y + 1 = 0 \rightarrow \vec{n}_1 = (3; 4) \\ d_2: \begin{cases} x = 15 + 12t \\ y = 1 + 5t \end{cases} \rightarrow \vec{n}_2 = (5; -12) \end{cases} \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \cos \varphi = \frac{|15 - 48|}{\sqrt{9+16} \cdot \sqrt{25+144}} = \frac{33}{65}.$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 141. Cho đường thẳng $d_1: 2x + 3y + m^2 - 1 = 0$ và $d_2: \begin{cases} x = 2m - 1 + t \\ y = m^4 - 1 + 3t \end{cases}$. Tính cosin của góc tạo bởi giữa hai đường thẳng đã cho.

- A. $\frac{3}{\sqrt{130}}$. B. $\frac{2}{5\sqrt{5}}$. C. $\frac{3}{\sqrt{5}}$. D. $-\frac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\begin{cases} d_1: 2x + 3y + m^2 - 1 = 0 \rightarrow \vec{n}_1 = (2; 3) \\ d_2: \begin{cases} x = 2m - 1 + t \\ y = m^4 - 1 + 3t \end{cases} \rightarrow \vec{n}_2 = (3; -1) \end{cases} \xrightarrow{\varphi=(d_1;d_2)} \cos \varphi = \frac{|6 - 3|}{\sqrt{4+9} \cdot \sqrt{9+1}} = \frac{3}{\sqrt{130}}.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 142. Cho hai đường thẳng $d_1: 3x + 4y + 12 = 0$ và $d_2: \begin{cases} x = 2 + at \\ y = 1 - 2t \end{cases}$. Tìm các giá trị của tham số a để d_1 và d_2 hợp với nhau một góc bằng 45° .

A. $a = \frac{2}{7}$ hoặc $a = -14$.

B. $a = \frac{7}{2}$ hoặc A, B .

C. $a = 5$ hoặc $a = -14$.

D. $a = \frac{2}{7}$ hoặc $a = 5$.

Lời giải.

Ta có
$$\begin{cases} d_1: 3x + 4y + 12 = 0 \rightarrow \vec{n}_1 = (3; 4) \\ d_2: \begin{cases} x = 2 + at \\ y = 1 - 2t \end{cases} \rightarrow \vec{n}_2 = (2; a) \end{cases} \rightarrow \varphi = (d_1; d_2) = 45^\circ$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45^\circ = \cos \varphi = \frac{|6 + 4a|}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{a^2 + 4}} \Leftrightarrow 25(a^2 + 4) = 8(4a^2 + 12a + 9) \Leftrightarrow 7a^2 + 96a - 28 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a = -14 \\ a = \frac{2}{7} \end{cases}.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 143. Đường thẳng Δ đi qua giao điểm của hai đường thẳng $d_1: 2x + y - 3 = 0$ và $d_2: x - 2y + 1 = 0$ đồng thời tạo với đường thẳng $d_3: y - 1 = 0$ một góc 45° có phương trình:

A. $\Delta: x + (1 - \sqrt{2})y = 0$ hoặc $\Delta: x - y - 1 = 0$.

B. $\Delta: x + 2y = 0$ hoặc $\Delta: x - 4y = 0$.

C. $\Delta: x - y = 0$ hoặc $\Delta: x + y - 2 = 0$.

D. $\Delta: 2x + 1 = 0$ hoặc $\Delta: y + 5 = 0$.

Lời giải.

$$\begin{cases} d_1: 2x + y - 3 = 0 \\ d_2: x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow d_1 \cap d_2 = A(1; 1) \in \Delta.$$

Ta có $d_3: y - 1 = 0 \rightarrow \vec{n}_3 = (0; 1)$, gọi $\vec{n}_\Delta = (a; b)$, $\varphi = (\Delta; d_3)$.

$$\text{Khi đó } \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \varphi = \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{0 + 1}} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2b^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \rightarrow a = b = 1 \rightarrow \Delta: x + y - 2 = 0 \\ a = -b \rightarrow a = 1, b = -1 \rightarrow \Delta: x - y = 0 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 144. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , có bao nhiêu đường thẳng đi qua điểm $A(2; 0)$ và tạo với trục hoành một góc 45° ?

A. Có duy nhất.

B. 2.

C. Vô số.

D. Không tồn tại.

Lời giải.

Cho đường thẳng d và một điểm A . Khi đó.

(i) Có duy nhất một đường thẳng đi qua A song song hoặc trùng hoặc vuông góc với d .

(ii) Có đúng hai đường thẳng đi qua A và tạo với d một góc $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 145. Đường thẳng Δ tạo với đường thẳng $d: x + 2y - 6 = 0$ một góc 45° . Tìm hệ số góc k của đường thẳng Δ .

A. $k = \frac{1}{3}$ hoặc $k = -3$.

B. $k = \frac{1}{3}$ hoặc $k = 3$.

C. $k = -\frac{1}{3}$ hoặc $k = -3$.

D. $k = -\frac{1}{3}$ hoặc $k = 3$.

Lời giải.

$$d: x + 2y - 6 = 0 \rightarrow \vec{n}_d = (1; 2), \text{ gọi } \vec{n}_\Delta = (a; b) \rightarrow k_\Delta = -\frac{a}{b}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{1}{\sqrt{2}} &= \cos 45^\circ = \frac{|a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{5}} \Leftrightarrow 5(a^2+b^2) = 2a^2+8ab+8b^2 \Leftrightarrow 3a^2-8ab-3b^2=0 \Leftrightarrow \\ &\begin{cases} a = -\frac{1}{3}b \rightarrow k_\Delta = \frac{1}{3} \\ a = 3b \rightarrow k_\Delta = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 146. Biết rằng có đúng hai giá trị của tham số k để đường thẳng $d: y = kx$ tạo với đường thẳng $\Delta: y = x$ một góc 60° . Tổng hai giá trị của k bằng:

A. -8.

B. -4.

C. -1.

D. -1.

Lời giải.

$$\begin{aligned} &\begin{cases} d: y = kx \rightarrow \vec{n}_d = (k; -1) \\ \Delta: y = x \rightarrow \vec{n}_\Delta = (1; -1) \end{cases} \\ &\rightarrow \frac{1}{2} = \cos 60^\circ = \frac{|k+1|}{\sqrt{k^2+1}} \cdot \sqrt{2} \Leftrightarrow k^2+1 = 2k^2+4k+2 \Leftrightarrow k^2+4k+1=0 \\ &\xrightarrow{\text{sol: } k=k_1, k=k_2} k_1+k_2 = -4. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 147. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$ và hai điểm $M(x_m; y_m)$, $N(x_n; y_n)$ không thuộc Δ . Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. M, N khác phía so với Δ khi $(ax_m + by_m + c) \cdot (ax_n + by_n + c) > 0$.

B. M, N cùng phía so với Δ khi $(ax_m + by_m + c) \cdot (ax_n + by_n + c) \geq 0$.

C. M, N khác phía so với Δ khi $(ax_m + by_m + c) \cdot (ax_n + by_n + c) \leq 0$.

D. M, N cùng phía so với Δ khi $(ax_m + by_m + c) \cdot (ax_n + by_n + c) > 0$.

Lời giải.

Dựa vào tính chất

Chọn đáp án (D) □

Câu 148. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: 3x + 4y - 5 = 0$ và hai điểm $A(1; 3)$, $B(2; m)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để A và B nằm cùng phía đối với d .

A. $m < 0$.

B. $m > -\frac{1}{4}$.

C. $m > -1$.

D. $m = -\frac{1}{4}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} &A(1; 3), B(2; m) \text{ nằm cùng phía với } d: 3x+4y-5=0 \text{ khi và chỉ khi } (3x_A+4y_A-5)(3x_B+4y_B-5) > 0 \\ &0 \Leftrightarrow 10(1+4m) > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 149. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: 4x - 7y + m = 0$ và hai điểm $A(1; 2)$, $B(-3; 4)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để d và đoạn thẳng AB có điểm chung.

A. $10 \leq m \leq 40$.

B. $\begin{cases} m > 40 \\ m < 10 \end{cases}$.

C. $10 < m < 40$.

D. $m < 10$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} &\text{Đoạn thẳng } AB \text{ và } d: 4x-7y+m=0 \text{ có điểm chung khi và chỉ khi } (4x_A-7y_A+m)(4x_B-7y_B+m) \leq 0 \\ &0 \Leftrightarrow (m-10)(m-40) \leq 0 \Leftrightarrow 10 \leq m \leq 40. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 150. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 3t \end{cases}$ và hai điểm $A(1; 2)$, $B(-2; m)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để A và B nằm cùng phía đối với d .

A. $m > 13$. B. $m \geq 13$. C. $m < 13$. D. $m = 13$.

Lời giải.

$d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 3t \end{cases} \xrightarrow{d}: 3x + y - 7 = 0$. Khi đó điều kiện bài toán trở thành $(3x_A + y_A - 7)(3x_B + y_B - 7) > 0$
 $0 \Leftrightarrow -2(m - 13) > 0 \Leftrightarrow m < 13$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 151. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = m + 2t \\ y = 1 - t \end{cases}$ và hai điểm $A(1; 2)$, $B(-3; 4)$. Tìm m để d cắt đoạn thẳng AB .

A. $m < 3$. B. $m = 3$. C. $m > 3$. D. Không tồn tại m .

Lời giải.

$d: \begin{cases} x = m + 2t \\ y = 1 - t \end{cases} \rightarrow d: x + 2y - m - 2 = 0$. Đoạn thẳng AB cắt d khi và chỉ khi $(x_A + 2y_A - m - 2)(x_B + 2y_B - m - 2) < 0$
 $0 \Leftrightarrow (3 - m)^2 \leq 0 \Leftrightarrow m = 3$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 152. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(1; 3)$, $B(-2; 4)$ và $C(-1; 5)$. Đường thẳng $d: 2x - 3y + 6 = 0$ cắt cạnh nào của tam giác đã cho?

A. Cạnh AC . B. Cạnh AB . C. Cạnh BC . D. Không cạnh nào.

Lời giải.

Đặt $f(x; y) = 2x - 3y + 6 \rightarrow \begin{cases} f(A(1; 3)) = -1 < 0 \\ f(B(-2; 4)) = -10 < 0 \rightarrow d \text{ không cắt cạnh nào của tam giác } ABC. \\ f(C(-1; 5)) = -11 < 0 \end{cases}$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 153. Cặp đường thẳng nào dưới đây là phân giác của các góc hợp bởi hai đường thẳng $\Delta_1: x + 2y - 3 = 0$ và $\Delta_2: 2x - y + 3 = 0$.

A. $3x + y = 0$ và $x - 3y = 0$. B. $3x + y = 0$ và $x + 3y - 6 = 0$.
 C. $3x + y = 0$ và $-x + 3y - 6 = 0$. D. $3x + y + 6 = 0$ và $x - 3y - 6 = 0$.

Lời giải.

Điểm $M(x; y)$ thuộc đường phân giác của các góc tạo bởi $\Delta_1; \Delta_2$ khi và chỉ khi $d(M; \Delta_1) = d(M; \Delta_2) \Leftrightarrow \frac{|x + 2y - 3|}{\sqrt{5}} = \frac{|2x - y + 3|}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 0 \\ x - 3y + 6 = 0 \end{cases}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 154. Cặp đường thẳng nào dưới đây là phân giác của các góc hợp bởi đường thẳng $\Delta: x + y = 0$ và trục hoành.

A. $(1 + \sqrt{2})x + y = 0; x - (1 - \sqrt{2})y = 0$. B. $(1 + \sqrt{2})x + y = 0; x + (1 - \sqrt{2})y = 0$.
 C. $(1 + \sqrt{2})x - y = 0; x + (1 - \sqrt{2})y = 0$. D. $x + (1 + \sqrt{2})y = 0; x + (1 - \sqrt{2})y = 0$.

Lời giải.

Điểm $M(x; y)$ thuộc đường phân giác của các góc tạo bởi $\Delta; Ox: y = 0$ khi và chỉ khi $d(M; \Delta) = d(M; Ox) \Leftrightarrow \frac{|x + y|}{\sqrt{2}} = \frac{|y|}{\sqrt{1}} \Leftrightarrow \begin{cases} x + (1 + \sqrt{2})y = 0 \\ x + (1 - \sqrt{2})y = 0 \end{cases}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 155. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A\left(\frac{7}{4}; 3\right)$, $B(1; 2)$ và $C(-4; 3)$.

Phương trình đường phân giác trong của góc A là:

- A. $4x + 2y - 13 = 0$. B. $4x - 8y + 17 = 0$. C. $4x - 2y - 1 = 0$. D. $4x + 8y - 31 = 0$.

Lời giải.

$\begin{cases} A\left(\frac{7}{4}; 3\right), B(1; 2) \rightarrow AB: 4x - 3y + 2 = 0 \\ A\left(\frac{7}{4}; 3\right), C(-4; 3) \rightarrow AC: y - 3 = 0 \end{cases}$. Suy ra các đường phân giác góc A là:

$$\frac{|4x - 3y + 2|}{5} = \frac{|y - 3|}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y - 13 = 0 \rightarrow f(x; y) = 4x + 2y - 13 \\ 4x - 8y + 17 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} f(B(1; 2)) = -5 < 0 \\ f(C(-4; 3)) = -23 < 0 \end{cases}$$

suy ra đường phân giác trong góc A là $4x - 8y + 17 = 0$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 156. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(1; 5)$, $B(-4; -5)$ và $C(4; -1)$.

Phương trình đường phân giác ngoài của góc A là:

- A. $y + 5 = 0$. B. $y - 5 = 0$. C. $x + 1 = 0$. D. $x - 1 = 0$.

Lời giải.

$\begin{cases} A(1; 5), B(-4; -5) \rightarrow AB: 2x - y + 3 = 0 \\ A(1; 5), C(4; -1) \rightarrow AC: 2x + y - 7 = 0 \end{cases}$. Suy ra các đường phân giác góc A là: $\frac{|2x - y + 3|}{\sqrt{5}} = \frac{|2x + y - 7|}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \rightarrow f(x; y) = x - 1 \\ y - 5 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(B(-4; -5)) = -5 < 0 \\ f(C(4; -1)) = 3 > 0 \end{cases}$ suy ra đường phân giác

trong góc A là $y - 5 = 0$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 157. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $d_1: 3x - 4y - 3 = 0$ và $d_2: 12x + 5y - 12 = 0$. Phương trình đường phân giác góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng d_1 và d_2 là:

- A. $3x + 11y - 3 = 0$. B. $11x - 3y - 11 = 0$. C. $3x - 11y - 3 = 0$. D. $11x + 3y - 11 = 0$.

Lời giải.

Các đường phân giác của các góc tạo bởi $d_1: 3x - 4y - 3 = 0$ và $d_2: 12x + 5y - 12 = 0$ là: $\frac{|3x - 4y - 3|}{5} = \frac{|12x + 5y - 12|}{13} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 11y - 3 = 0 \\ 11x - 3y - 11 = 0 \end{cases}$. Gọi $I = d_1 \cap d_2 \rightarrow I(1; 0)$; $d: 3x + 11y - 3 = 0 \rightarrow M(-10; 3) \in$

d , Gọi H là hình chiếu của M lên d_1 . Ta có: $IM = \sqrt{130}$, $MH = \frac{|-30 - 12 - 3|}{5} = 9$, suy ra $\sin MIH = \frac{MH}{IM} = \frac{9}{\sqrt{130}} \rightarrow MIH > 52 \rightarrow 2MIH > 90 \dots$. Suy ra $d: 3x + 11y - 3 = 0$ là đường phân giác góc tù, suy ra đường phân giác góc nhọn là $11x - 3y - 11 = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 158. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho điểm $M(x_0; y_0)$ và đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$. Khoảng cách từ điểm M đến Δ được tính bằng công thức:

A. $d(M, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

B. $d(M, \Delta) = \frac{ax_0 + by_0}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

C. $d(M, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

D. $d(M, \Delta) = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Lời giải.

Công thức

Chọn đáp án (C) □

Câu 159. Khoảng cách từ điểm $M(-1; 1)$ đến đường thẳng $\Delta: 3x - 4y - 3 = 0$ bằng:

A. $\frac{2}{5}$.

B. 2.

C. $\frac{4}{5}$.

D. $\frac{4}{25}$.

Lời giải.

$$d(M; \Delta) = \frac{|-3 - 4 - 3|}{\sqrt{9 + 16}} = 2.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 160. Khoảng cách từ giao điểm của hai đường thẳng $x - 3y + 4 = 0$ và $2x + 3y - 1 = 0$ đến đường thẳng $\Delta: 3x + y + 4 = 0$ bằng:

A. $2\sqrt{10}$.

B. $\frac{3\sqrt{10}}{5}$.

C. $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

D. 2.

Lời giải.

$$\begin{cases} x - 3y + 4 = 0 \\ 2x + 3y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow A(-1; 1) \rightarrow d(A; \Delta) = \frac{|-3 + 1 + 4|}{\sqrt{9 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{10}}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 161. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(1; 2)$, $B(0; 3)$ và $C(4; 0)$.

Chiều cao của tam giác kẻ từ đỉnh A bằng

A. $\frac{1}{5}$.

B. 3.

C. $\frac{1}{25}$.

D. $\frac{3}{5}$.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng BC là $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1 \Leftrightarrow 3x + 4y - 12 = 0$.

Khi đó

$$h_A = d(A; BC) = \frac{|3 + 8 - 12|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{1}{5}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 162. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(3; -4)$, $B(1; 5)$ và $C(3; 1)$.

Tính diện tích tam giác ABC .

A. 10.

B. 5.

C. $\sqrt{26}$.

D. $2\sqrt{5}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} A(3; -4) \\ B(1; 5), C(3; 1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A(3; -4) \\ BC = 2\sqrt{5} \\ BC: 2x + y - 7 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} BC = 2\sqrt{5} \\ h_A = d(A; BC) = \sqrt{5}. \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } S_{ABC} = \frac{1}{2} 2\sqrt{5} \sqrt{5} = 5.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 163. Khoảng cách từ điểm $M(0; 3)$ đến đường thẳng $\Delta: x \cos \alpha + y \sin \alpha + 3(2 - \sin \alpha) = 0$ bằng

A. $\sqrt{6}$.

B. 6.

C. $3 \sin \alpha$.

D. $\frac{3}{\cos \alpha + \sin \alpha}$.

Lời giải.

Áp dụng công thức ta có

$$d(M; \Delta) = \frac{|3 \sin \alpha + 3(2 - \sin \alpha)|}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}} = 6.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 164. Khoảng cách từ điểm $M(2; 0)$ đến đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 4t \end{cases}$ bằng

A. 2.

B. $\frac{2}{5}$.

C. $\frac{10}{\sqrt{5}}$.

D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Từ } \Delta: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 4t \end{cases} \text{ suy ra phương trình tổng quát của } \Delta: 4x - 3y + 2 = 0.$$

Khi đó

$$d(M; \Delta) = \frac{|8 + 0 + 2|}{\sqrt{16 + 9}} = 2.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 165. Khoảng cách nhỏ nhất từ điểm $M(15; 1)$ đến một điểm bất kì thuộc đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = t \end{cases}$ bằng

A. $\sqrt{10}$.

B. $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

C. $\frac{16}{\sqrt{5}}$.

D. $\sqrt{5}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \Delta: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = t \end{cases} \text{ suy ra phương trình tổng quát } \Delta: x - 3y - 2 = 0.$$

Gọi $N \in \Delta$ thì

$$MN_{\min} = d(M; \Delta) = \frac{|15 - 3 - 2|}{\sqrt{1 + 9}} = \sqrt{10}.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 166. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để khoảng cách từ điểm $A(-1; 2)$ đến đường thẳng $\Delta: mx + y - m + 4 = 0$ bằng $2\sqrt{5}$.

A. $m = 2$.

B. $\begin{cases} m = -2 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$.

C. $m = -\frac{1}{2}$.

D. Không tồn tại m .

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}d(A; \Delta) &= 2\sqrt{5} \\ \Leftrightarrow \frac{|-m+2-m+4|}{\sqrt{m^2+1}} &= 2\sqrt{5} \\ \Leftrightarrow |m-3| &= \sqrt{5} \cdot \sqrt{m^2+1} \\ \Leftrightarrow 4m^2+6m-4 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án **B** □

Câu 167. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để khoảng cách từ giao điểm của hai đường thẳng

$$d_1: \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \end{cases} \text{ và } d_2: x - 2y + m = 0 \text{ đến gốc tọa độ bằng 2.}$$

A. $\begin{cases} m = -4 \\ m = 2 \end{cases}$ B. $\begin{cases} m = -4 \\ m = -2 \end{cases}$ C. $\begin{cases} m = 4 \\ m = 2 \end{cases}$ D. $\begin{cases} m = 4 \\ m = -2 \end{cases}$.

Lời giải.

Từ $d_1: \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \end{cases}$ suy ra phương trình tổng quát của $d_1: x + y - 2 = 0$.

Gọi M là giao điểm của d_1 và d_2 thì tọa độ M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - 2y + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - m \\ y = m - 2 \end{cases} \Rightarrow M(4 - m; m - 2).$$

Khi đó: $OM = 2 \Leftrightarrow (4 - m)^2 + (m - 2)^2 = 4 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 4 \end{cases}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 168. Cho đường thẳng $d: 21x - 11y - 10 = 0$. Trong các điểm $M(21; -3)$, $N(0; 4)$, $P(-19; 5)$ và $Q(1; 5)$ điểm nào gần đường thẳng d nhất?

A. M . B. N . C. P . D. Q .

Lời giải.

Đặt $f(x; y) = |21x - 11y - 10|$.

Khi đó

$$\begin{cases} f(M) = 464 \\ f(N) = 54 \\ f(P) = 464 \\ f(Q) = 44. \end{cases}$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 169. Cho đường thẳng $d: 7x + 10y - 15 = 0$. Trong các điểm $M(1; -3)$, $N(0; 4)$, $P(-19; 5)$ và $Q(1; 5)$ điểm nào cách xa đường thẳng d nhất?

- A. M . B. N . C. P . D. Q .

Lời giải.

Đặt $f(x; y) = |7x + 10y - 15|$

Khi đó

$$\begin{cases} f(M) = 38 \\ f(N) = 25 \\ f(P) = 98 \\ f(Q) = 42. \end{cases}$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 170. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(2; 3)$ và $B(1; 4)$. Đường thẳng nào sau đây cách đều hai điểm A và B ?

- A. $x - y + 2 = 0$. B. $x + 2y = 0$. C. $2x - 2y + 10 = 0$. D. $x - y + 100 = 0$.

Lời giải.

- Xét $\Delta: x - y + 2 = 0$. Ta có $d(A; \Delta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ và $d(B; \Delta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ nên $x - y + 2 = 0$ thỏa mãn.
- Xét $\Delta: x + 2y = 0$. Ta có $d(A; \Delta) = \frac{8}{\sqrt{5}}$ và $d(B; \Delta) = \frac{9}{\sqrt{5}}$ nên $x + 2y = 0$ không thỏa mãn.
- Xét $\Delta: 2x - 2y + 10 = 0$. Ta có $d(A; \Delta) = \frac{4}{\sqrt{2}}$ và $d(B; \Delta) = \frac{2}{\sqrt{2}}$ nên $2x - 2y + 10 = 0$ không thỏa mãn.
- Xét $\Delta: x - y + 100 = 0$. Ta có $d(A; \Delta) = \frac{99}{\sqrt{2}}$ và $d(B; \Delta) = \frac{97}{\sqrt{2}}$ nên $x - y + 100 = 0$ không thỏa mãn.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 171. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(0; 1)$, $B(12; 5)$ và $C(-3; 0)$. Đường thẳng nào sau đây cách đều ba điểm A , B và C .

- A. $x - 3y + 4 = 0$. B. $-x + y + 10 = 0$. C. $x + y = 0$. D. $5x - y + 1 = 0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (12; 4)$ và $\overrightarrow{AC} = (-3; -1)$ rõ ràng $\overrightarrow{AB} = -4\overrightarrow{AC}$ nên A, B, C là ba điểm thẳng hàng.

Do đó ta chỉ cần kiểm tra $d(A; \Delta) = d(B; \Delta)$.

- Xét $\Delta: x - 3y + 4 = 0$. Ta có $d(A; \Delta) = \frac{1}{\sqrt{10}}$ và $d(B; \Delta) = \frac{1}{\sqrt{10}}$ nên $x - 3y + 4 = 0$ thỏa mãn.
- Xét $\Delta: -x + y + 10 = 0$. Ta có $d(A; \Delta) = \frac{11}{\sqrt{2}}$ và $d(B; \Delta) = \frac{3}{\sqrt{2}}$ nên $-x + y + 10 = 0$ không thỏa mãn.
- Xét $\Delta: x + y = 0$. Ta có $d(A; \Delta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ và $d(B; \Delta) = \frac{17}{\sqrt{2}}$ nên $x + y = 0$ không thỏa mãn.
- Xét $\Delta: 5x - y + 1 = 0$. Ta có $d(A; \Delta) = 0$ và $d(B; \Delta) = \frac{56}{\sqrt{26}}$ nên $5x - y + 1 = 0$ không thỏa mãn.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 172. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1; 1), B(-2; 4)$ và đường thẳng $\Delta: mx - y + 3 = 0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để Δ cách đều hai điểm A, B .

- A. $\begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$ B. $\begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$ C. $\begin{cases} m = -1 \\ m = 1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases}$

Lời giải.

Gọi I là trung điểm đoạn AB thì $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$ và VTPT của AB là $\vec{n} = (1; 1)$.

Khi đó: $\Delta: mx - y + 3 = 0$ ($\vec{n}_\Delta = (m; -1)$) cách đều A, B khi và chỉ khi

$$\begin{cases} I \in \Delta \\ \frac{m}{1} = \frac{-1}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{m}{2} - \frac{5}{2} + 3 = 0 \\ m = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 173. Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song $\Delta_1: 6x - 8y + 3 = 0$ và $\Delta_2: 3x - 4y - 6 = 0$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. 2 D. $\frac{5}{2}$

Lời giải.

Lấy $A(2; 0) \in \Delta_2$ do $\Delta_1 \parallel \Delta_2$ nên

$$d(\Delta_1; \Delta_2) = d(A; \Delta_1) = \frac{|12 + 3|}{\sqrt{100}} = \frac{3}{2}$$

Chọn đáp án **B** □

Câu 174. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $d: 7x + y - 3 = 0$ và $\Delta: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 2 - 7t \end{cases}$.

- A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ B. 15 C. 9 D. $\frac{9}{\sqrt{50}}$

Lời giải.

Từ $\Delta: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 2 - 7t \end{cases}$ ta có phương trình tổng quát $\Delta: 7x + y + 12 = 0$. Dễ thấy $d \parallel \Delta$.

Lấy $A(-2; 2) \in \Delta$ thì

$$d(d; \Delta) = d(A; d) = \frac{|-14 + 2 - 3|}{\sqrt{50}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 175. Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song $d_1: 6x - 8y - 101 = 0$ và $d_2: 3x - 4y = 0$ bằng

- A. 10,1 B. 1,01 C. 101 D. $\sqrt{101}$

Lời giải.

Ta có $\frac{6}{3} = \frac{-8}{-4}$ nên $d_1 \parallel d_2$.

Lấy $A(4; 3) \in d_2$ khi đó

$$d(d_1; d_2) = d(A; d_1) = \frac{|24 - 24 - 101|}{\sqrt{100}} = \frac{101}{10} = 10,1$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 176. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1; 1)$, $B(4; -3)$ và đường thẳng $d: x - 2y - 1 = 0$. Tìm điểm M thuộc d có tọa độ nguyên và thỏa mãn khoảng cách từ M đến đường thẳng AB bằng 6.

- A. $M(3; 7)$. B. $M(7; 3)$. C. $M(-43; -27)$. D. $M\left(3; -\frac{27}{11}\right)$.

Lời giải.

Ta có $M \in d: x - 2y - 1 = 0 \Rightarrow M(2m + 1; m), m \in \mathbb{Z}$.

Phương trình đường thẳng AB là $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-4} \Leftrightarrow 4x + 3y - 7 = 0$.

Ta có

$$\begin{aligned} 6 = d(M; AB) &\Leftrightarrow 6 = \frac{|8m + 4 + 3m - 7|}{5} \\ &\Leftrightarrow |11m - 3| = 30 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = \frac{27}{11} \end{cases} (l). \end{aligned}$$

Khi đó $M(7; 3)$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 177. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho điểm $A(0; 1)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$.

Tìm điểm M thuộc d và cách A một khoảng bằng 5, biết M có hoành độ âm.

- A. $M(4; 4)$. B. $\begin{bmatrix} M(-4; 4) \\ M\left(-\frac{24}{5}; -\frac{2}{5}\right) \end{bmatrix}$. C. $M\left(-\frac{24}{5}; -\frac{2}{5}\right)$. D. $M(-4; 4)$.

Lời giải.

Vì $M \in d$ nên $M(2 + 2t; 3 + t)$ với $2 + 2t < 0 \Leftrightarrow t < -1$. Khi đó

$$\begin{aligned} 5 = AM &\Leftrightarrow (2t + 2)^2 + (t + 2)^2 = 25 \\ &\Leftrightarrow 5t^2 + 12t - 17 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1(L) \\ t = -\frac{17}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

Khi đó $M\left(-\frac{24}{5}; -\frac{2}{5}\right)$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 178. Biết rằng có đúng hai điểm thuộc trục hoành và cách đường thẳng $\Delta: 2x - y + 5 = 0$ một khoảng bằng $2\sqrt{5}$. Tích hoành độ của hai điểm đó bằng

- A. $-\frac{75}{4}$. B. $-\frac{25}{4}$. C. $-\frac{225}{4}$. D. Đáp số khác.

Lời giải.

Gọi $M(x; 0) \in Ox$ thì hoành độ của hai điểm đó là nghiệm của phương trình

$$\begin{aligned} d(M; \Delta) = 2\sqrt{5} &\Leftrightarrow \frac{|2x + 5|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} = x_1 \\ x = -\frac{15}{2} = x_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Khi đó $x_1 \cdot x_2 = -\frac{75}{4}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 179. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(3; -1)$ và $B(0; 3)$. Tìm điểm M thuộc trục hoành sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng AB bằng 1.

A. $\begin{bmatrix} M\left(\frac{7}{2}; 0\right) \\ M(1; 0) \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} M\left(\frac{14}{3}; 0\right) \\ M\left(\frac{4}{3}; 0\right) \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} M\left(-\frac{7}{2}; 0\right) \\ M(-1; 0) \end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix} M\left(-\frac{14}{3}; 0\right) \\ M\left(-\frac{4}{3}; 0\right) \end{bmatrix}$.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng AB là $4x + 3y - 9 = 0$.

Giả sử $M(x; 0) \in Ox$. Khi đó

$$1 = d(M; AB) \Leftrightarrow 1 = \frac{|4x - 9|}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} \rightarrow M\left(\frac{7}{2}; 0\right) \\ x = 1 \rightarrow M(1; 0). \end{cases}$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 180. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(3; 0)$ và $B(0; -4)$. Tìm điểm M thuộc trục tung sao cho diện tích tam giác MAB bằng 6.

A. $\begin{bmatrix} M(0; 0) \\ M(0; -8) \end{bmatrix}$ B. $M(0; -8)$. C. $M(6; 0)$. D. $\begin{bmatrix} M(0; 0) \\ M(0; 6) \end{bmatrix}$.

Lời giải.

Ta có phương trình đường thẳng AB là $4x - 3y - 12 = 0$ và $AB = 5$.

Gọi $M(0; y) \in Oy$. Khi đó

$$h_M = d(M; AB) = \frac{|3y + 12|}{5}.$$

Mặt khác

$$S_{\triangle MAB} = \frac{1}{2} h_M AB = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{|3y + 12|}{5} = \frac{|3y + 12|}{2}$$

Theo bài ra $S_{\triangle MAB} = 6$ nên $\frac{|3y + 12|}{2} = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \rightarrow M(0; 0) \\ y = -8 \rightarrow M(0; -8). \end{cases}$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 181. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $\Delta_1: 3x - 2y - 6 = 0$ và $\Delta_2: 3x - 2y + 3 = 0$. Tìm điểm M thuộc trục hoành sao cho M cách đều hai đường thẳng đã cho.

- A. $M\left(0; \frac{1}{2}\right)$. B. $M\left(\frac{1}{2}; 0\right)$. C. $M\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$. D. $M\left(\sqrt{2}; 0\right)$.

Lời giải.

Gọi $M(x; 0)$ khi đó

$$\begin{aligned} d(M; \Delta_1) = d(M; \Delta_2) &\Leftrightarrow \frac{|3x - 6|}{\sqrt{13}} = \frac{|3x + 3|}{\sqrt{13}} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Do đó $M\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 182. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(-2; 2)$, $B(4; -6)$ và đường thẳng

$d: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$. Tìm điểm M thuộc d sao cho M cách đều hai điểm A, B .

- A. $M(3; 7)$. B. $M(-3; -5)$. C. $M(2; 5)$. D. $M(-2; -3)$.

Lời giải.

Do $M \in d$ nên $M(t; 1 + 2t)$. Mà $MA = MB$ nên ta có

$$\begin{aligned} (t + 2)^2 + (2t - 1)^2 &= (t - 4)^2 + (2t + 7)^2 \Leftrightarrow 20t + 60 = 0 \\ &\Leftrightarrow t = -3. \end{aligned}$$

Khi đó $M(-3; -5)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 183. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(-1; 2)$, $B(-3; 2)$ và đường thẳng

$d: 2x - y + 3 = 0$. Tìm điểm C thuộc d sao cho tam giác ABC cân tại C .

- A. $C(-2; -1)$. B. $C\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$. C. $C(-1; 1)$. D. $C(0; 3)$.

Lời giải.

Vì $C \in d$ nên gọi $C(m; 2m + 3)$.

Tam giác ABC cân tại C thì $CA = CB$ nên

$$\begin{aligned} (m + 1)^2 + (2m + 1)^2 &= (m + 3)^2 + (2m + 1)^2 \Leftrightarrow 4m + 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow m = -2. \end{aligned}$$

Do đó $M(-2; -1)$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 184. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1; 2)$, $B(0; 3)$ và đường thẳng $d: y = 2$.

Tìm điểm C thuộc d sao cho tam giác ABC cân tại B .

- A. $C(1; 2)$. B. $C(4; 2)$. C. $\begin{bmatrix} C(1; 2) \\ C(-1; 2) \end{bmatrix}$. D. $C(-1; 2)$.

Lời giải.

Ta có $C \in d$ nên gọi $C(c; 2)$ và $AB = 2$.

Để tam giác ABC cân tại B thì $BA = BC$ nên $2 = c^2 + 1 \Leftrightarrow c = \pm 1$.

Do đó $C(1; 2)$ hoặc $C(-1; 2)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 185. Đường thẳng Δ song song với đường thẳng $d: 3x - 4y + 1 = 0$ và cách d một khoảng bằng 1 có phương trình

A. $3x - 4y + 6 = 0$ hoặc $3x - 4y - 4 = 0$.

B. $3x - 4y - 6 = 0$ hoặc $3x - 4y + 4 = 0$.

C. $3x - 4y + 6 = 0$ hoặc $3x - 4y + 4 = 0$.

D. $3x - 4y - 6 = 0$ hoặc $3x - 4y - 4 = 0$.

Lời giải.

Do $\Delta \parallel d$ nên Δ có dạng $3x - 4y + c = 0$.

Lấy $M(1; 1) \in d$. Khi đó $1 = d(d; \Delta) = d(M; \Delta) \Leftrightarrow 1 = \frac{|c - 1|}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -4 \\ c = 6. \end{cases}$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 186. Tập hợp các điểm cách đường thẳng $\Delta: 3x - 4y + 2 = 0$ một khoảng bằng 2 là hai đường thẳng có phương trình nào sau đây?

A. $3x - 4y + 8 = 0$ hoặc $3x - 4y + 12 = 0$.

B. $3x - 4y - 8 = 0$ hoặc $3x - 4y + 12 = 0$.

C. $3x - 4y - 8 = 0$ hoặc $3x - 4y - 12 = 0$.

D. $3x - 4y + 8 = 0$ hoặc $3x - 4y - 12 = 0$.

Lời giải.

Giả sử $M(x; y)$ khi đó $d(M; \Delta) = 2 \Leftrightarrow \frac{|3x - 4y + 2|}{5} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y + 12 = 0 \\ 3x - 4y - 8 = 0. \end{cases}$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 187. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $d_1: 5x + 3y - 3 = 0$ và $d_2: 5x + 3y + 7 = 0$ song song nhau. Đường thẳng vừa song song và cách đều với d_1, d_2 là

A. $5x + 3y - 2 = 0$.

B. $5x + 3y + 4 = 0$.

C. $5x + 3y + 2 = 0$.

D. $5x + 3y - 4 = 0$.

Lời giải.

Gọi đường thẳng cần tìm là Δ . Giả sử $M(x; y) \in \Delta$ thì

$$\begin{aligned} d(M; d_1) = d(M; d_2) &\Leftrightarrow \frac{|5x + 3y - 3|}{\sqrt{34}} = \frac{|5x + 3y + 7|}{\sqrt{34}} \\ &\Leftrightarrow 5x + 3y + 2 = 0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 188. Trong mặt phẳng Oxy , đường thẳng $d: ax + by + c = 0, (a^2 + b^2 \neq 0)$. Véc-tơ nào sau đây là một véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng d ?

A. $\vec{n} = (a; -b)$.

B. $\vec{n} = (b; a)$.

C. $\vec{n} = (b; -a)$.

D. $\vec{n} = (a; b)$.

Lời giải.

Ta có một véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng d là $\vec{n} = (a; b)$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 189. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(3; -1), B(0; 3)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc Ox sao cho diện tích ΔMAB bằng 2.

- A. $(2; 0)$ và $(1; 0)$. B. $(2; 0)$ và $\left(\frac{5}{4}; 0\right)$. C. $(4; 0)$ và $(2; 0)$. D. $\left(\frac{13}{4}; 0\right)$ và $\left(\frac{5}{4}; 0\right)$.

Lời giải.

Ta có $M \in Ox \Rightarrow M(x; 0)$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3, 4)$ suy ra $(AB): 4x + 3y - 9 = 0$.

Yêu cầu bài toán diện tích tam giác bằng 2 khi đó

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}d(M, AB) \cdot AB &= 2 \Leftrightarrow d(M, AB) = \frac{4}{5} \\ \Leftrightarrow \frac{|4x - 9|}{5} &= \frac{4}{5} \Leftrightarrow |4x - 9| = 4 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 9 = 4 \\ 4x - 9 = -4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{4} \Rightarrow M\left(\frac{13}{4}; 0\right) \\ x = \frac{5}{4} \Rightarrow M\left(\frac{5}{4}; 0\right). \end{cases} \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 190. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC biết $A(2; 0), B(0; 4), C(1; 3)$. Phương trình tổng quát của đường cao AH là

- A. $x - y - 4 = 0$. B. $x - y - 3 = 0$. C. $x - y - 2 = 0$. D. $x - 2y - 2 = 0$.

Lời giải.

Đường cao AH qua A nhận $\overrightarrow{BC} = (1; -1)$ làm véc-tơ pháp tuyến.

Phương trình $AH: x - y - 2 = 0$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 191. Trong mặt phẳng Oxy , đường thẳng $d: ax + by + c = 0, (a^2 + b^2 \neq 0)$. Véc-tơ nào sau đây là một véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng d ?

- A. $\vec{n} = (a; -b)$. B. $\vec{n} = (b; a)$. C. $\vec{n} = (b; -a)$. D. $\vec{n} = (a; b)$.

Lời giải.

Ta có một véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng d là $\vec{n} = (a; b)$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 192. Xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 1 - 5t \end{cases}$ và $\Delta: 5x - 2y - 8 = 0$.

- A. Trùng nhau. B. Cắt nhau nhưng không vuông góc với nhau.
C. Vuông góc với nhau. D. Song song với nhau.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \vec{u}_d = (2; -5) \\ \vec{u}_\Delta = (2; 5) \end{cases} \Rightarrow d$ và Δ cắt nhau nhưng không vuông góc với nhau.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 193. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(1; 2), B(3; 1), C(5; 4)$. Phương trình nào sau đây là phương trình đường cao kẻ từ B của tam giác ABC ?

- A. $x - 2y - 7 = 0$. B. $2x + y - 5 = 0$. C. $2x + y - 7 = 0$. D. $2x - y - 7 = 0$.

Lời giải.

- $\vec{AC} = (4; 2)$.

- Đường cao Δ của tam giác ABC vuông góc với AC nên

$$\Delta: 4(x-3) + 2(y-1) = 0 \Rightarrow \Delta: 2x + y - 7 = 0.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 194. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: x - 2y + 1 = 0$. Một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là

- A. $\vec{u} = (2; -1)$. B. $\vec{u} = (2; 1)$. C. $\vec{u} = (1; -2)$. D. $\vec{u} = (1; 2)$.

Lời giải.

Đường thẳng d có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -2)$ nên có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; 1)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 195. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $M(6; 3)$, $N(-3; 6)$. Gọi $P(x; y)$ là điểm trên trục tung sao cho ba điểm M, N, P thẳng hàng. Khi đó $x + y$ có giá trị là

- A. 5. B. -5. C. -1. D. 15.

Lời giải.

M và N thuộc đường thẳng có phương trình $y = ax + b$ nên ta có
$$\begin{cases} 6a + b = 3 \\ -3a + b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = 5. \end{cases}$$

Đường thẳng $MN: y = -\frac{1}{3}x + 5$ cắt trục Oy tại điểm $P(0; 5)$. Do đó $x + y = 5$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 196. Cho tam giác ABC . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác biết phương trình cạnh $BC: x + y - 2 = 0$; hai đường cao $BB': x - 3 = 0$ và $CC': 2x - 3y + 6 = 0$.

- A. $A(1; -2)$, $B(3; -1)$, $C(0; 2)$. B. $A(2; 1)$, $B(3; -1)$, $C(0; 2)$.
C. $A(1; 2)$, $B(0; 2)$, $C(3; -1)$. D. $A(1; 2)$, $B(3; -1)$, $C(0; 2)$.

Lời giải.

Ta có $B = BC \cap BB'$ nên tọa độ B là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} x - 3 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow B(3; -1).$$

Ta có $C = BC \cap CC'$ nên tọa độ C là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x - 3y + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow C(0; 2).$$

AB qua B và vuông với CC' có phương trình: $3x + 2y - 7 = 0$.

AC qua C và vuông với BB' có phương trình: $y = 2$.

Do $A = AB \cap AC$ nên tọa độ A là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} 3x + 2y - 7 = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A(1; 2).$$

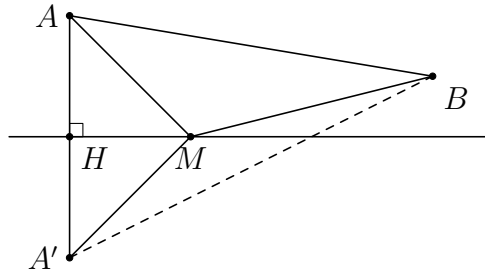
Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 197. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $\Delta: x - y + 1 = 0$ và hai điểm $A(2; 1)$, $B(9; 6)$. Điểm $M(a; b)$ nằm trên đường Δ sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất. Tính $a + b$.

- A. -9. B. 7. C. -7. D. 9.

Lời giải.



Nhận xét: A, B nằm cùng một phía đối với đường thẳng Δ .

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua $\Delta \Rightarrow A'(0; 3)$.

Ta có: $MA + MB = MA' + MB \geq A'B = 3\sqrt{10}$.

Do đó: $(MA + MB)_{\min} = 3\sqrt{10}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} M \in \Delta \\ A', M, B \text{ thẳng hàng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = -1 \\ 3a - 9b = -27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 4. \end{cases}$$

Vậy $a + b = 7$.

Cách khác: Do $t_A = 2 - 1 + 1 = 2 > 0$, $t_B = 9 - 6 + 1 = 4 > 0$ nên A, B cùng nằm về một phía với Δ .

Phương trình đường thẳng d qua A vuông góc với Δ là

$$1(x - 2) + 1(y - 1) = 0 \text{ hay } x + y - 3 = 0.$$

Gọi H là giao điểm của d và Δ nên tọa độ H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow H(1; 2).$$

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua Δ suy ra H là trung điểm AA' nên $A'(0; 3)$.

Ta có $MA + MB = MA' + MB$ nên độ dài $MA + MB$ ngắn nhất khi A', M, B thẳng hàng hay $A'B$ cắt Δ tại M .

$$\text{Ta có } \overrightarrow{A'B} = (9; 3) = 3 \cdot (3; 1).$$

Phương trình đường thẳng $A'B$ đi qua A' có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -3)$ là

$$1(x - 0) - 3(y - 3) = 0 \Leftrightarrow x - 3y + 9 = 0.$$

Tọa độ M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - 3y + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow M(3; 4).$$

Suy ra $a = 3$, $b = 4$ nên $a + b = 7$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 198. Hãy cho biết mệnh đề nào sau đây là **sai**? Hai đường thẳng vuông góc với nhau nếu

A. góc giữa hai véc-tơ chỉ phương của chúng là 90° .

- B. góc giữa hai đường thẳng đó là 90° .
C. tích vô hướng giữa hai véc-tơ chỉ phương của chúng bằng 0.
D. góc giữa hai véc-tơ chỉ phương của chúng là 0° .

Lời giải.

Nếu góc giữa hai véc-tơ chỉ phương của hai đường thẳng là 0° thì chúng song song hoặc trùng nhau.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 199. Cho hai điểm $M(2; 3)$ và $N(-2; 5)$. Đường thẳng MN có một véc-tơ chỉ phương là

- A. $\vec{u} = (4; 2)$. B. $\vec{u} = (-2; -4)$. C. $\vec{u} = (-4; -2)$. D. $\vec{u} = (4; -2)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{NM} = (4; -2) \Rightarrow$ đường thẳng MN có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (4; -2)$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 200. Đường thẳng đi qua điểm $M(1; 2)$ và song song với đường thẳng $d: 4x + 2y + 1 = 0$ có phương trình tổng quát là

- A. $2x + y - 4 = 0$. B. $2x + y + 4 = 0$. C. $x - 2y + 3 = 0$. D. $4x + 2y + 3 = 0$.

Lời giải.

Gọi d' là đường thẳng cần tìm.

Do $d' \parallel d$ nên $d': 4x + 2y + c = 0$ ($c \neq 1$).

Mặt khác đường thẳng d' đi qua điểm $M(1; 2)$ nên $4 + 4 + c = 0 \Leftrightarrow c = -8$ (nhận).

Vậy $d': 4x + 2y - 8 = 0$ hay $d': 2x + y - 4 = 0$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 201. Cho hai đường thẳng song song $d_1: 5x - 7y + 4 = 0$ và $d_2: 5x - 7y + 6 = 0$. Phương trình đường thẳng song song và cách đều d_1 và d_2 là

- A. $5x - 7y + 4 = 0$. B. $5x - 7y + 5 = 0$. C. $5x - 7y - 3 = 0$. D. $5x - 7y + 2 = 0$.

Lời giải.

d_1 và d_2 cắt trục tung tại $A\left(0; \frac{4}{7}\right)$ và $B\left(0; \frac{6}{7}\right)$, dễ thấy trung điểm của AB là $M\left(0; \frac{5}{7}\right)$. Đường thẳng song song và cách đều d_1 và d_2 là đường thẳng song song với d_1 và d_2 đồng thời đi qua M . Suy ra đường thẳng cần tìm là

$$5x - 7y + 5 = 0.$$

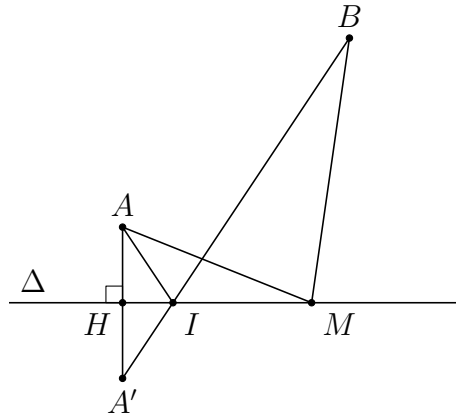
Chọn đáp án **(B)** □

Câu 202. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $\Delta: x - y + 1 = 0$ và hai điểm $A(2; 1)$, $B(9; 6)$. Điểm $M(a; b)$ nằm trên Δ sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất. Tính $a + b$.

- A. $a + b = -9$. B. $a + b = 9$. C. $a + b = -7$. D. $a + b = 7$.

Lời giải.

Vì $(2 - 1 + 1) \cdot (9 - 6 + 1) > 0$ nên hai điểm A, B nằm cùng phía so với đường thẳng Δ .



Gọi A' là điểm đối xứng với A qua Δ , H, I lần lượt là giao điểm của AA', BA' với Δ .

Ta có $MA + MB = MA' + MB \geq A'B$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M trùng I .

Phương trình đường thẳng AA' đi qua A và vuông góc với Δ là $x + y - 3 = 0$.

Toạ độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ hay $H(1; 2)$.

Vì H là trung điểm AA' nên toạ độ điểm A' là $A'(0; 3)$.

Phương trình đường thẳng $A'B$ đi qua $A'(0; 3)$ và $B(9; 6)$ là $x - 3y + 9 = 0$.

Toạ độ điểm I là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x - 3y + 9 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$ hay $I(3; 4)$.

Vậy $a = 3, b = 4$ nên $a + b = 7$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 203. Khoảng cách từ $I(1; -2)$ đến đường thẳng $\Delta: 3x - 4y - 26 = 0$ bằng

A. 3.

B. 12.

C. 5.

D. $\frac{3}{5}$.

Lời giải.

Ta có khoảng cách từ I đến đường thẳng Δ là

$$d(I, \Delta) = \frac{|3x_I - 4y_I - 26|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|3 \cdot 1 - 4 \cdot (-2) - 26|}{5} = 3.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 204. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy , cho tam giác ABC có đỉnh $B(-12; 1)$, đường phân giác trong góc A có phương trình $d: x + 2y - 5 = 0$. $G\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ là trọng tâm tam giác ABC . Đường thẳng BC qua điểm nào sau đây?

A. $(1; 0)$.

B. $(2; -3)$.

C. $(4; -4)$.

D. $(4; 3)$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của AC .

Ta có $\overrightarrow{BG} = \left(\frac{37}{3}; -\frac{1}{3}\right)$;

$$\overrightarrow{BM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BG} \Rightarrow \begin{cases} x_M + 12 = \frac{3}{2} \cdot \frac{37}{3} = \frac{37}{2} \\ y_M - 1 = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M\left(\frac{13}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

Gọi B' đối xứng B qua $d \Rightarrow B' \in AC$.

$BB' \perp d$ và BB' qua $B \Rightarrow BB': 2x - y + 25 = 0$.

Gọi N là giao điểm của BB' và d . Suy ra $N(-9; 7) \Rightarrow B'(-6; 13)$.

Đường thẳng AC qua $B'(-6; 13)$, $M\left(\frac{13}{2}; \frac{1}{2}\right)$ nên có phương trình $AC: x + y - 7 = 0$.

Ta lại có A là giao điểm của AC và d nên $A(9; -2)$.

M là trung điểm AC nên $C(4; 3)$.

Khi đó phương trình $BC: x - 8y + 20 = 0$.

Vậy đường thẳng BC đi qua điểm có tọa độ $(4; 3)$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 205. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng song song với trục Ox .

A. $\vec{v} = (1; 0)$.

B. $\vec{v} = (1; -1)$.

C. $\vec{v} = (1; 1)$.

D. $\vec{v} = (0; 1)$.

Lời giải.

Trục Ox nhận véc-tơ đơn vị $\vec{i} = (1; 0)$ làm véc-tơ chỉ phương nên đường thẳng song song với trục Ox cũng nhận véc-tơ $\vec{v} = \vec{i} = (1; 0)$ làm véc-tơ chỉ phương.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 206. Trên hệ trục tọa độ Oxy . Cho hình vuông $ABCD$. Điểm M thuộc cạnh CD sao cho $\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{DM}$, $N(0; 2019)$ là trung điểm của BC , K là giao điểm của hai đường thẳng AM và BD . Biết đường thẳng AM có phương trình $x - 10y + 2018 = 0$. Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng NK bằng

A. 2019.

B. $2019\sqrt{101}$.

C. $\frac{2018}{11}$.

D. $\frac{2019\sqrt{101}}{101}$.

Lời giải.

Giả sử $ABCD$ là hình vuông cạnh a .

Hai tam giác KMD , KAB đồng dạng và $MD = \frac{1}{3}AB$ nên $AK = \frac{3}{4}AM$

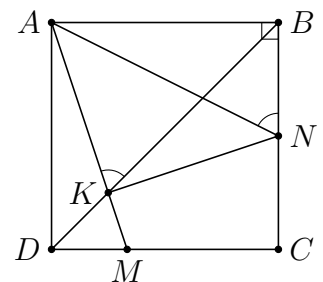
và $KB = \frac{3}{4}BD$.

Ta có

$$AM = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{10}}{3} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{10}}{4}$$

$$BD = a\sqrt{2} \Rightarrow KB = \frac{3a\sqrt{2}}{4}.$$

$$\cos \widehat{AKB} = \frac{KA^2 + KB^2 - AB^2}{2 \cdot KA \cdot KB} = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ và } \cos \widehat{ANB} = \frac{NB}{AN} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$



Suy ra $\widehat{AKB} = \widehat{ANB} \Rightarrow AKNB$ là tứ giác nội tiếp đường tròn, suy ra $\widehat{AKN} = 90^\circ$ (do $\widehat{ABN} = 90^\circ$).

Suy ra đường thẳng $KN \perp AM$, suy ra phương trình đường thẳng $KN: 10x + y - 2019 = 0$.

$$\text{Do đó, } d(O, KN) = \frac{|-2019|}{\sqrt{10^2 + 1}} = \frac{2019\sqrt{101}}{101}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 207. Véc-tơ nào sau đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta: 6x - 2y + 3 = 0$?

- A. $\vec{u}(1; 3)$. B. $\vec{u}(6; 2)$. C. $\vec{u}(-1; 3)$. D. $\vec{u}(3; -1)$.

Lời giải.

Một véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng Δ là $\vec{n}(6; -2)$ nên véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u}(1; 3)$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 208. Tính góc giữa hai đường thẳng $\Delta: x - \sqrt{3}y + 2 = 0$ và $\Delta': x + \sqrt{3}y - 1 = 0$.

- A. 90° . B. 120° . C. 60° . D. 30° .

Lời giải.

Δ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (1; -\sqrt{3})$; Δ' có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (1; \sqrt{3})$.

Khi đó:

$$\cos(\Delta, \Delta') = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|1 \cdot 1 + (-\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3}|}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} \cdot \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{4}} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra $(\Delta, \Delta') = 60^\circ$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 209. Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(2; 3)$, $B(1; 0)$, $C(1; 2)$. Phương trình đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC là

- A. $2x - y - 1 = 0$. B. $x - 2y + 4 = 0$. C. $x + 2y - 8 = 0$. D. $2x + y - 7 = 0$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC , suy ra $M(1; 1)$.

Trung tuyến AM đi qua điểm A và nhận $\vec{AM} = (-1; -2)$ làm VTCP nên có phương trình là

$$\frac{x - 2}{-1} = \frac{y - 3}{-2} \Leftrightarrow 2x - y - 1 = 0.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 210. Cho đường thẳng $(d): x - 7y + 15 = 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. (d) có hệ số góc $k = \frac{1}{7}$. B. (d) đi qua hai điểm $M(-\frac{1}{3}; 2)$ và $N(5; 0)$.
C. $\vec{u} = (-7; 1)$ là véc-tơ chỉ phương của d . D. (d) đi qua gốc tọa độ.

Lời giải.

Ta có $(d): x - 7y + 15 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{7}x + \frac{15}{7}$ nên (d) có hệ số góc $k = \frac{1}{7}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 211. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\triangle ABC$ có $A(2; 1)$, đường cao BH có phương trình $x - 3y - 7 = 0$ và trung tuyến CM có phương trình $x + y + 1 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh C .

- A. $C(-1; 0)$. B. $C(4; -5)$. C. $C(1; -2)$. D. $C(1; 4)$.

Lời giải.

AC là đường thẳng qua A vuông góc với BH nên có phương trình $3x + y - 7 = 0$. Do đó tọa độ C là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x + y = 7 \\ x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -5. \end{cases}$$

Vậy $C(4; -5)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 212. Tính góc giữa hai đường thẳng $\Delta: x - \sqrt{3}y + 2 = 0$ và $\Delta': x + \sqrt{3}y - 1 = 0$.

A. 90° .

B. 120° .

C. 60° .

D. 30° .

Lời giải.

Đường thẳng Δ và Δ' có véc-tơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n} = (1; -\sqrt{3})$, $\vec{n}' = (1; \sqrt{3})$.

$$\text{Ta có } \cos(\Delta, \Delta') = \left| \cos(\vec{n}, \vec{n}') \right| = \left| \frac{\vec{n} \cdot \vec{n}'}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}'|} \right| = \left| \frac{-2}{2 \cdot 2} \right| = \frac{1}{2}.$$

Vậy góc giữa Δ và Δ' bằng 60° .

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 213. Trong hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 15 = 0$. I là tâm của (C) , đường thẳng d qua $M(1; -3)$ cắt (C) tại A, B . Biết tam giác IAB có diện tích là 8. Phương trình đường thẳng d là $x + by + c = 0$. Tính $b + c$.

A. 8.

B. 2.

C. 6.

D. 1.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(2; -1)$ và bán kính $R = \sqrt{20}$.

Do $IM = \sqrt{(1-2)^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{5} < R$ nên $M(1; -3)$ nằm bên trong đường tròn.

Vì đường thẳng $d: x + by + c = 0$ đi qua điểm M nên $1 - 3b + c = 0$ hay $c = 3b - 1$. Do đó phương trình của đường thẳng d là $x + by + 3b - 1 = 0$.

Gọi H là hình chiếu của I trên đường thẳng d thì H là trung điểm của AB và $IH \leq IM = \sqrt{5}$.

Theo giả thiết tam giác IAB có diện tích bằng 8 nên

$$\frac{1}{2}AB \cdot IH = 8 \Leftrightarrow AH \cdot IH = 8 \Leftrightarrow IH\sqrt{R^2 - IH^2} = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} IH^2 = 16 \\ IH^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IH = 4 \\ IH = 2. \end{cases}$$

Do $IH \leq IM$ nên $IH = 2$.

Mặt khác

$$IH = d(I, d) \Leftrightarrow \frac{|2b + 1|}{\sqrt{1 + b^2}} = 2 \Leftrightarrow |2b + 1| = 2\sqrt{1 + b^2} \Leftrightarrow b = \frac{3}{4}.$$

Suy ra $c = 3 \cdot \frac{3}{4} - 1 = \frac{5}{4}$. Do đó $b + c = 2$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 214. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC cân tại B với $A(1; -1)$, $C(3; 5)$. Biết B nằm trên đường thẳng $d: 2x - y = 0$. Phương trình đường thẳng AB, BC lần lượt là $d_1: ax + by - 24 = 0$, $d_2: cx + dy + 8 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = a \cdot b \cdot c \cdot d$.

A. 975.

B. 5681.

C. 3059.

D. 5083.

Lời giải.

Cách 1.

Gọi I là trung điểm $AC \Rightarrow I(2; 2)$.

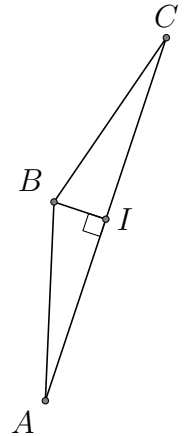
Đường thẳng Δ đi qua I và vuông góc với AC có phương trình $IB: x + 3y - 8 = 0$.

Tam giác ABC cân tại B nên ta có $B \in IB \Rightarrow B = IB \cap d \Rightarrow B\left(\frac{8}{7}; \frac{16}{7}\right)$.

Phương trình đường thẳng $AB: \frac{x-1}{\frac{8}{7}-1} = \frac{y+1}{\frac{16}{7}+1} \Leftrightarrow 23x - y - 24 = 0$.

Phương trình đường thẳng $BC: \frac{x-3}{\frac{8}{7}-3} = \frac{y-5}{\frac{16}{7}-5} \Leftrightarrow 19x - 13y + 8 = 0$.

Vậy $a = 23, b = -1, c = 19$ và $d = -13$. Do đó, $P = 5681$.



Cách 2.

Gọi $B(a; 2a) \in d$.

Tam giác ABC cân tại B nên ta có $AB = BC \Rightarrow (a-1)^2 + (2a+1)^2 = (a-3)^2 + (2a-5)^2 \Leftrightarrow a = \frac{8}{7}$.

Suy ra $B\left(\frac{8}{7}; \frac{16}{7}\right)$.

Phương trình đường thẳng $AB: \frac{x-1}{\frac{8}{7}-1} = \frac{y+1}{\frac{16}{7}+1} \Leftrightarrow 23x - y - 24 = 0$.

Phương trình đường thẳng $BC: \frac{x-3}{\frac{8}{7}-3} = \frac{y-5}{\frac{16}{7}-5} \Leftrightarrow 19x - 13y + 8 = 0$.

Vậy $a = 23, b = -1, c = 19$ và $d = -13$. Do đó, $P = 5681$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 215. Cho hình chữ nhật $ABCD$ với $I(6; 2)$ là giao điểm của hai đường chéo. M thuộc đoạn thẳng AB với $M(1; 5)$. Trung điểm E của đoạn thẳng CD nằm trên đường thẳng $x + y - 5 = 0$. Phương trình đường thẳng AB là

A. $y - 5 = 0$ và $x + 4y - 21 = 0$.

B. $x + 4y - 21 = 0$.

C. $x + y - 6 = 0$ và $x - 4y + 19 = 0$.

D. $x - 4y + 19 = 0$ và $y - 5 = 0$.

Lời giải.

Lấy M' đối xứng với M qua I , suy ra $M' \in CD$ và I là trung điểm của MM' nên $M'(11; -1)$.

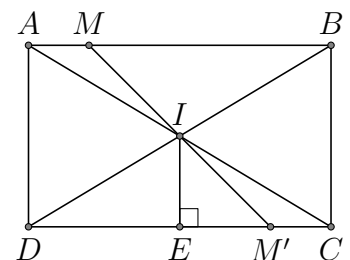
Theo giả thuyết E là trung điểm CD nên $IE \perp CD$. Tam giác IEM' vuông tại E .

Điểm $E \in \Delta: x + y - 5 = 0 \Rightarrow E(a; 5 - a)$, ta có $\overrightarrow{IE} = (a - 6; 3 - a)$, $\overrightarrow{M'E} = (a - 11; 6 - a)$.

Mà $\overrightarrow{IE} \cdot \overrightarrow{M'E} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ a = 7 \end{cases}$.

Với $a = 6$ thì $\overrightarrow{IE} = (0; -3)$ nên phương trình đường thẳng $AB: y - 5 = 0$.

Với $a = 7$ thì $\overrightarrow{IE} = (1; -4)$ nên phương trình đường thẳng $AB: x - 4y + 19 = 0$.



Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 216. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $AB = AC$, $\widehat{BAC} = 90^\circ$. Biết $M(1; -1)$ là trung điểm của cạnh BC và $G\left(\frac{2}{3}; 0\right)$ là trọng tâm tam giác ABC . Khi đó, $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ ($x_B < 0$). Tính $2019x_A^2 + y_A + 2x_B - 3y_B$.

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AG} = \left(\frac{2}{3} - x_A; -y_A\right)$, $\overrightarrow{AM} = (1 - x_A; -1 - y_A)$.

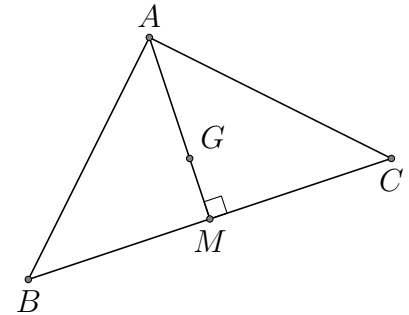
Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} - x_A = \frac{2}{3}(1 - x_A) \\ -y_A = \frac{2}{3}(-1 - y_A) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 2 \end{cases} \Rightarrow A(0; 2), \overrightarrow{AM} = (1; -3), AM = \sqrt{10}.$$

Tam giác ABC vuông tại A nên $\triangle ABC$ nội tiếp trong đường tròn (C) có tâm M , bán kính AM . Phương trình đường tròn (C) : $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 10$.

Đường thẳng BC đi qua M và vuông góc với AM nên $BC: x - 3y - 4 = 0$.

Tọa độ giao điểm của BC và (C) là nghiệm của hệ phương trình



$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 10 \\ x - 3y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \\ x = -2 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow B(-2; -2) \text{ (vì } x_B < 0\text{)}.$$

Vậy $T = 4$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 217. Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy , cho hình thang cân $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau và $AD = 3BC$. Đường thẳng BD có phương trình $x + 2y - 6 = 0$ và tam giác ABD có trực tâm là $H(-3; 2)$. Tìm tọa độ các đỉnh C và D .

A. $C(-1; 6)$, $D(4; 1)$ và $C(-1; 6)$, $D(-8; 7)$.

B. $C(1; 6)$, $D(-4; 1)$ và $C(1; 6)$, $D(-8; 7)$.

C. $C(1; 6)$, $D(-4; 1)$ và $C(1; 6)$, $D(8; 7)$.

D. $C(-1; 6)$, $D(4; -1)$ và $C(-1; 6)$, $D(8; -7)$.

Lời giải.

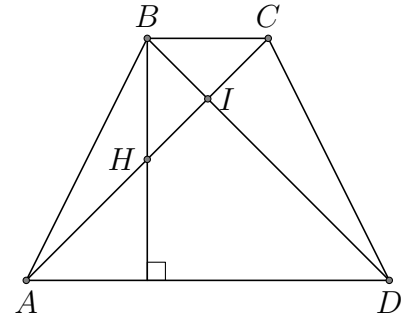
Gọi I là giao điểm của AC và $BD \Rightarrow IB = IC$.

Mà $IB \perp IC$ nên $\triangle IBC$ vuông, cân tại $I \Rightarrow \widehat{ICB} = 45^\circ$.

$BH \perp AD \Rightarrow BH \perp BC \Rightarrow \triangle HBC$ vuông, cân tại $B \Rightarrow I$ là trung điểm của đoạn thẳng HC .

Do $CH \perp BD$ và trung điểm I của CH thuộc BD nên tọa độ điểm C thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} 2(x+3) - (y-2) = 0 \\ \frac{x-3}{2} + 2\left(\frac{y+2}{2}\right) - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow C(-1; 6).$$



Ta có $\frac{IC}{ID} = \frac{IB}{ID} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{3} \Rightarrow ID = 3IC \Rightarrow CD = \sqrt{IC^2 + ID^2} = IC\sqrt{10} = \frac{CH\sqrt{10}}{2} = 5\sqrt{2}$.

Ta lại có $D(6-2t; t)$ và $CD = 5\sqrt{2}$, suy ra $(7-2t)^2 + (t-6)^2 = 50 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 7 \end{cases}$. Do đó, $D(4; 1)$ hoặc

$D(-8; 7)$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 218. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ (Oxy) cho điểm $A(2; 3)$ và hai đường thẳng $d_1; d_2$ có phương trình lần lượt là $d_1 : x + y + 5 = 0$; $d_2 : x + 2y - 7 = 0$. Gọi $B(x_1; y_1) \in d_1$; $C(x_2; y_2) \in d_2$ sao cho tam giác ABC nhận điểm $G(2; 0)$ là trọng tâm. Tính giá trị của biểu thức $T = x_1x_2 + y_1y_2$.

- A. $T = -21$. B. $T = -9$. C. $T = 9$. D. $T = 12$.

Lời giải.

Vì $B(x_1; y_1) \in d_1 \Rightarrow B(-5 - y_1; y_1)$; $C(x_2; y_2) \in d_2 \Rightarrow C(7 - 2y_2; y_2)$.

Vì tam giác ABC nhận điểm $G(2; 0)$ là trọng tâm nên

$$\begin{cases} 2 + (-5 - y_1) + (7 - 2y_2) = 6 \\ 3 + y_1 + y_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 + 2y_2 = -2 \\ y_1 + y_2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = -4 \\ y_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 5. \end{cases}$$

Vậy $T = -9$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 219. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có trọng tâm $G(-2; 0)$. Biết phương trình các cạnh AB và AC lần lượt là: $4x + y + 14 = 0$ và $2x + 5y - 2 = 0$. Tìm tọa độ các điểm A, B, C của tam giác ABC .

- A. $A(-4; 2), B(0; -14), C(1; 0)$. B. $A(-4; 2), B(-3; -2), C(1; 0)$.
C. $A(-4; 2), B(0; -14), C(6; -2)$. D. $A(-3; -2), B(-4; 2), C(6; -2)$.

Lời giải.

Ta thấy A là giao điểm của AB và AC nên tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 4x + y + 14 = 0 \\ 2x + 5y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 2. \end{cases}$$

Do đó điểm $A(-4; 2)$.

Tọa độ hóa 2 điểm B và C . Giả sử $B(b; -4b - 14)$ là điểm nằm trên AB và $C\left(c; \frac{2-2c}{5}\right)$ là điểm nằm

trên AC . Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -4 + b + c = -6 \\ -4b - 14 + 2 + \frac{2 - 2c}{5} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + c = -2 \\ 10b + c = -29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3 \Rightarrow B(-3; -2) \\ c = 1 \Rightarrow C(1; 0). \end{cases}$$

Vậy $A(-4; 2)$, $B(-3; -2)$, $C(1; 0)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 220. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1; 1)$, $B(4; -3)$. Có một điểm $C(a; b)$ thuộc đường thẳng $x - 2y - 1 = 0$ (với $a > 0$) sao cho khoảng cách từ C đến đường thẳng AB bằng 6. Tổng của $a + b$ là

A. 10.

B. 2.

C. -1.

D. 5.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng AB : $4x + 3y - 7 = 0$.

Điểm C thuộc đường thẳng $x - 2y - 1 = 0$ nên tọa độ điểm C có dạng $C(2a + 1; a)$.

Từ giả thiết khoảng cách từ C đến đường thẳng AB bằng 6 nên ta có phương trình

$$\frac{|4(2a + 1) + 3a - 7|}{5} = 6 \Leftrightarrow |11a - 3| = 30 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -\frac{27}{11} \text{ (Loại)}. \end{cases}$$

Do đó điểm C thỏa mãn bài toán là $C(7; 3)$.

Vậy tổng của $a + b = 10$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 221. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$. Các đường thẳng AC và AD lần lượt có phương trình là $x + 3y = 0$ và $x - y + 4 = 0$, đường thẳng BD đi qua điểm $M\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$.

Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

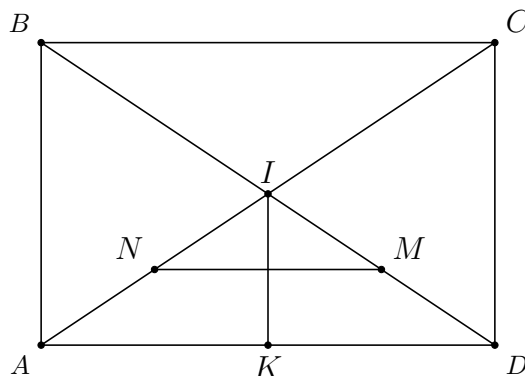
A. Tọa độ trọng tâm của tam giác BCD là $G\left(\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

B. Tọa độ trọng tâm của tam giác ACD là $G\left(-\frac{1}{3}; -1\right)$.

C. Tọa độ trọng tâm của tam giác ABD là $G(-1; 3)$.

D. Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(\frac{1}{3}; -1\right)$.

Lời giải.



Tọa độ điểm A là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ x - y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(-3; 1).$$

Gọi N là điểm thuộc AC sao cho $MN \parallel AD$
 $\Rightarrow$ phương trình đường thẳng $MN: x - y + \frac{4}{3} = 0$.

Tọa độ điểm N là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ x - y + \frac{4}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow N\left(-1; \frac{1}{3}\right).$$

Đường trung trực Δ của MN đi qua trung điểm của MN và vuông góc với AD

$\Rightarrow \Delta$ có phương trình $x - y = 0$.

Gọi I, K lần lượt là giao điểm của Δ với AC và AD .

Tọa độ điểm I là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow I(0; 0).$$

Tọa độ điểm K là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y + 4 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow K(-2; 2).$$

$$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI} \Rightarrow C(3; -1).$$

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AK} \Rightarrow D(-1; 3).$$

$$\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BD} \Rightarrow B(1; -3).$$

Vậy tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(\frac{1}{3}; -1\right)$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 222. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $\Delta: x - y - 4 = 0$ và $d: 2x - y - 2 = 0$.

Gọi $N(m; n)$, $m > 0$ là điểm thuộc đường thẳng d sao cho đường thẳng ON cắt đường thẳng Δ tại điểm M thỏa mãn $OM \cdot ON = 8$. Tính $S = m + n$.

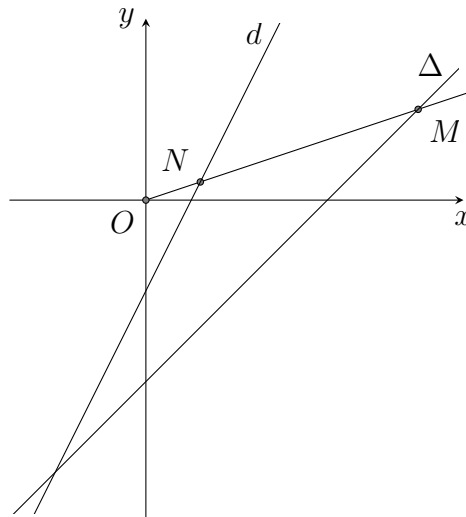
A. $S = \frac{8}{5}$.

B. $S = -2$.

C. $S = \frac{6}{5}$.

D. $S = \frac{4}{5}$.

Lời giải.



$N \in d$, $M \in \Delta$ có tọa độ lần lượt là $N(a; 2a - 2)$, $M(b; b - 4)$.

Ba điểm O , N , M thẳng hàng khi và chỉ khi

$$a(b - 4) = (2a - 2)b \Leftrightarrow b(2 - a) = 4a \Leftrightarrow b = \frac{4a}{2 - a} \Rightarrow B\left(\frac{4a}{2 - a}; \frac{8a - 8}{2 - a}\right).$$

$$ON^2 = a^2 + (2a - 2)^2 = 5a^2 - 8a + 4.$$

$$OM^2 = \left(\frac{4a}{2 - a}\right)^2 + \left(\frac{8a - 8}{2 - a}\right)^2 = \frac{80a^2 - 128a + 64}{a^2 - 4a + 4} = \frac{16(5a^2 - 8a + 4)}{a^2 - 4a + 4}.$$

$$OM \cdot ON = 8 \Leftrightarrow (5a^2 - 8a + 4) \frac{16(5a^2 - 8a + 4)}{(a - 2)^2} = 64$$

$$\Leftrightarrow (5a^2 - 8a + 4)^2 = (2a - 4)^2 \Leftrightarrow (5a^2 - 8a + 4 - 2a + 4)(5a^2 - 8a + 4 + 2a - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (5a^2 - 10a + 8)(5a^2 - 6a) = 0 \Leftrightarrow 5a^2 - 6a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \frac{6}{5} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{m > 0} a = \frac{6}{5} \Rightarrow N\left(\frac{6}{5}; \frac{2}{5}\right) \Rightarrow S = m + n = \frac{8}{5}.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 223. Cho điểm $A(a; 0)$, $a > 0$. Điểm M di chuyển trên đoạn OA , điểm N di chuyển trên tia Oy sao cho $AM = ON$. Khi đó, trung trực của đoạn thẳng MN luôn đi qua điểm cố định $I(x; y)$. Tính giá trị biểu thức $2x - y$.

A. $2x - y = 0$.

B. $2xy = a$.

C. $2x - y = -\frac{a}{2}$.

D. $2x - y = \frac{a}{2}$.

Lời giải.

Gọi điểm $M(m; 0)$ nằm trên OA , $(0 < m < a)$.

Điểm $N(0; n)$ nằm trên tia Oy . Theo giả thiết ta có: $AM = ON \Rightarrow a - m = n$.

Gọi $I\left(\frac{m}{2}; \frac{n}{2}\right)$ là trung điểm của MN . Ta có $\overrightarrow{MN}(-m; n)$.

Suy ra phương trình trung trực của MN có dạng $-m\left(x - \frac{m}{2}\right) + (a - m)\left(y - \frac{a - m}{2}\right) = 0$. Gọi $I(x; y)$

là điểm cố định của trung trực của MN . Do đó

$$\begin{aligned} & -m\left(x - \frac{m}{2}\right) + (a - m)\left(y - \frac{a - m}{2}\right) = 0, \forall m \\ \Leftrightarrow & m(a - x - y) + ay - \frac{a^2}{2} = 0, \forall m \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a - x - y = 0 \\ ay - \frac{a^2}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = \frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow 2x - y = \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 224. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1; 1)$, $B(4; -3)$. Tìm điểm $C(a; b)$ thuộc đường thẳng $x - 2y - 1 = 0$ với $a > 0$ sao cho khoảng cách từ C đến đường thẳng AB bằng 6. Tổng của $a + b$ là

A. 10.

B. 2.

C. -1.

D. 5.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng AB là $4x + 3y - 7 = 0$.

Điểm C thuộc đường thẳng $x - 2y - 1 = 0$ nên tọa độ điểm C có dạng $C(2a + 1; a)$.

Từ giả thiết khoảng cách từ C đến đường thẳng AB bằng 6, ta có phương trình

$$\frac{|4(2a + 1) + 3a - 7|}{5} = 6 \Leftrightarrow |11a - 3| = 30 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -\frac{27}{11} \end{cases}.$$

Vì $a > 0$ nên $C(7; 3) \Rightarrow a + b = 10$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 225. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có điểm $M(2; 0)$ là trung điểm cạnh AB . Đường trung tuyến và đường cao qua đỉnh A lần lượt có phương trình là $7x - 2y - 3 = 0$ và $6x - y - 4 = 0$. Phương trình đường thẳng AC là

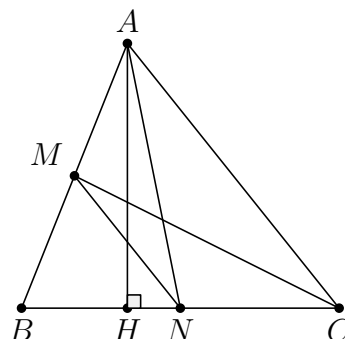
A. $-3x + 4y + 5 = 0$.

B. $3x - 4y + 5 = 0$.

C. $4x - 3y + 5 = 0$.

D. $-4x + 3y + 5 = 0$.

Lời giải.



Giả sử đường trung tuyến $AN: 7x - 2y - 3 = 0$ và đường cao $AH: 6x - y - 4 = 0$.

Tọa độ điểm A là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} 7x - 2y - 3 = 0 \\ 6x - y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A(1; 2).$$

Vì M là trung điểm BC nên ta có $\begin{cases} x_A + x_B = 2x_M \\ y_A + y_B = 2y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 2x_M - x_A \\ y_B = 2y_M - y_A \end{cases} \Leftrightarrow B(3; -2).$

Đường thẳng BC vuông góc AH nên có vtpt $\vec{n}_{BC} = (1; 6).$

Phương trình BC đi qua $B(3; -2)$ và có vtpt $\vec{n}_{BC} = (1; 6)$ là

$$1(x - 3) + 6(y + 2) = 0 \Leftrightarrow x + 6y + 9 = 0.$$

Tọa độ N là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} x + 6y + 9 = 0 \\ 7x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow N\left(0; -\frac{3}{2}\right).$$

Vì AC song song với MN nên $\overrightarrow{MN} = \left(-2; \frac{-3}{2}\right)$ là vtcp của đường thẳng AC .

Phương trình AC đi qua $A(1; 2)$ là

$$\frac{x - 1}{-2} = \frac{y - 2}{\frac{-3}{2}} \Leftrightarrow 3x - 4y + 5 = 0.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 226. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , xét tam giác ABC vuông tại A và phương trình đường thẳng BC là $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$. Các đỉnh A, B thuộc trục hoành và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng 2. Gọi $G(x_0; y_0)$ với $x_0 > 0$ là trọng tâm của tam giác ABC . Biết rằng giá trị của biểu thức $T = 2y_0 - x_0$ bằng $\frac{m}{n}$ với $m, n \in \mathbb{Z}^+$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khi đó kết luận nào dưới đây là đúng?

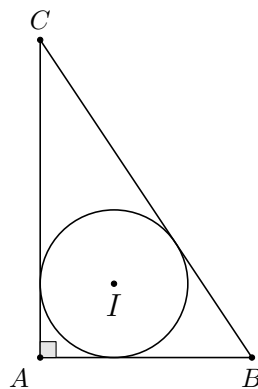
A. $3m - 4n = 5$.

B. $m > n$.

C. $m < n + 1$.

D. $mn < 12$.

Lời giải.



Tọa độ điểm B là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow B(1; 0).$$

$A \in Ox \Rightarrow A(a; 0).$

Lại có $AC \perp AB$ và $C \in BC \Rightarrow C(a; \sqrt{3}(a - 1)).$

Lại có $AB = |a - 1|$, $AC = \sqrt{3}|a - 1|$ và $BC = 2|a - 1|$, ($a \neq 1$).

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên ta có $G\left(\frac{2a+1}{3}; \frac{\sqrt{3}(a-1)}{3}\right)$.

Do $x_0 > 0 \Leftrightarrow \frac{2a+1}{3} > 0 \Leftrightarrow a > -\frac{1}{2}$.

Theo bài ta có

$$\begin{aligned} r_{ABC} &= \frac{2S_{ABC}}{AB + BC + CA} \\ \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC &= 2(AB + BC + CA) \\ \Leftrightarrow \sqrt{3}(a-1)^2 &= 2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)|a-1| \\ \Leftrightarrow |a-1| &= 2(\sqrt{3}+1) \\ \Rightarrow a &= 2\sqrt{3}+3, (\text{Vì } a > -\frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Vậy $G\left(\frac{7+4\sqrt{3}}{3}; \frac{6+2\sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow T = 2y_0 - x_0 = \frac{5}{3} \Rightarrow m = 5 > n = 3$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 227. Trong hệ tọa độ Oxy , cho hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A và B , đáy lớn AD . Biết chu vi hình thang là $16 + 4\sqrt{2}$, diện tích hình thang là 24. Biết $A(1; 2)$, $B(1; 6)$. Tìm tọa độ các đỉnh D biết hoành độ điểm D lớn hơn 2.

A. $D(9; 2)$.

B. $D(5; 2)$.

C. $D(-9; 2)$.

D. $D(7; 2)$.

Lời giải.

Ta có $AB = 4$, đặt $BC = x$, $AD = y$ ($y > x$).

Diện tích hình thang là 24 nên: $24 = \frac{(x+y) \cdot 4}{2} \Leftrightarrow x + y = 12$.

Chu vi hình thang là: $16 + 4\sqrt{2}$ nên:

$$16 + 4\sqrt{2} = 4 + x + y + \sqrt{16 + (y-x)^2}.$$

$$\text{Do đó } 4\sqrt{2} = \sqrt{16 + (y-x)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y-x = 4 \\ y-x = -4 \text{ (loại)} \end{cases}.$$

$$\text{Với } y-x = 4 \text{ ta có hệ } \begin{cases} x+y = 12 \\ y-x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 8 \end{cases}.$$

Khi đó $AD = 8$ phương trình AD : $y = 2$, gọi $D(x_0; 2)$; $x_0 > 2$.

$$AD = 8 \Leftrightarrow \sqrt{(x_0-1)^2} = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0-1 = 8 \\ x_0-1 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 9 \\ x_0 = -7(L) \end{cases}.$$

Vậy $D(9; 2)$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 228. Cho hình bình hành $ABCD$ có $A(0; 1)$, $B(3; 4)$ và tâm I nằm trên parabol có phương trình $y = (x-1)^2$ với $0 \leq x_I \leq 3$. Khi diện tích hình bình hành $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất thì tọa độ $C(a; b)$, tọa độ $D(c; d)$. Tính $a + b + c + d$?

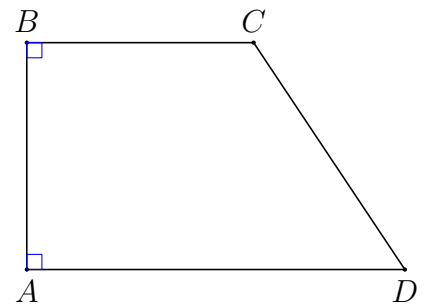
A. -2.

B. -1.

C. 1.

D. 0.

Lời giải.



$$S_{ABCD} = 4S_{IAB} = 2d(I, (AB)) \cdot AB.$$

Vì AB không đổi nên S_{ABCD} lớn nhất khi và chỉ khi $d(I, (AB))$ lớn nhất.

Phương trình đường thẳng AB là $x - y + 1 = 0$.

Vì I thuộc (P) : $y = (x - 1)^2$, $(0 \leq x_I \leq 3)$ nên:

Gọi $I(x; (x - 1)^2)$, $(0 \leq x_I \leq 3)$.

$$d(I, (AB)) = \frac{|x - (x - 1)^2 + 1|}{\sqrt{2}} = \frac{|-x^2 + 3x|}{\sqrt{2}} = \frac{-x^2 + 3x}{\sqrt{2}}.$$

$$\max d(I, (AB)) = \frac{9}{4} \text{ đạt được khi } x = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Vậy } I\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right) \Rightarrow D\left(0; -\frac{7}{2}\right); C\left(3; -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow a + b + c + d = -1$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 229. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình thang cân $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau và $AD = 3BC$. Đường thẳng BD có phương trình $x + y - 7 = 0$ và tam giác ABD có trực tâm $H(-4; 3)$. Khi đó tọa độ của điểm $C(a; b)$ và $D(c; d)$, với D có hoành độ âm. Tính giá trị biểu thức $P = a + b + c + d$.

A. $P = 10$.

B. $P = 4$.

C. $P = 3$.

D. $P = 7$.

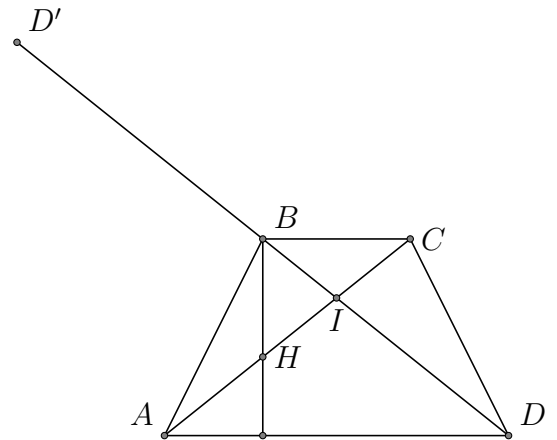
Lời giải.

Hình thang $ABCD$ cân, có đáy lớn là AD . Gọi $I = AC \cap BD$, suy ra $IC = IB$.

Ta lại có $IB \perp IC$ nên tam giác IBC vuông cân tại I , suy ra $\widehat{ICB} = 45^\circ$.

Mà H là trực tâm $\triangle ABD$ nên $BH \perp AD$ và $BH \perp BC$. Từ đó suy ra $\triangle BCH$ vuông cân tại B . Vậy I là trung điểm của HC .

Do HC vuông góc với BD nên phương trình HC là $2x - y + 11 = 0$ (1).



Gọi $C(x; y)$, do I là trung điểm của HC nên $I\left(\frac{x - 4}{2}; \frac{y + 3}{2}\right)$ mà $I \in BD$ nên ta có phương trình $\frac{x - 4}{2} + 2\frac{y + 3}{2} - 7 = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 12 = 0$ (2).

Từ (1) và (2) ta có hệ $\begin{cases} 2x - y = -11 \\ x + 2y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 7 \end{cases}$ nên $C(-2; 7)$.

Gọi $D(7 - 2t; t) \in BD$. Mà $\frac{IC}{ID} = \frac{IB}{IA} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{2}$ nên $ID = 3IC$.

Mặt khác $CD = \sqrt{CI^2 + ID^2} \Leftrightarrow CD = CI\sqrt{10} \Leftrightarrow CD = \frac{CH}{2}\sqrt{10} \Leftrightarrow CD = 5\sqrt{2}$.

Khi đó $(9 - 2t)^2 + (t - 7)^2 = 50 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 8 \Rightarrow D(-9; 8)(N) \\ t = 2 \Rightarrow D(3; 2)(L) \end{cases}$. Vậy $C(-2; 7)$, $D(-9; 8)$ nên $P = a + b + c + d =$

4.

Nhận xét. Có thể tìm tọa độ điểm C như sau:

Đường thẳng AC đi qua H và vuông góc với BD nên có phương trình $AC: 2x - y + 11 = 0$. Mà

$$I = AC \cap BD \text{ suy ra } I \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} 2x - y = -11 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow I(-3; 5).$$

$$\text{Mà } I \text{ là trung điểm } HC \text{ suy ra tọa độ } C \text{ là } \begin{cases} x_c = 2 \cdot (-3) + 4 = -2 \\ y_c = 2 \cdot 5 - 3 = 7 \end{cases} \text{ hay } C(-2; 7).$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 230. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp I tiếp xúc với cạnh AB, AC lần lượt tại M và N . Đường thẳng BI cắt đường thẳng MN tại E . Biết $I(-1; -1)$, $E(3; 1)$ và đường thẳng AC có phương trình $x + 2y - 1 = 0$. Khi đó tọa độ điểm $C(a; b)$, tính giá trị biểu thức $P = a + 5b$?

A. $\frac{4}{3}$.

B. -4 .

C. 16 .

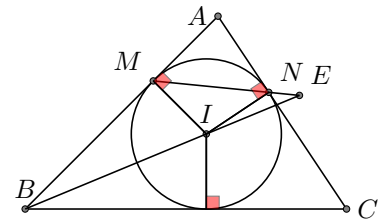
D. 4 .

Lời giải.

☑ Đường thẳng IN qua $I(-1; -1)$ và vuông góc với AC nên có phương trình $2x - y + 1 = 0$ mà $N = IN \cap AC$ nên tọa độ điểm N là

$$\text{nghiệm của hệ phương trình } \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{5} \\ y = \frac{3}{5} \end{cases}.$$

$$\text{Nên } N\left(-\frac{1}{5}; \frac{3}{5}\right).$$



☑ Theo tính chất góc ngoài tam giác ta có:

$$\widehat{AME} = \widehat{MBE} + \widehat{MEB} \Rightarrow \widehat{MEB} = \widehat{AME} - \widehat{MBE} = \left(90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}\right) - \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{C}}{2}$$

nên $\widehat{NEI} = \widehat{NCI}$ do đó tứ giác $INEC$ nội tiếp đường tròn, đường kính IC (do $\widehat{INC} = 90^\circ$).

☑ Gọi (C) là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $INEC$. Phương trình (C) có phương trình $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$.

$$\text{Mà } (C) \text{ đi qua } I, N, E \text{ nên ta có hệ phương trình: } \begin{cases} -2a - 2b + c = -2 \\ \frac{-2}{5}a + \frac{6}{5}b + c = \frac{-2}{5} \\ 6a + 2b + c = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-5}{3} \\ b = \frac{4}{3} \\ c = \frac{-8}{3} \end{cases}.$$
 Do đó đường

$$\text{tròn } (C) \text{ có tâm } J\left(\frac{5}{3}; -\frac{4}{3}\right).$$

$$\text{☑ Mặt khác } J\left(\frac{5}{3}; -\frac{4}{3}\right) \text{ là trung điểm } IC \text{ nên } C\left(\frac{13}{3}; -\frac{5}{3}\right). \text{ Suy ra } \begin{cases} a = \frac{13}{3} \\ b = -\frac{5}{3} \end{cases} \text{ nên } P = a + 5b = -4.$$

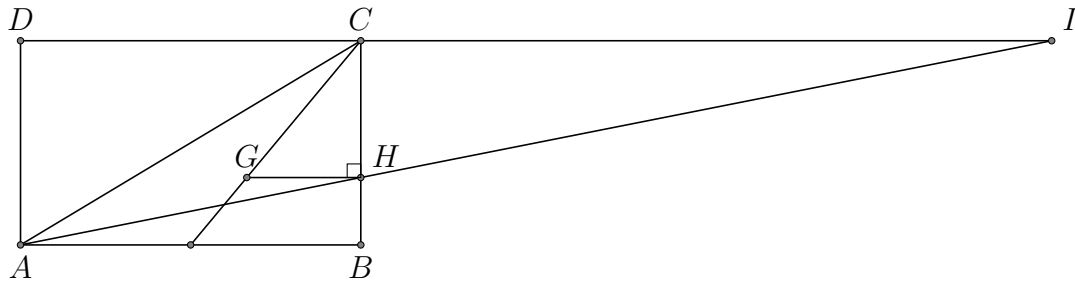
Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 231. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có đỉnh $A(2; -1)$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , hình chiếu vuông góc của G lên cạnh BC là $H(6; 5)$, đỉnh D có hoành độ âm và thuộc đường thẳng $d: x + 2y - 3 = 0$. Tính $S = a - b$ biết $C(a; b)$.

- A. $S = 3$. B. $S = \frac{8}{3}$. C. $S = -3$. D. $S = -\frac{8}{3}$.

Lời giải.



✓ Gọi $I = AH \cap DC$ thì $\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AH}$ nên $\begin{cases} x_I - 2 = 6(6 - 2) \\ y_I + 1 = 3(5 + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = 14 \\ y_I = 17 \end{cases} \Rightarrow I(14; 17)$.

✓ Do $D \in d$ nên $D(3 - 2d; d)$ khi đó $\overrightarrow{ID} = (-2d - 11; d - 17)$ và $\overrightarrow{AD} = (1 - 2d; d + 1)$.

Mặt khác $ID \perp AD$ suy ra $5d^2 + 4d - 28 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \Rightarrow D(-1; 2) \\ d = -\frac{14}{5} \Rightarrow x_D = \frac{43}{5} (L) \end{cases}$.

✓ Mà $\overrightarrow{CH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DA} \Rightarrow \begin{cases} 6 - x_C = \frac{2}{3}(2 + 1) \\ 5 - y_C = \frac{2}{3}(-1 - 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 4 \\ y_C = 7 \end{cases} \Rightarrow C(4; 7)$.

Từ đó suy ra $a = 4, b = 7$ nên $S = a - b = -3$.

Chọn đáp án **C**

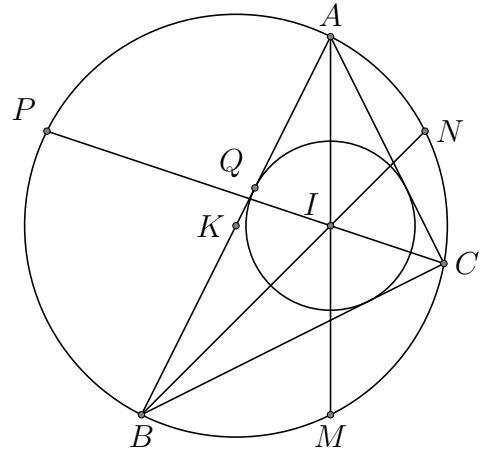
□

Câu 232. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm I . Các đường thẳng AI, BI, CI lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại các điểm $M(1; -5), N\left(\frac{7}{2}; \frac{5}{2}\right), P\left(-\frac{13}{2}; \frac{5}{2}\right)$ (M, N, P không trùng với các đỉnh của $\triangle ABC$). Biết rằng đường thẳng AB đi qua điểm $Q(-1; 1)$ và điểm A có hoành độ dương. Khi đó khoảng cách T từ điểm C đến đường thẳng $\Delta: 3x + 4y - 1 = 0$ bằng

- A. $T = \frac{3}{5}$. B. $T = \frac{7}{5}$. C. $T = \frac{6}{5}$. D. $T = \frac{8}{5}$.

Lời giải.

☑ Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là đường tròn đi qua ba điểm M, N, P nên ta lập được phương trình đường tròn là: $x^2 + y^2 + 3x - 29 = 0$. Suy ra tâm K của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tọa độ $K\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$.



☑ Do $AB \perp KP$ nên AB có vec-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{AB}} = \overrightarrow{KP} = -\frac{5}{2}(2; -1)$. Suy ra phương trình $AB: 2(x + 1) - (y - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 3 = 0$. Khi đó tọa độ A, B là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ x^2 + y^2 + 3x - 29 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 3 \\ x^2 + 3x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \\ x = -4 \\ y = -5 \end{cases}.$$

Do $x_A > 0$ nên $A(1; 5)$ từ đó suy ra $C(4; -1)$.

Vậy khoảng cách từ C đến Δ bằng $\frac{7}{5}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 233. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ có $C(2; -2)$ và điểm $B(a; b)$, $a > 0$. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của DA và DC , điểm $M(-1; -1)$ là giao của BI và AK . Giá trị $P = a + b$ bằng

A. $P = 1$.

B. $P = 2$.

C. $P = 3$.

D. $P = 0$.

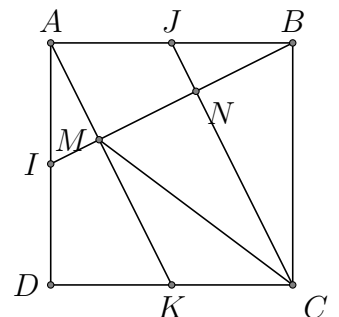
Lời giải.

☑ Gọi J là trung điểm AB , khi đó $AJCK$ là hình bình hành suy ra $AK \parallel CJ$.

☑ Gọi $CJ \cap BM = N$ thì N là trung điểm của BM .

☑ Chứng minh được $AK \perp BI$ từ đó suy ra tam giác BMC là tam giác cân tại C .

Ta có $MC = \sqrt{10}$ nên $CM = CB = AB = \sqrt{10}$.



☑ Trong tam giác vuông ABM có

$$AB^2 = BM \cdot BI = BM \cdot \sqrt{AB^2 + AI^2} = BM \cdot AB \frac{\sqrt{5}}{2}$$

nên $BM = 2\sqrt{2}$.

Mà B là giao của hai đường tròn $(C; \sqrt{10})$ và $(M; 2\sqrt{2})$ nên tọa độ B thỏa mãn

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+2)^2 = 10 \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow B(1; 1).$$

Vậy $a + b = 2$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 234. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$. Hình chiếu vuông góc của B lên các đường thẳng AB, BC lần lượt là $M(-2; 2), N(2; -2)$. Đường thẳng BD có phương trình $3x - 5y + 1 = 0$. Đẳng thức nào sau đây là đúng, với tọa độ điểm $A(x_0; y_0)$.

A. $20x_0 + 12y_0 = 1$. B. $20x_0 + 12y_0 = 0$. C. $20x_0 + 12y_0 = -1$. D. $20x_0 - 12y_0 = -1$.

Lời giải.

☑ Gọi $I(x; y)$ là tâm hình bình hành $ABCD$.

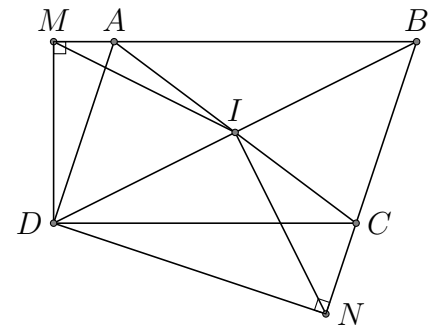
Vì tam giác BMD vuông tại M và I là trung điểm của BD

nên $MI = \frac{1}{2}BD$ (1).

Tương tự: $NI = \frac{1}{2}BD$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $MI = NI$. Do đó

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2} \Leftrightarrow y = x \quad (3).$$



Mà $I \in BD$ nên $3x - 5y + 10 = 0$ (4).

Từ (3) và (4) nên $x = y = \frac{1}{2}$ do đó $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Vậy $IB = ID = IM = \frac{\sqrt{34}}{2}$ nên B, D thuộc đường tròn (T) tâm I bán kính $R = \frac{\sqrt{34}}{2}$, (T) có phương trình $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{17}{2}$.

☑ Vì B, D là giao của BD với (T) nên tọa độ B, D là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x - 5y + 1 = 0 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{17}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ x = -2 \\ y = -1 \end{cases}.$$

• TH1: $B(3; 2), D(-2; -1)$ thì phương trình đường thẳng $AB: y = 2, AD: y = 4x + 7$ do đó $A\left(-\frac{5}{4}; 2\right)$.

• $B(-2; -1), D(3; 2)$ thì phương trình đường thẳng $AB: x = -2, AD: x + 4y - 11 = 0$ do đó $A\left(-2; \frac{13}{4}\right)$.

Vậy $A\left(-\frac{5}{4}; 2\right)$ hoặc $A\left(-2; \frac{13}{4}\right)$.

□

Câu 235. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ có đỉnh $C(3; -3)$. Gọi M là trung điểm của BC . Đường thẳng DM có phương trình $x - y - 2 = 0$, điểm A thuộc đường thẳng $d: 3x + y - 2 = 0$. Khi đó $x_D + y_D$ bằng

A. -8 .

B. 8 .

C. 4 .

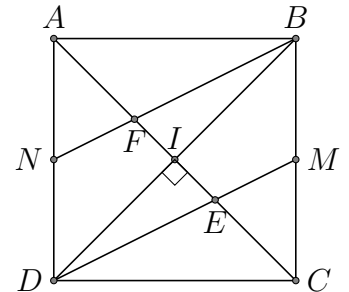
D. -4 .

Lời giải.

☑ Gọi $E = DM \cap AC$, N là trung điểm AD và $F = BN \cap AC$.

☑ Xét tam giác BCF , ta có $EM \parallel BF$ và M là trung điểm BC , suy ra E là trung điểm CF .

Tương tự, ta cũng có F là trung điểm AE , suy ra $AF = FE = EC$.



☑ Vì $M \in DM$ nên $E(t; t - 2)$. Từ hệ thức $\overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{CE}$ suy ra $A(3t - 6; 3t)$.

Do $A \in d$ nên $3(3t - 6) + 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{3}$ nên $A(-1; 5)$.

☑ Đường trung trực của đoạn thẳng AC có phương trình $BD: x - 2y + 1 = 0$.

Do $D = BD \cap DM$ nên tọa độ D thỏa mãn hệ
$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow D(5; 3).$$

Vậy $x_D + y_D = 8$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 236. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ có điểm $E(1; 2)$ và F tương ứng thuộc các cạnh AB và AD sao cho $AE = AF$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A xuống cạnh BF , đường thẳng CH cắt cạnh AD tại điểm $P\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. Biết đỉnh $C(a; b)$ thuộc đường thẳng $d: x + 2y = 0$. Tính $P = 2a + 3b$.

A. $P = 3$.

B. $P = -21$.

C. $P = -12$.

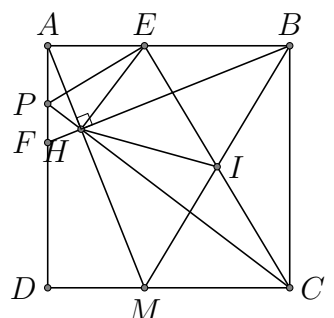
D. $P = 12$.

Lời giải.

Gọi $H = AH \cap CD$. Xét hai tam giác BAF và ADM , ta có

$$\begin{cases} \widehat{BAF} = \widehat{ADM} = 90^\circ \\ \widehat{ABF} = \widehat{DAM} (\widehat{ABF} + \widehat{AFH} = \widehat{DAM} + \widehat{AFH} = 90^\circ) \Rightarrow \triangle BAF = \triangle ADM. \\ AB = AD \end{cases}$$

Suy ra $DM = AF = AE$ nên tứ giác $BCME$ là hình chữ nhật.



Gọi I là tâm của hình chữ nhật $BCME$, suy ra $IE = IC = IB = IM$ (1).

Tam giác MHB vuông tại H nên $IB = IM = IH$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $IE = IC = IH$ nên tam giác CHE vuông tại H hay $HE \perp HC$.

Do đó tứ giác $AEHP$ nội tiếp nên $\widehat{PAH} = \widehat{PEH}$ (chấn cung $\widehat{AB}$), tứ giác $BCHE$ nội tiếp nên $\widehat{EBH} = \widehat{ECH}$ (chấn cung $\widehat{EH}$).

Mà $\widehat{PAH} = \widehat{EBH}$ (cùng phụ $\widehat{HAB}$). Suy ra $\widehat{PEH} = \widehat{ECH}$ do $\widehat{ECH} + \widehat{HEC} = 90^\circ$ nên $\widehat{PEH} + \widehat{HEC} = 90^\circ$ hay $PE \perp EC$.

Đường thẳng EC đi qua $E(1; 2)$ và có vec-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{EP} = \left(-\frac{5}{2}; -\frac{5}{2}\right)$ nên $EC: x + y - 3 = 0$.

Do $C = d \cap EC$ nên tọa độ điểm C thỏa mãn hệ
$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(6; -3).$$

Vậy $P = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 3 = 3$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 237. Cho $\triangle ABC$ biết đường phân giác xuất phát từ A , đường trung tuyến xuất phát từ B lần lượt có phương trình là: $x - y + 1 = 0(d)$, $x + y - 2 = 0(\Delta)$ và tọa độ điểm $C(-1; 2)$. Khi đó $\tan C$ bằng

A. $\frac{1}{3}$.

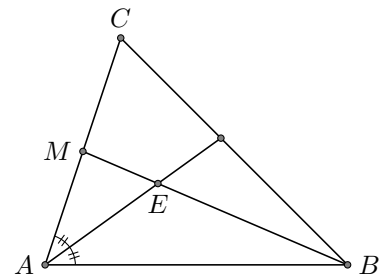
B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Gọi $A(a; a + 1)$ nên $M\left(\frac{a-1}{2}; \frac{a+3}{2}\right)$.



Mà $M \in (\Delta)$ nên $\frac{a-1}{2} + \frac{a+3}{2} - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 1$ do đó $A(1; 2)$ và $M(0; 2)$.

Xét hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$$
 suy ra $E\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Mà $(d) \perp (\Delta)$ nên E là trung điểm của BM suy ra $B(1; 1)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (0; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (2; -)$. Suy ra $\triangle ABC$ vuông tại A mà $AB = 1$, $AC = 2$.

Vậy $\tan C = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 238. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC với D và E lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC với các cạnh AB và AC . Biết DE , AB lần lượt có phương trình $x - 7y - 35 = 0$ và $4x - 3y - 65 = 0$, biết trung điểm của BC là điểm $M\left(11; \frac{11}{2}\right)$. Gọi $B(a; b)$ với $a > 12$. Tính $P = a - b$.

A. $P = 12$.

B. $P = 14$.

C. $P = 15$.

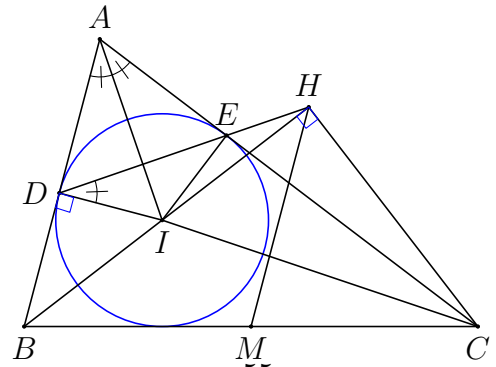
D. $P = 18$.

Lời giải.

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và $H = DE \cap BI$.

Ta sẽ chứng minh $\widehat{BHC} = 90^\circ$ và $MH \parallel AB$.

Thật vậy $\widehat{EAI} = \widehat{EDI}$ (Do tứ giác ADIE nội tiếp) và $\widehat{BHD} = 180^\circ - 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2} - \frac{\widehat{B}}{2} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2} - \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{C}}{2}$
 $\Rightarrow \widehat{BHD} = \widehat{ICE}$ nên tứ giác IEHC nội tiếp $\Rightarrow \widehat{IHC} = \widehat{IEC} = 90^\circ$ và $\widehat{BHM} = \widehat{MBH} = \widehat{HBA}$ nên $MH \parallel AB$.



Đường thẳng MH đi qua M song song AB nên MH có phương trình: $4x - 3y - \frac{55}{2} = 0$.

Ta có $H = DE \cap MH$. Suy ra tọa độ điểm $H\left(\frac{7}{2}; -\frac{9}{2}\right) \Rightarrow MB = MH = \frac{25}{2}$.

Do AB có PT $4x - 3y - 65 = 0$ nên $B(17 + 3t; 1 + 4t)$.

$$MB = \frac{25}{2} \Leftrightarrow (3t + 6)^2 + \left(4t - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{625}{4} \Leftrightarrow t^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \Rightarrow B(11; -7) \\ t = 2 \Rightarrow B(23; 9) \end{cases}$$

Do hoành độ điểm B lớn hơn 12 nên $B(23; 9)$.

Vậy $a = 23, b = 9$. Suy ra $P = 14$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 239. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm $I(4; 3)$. Tia phân giác trong góc $\widehat{ABC}$ có phương trình $y = 4$, cắt AC tại D thỏa mãn $3AD = 5CD$. Tìm tọa độ điểm A biết đường thẳng BC đi qua điểm $M(4; 5)$ và $x_A < x_B$.

- A. $A(3; 2)$. B. $A(2; 2)$. C. $A\left(\frac{7}{2}; 2\right)$. D. $A\left(\frac{7}{3}; 3\right)$.

Lời giải.

Do $I(4; 3), M(4; 5)$ nên đường thẳng $IM: x = 4$.

Gọi E là trung điểm của IM ta có $E(4; 4)$.

Đường thẳng $BD: y = 4$ nên $IM \perp BD$ tại điểm E .

Suy ra I và M đối xứng nhau qua đường thẳng BD .

Lại có BD là phân giác trong góc $\widehat{ABC}$ và $M \in BC$ nên $I \in AB$.

Mặt khác I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên I là trung điểm của AB và tam giác ABC vuông tại C .

Theo giả thiết, BD là tia phân giác góc $\widehat{ABC}$ nên $\frac{BC}{AB} = \frac{CD}{AD} = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos \widehat{ABC} = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5}$.

Ta có $B \in d: y = 4$ nên $B(t; 4) \Rightarrow \overrightarrow{BI} = (4 - t; -1)$ và $\overrightarrow{BM} = (4 - t; 1)$.

Lại có $\cos \widehat{ABC} = \cos \widehat{IBM} = \cos(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BM})$, tam giác IBM cân tại B .

$$\text{Do đó } \frac{(4 - t)^2 - 1}{(4 - t)^2 + 1} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 6 \end{cases}$$

Với $t = 2$ ta có $B(2; 4), A(6; 2)$ không thỏa mãn.

Với $t = 6$ ta có $B(6; 4), A(2; 2)$ thỏa mãn.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 240. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ với $AD = 2AB$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD, BC . Điểm $K(5; -1)$ đối xứng với M qua N . Phương trình đường thẳng

chứa cạnh AC là $2x + y - 3 = 0$. Biết A có tung độ dương. Gọi S là tổng các hoành độ của 4 điểm A, B, C, D . Tìm S .

A. 2.

B. 6.

C. 8.

D. 10.

Lời giải.

Ta có $\triangle CAD = \triangle DKM \Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{DKM}$.

Mà $\widehat{DKM} + \widehat{KDM} = 90^\circ \Rightarrow AC \perp DK$.

Phương trình $DK: (x - 5) - 2(y + 1) = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 7 = 0$.

Gọi I là giao điểm AC và DK thì $I\left(\frac{13}{5}; -\frac{11}{5}\right)$.

Gọi E là giao điểm của AC và MN khi đó E là trung điểm của MN . Ta có

$$\frac{ID}{IK} = \frac{CD}{EK} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3\overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{KI} \Rightarrow D(1; -3) \Rightarrow KD = \sqrt{20}.$$

Do $A \in AC$ nên $A(a; 3 - 2a)$ với $3 - 2a > 0 \Leftrightarrow a < \frac{3}{2}$.

$$\text{Mà } KA = KD \Rightarrow \sqrt{(a - 5)^2 + (4 - 2a^2)} = \sqrt{20} \Leftrightarrow 5a^2 - 26a + 21 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \text{ (tm)} \\ a = \frac{21}{5} \text{ (loại)} \end{cases}.$$

Ta tìm được $A(1; 1)$, phương trình $AD: x = 1$, phương trình $DC: y = -3$ nên $C(3; -3)$, phương trình $CB: x = 3$, phương trình $AB: y = 1$ nên $B(3; 1)$.

Vậy $S = 1 + 1 + 3 + 3 = 8$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 241. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích bằng 80, điểm $P(-5; 1)$ và điểm Q là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$. Biết rằng điểm B thuộc đường thẳng $d: 2x - y - 8 = 0$, PQ vuông góc với d và d cắt cạnh CD . Tìm chu vi của hình chữ nhật $ABCD$?

A. 40.

B. 42.

C. 36.

D. $12\sqrt{10}$.

Lời giải.

Đặt $AB = a$, $AD = b$ ($a, b > 0$).

Gọi $\{E\} = d \cap CD$, $\{H\} = d \cap PQ$.

$$S_{ABCD} = 80 \Rightarrow a = \frac{80}{b}, d(P; d) = \frac{|-10 - 1 - 8|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{19}{\sqrt{5}}.$$

Ta có $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} - \frac{5}{8}\overrightarrow{AD}$.

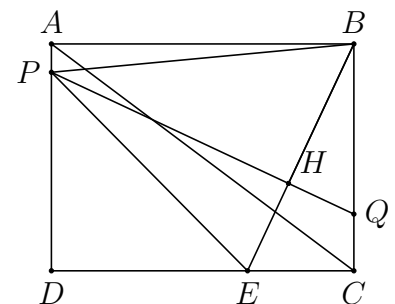
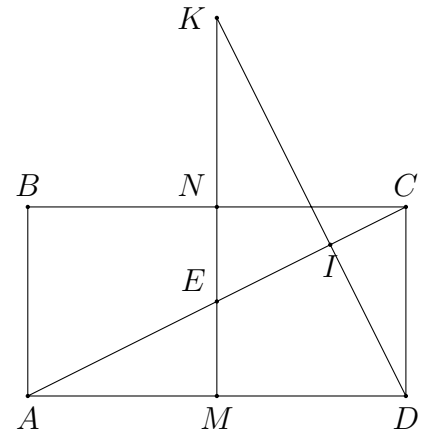
Giả sử $\overrightarrow{DE} = m\overrightarrow{DC}$ thì $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} = (m - 1)\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{BE} \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{BE} = 0 \Leftrightarrow m = 1 - \frac{5b^2}{8a^2}.$$

$$DE = \left(1 - \frac{5b^2}{8a^2}\right)a, EC = \frac{5b^2}{8a^2}a, BE = \sqrt{b^2 + \left(\frac{5b^2}{8a^2}\right)^2 a^2}.$$

Do đó:

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{PBE} + S_{ABP} + S_{PDE} + S_{EBC} \\ \Leftrightarrow 80 &= \frac{1}{2}d(P, d).BE + \frac{1}{2}AB.AP + \frac{1}{2}DP.DE + \frac{1}{2}CE.CB \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\Leftrightarrow 80 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{19}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{b^2 + \frac{25b^4}{64a^2}} + \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{8}b + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{8} \cdot \left(1 - \frac{5b^2}{8a^2}\right)ab + \frac{1}{2} \cdot \frac{5b^2}{8a^2} \cdot ab \\ \Leftrightarrow 160 &= \frac{19}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{b^2 + \frac{25b^4}{64a^2}} + ab + \frac{ab}{8} \cdot \frac{5b^2}{8a^2} \\ \Leftrightarrow 80 &= \frac{19}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{b^2 + 16 \cdot \left(\frac{b^2}{64}\right)^3} + 4 \left(\frac{b^2}{64}\right)^2.\end{aligned}$$

Đặt $\frac{b^2}{64} = t, t > 0$ ta được phương trình:

$$\begin{aligned}80 &= \frac{19}{\sqrt{5}} \sqrt{64t + 16t^3} + 4t^2 \\ \Leftrightarrow 20\sqrt{5} &= 19\sqrt{t^3 + 4t} + \sqrt{5}t^2 \\ \Leftrightarrow 19\sqrt{t^3 + 4t} &= \sqrt{5}(20 - t^2) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 20 - t^2 \geq 0 \\ 361(t^3 + 4t) = 5(400 - 40t^2 + t^4) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t \leq 2\sqrt{5} \\ (t - 1)(5t^3 - 356t^2 - 556t - 2000) = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Với $0 < t \leq 2\sqrt{5}$ ta có $5t^3 - 356t^2 - 556t - 2000 < 0$ nên ta được $t = 1$ thỏa mãn.

Với $t = 1 \Rightarrow b = 8, a = 10$ nên chu vi hình chữ nhật $ABCD$ là $2(10 + 8) = 36$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 242. Cho tam giác ABC có trực tâm $H(3; 0)$ và trung điểm của BC là $I(6; 1)$. Đường thẳng $AH : x + 2y - 3 = 0$. Gọi D, E lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và C của tam giác ABC . Phương trình đường thẳng $DE : x - 2 = 0$. Gọi $A(a; b)$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị biểu thức $T = 2018a + 2019b$.

- A. $T = 6054$. B. $T = 2020$. C. $T = 2019$. D. $T = 4037$.

Lời giải.

Phương pháp: Sử dụng tính chất đường thẳng nối hai tâm vuông góc trục đẳng phương của hai đường tròn.

Gọi M là trung điểm AH . Tứ giác $BEDC, HEAD$ nội tiếp đường tròn tâm I và M

$$\Rightarrow MI \perp ED \Rightarrow MI : y = 1 \Rightarrow \{M\} = MI \cap AH \Rightarrow M(1; 1) \Rightarrow A(-1; 2).$$

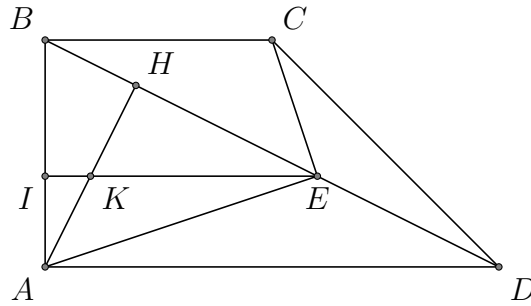
Chọn đáp án **B**

□

Câu 243. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang $ABCD$ vuông tại A, B và $AD = 2BC$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường chéo BD và E là trung điểm của đoạn HD . Giả sử $H(-1; 3)$, phương trình đường thẳng $AE : 4x + y + 3 = 0$ và $C\left(\frac{5}{2}; 4\right)$. Tìm tổng hoành độ các đỉnh A, B và D của hình thang $ABCD$.

- A. 7. B. -6. C. 6. D. 0.

Lời giải.



Qua E dựng đường thẳng song song với AD cắt AH tại K và cắt AB tại I .

Vì K là trực tâm của tam giác ABE nên $BD \perp AE$.

Vì K là trung điểm của AH nên KE song song AD và $KE = \frac{1}{2}AD$ hay KE song song và bằng BC .

Do đó $CE \perp AE \Rightarrow CE : 2x - 8y + 27 = 0$.

Mà $\{E\} = AE \cap CE \Rightarrow E\left(-\frac{3}{2}; 3\right)$. Mặt khác E là trung điểm của HD nên $D(-2; 3)$.

Khi đó $BD : y - 3 = 0$, suy ra $AH : x + 1 = 0$ nên $A(-1; 3)$.

Suy ra $AB : x - 2y + 3 = 0$. Do đó $B(3; 3)$.

Vậy $x_A + x_B + x_D = 0$.

Chọn đáp án **D**

☐

Câu 244. Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ với đường thẳng chứa cạnh AD có phương trình $(d_1) : 3x + y - 14 = 0$. Biết điểm $E(0; -6)$ là điểm đối xứng của C qua AB . Gọi M là trung điểm của CD . Biết $BD \cap ME = \{I\}$ với $I\left(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}\right)$. Tính độ dài đoạn thẳng HD với $H(2; -3)$.

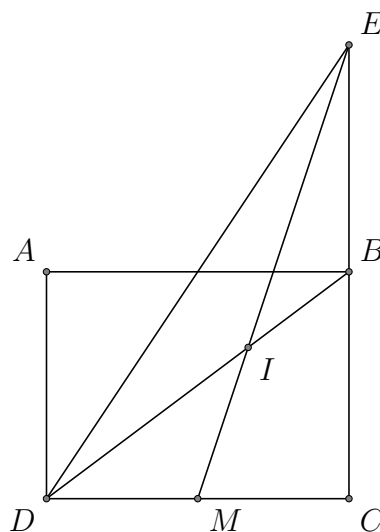
A. $HD = \sqrt{29}$.

B. $HD = 5$.

C. $HD = \sqrt{37}$.

D. $HD = \sqrt{5}$.

Lời giải.



Tam giác CDE có hai trung tuyến BD, ME cắt nhau tại điểm I . Do đó $\overrightarrow{EM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{EI}$.

Đặt $M(a; b)$, ta có

$$(a; b+6) = \frac{3}{2} \left(\frac{2}{3}; \frac{14}{3} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Vậy $M(1; 1)$.

Đường thẳng CD đi qua điểm M và vuông góc với AD nên có phương trình $d' : x - 3y + 2 = 0$.

Vậy tọa độ điểm D thỏa hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x + y - 14 = 0 \\ x - 3y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

Do đó $HD = \sqrt{29}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 245. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC . Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, C lên đường phân giác trong góc A của tam giác ABC . Gọi K là giao điểm của đường thẳng FB, CE . Biết đỉnh A nằm trên đường thẳng $d: 2x + y + 3 = 0$ và các điểm $E(-2; 1), K(-1; -\frac{1}{2})$.

Giả sử $A(a; b)$ với $a \in \mathbb{Z}$, tính giá trị biểu thức $T = a^2 + b^2$.

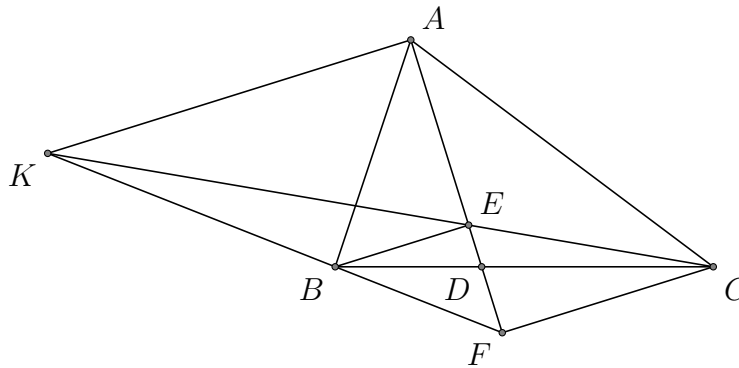
A. $T = 2$.

B. $T = 1$.

C. $T = 5$.

D. $T = 8$.

Lời giải.



Gọi D là giao điểm của phân giác trong góc A và cạnh BC .

Ta có $\begin{cases} BE \perp AD \\ CF \perp AD \end{cases} \Rightarrow BE \parallel CF$. Do đó ta có $\frac{KB}{KF} = \frac{KE}{KC} = \frac{EB}{FC}$ (1).

Mặt khác ta có $\triangle ABE \sim \triangle ACF$ nên có $\frac{EB}{FC} = \frac{AE}{AF}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $\frac{KB}{KF} = \frac{AE}{AF}$ nên $AK \parallel BE$. Do đó $AK \perp AD$.

Vì $A \in d$ nên ta có $A(a; -2a - 3), a \in \mathbb{R}$.

Khi đó ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AK}(-a - 1; 2a + \frac{5}{2}) \\ \overrightarrow{AE}(-a + 2; 2a + 2) \end{cases}$ mà $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AE} = 0$ nên có

$$(-a - 1)(-a + 2) + \left(2a + \frac{5}{2}\right)(2a + 2) = 0 \Leftrightarrow 5a^2 + 8a + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

Do $a \in \mathbb{Z}$ nên $A(-1; -1)$. Từ đó có $T = 2$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 246. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại A ngoại tiếp đường tròn (C) tâm K với tiếp điểm D trên AC . Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD cắt AB tại E khác B . Các đường thẳng qua A, D vuông góc với EC cắt BC tại F, G . Tính hoành độ điểm A biết $F(-3; -4)$, $G(1; -1)$, $K(-2; 3)$.

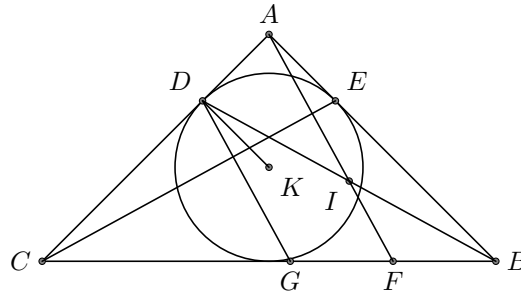
A. $x_A = 7..$

B. $x_A = -3..$

C. $x_A = 3..$

D. $x_A = -7..$

Lời giải.



Ta sẽ chứng minh rằng F là trung điểm của BG .

Gọi I là giao điểm của BD và AF . Ta có $\widehat{DAI} = \widehat{AEG}$ do cùng phụ với góc $\widehat{EAF}$ và $\widehat{AEG} = \widehat{ADI}$ do tứ giác $BDEC$ nội tiếp.

Từ đó có $\widehat{DAI} = \widehat{ADI}$, suy ra $IA = ID$.

Hơn nữa có tam giác DAB vuông tại A nên $IA = IB = ID$.

Ta có $IB = ID$, kết hợp với $AI \parallel DG$ (do cùng vuông góc CE) ta được F là trung điểm của BG .

+ Từ đó ta có $\begin{cases} x_B = -7 \\ y_B = -7 \end{cases} \Rightarrow B(-7; -7)$.

+ Phương trình đường thẳng BC là $3x - 4y - 7 = 0$.

+ Ta có $\overrightarrow{BK} = (5; 10)$ và $K(-2; 3)$ nên $BK: 2x - y + 7 = 0$.

+ Đường thẳng AB đối xứng với đường thẳng BC qua BK , suy ra $AB: x + 7 = 0$.

+ Bán kính đường tròn (C) có bằng khoảng cách từ K tới BC .

+ Do đó $r = \frac{|3(-2) - 4 \cdot 3 - 7|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5$.

suy ra $AK = r\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$. Cho nên nếu gọi $A(m; n)$ thì $(m + 2)^2 + (n - 3)^2 = 50$.

+ Hơn nữa do A thuộc AB nên ta có hệ $\begin{cases} (m + 2)^2 + (n - 3)^2 = 50 \\ m + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -7 \\ n = 3 \end{cases}$

Vậy $A(-7; 3)$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 247. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại A . gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên BC , các điểm $M(2; -1)$, N lần lượt là trung điểm của HB và HC ; điểm $K\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ là trực tâm của tam giác AMN . Giả sử $C(x_C; y_C)$ tính $S = 2x_C + y_C$, biết rằng A có tung độ âm và thuộc đường thẳng $d: x + 2y + 4 = 0$.

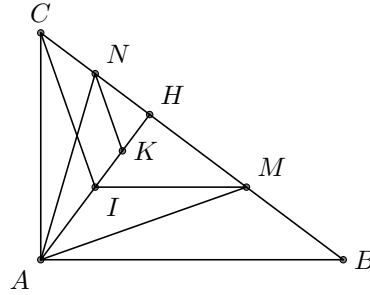
A. $S = 5$.

B. $S = 0$.

C. $S = -5$.

D. $S = -9$.

Lời giải.



+Gọi I là trung điểm của AH ta có $IM \parallel AB \Rightarrow IM \perp AC$.

+Suy ra I là trực tâm của $AMC \Rightarrow CI \perp AM$

+Mà $NK \perp AM \Rightarrow NK \parallel CI$ nên K là trung điểm của IH .

Đặt $A(-2a-4; a) \in d(a < 0)$. Từ hệ thức $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KH} \Rightarrow H\left(\frac{2a+2}{3}; \frac{2-a}{3}\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{AK} = \left(\frac{7}{2} + 2a; \frac{1}{2} - a\right); \overrightarrow{MH} = \left(\frac{2a-4}{3}; \frac{5-a}{3}\right)$.

Khi đó: $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{MH} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{2} + 2a\right)\left(\frac{2a-4}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - a\right)\left(\frac{5-a}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 10a^2 - 13a - 23 = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a = -1 \\ a = \frac{23}{10} \end{cases} \Rightarrow A(-2; -1).$$

+Tìm được $H(0; 1), B(4; -3)$.

+Phương trình $AC: 3x - y + 5 = 0, BC: x + y - 1 = 0$.

+Tìm được tọa độ của $C(-1; 2)$. Vậy $S = 0$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 248. Trong mặt phẳng Oxy cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau. Gọi $M\left(-\frac{1}{2}; 3\right)$ và $N\left(\frac{7}{2}; 5\right)$ lần lượt là trung điểm các cạnh AB và AD . Đường thẳng qua M vuông góc với CD cắt đường thẳng qua N vuông góc với BC tại điểm I . Biết $C(3; 1)$, $AD = 5$ và A có hoành độ lớn hơn 1. Tọa độ trực tâm của tam giác IMN là $H(a; b)$. Tính $4a + b$.

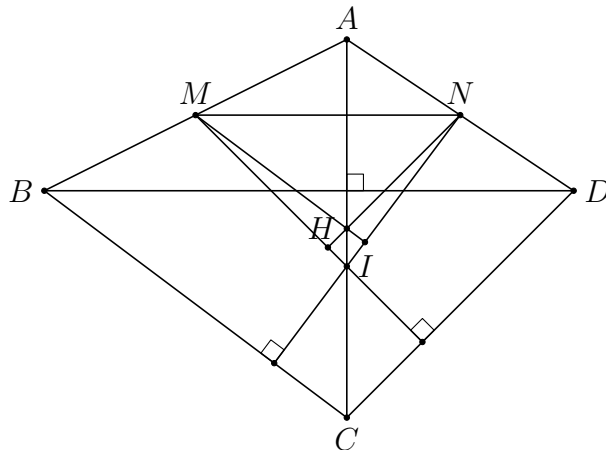
A. 24.

B. 12.

C. 2.

D. 11.

Lời giải.



Gọi H là trung điểm của AC , ta có $MH \parallel BC$ và $NH \parallel CD$ nên $MH \perp NI$ và $NH \perp MI$. Suy ra H là trực tâm của tam giác IMN nên $IH \perp MN$ mà $HA \perp MN$ ($MN \parallel BD$), suy ra I, A, H thẳng hàng. Đường thẳng AC qua $C(3; 1)$ vuông góc với MN có phương trình $2x + y - 7 = 0$.

Tácó: $A(t; 7 - 2t) \in AC$ nên

$$\begin{aligned} AN &= \frac{AD}{2} = \frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{7}{2} - t\right)^2 + (-2 + 2t)^2 &= \frac{25}{4} \\ \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases} &\xrightarrow{t > 1} t = 2 \\ \Rightarrow A(2; 3). \end{aligned}$$

nên $H\left(\frac{5}{2}; 2\right) \Rightarrow 4a + b = 12$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 249. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $AC = 2AB$. Biết các điểm $D(-1; -2)$, $E(1; 2)$ lần lượt là chân đường phân giác trong và ngoài của tam giác ABC . Giả sử điểm $B(-\frac{a}{b}; -a)$, với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $a + b$.

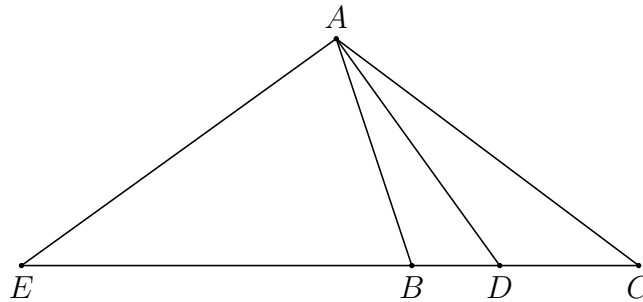
A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải.



Đặt $DB = x > 0$. Theo tính chất đường phân giác ta có

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow DC = 2x, BC = 3x.$$

Vì vậy

$$\frac{EB}{CE} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{EB}{EB + 3x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow EB = 3x.$$

Do đó

$$\overrightarrow{BE} = -3\overrightarrow{BD} \Rightarrow \begin{cases} 1 - x_B = -3(-1 - x_B) \\ 2 - y_B = -3(-2 - y_B) \end{cases} \Rightarrow B\left(-\frac{1}{2}; -1\right).$$

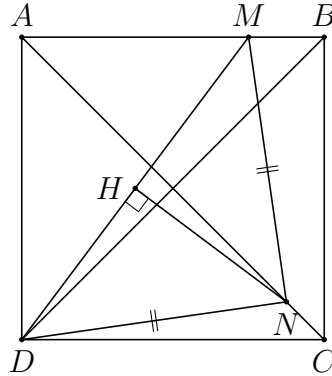
Chọn đáp án (A)

□

Câu 250. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ có M, N là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{7}{8}\overrightarrow{AC}$. Biết rằng hai điểm M, D thuộc đường thẳng $\Delta: 4x - 3y - 2 = 0$, $N\left(\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ và D có hoành độ lớn hơn $\frac{1}{3}$, hãy tính tổng hoành độ và tung độ của điểm A .

A. $-\frac{22}{25}$. B. $-\frac{24}{25}$. C. 0. D. $\frac{4}{25}$.

Lời giải.



- $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{7}{8}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AD} = \frac{7}{8}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{8}\overrightarrow{AD}$.
- $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{DN} = \frac{7}{64}AB^2 - \frac{7}{64}AD^2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{DN}$.
- $MN^2 = \frac{5}{6}AB^2 = DN^2 \Rightarrow MN = DN \Rightarrow \triangle DMN$ vuông cân tại N .

Gọi H là hình chiếu của N trên Δ thì $NH = d(N; \Delta) = \frac{5}{2}$.

$\triangle DMN$ vuông cân tại $N \Rightarrow \triangle DHN$ vuông cân tại H và H trung điểm của DM .

$\Rightarrow ND = NM = \sqrt{2}NH$.

$\Rightarrow D, M$ là các giao điểm của Δ và đường tròn tâm N , bán kính $R = \sqrt{2}NH = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

$\Rightarrow$ Tọa độ của D, M là các nghiệm $(x; y)$ của hệ

$$\begin{cases} 4x - 3y - 2 = 0 \\ \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(2; 2) \\ D(-1; -2) \text{ (loại)} \\ M(-1; -2) \\ D(2; 2) \text{ (nhận)} \end{cases}$$

$M(-1; -2), D(2; 2) \Rightarrow MD = 5 \Rightarrow AD = 4, AM = 3$.

Giả sử $A(a; b)$. Từ $AD = 4, AM = 3$ và hai điểm A, N nằm về hai phía khác nhau đối với đường thẳng DM ta có hệ

$$\begin{cases} (a - 2)^2 + (b - 2)^2 = 16 \\ (a + 1)^2 + (b + 2)^2 = 9 \\ (4a - 3b - 2) \cdot \frac{25}{2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{46}{25} \\ b = \frac{22}{25} \end{cases} \Rightarrow A\left(-\frac{46}{25}; \frac{22}{25}\right).$$

Vậy tổng hoành độ và tung độ của A là $-\frac{24}{25}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 251. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $D(a; b)$ với $b > a > 0$. Trên các cạnh AB , BC lấy các điểm M , N sao cho $MB + NB = AB$. Biết $P(\sqrt{3}; 1)$ thuộc đường thẳng DN và đường phân giác của góc $\widehat{MDN}$ có phương trình là $d: x - y\sqrt{3} + 6 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $T = 3a - b$?

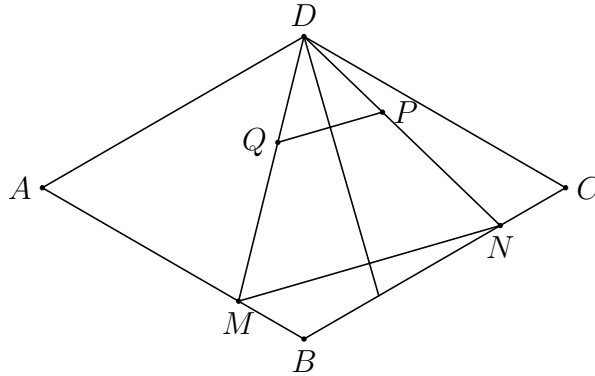
A. 6.

B. 7.

C. 8.

D. 9.

Lời giải.



Cách 1: Từ đề bài ta có các tam giác ABD , CBD là các tam giác đều, $AM = BN$ và $BM = CN$. Xét $\triangle ADM$ và $\triangle BDN$ có $\widehat{DAM} = \widehat{DBN}$, $AD = BD$ và $AM = BN$ nên $\triangle ADM = \triangle BDN \Rightarrow \widehat{ADM} = \widehat{BDN}$. (1)

Xét $\triangle BMD$ và $\triangle CND$ có $\widehat{DBM} = \widehat{DCN}$, $CD = BD$ và $CN = BM$ nên $\triangle BMD = \triangle CND \Rightarrow \widehat{NDC} = \widehat{MDB}$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{MDN} = 60^\circ$.

Cách 2: Xét $Q_{(D, 60^\circ)}$ ta có : $A \rightarrow B$; $B \rightarrow C$ nên $M \rightarrow N$. Do đó tam giác DMN đều.

Gọi Q là điểm đối xứng của P qua đường phân giác của góc $\widehat{MDN}$. Khi đó ta có

$$DP = PQ = 2d(P, d) = 2 \cdot \frac{|\sqrt{3} - \sqrt{3} + 6|}{\sqrt{1 + (\sqrt{3})^2}} = 6.$$

Gọi $D\left(t; \frac{t+6}{\sqrt{3}}\right) \in d$. Ta có

$$DP^2 = (t - \sqrt{3})^2 + \left(\frac{t+6-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)^2 = 36 \Rightarrow \begin{cases} t = 3 + \sqrt{3} \\ t = -6 + \sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy $D(3 + \sqrt{3}; 1 + 3\sqrt{3})$ hoặc $D(-6 + \sqrt{3}; 1)$.

Theo giả thiết ta nhận $D(3 + \sqrt{3}; 1 + 3\sqrt{3}) \Rightarrow \begin{cases} a = 3 + \sqrt{3} \\ b = 1 + 3\sqrt{3} \end{cases}$.

Ta có giá trị của biểu thức $T = 3a - b = 8$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 252. Cho hình bình hành $ABCD$ có diện tích bằng 4. Điểm $A(1; 0)$; $B(0; 2)$, tâm I của hình bình hành nằm trên đường thẳng $y = x$, biết điểm C có hoành độ âm, điểm $D(m; n)$. Tính $m + n$.

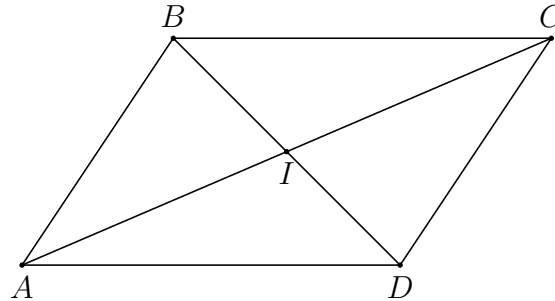
A. -2.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Lời giải.



Gọi $I(a; a)$, suy ra $C(2a - 1; 2a)$, $D(2a; 2a - 2)$.

Phương trình đường thẳng AB là: $2x + y - 2 = 0$.

Khoảng cách từ I đến AB bằng $d = \frac{|2a + a - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|3a - 2|}{\sqrt{5}}$.

Vì diện tích hình bình hành $ABCD$ bằng 4 lần diện tích tam giác IAB nên ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot AB \cdot d(I; AB) &= 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{|3a - 2|}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} = 1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{3} \\ a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C\left(\frac{3}{5}; \frac{8}{3}\right) \\ C(-1; 0). \end{cases} \end{aligned}$$

Vì C có hoành độ âm nên $C(-1; 0)$ nên $a = 0$, suy ra $D(0; -2)$. □

Câu 253. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC vuông tại A , phương trình đường thẳng $BC: \sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$, các đỉnh A và B thuộc trục hoành và $x_A > 0$, bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng 2. Gọi $G(x_G; y_G)$ là tọa độ trọng tâm của tam giác ABC . Giá trị của biểu thức $P = 3x_G - 6y_G$.

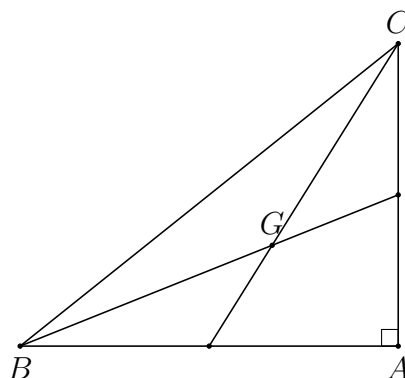
A. -5.

B. 0.

C. 5.

D. 10.

Lời giải.



Đường thẳng BC cắt Ox tại $B(1; 0)$. Gọi $A(a; 0)$ thuộc Ox là đỉnh của góc vuông ($0 < a \neq 1$).

Đường thẳng $x = a$ cắt (BC) tại $C(a; \sqrt{3}(a - 1))$.

Độ dài các cạnh: $AB = |a - 1|$, $AC = \sqrt{3}|a - 1| \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC = 2|a - 1|$.

Chu vi tam giác:

$$2p = |a - 1| + \sqrt{3}|a - 1| + 2|a - 1| = (3 + \sqrt{3})|a - 1| \Leftrightarrow p = \frac{(3 + \sqrt{3})|a - 1|}{2}.$$

Ta có: $S = pr$ suy ra $p = \frac{S}{r}$. (*)

$$\text{Nhưng } S = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{1}{2}|a - 1| \cdot \sqrt{3}|a - 1| = \frac{\sqrt{3}}{2}(a - 1)^2.$$

Cho nên (*) trở thành

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)|a - 1| &= \frac{\sqrt{3}}{4}(a - 1)^2 \\ \Rightarrow |a - 1| &= 2(\sqrt{3} + 1) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 + 2\sqrt{3} \\ a = -1 - 2\sqrt{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

Do $x_A > 0$ nên $a = -1 - 2\sqrt{3}$ (loại).

Trọng tâm G

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_G = \frac{2a + 1}{3} \\ y_G = \frac{\sqrt{3}(a - 1)}{3} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{2(3 + 2\sqrt{3}) + 1}{3} = \frac{7 + 4\sqrt{3}}{3} \\ y_G = \frac{\sqrt{3}(2 + 2\sqrt{3})}{3} = \frac{2\sqrt{3} + 6}{3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow G\left(\frac{7 + 4\sqrt{3}}{3}; \frac{2\sqrt{3} + 6}{3}\right). \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó giá trị của biểu thức } P = 3x_G - 6y_G = 3\left(\frac{7 + 4\sqrt{3}}{3}\right) - 6\left(\frac{6 + 2\sqrt{3}}{3}\right) = -5.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 254. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ biết $AD = 2AB$, đường thẳng AC có phương trình $x + 2y + 2 = 0$, $D(1; 1)$ và $A(a; b)$ ($a, b \in \mathbb{R}, a > 0$). Tính $a + b$.

A. $a + b = -4$.

B. $a + b = -3$.

C. $a + b = 4$.

D. $a + b = 1$.

Lời giải.

Gọi $A(a; b)$. Vì $A \in AC : x + 2y + 2 = 0$ nên:

$$a + 2b + 2 = 0 \Rightarrow a = -2b - 2.$$

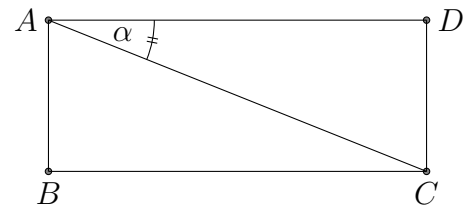
$$\text{Do } a > 0 \text{ nên } -2b - 2 > 0 \Rightarrow b < -1 \quad (*).$$

Khi đó $A(-2b - 2; b)$. Ta có $\overrightarrow{AD} = (2b + 3; 1 - b)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng AD .

$\vec{u} = (2; -1)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng AC .

$$\text{Trên hình vẽ, } \tan \alpha = \frac{DC}{AD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad (1).$$

$$\text{Lại có } \cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{AD} \cdot \vec{u}|}{|\overrightarrow{AD}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{5|b + 1|}{\sqrt{5}\sqrt{b^2 + 2b + 2}} \quad (2).$$



Từ (1) và (2) suy ra $\frac{5|b+1|}{\sqrt{5}\sqrt{b^2+2b+2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow b^2+2b-3=0 \Rightarrow b=-3$ (do $(*)$) $\Rightarrow a=4$.

Khi đó $A(4; -3)$, suy ra $a+b=1$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 255. Trong mặt phẳng Oxy , đường thẳng $(d): ax+by+c=0, (a^2+b^2 \neq 0)$. Vectơ nào sau đây là một vectơ pháp tuyến của đường thẳng (d) ?

- A. $\vec{n} = (a; -b)$. B. $\vec{n} = (b; a)$. C. $\vec{n} = (b; -a)$. D. $\vec{n} = (a; b)$.

Lời giải.

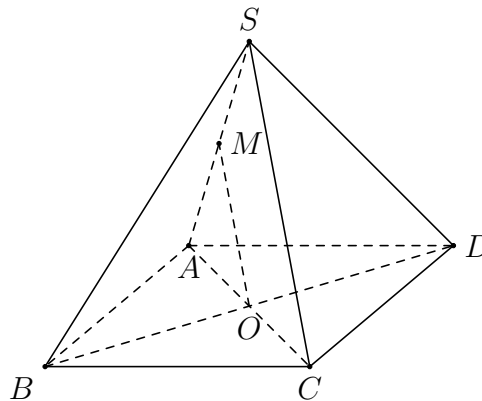
Ta có một vectơ pháp tuyến của đường thẳng (d) là $\vec{n} = (a; b)$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 256. Trong hệ tọa độ Oxy . Cho tam giác ABC có $A(2; 3), B(1; 0), C(-1; -2)$. Phương trình đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC là:

- A. $2x - y - 1 = 0$. B. $x - 2y + 4 = 0$. C. $x + 2y - 8 = 0$. D. $2x + y - 7 = 0$.

Lời giải.



Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow I(0; -1)$.

Ta có $\vec{AI} = (-2; -4) \Rightarrow \vec{n} = (2; -1)$ là véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng AI .

Phương trình đường thẳng AI là: $2(x-2) - (y-3) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 1 = 0$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 257. Trong mặt phẳng Oxy , cho hình vuông $ABCD$. Điểm M thuộc cạnh CD sao cho $\vec{MC} = 2\vec{DM}$, $N(0; 2019)$ là trung điểm của BC , K là giao điểm của hai đường thẳng AM và BD . Biết đường thẳng AM có phương trình $x - 10y + 2018 = 0$. Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng NK bằng

- A. 2019. B. $2019\sqrt{101}$. C. $\frac{2018}{11}$. D. $\frac{2019\sqrt{101}}{101}$.

Lời giải.

Gọi cạnh hình vuông bằng a . Do $\triangle ABK \sim \triangle MDK$

$$\text{nên } \frac{MD}{AB} = \frac{DK}{KB} = \frac{1}{3} \text{ suy ra } \frac{DK}{DB} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} \quad (1).$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} \overrightarrow{NK} &= \overrightarrow{BK} - \overrightarrow{BN} \\ &= \frac{3}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\ &= \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} \quad (2). \end{aligned}$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{NK} = \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \text{ suy ra } AM \perp NK.$$

Do đó NK có phương trình tổng quát là $10x + y - 2019 = 0$.

$$\text{Khi đó } d(O, NK) = \frac{|-2019|}{\sqrt{10^2 + 1^2}} = \frac{2019\sqrt{101}}{101}.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 258. Trong mặt phẳng Oxy , khoảng cách từ điểm $M(0; 4)$ đến đường thẳng $\Delta: x \cos \alpha + \sin \alpha + 4(2 - \sin \alpha) = 0$ bằng

A. $\sqrt{8}$.

B. $4 \sin \alpha$.

C. $\frac{4}{\cos \alpha + \sin \alpha}$.

D. 8.

Lời giải.

$$\text{Ta có } d(M, \Delta) = \frac{|0 \cdot \cos \alpha + 4 \cdot \sin \alpha + 4(2 - \sin \alpha)|}{\sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}} = 8.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 259. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng $d_1: x + 2y - 7 = 0$, $d_2: 2x - 4y + 9 = 0$.

A. $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

B. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

C. $\frac{1}{5}$.

D. $\frac{3}{5}$.

Lời giải.

$$\text{Có } \cos(d_1, d_2) = \frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot (-4)|}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-4)^2}} = \frac{3}{5}.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 260. Cho tam giác ABC với $A(1; 1)$, $B(0; -2)$, $C(4; 2)$. Phương trình tổng quát của đường trung tuyến đi qua điểm B của tam giác ABC là

A. $7x + 7y + 14 = 0$.

B. $5x - 3y + 1 = 0$.

C. $3x + y - 2 = 0$.

D. $-7x + 5y + 10 = 0$.

Lời giải.

$$\text{Gọi } M \text{ là trung điểm của } AC. \text{ Ta có } M\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{MB}\left(-\frac{5}{2}; -\frac{7}{2}\right).$$

Do đó đường trung tuyến đi qua B của tam giác ABC đi qua $B(0; -2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (7; -5)$, nên phương trình là

$$7(x - 0) - 5(y + 2) = 0 \Leftrightarrow 7x - 5y - 10 = 0 \Leftrightarrow -7x + 5y + 10 = 0.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 261. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình thoi $ABCD$ có tâm $I(2; 1)$ và $AC = 2BD$ điểm $M(0; \frac{1}{3})$ thuộc đường thẳng AB , điểm $N(0; 7)$ thuộc đường thẳng CD . Tìm tọa độ đỉnh B biết

B có hoành độ dương.

A. $(4; 2)$.

B. $(1; -1)$.

C. $(1; \frac{3}{5})$.

D. $(2; -\frac{7}{3})$.

Lời giải.

Gọi N' đối xứng với N qua I thì $N' \in AB$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{N'} = 2x_I - x_N = 2 \cdot 2 - 0 = 4 \\ y_{N'} = 2y_I - y_N = 2 \cdot 1 - 7 = -5 \end{cases} \Rightarrow N'(4; -5).$$

Ta có $\overrightarrow{MN'} = (4; -\frac{16}{3})$.

Đường thẳng AB đi qua $N'(4; -5)$ và nhận $\vec{n} = (4; 3)$ làm

VTPT nên đường thẳng AB có phương trình

$$4(x - 4) + 3(y + 5) = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y - 1 = 0.$$

$$\text{Khoảng cách từ } I \text{ đến đường thẳng } AB \text{ là } d(I, AB) = \frac{|4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2.$$

Vì $AC = 2BD$ nên $AI = 2BI$, đặt $BI = x \Rightarrow AI = 2x$.

Trong tam giác vuông ABI có

$$\frac{1}{d^2(I; AB)} = \frac{1}{IA^2} + \frac{1}{IB^2} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x = \sqrt{5} \Rightarrow BI = \sqrt{5} \Rightarrow BI^2 = 5.$$

$$\text{Do } \begin{cases} B \in AB \\ BI^2 = 5 \end{cases} \text{ nên tọa độ } B \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} 4x + 3y - 1 = 0 \\ (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; y = 1 \\ x = -\frac{1}{5}; y = \frac{3}{5} \end{cases}.$$

Vì B có hoành độ dương nên $B(1; -1)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 262. Có hai giá trị m_1, m_2 để đường thẳng $mx + y - 3 = 0$ hợp với đường thẳng $x + y = 0$ một góc 60° . Tổng $m_1 + m_2$ bằng

A. -3 .

B. 3 .

C. 4 .

D. -4 .

Lời giải.

Đường thẳng $mx + y - 3 = 0$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (m; 1)$.

Đường thẳng $x + y = 0$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = (1; 1)$.

Hai đường thẳng hợp với nhau một góc 60° nên có

$$\begin{aligned} \cos 60^\circ &= \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &= \frac{|m + 1|}{\sqrt{m^2 + 1} \cdot \sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow \sqrt{m^2 + 1} &= \sqrt{2} \cdot |m + 1| \\ \Leftrightarrow m^2 + 4m + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Phương trình có hai nghiệm, theo hệ thức Vi-ét $m_1 + m_2 = -4$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 263. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 1; 2)$ và $B(3; -5; 0)$. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là:

A. $(2; -4; 2)$.

B. $(4; -6; 2)$.

C. $(1; -2; 1)$.

D. $(2; -3; -1)$.

Lời giải.

Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là:

$$I = \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right) = (1; -2; 1)$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 264. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC với $A\left(-\frac{15}{2}; 2\right)$, $B(12; 15)$ và $C(0; -3)$. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC .

- A. $H\left(\frac{3}{2}; \frac{14}{3}\right)$. B. $H(-1; 2)$. C. $H\left(\frac{9}{4}; \frac{17}{2}\right)$. D. $H(0; -3)$.

Lời giải.

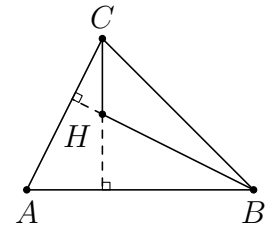
Gọi $H(x; y)$.

Ta có $\overrightarrow{BH} = (x - 12; y - 15)$, $\overrightarrow{CH} = (x; y + 3)$, $\overrightarrow{AC} = \left(\frac{15}{2}; -5\right)$, $\overrightarrow{AB} = \left(\frac{39}{2}; 13\right)$.

Vì H là trực tâm của tam giác ABC nên ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{15}{2}(x - 12) - 5(y - 15) = 0 \\ \frac{39}{2}x + 13(y + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ 3x + 2y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -3. \end{cases}$$

Vậy $H(0; -3)$.



Chọn đáp án **D**

□

Câu 265. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-1; 1)$, $B(2; 0)$ và $C(11; -6)$. Gọi $H(x; y)$ là trực tâm của tam giác ABC . Tính giá trị của $P = x - \frac{y}{3}$.

- A. $P = -5$. B. $P = 11$. C. $P = 13$. D. $P = \frac{49}{3}$.

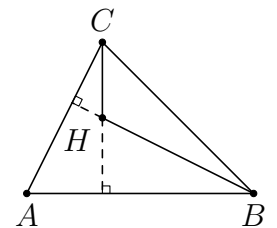
Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BH} = (x - 2; y)$, $\overrightarrow{CH} = (x - 11; y + 6)$, $\overrightarrow{AC} = (12; -7)$, $\overrightarrow{AB} = (3; -1)$.

Vì H là trực tâm của tam giác ABC nên ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12(x - 2) - 7y = 0 \\ 3(x - 11) - (y + 6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x - 7y = 24 \\ 3x - y = 39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{83}{3} \\ y = 44. \end{cases}$$

Vậy $P = x - \frac{y}{3} = \frac{83}{3} - \frac{44}{3} = 13$.



Chọn đáp án **C**

□

Câu 266. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-1; -3)$, $B(2; 5)$ và $C(4; 0)$. Xác định tọa độ trực tâm H của tam giác ABC .

- A. $\left(\frac{164}{31}; -\frac{15}{31}\right)$. B. $\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$. C. $(5; 2)$. D. $\left(-\frac{9}{62}; \frac{77}{62}\right)$.

Lời giải.

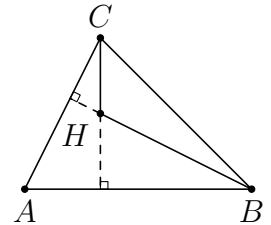
Gọi $H(x; y)$.

Ta có $\overrightarrow{BH} = (x - 2; y - 5)$, $\overrightarrow{CH} = (x - 4; y)$, $\overrightarrow{AC} = (5; 3)$, $\overrightarrow{AB} = (3; 8)$.

Vì H là trực tâm của tam giác ABC nên ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(x - 2) + 3(y - 5) = 0 \\ 3(x - 4) + 8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 3y = 25 \\ 3x + 8y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{164}{31} \\ y = -\frac{15}{31} \end{cases}$$

Vậy $H\left(\frac{164}{31}; -\frac{15}{31}\right)$.



Chọn đáp án **A**

□

Câu 267. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC với $A(3; 4)$, $B(4; 1)$ và $C(2; -3)$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- A. $I(-1; 1)$. B. $I\left(3; \frac{2}{3}\right)$. C. $I(9; 2)$. D. $I(7; 2)$.

Lời giải.

Gọi $I(x; y)$.

Ta có: $\overrightarrow{AI} = (x - 3; y - 4)$, $\overrightarrow{BI} = (x - 4; y - 1)$, $\overrightarrow{CI} = (x - 2; y + 3)$.

$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = (x - 4)^2 + (y - 1)^2 \\ (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = (x - 2)^2 + (y + 3)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 \\ x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 6y = -8 \\ -2x - 14y = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 268. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-1; -3)$, $B(2; 5)$ và $C(4; 0)$. Xác định tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- A. $I\left(\frac{164}{31}; -\frac{15}{31}\right)$. B. $I\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$. C. $I(5; 2)$. D. $I\left(-\frac{9}{62}; \frac{77}{62}\right)$.

Lời giải.

Gọi $I(x; y)$. Ta có: $\overrightarrow{AI} = (x + 1; y + 3)$, $\overrightarrow{BI} = (x - 2; y - 5)$, $\overrightarrow{CI} = (x - 4; y)$.

$$\begin{cases} AI = BI \\ AI = CI \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 1)^2 + (y + 3)^2 = (x - 2)^2 + (y - 5)^2 \\ (x + 1)^2 + (y + 3)^2 = (x - 4)^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 16y = 19 \\ 10x + 6y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{9}{62} \\ y = \frac{77}{62} \end{cases}$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 269. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-2; 3)$, $B\left(\frac{1}{4}; 0\right)$ và $C(2; 0)$.

Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- A. $\left(\frac{1}{12}; 1\right)$. B. $\left(\frac{9}{8}; 3\right)$. C. $(5; 2)$. D. $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

Gọi $I(x; y)$. Ta có: $\overrightarrow{AI} = (x + 2; y - 3)$, $\overrightarrow{BI} = \left(x - \frac{1}{4}; y\right)$, $\overrightarrow{CI} = (x - 2; y)$.

$$\begin{cases} AI = BI \\ AI = CI \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + y^2 \\ (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = (x - 2)^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24x - 32y = -69 \\ 8x - 6y = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{8} \\ y = 3. \end{cases}$$

Vậy $I\left(\frac{9}{8}; 3\right)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 270. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(2; 6)$, $B(-3; -4)$ và $C(5; 0)$. Tìm tọa độ tâm J của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- A. $J(2; 1)$. B. $J\left(-2; \frac{2}{3}\right)$. C. $J\left(\frac{47}{11}; \frac{16}{11}\right)$. D. $J\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

Lời giải.

Gọi $J(x; y)$. Ta có: $\overrightarrow{AJ} = (x - 2; y - 6)$, $\overrightarrow{BJ} = (x + 3; y + 4)$, $\overrightarrow{CJ} = (x - 5; y)$.

$$\begin{cases} AJ = BJ \\ AJ = CJ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 6)^2 = (x + 3)^2 + (y + 4)^2 \\ (x - 2)^2 + (y - 6)^2 = (x - 5)^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 3 \\ 2x - 4y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 1. \end{cases}$$

Vậy $J\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 271. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(1; 5)$, $B(-4; -5)$ và $C(4; -1)$. Tìm tọa độ tâm J của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- A. $J(1; 0)$. B. $J(1; -1)$. C. $J\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$. D. $J(4; -1)$.

Lời giải.

Gọi $J(x; y)$. Ta có: $\overrightarrow{AJ} = (x - 1; y - 5)$, $\overrightarrow{BJ} = (x + 4; y + 5)$, $\overrightarrow{CJ} = (x - 4; y + 1)$.

$$\begin{cases} AJ = BJ \\ AJ = CJ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 + (y - 5)^2 = (x + 4)^2 + (y + 5)^2 \\ (x - 1)^2 + (y - 5)^2 = (x - 4)^2 + (y + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 3 \\ 2x - 4y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = 0. \end{cases}$$

Vậy $J\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 272. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A\left(-\frac{15}{2}; 2\right)$, $B(12; 15)$ và $C(0; -3)$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- A. $I\left(\frac{3}{2}; \frac{14}{3}\right)$. B. $I(1; -2)$. C. $I\left(\frac{9}{4}; \frac{17}{2}\right)$. D. $I(0; -3)$.

Lời giải.

Gọi $I(x; y)$. Ta có: $\overrightarrow{AI} = \left(x + \frac{15}{2}; y - 2\right)$, $\overrightarrow{BI} = (x - 12; y - 15)$, $\overrightarrow{CI} = (x; y + 3)$.

$$\begin{cases} AI = BI \\ AI = CI \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{15}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = (x - 12)^2 + (y - 15)^2 \\ \left(x + \frac{15}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = x^2 + (y + 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x + 8y = 95 \\ 12x - 8y = 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{4} \\ y = \frac{17}{2}. \end{cases}$$

Vậy $I\left(\frac{9}{4}; \frac{17}{2}\right)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 273. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(1; 0)$, $B(-2; -1)$ và $C(0; 3)$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- A. $I(1; 1)$. B. $I(-1; 1)$. C. $I(-1; -1)$. D. $I(1; -1)$.

Lời giải.

Gọi $I(x; y)$. Ta có: $\overrightarrow{AI} = (x - 1; y)$, $\overrightarrow{BI} = (x + 2; y + 1)$, $\overrightarrow{CI} = (x; y - 3)$.

$$\begin{cases} AI = BI \\ AI = CI \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 = (x + 2)^2 + (y + 1)^2 \\ (x - 1)^2 + y^2 = x^2 + (y - 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = -2 \\ x - 3y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1. \end{cases}$$

Vậy $I(-1; 1)$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 274. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(5; 4)$, $B(2; 7)$ và $C(-2; -1)$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- A. $I\left(\frac{2}{3}; -\frac{8}{3}\right)$. B. $I\left(\frac{2}{3}; \frac{8}{3}\right)$. C. $I\left(-\frac{2}{3}; -\frac{8}{3}\right)$. D. $I\left(-\frac{2}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

Lời giải.

Gọi $I(x; y)$. Ta có: $\overrightarrow{AI} = (x - 5; y - 4)$, $\overrightarrow{BI} = (x - 2; y - 7)$, $\overrightarrow{CI} = (x + 2; y + 1)$.

$$\begin{cases} AI = BI \\ AI = CI \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 5)^2 + (y - 4)^2 = (x - 2)^2 + (y - 7)^2 \\ (x - 5)^2 + (y - 4)^2 = (x + 2)^2 + (y + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -2 \\ 7x + 5y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{8}{3}. \end{cases}$$

Vậy $I\left(\frac{2}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 275. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC với $A(3; -4)$, $B(-4; -2)$, $C(1; 3)$. Tìm tọa độ chân đường cao A' của đường cao kẻ từ A lên BC .

- A. $A'\left(-\frac{37}{53}; -\frac{156}{53}\right)$. B. $A'\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. C. $A'\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$. D. $A'\left(-\frac{1}{9}; -\frac{8}{9}\right)$.

Lời giải.

Đường thẳng BC có phương trình tổng quát $x - y + 2 = 0$.

Đường thẳng AA' đi qua điểm $A(3; -4)$ và nhận véc-tơ $\overrightarrow{BC} = 5(1; 1)$ làm véc-tơ pháp tuyến nên có phương trình tổng quát là $x + y + 1 = 0$.

$$\text{Tọa độ điểm } A' \text{ là nghiệm của hệ phương trình } \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Vậy $A'\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 276. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC với $A(1; -2)$, $B(3; -4)$ và $C(5; 2)$. Tìm tọa độ giao điểm I của đường thẳng BC với đường phân giác trong của góc $\widehat{A}$.

- A. $I\left(\frac{11}{3}; -2\right)$. B. $I(4; -1)$. C. $I(-4; 1)$. D. $I\left(\frac{13}{3}; 0\right)$.

Lời giải.

Gọi $I(x; y)$. Ta có: $\overrightarrow{BI} = \frac{AB}{AC}\overrightarrow{IC}$.

Biết $\overrightarrow{AB} = (2; -2) \Rightarrow AB = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$.

$\overrightarrow{AC} = (4; 4) \Rightarrow AC = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$.

Vậy $\overrightarrow{BI} = \frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}\overrightarrow{IC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IC}$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x_I = \frac{2x_B + 1x_C}{2+1} = \frac{6+5}{3} = \frac{11}{3} \\ y_I = \frac{2y_B + 1y_C}{2+1} = \frac{-8+2}{3} = -2. \end{cases}$$

Vậy $I\left(\frac{11}{3}; -2\right)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 277. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC với $A(1; -2)$, $B(3; -4)$ và $C(5; 2)$. Tìm tọa độ giao điểm I của đường thẳng BC với đường phân giác ngoài của góc $\hat{A}$.

- A. $I\left(\frac{11}{3}; -2\right)$. B. $I(4; -1)$. C. $I(1; -10)$. D. $I\left(\frac{13}{3}; 3\right)$.

Lời giải.

Biết $\overrightarrow{AB} = (2; -2) \Rightarrow AB = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$.

$\overrightarrow{AC} = (4; 4) \Rightarrow AC = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$.

Do I là chân đường phân giác ngoài của góc $\hat{A}$ nên

ta có $\overrightarrow{BI} = -\frac{AB}{AC}\overrightarrow{IC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{IC}$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x_I = \frac{2x_B - 1x_C}{2-1} = \frac{6-5}{1} = 1 \\ y_I = \frac{2y_B - 1y_C}{2-1} = -8-2 = -10. \end{cases}$$

Vậy $I(1; -10)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 278. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC với $A(-2; 3)$, $B\left(\frac{1}{4}; 0\right)$ và $C(2; 0)$.

Tìm tọa độ tâm J của đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

- A. $J\left(\frac{1}{12}; 1\right)$. B. $J\left(\frac{9}{8}; 3\right)$. C. $J(5; 2)$. D. $J\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

$AB = \frac{15}{4}$, $AC = 5$, $k = -\frac{AB}{AC} = -\frac{3}{4}$

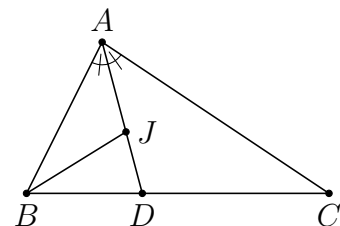
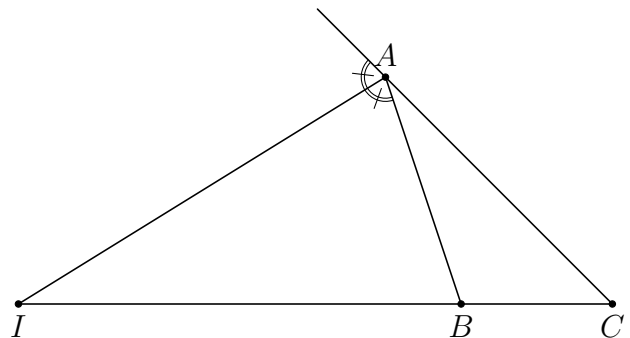
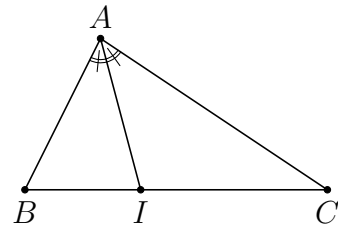
Gọi D là giao điểm của phân giác trong của góc $\hat{A}$ với BC . Khi

$$\text{đó, } \overrightarrow{DB} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} - x_D = -\frac{3}{4}(2 - x_D) \\ -y_D = -\frac{3}{4}(0 - y_D) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 1 \\ y_D = 0. \end{cases}$$

Suy ra $D(1; 0)$.

$$BA = \frac{15}{4}, BD = \frac{3}{4} \Rightarrow k' = -5.$$

Ta có J là giao điểm phân giác trong của góc $\hat{B}$ và AD .



$$\text{Do đó, } \overrightarrow{JA} = -5\overrightarrow{JD} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 - x_J = -5(1 - x_J) \\ 3 - y_J = -5(0 - y_J) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_J = \frac{1}{2} \\ y_J = \frac{1}{2} \end{cases}. \text{ Suy ra } J\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 279. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC với $A\left(-\frac{15}{2}; 2\right)$, $B(12; 15)$ và $C(0; -3)$. Tìm tọa độ tâm J của đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

- A. $J\left(\frac{3}{2}; \frac{14}{3}\right)$. B. $J(1; -2)$. C. $J\left(\frac{9}{4}; \frac{17}{2}\right)$. D. $J(0; -3)$.

Lời giải.

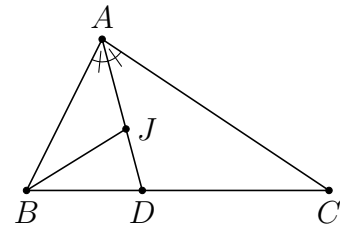
$$\text{Ta có: } AB = \frac{13\sqrt{13}}{2}, AC = \frac{5\sqrt{13}}{2}, k = -\frac{AB}{AC} = -\frac{13}{5}.$$

Gọi D là giao điểm của BC và đường phân giác trong góc A .

Khi đó,

$$\overrightarrow{DB} = -\frac{13}{5}\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 - x_D = -\frac{13}{5}(0 - x_D) \\ 15 - y_D = -\frac{13}{5}(-3 - y_D) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = \frac{10}{3} \\ y_D = 2. \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } D\left(\frac{10}{3}; 2\right).$$



$$AB = \frac{13\sqrt{13}}{2}, BD = \frac{13\sqrt{13}}{3} \Rightarrow k' = -\frac{AB}{BD} = -\frac{3}{2}.$$

Ta có J là giao điểm của AD và phân giác trong của góc $\widehat{B}$.

$$\text{Do đó, } \overrightarrow{JA} = k' \cdot \overrightarrow{JD} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{JD} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{15}{2} - x_J = -\frac{3}{2}\left(\frac{10}{3} - x_J\right) \\ 2 - y_J = -\frac{3}{2}(2 - y_J) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}x_J = -\frac{5}{2} \\ \frac{5}{2}y_J = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_J = -1 \\ y_J = 2. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } J(-1; 2).$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 280. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC với $A(2; 6)$, $B(-3; -4)$ và $C(5; 0)$. Tìm tọa độ tâm J của đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

- A. $J(2; 1)$. B. $J\left(-2; \frac{2}{3}\right)$. C. $J\left(\frac{47}{11}; \frac{16}{11}\right)$. D. $J\left(-\frac{1}{20}; \frac{49}{40}\right)$.

Lời giải.

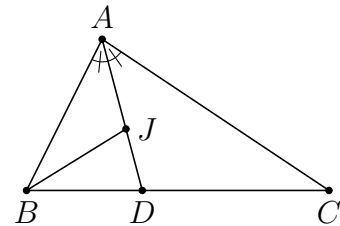
$$\text{Ta có: } AB = 5\sqrt{5}, AC = 3\sqrt{5}, k = -\frac{AB}{AC} = -\frac{5}{3}.$$

Gọi D là giao điểm của BC và đường phân giác trong góc A .

Khi đó,

$$\overrightarrow{DB} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 - x_D = -\frac{5}{3}(5 - x_D) \\ -4 - y_D = -\frac{5}{3}(0 - y_D) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 2 \\ y_D = -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } D\left(2; -\frac{3}{2}\right).$$



$$BA = 5\sqrt{5}, BD = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow k' = -\frac{BA}{BD} = -2.$$

Ta có J là giao điểm của AD và phân giác trong của góc $\widehat{B}$.

$$\text{Do đó, } \overrightarrow{JA} = k' \cdot \overrightarrow{JD} = -2\overrightarrow{JD} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x_J = -2(2 - x_J) \\ 6 - y_J = -2(-\frac{3}{2} - y_J) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}x_J = -\frac{5}{2} \\ \frac{5}{2}y_J = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_J = 2 \\ y_J = 1. \end{cases}$$

Vậy $J(2; 1)$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 281. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC với $A(-2; 3)$, $B(-2; \frac{2}{3})$ và $C(2; 0)$. Gọi D là chân đường phân giác trong góc A , tìm M thuộc đoạn AD sao cho diện tích tam giác MDB bằng hai lần diện tích tam giác MAB .

A. $J(-\frac{12}{11}; -\frac{61}{33})$. B. $J(-\frac{52}{33}; \frac{71}{33})$. C. $J(-\frac{38}{33}; \frac{43}{33})$. D. $J(\frac{2}{11}; -\frac{23}{33})$.

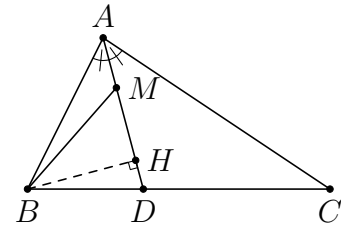
Lời giải.

Ta có: $AB = \frac{7}{3}$, $AC = 5$, $k = -\frac{AB}{AC} = -\frac{7}{15}$.

Gọi D là giao điểm của BC và đường phân giác trong góc A .

Ta có:

$$\overrightarrow{DB} = -\frac{7}{15}\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 - x_D = -\frac{7}{15}(2 - x_D) \\ \frac{2}{3} - y_D = -\frac{7}{15}(0 - y_D) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -\frac{8}{11} \\ y_D = \frac{5}{11}. \end{cases}$$



Suy ra $D(-\frac{8}{11}; \frac{5}{11})$.

Vì $S_{\triangle MBD} = 2S_{\triangle MAB}$ nên $MD = 2MA$. Hơn nữa, do M nằm giữa A, D nên $\overrightarrow{MD} = -2\overrightarrow{MA}$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x_M = \frac{x_D + 2x_A}{3} = -\frac{52}{33} \\ y_M = \frac{y_D + 2y_A}{3} = \frac{71}{33}. \end{cases}$$

Vậy $M(-\frac{52}{33}; \frac{71}{33})$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 282. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC với $A(1; 5)$, $B(-4; -5)$ và $C(4; -1)$. Tìm tọa độ tâm J của đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

A. $J(1; 0)$. B. $J(1; -1)$. C. $J(-2; -\frac{1}{4})$. D. $J(-1; -2)$.

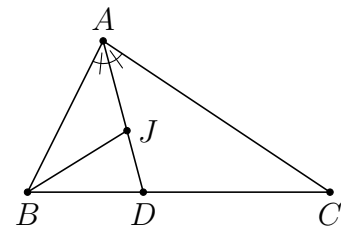
Lời giải.

Ta có: $AB = 5\sqrt{5}$, $AC = 2\sqrt{5}$, $k = -\frac{AB}{AC} = -\frac{5}{3}$.

Gọi D là giao điểm của BC và đường phân giác trong góc A .

Ta có:

$$\overrightarrow{DB} = -\frac{13}{5}\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 - x_D = -\frac{5}{3}(0 - x_D) \\ -5 - y_D = -\frac{5}{3}(-3 - y_D) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -\frac{3}{2} \\ y_D = -\frac{15}{4}. \end{cases}$$



Suy ra $D(-\frac{3}{2}; -\frac{15}{4})$.

$$AB = 5\sqrt{5}, BD = \frac{5\sqrt{5}}{4} \Rightarrow k' = -\frac{AB}{BD} = -4.$$

Ta có J là giao điểm của AD và phân giác trong góc $\widehat{B}$.

$$\text{Do đó, } \overrightarrow{JA} = k' \cdot \overrightarrow{JD} = -4\overrightarrow{JD} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x_J = -4\left(-\frac{3}{2} - x_J\right) \\ 5 - y_J = -4\left(-\frac{15}{4} - y_J\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_J = -1 \\ y_J = -2. \end{cases}$$

Vậy $J(-1; -2)$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 283. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC với $A(1; 5)$, $B(3; -1)$ và $C(6; 0)$. Tìm chân đường cao B' kẻ từ B lên CA .

A. $B'(-5; 1)$.

B. $B'(5; 1)$.

C. $B'(1; -5)$.

D. $B'(-5; -1)$.

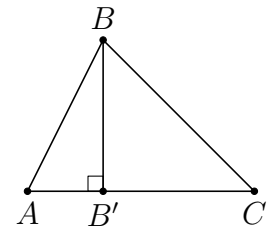
Lời giải.

Gọi $B'(x; y)$. Ta có: $\overrightarrow{BB'} = (x - 3; y + 1)$, $\overrightarrow{CA} = (-5; 5)$, $\overrightarrow{AB'} = (x - 1; y - 5)$.

B' là chân đường cao kẻ từ B lên AC khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{CA} \\ \overrightarrow{AB'} = t\overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5(x - 3) + 5(y + 1) = 0 \\ x - 1 = -5t \\ y - 5 = 5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 5 + 5t \\ -x + y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{4}{5} \\ x = 5 \\ y = 1. \end{cases}$$

Suy ra $B'(5; 1)$.



Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 284. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(2; 1)$, $B(-2; 4)$. Gọi H là hình chiếu của O lên AB . Tìm tọa độ điểm H .

A. $H\left(\frac{6}{5}; \frac{8}{5}\right)$.

B. $H\left(0; \frac{5}{2}\right)$.

C. $H\left(\frac{2}{3}; 2\right)$.

D. $H\left(-\frac{31}{50}; \frac{31}{25}\right)$.

Lời giải.

Gọi $H(x; y)$. Ta có: $\overrightarrow{OH} = (x; y)$, $\overrightarrow{AB} = (-4; 3)$, $\overrightarrow{AH} = (x - 2; y - 1)$.

H là chân đường cao kẻ từ O lên $AB \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AH} = t\overrightarrow{AB} \end{cases}$

Điều này tương đương với

$$\begin{cases} -4x + 3y = 0 \\ x - 2 = -4t \\ y - 1 = 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = 1 + 3t \\ -4x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{5} \\ x = \frac{6}{5} \\ y = \frac{8}{5} \end{cases}$$

Suy ra $H\left(\frac{6}{5}; \frac{8}{5}\right)$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 285. Đường thẳng đi qua hai điểm $M(2; -2)$ và $N(-1; 4)$ song song với đường thẳng nào dưới đây?

A. $y = x + 2$.

B. $y = -x + 2$.

C. $y = -2x + 1$.

D. $y = 2x - 1$.

Lời giải.

Đường thẳng $d: y = ax + b$ đi qua hai điểm $M(2; -2)$ và $N(-1; 4)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = -2 \\ -a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2. \end{cases}$$

Do đó $d: y = -2x + 2$ song song với đường thẳng $y = -2x + 1$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 286. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(3; -1)$ và $B(-6; 2)$. Phương trình nào dưới đây **không phải** là phương trình tham số của đường thẳng AB ?

A. $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -1 - t. \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -1 + t. \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = -3t \\ y = t. \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = -6 - 3t \\ y = 2 + t. \end{cases}$

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-9; 3)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AB nên các véc-tơ $\vec{u} = (3; -1)$, $\vec{v} = (-3; 1)$ cũng là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AB .

Do đó các phương trình $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -1 - t \end{cases}$ và $\begin{cases} x = -6 - 3t \\ y = 2 + t \end{cases}$ đều là phương trình tham số của đường thẳng AB .

Mặt khác đường thẳng AB cũng đi qua điểm $O(0; 0)$ nên phương trình tham số của đường thẳng AB là $\begin{cases} x = -3t \\ y = t. \end{cases}$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 287. Đường thẳng $12x + 5y = 60$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác. Tổng độ dài các đường cao của tam giác đó là

A. $\frac{60}{13}$.

B. $\frac{281}{13}$.

C. $\frac{360}{17}$.

D. 20.

Lời giải.

Đường thẳng $\Delta: 12x + 5y = 60$ cắt trục Ox tại $A(5; 0)$ và cắt trục Oy tại $B(0; 12)$.

Độ dài đường cao kẻ đỉnh O của tam giác ABC là $d(O, \Delta) = \frac{|12 \cdot 0 + 5 \cdot 0 - 60|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = \frac{60}{13}$.

Tam giác OAB là tam giác vuông tại O nên tổng độ dài các đường cao của tam giác đó là

$$OA + OB + d(O, \Delta) = 5 + 12 + \frac{60}{13} = \frac{281}{13}.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 288. Cho đường thẳng d có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a; b)$, với $a, b \in \mathbb{R}$. Xét các khẳng định sau

- (1) Nếu $b = 0$ thì đường thẳng d không có hệ số góc.
- (2) Nếu $a \neq 0$ thì hệ số góc của đường thẳng d là $\frac{b}{a}$.
- (3) Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (b; -a)$.
- (4) Véc-tơ $k\vec{n}$, với $k \in \mathbb{R}$, cũng là véc-tơ pháp tuyến của d .

Có bao nhiêu khẳng định **sai**?

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.

Lời giải.

Đường thẳng d có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a; b)$, với $a, b \in \mathbb{R}$. Khi đó

- Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (b; -a)$.
- Nếu $b \neq 0$ thì hệ số góc của đường thẳng d là $-\frac{a}{b}$.
- Nếu $b = 0$ thì đường thẳng d không có hệ số góc.
- Véc-tơ $k\vec{n}$, với $k \neq 0$, cũng là véc-tơ pháp tuyến của d .

Vậy các mệnh đề (2) và (4) là các mệnh đề sai.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 289. Cho tam giác ABC có $A(1; -3)$, $B(0; 2)$, $C(-2; 4)$. Đường thẳng Δ đi qua A và chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau. Phương trình của Δ là

- A. $2x - y - 7 = 0$. B. $x + y + 2 = 0$. C. $x - 3y - 10 = 0$. D. $3x + y = 0$.

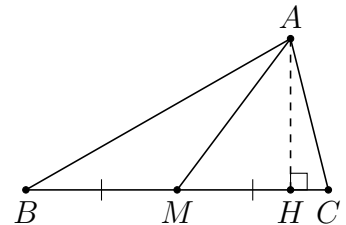
Lời giải.

Gọi M là điểm thuộc BC .

Kẻ đường cao AH của tam giác ABC , với $H \in BC$.

Theo đề bài, ta có

$$S_{ABM} = S_{ACM} \Leftrightarrow \frac{1}{2}BM \cdot AH = \frac{1}{2}CM \cdot AH \Leftrightarrow BM = CM.$$



Hay M là trung điểm của đoạn thẳng BC .

Do đó đường thẳng Δ là đường thẳng đi qua A và trung điểm M của đoạn thẳng BC .

Ta tính được $M(-1; 3)$.

Khi đó $\vec{AM} = (-2; 6)$ là véc-tơ chỉ phương của Δ , suy ra $\vec{n} = (3; 1)$ là véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng Δ .

Phương trình tổng quát của đường thẳng Δ là $3(x - 1) + (y + 3) = 0$ hay $3x + y = 0$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 290. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $(d_1): mx + 3y - 3 = 0$ và $(d_2): 3x + my - 3 = 0$ cắt nhau tại điểm A . Tính độ dài đoạn OA theo m .

- A. $OA = \frac{2\sqrt{3}}{m-3}$. B. $OA = \frac{3\sqrt{2}}{|m+3|}$. C. $OA = \frac{2\sqrt{3}}{|m+3|}$. D. $OA = \frac{3\sqrt{2}}{|m-3|}$.

Lời giải.

Đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt nhau suy ra $m \neq \pm 3$. Khi đó tọa độ giao điểm A chính là nghiệm của hệ

$$\text{phương trình } \begin{cases} mx + 3y - 3 = 0 \\ 3x + my - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{m+3} \\ y = \frac{3}{m+3} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } A\left(\frac{3}{m+3}; \frac{3}{m+3}\right) \text{ nên } OA = \frac{3\sqrt{2}}{|m+3|}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 291. Để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng $d: y = m(x - 1) + 2$ lớn nhất thì giá trị của m là

- A. $m = -\frac{1}{2}$. B. $m = \frac{1}{2}$. C. $m = 1$. D. $m = 2$.

Lời giải.

Ta thấy đường thẳng d luôn đi qua điểm $A(1; 2)$.

Do đó khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng d đạt giá trị lớn nhất bằng OA .

$$d: y = m(x - 1) + 2 \Leftrightarrow mx - y - m + 2 = 0.$$

$$d(O, d) = OA \Leftrightarrow \frac{|-m + 2|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |-m + 2|^2 = 5(m^2 + 1) \Leftrightarrow 4m^2 + 4m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 292. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có $A(2; 3), B(1; 2)$, biết trọng tâm $G(1; 2)$. Tìm tọa độ điểm C .

- A. $C(2; 1)$. B. $C(0; -1)$. C. $C(1; 0)$. D. $C(0; 1)$.

Lời giải.

Gọi $C(a; b)$ là điểm cần tìm.

Do $G(1; 2)$ là trọng tâm của $\triangle ABC$ nên ta có

$$\begin{cases} 1 = \frac{2 + 1 + a}{3} \\ 2 = \frac{3 + 2 + b}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1. \end{cases}$$

Vậy $C(0; 1)$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 293. Tìm a và b biết đường thẳng $y = ax + b$ đi qua điểm $M(1; -1)$ và song song với đường thẳng $y = 2x + 3$.

- A. $a = 2$ và $b = 4$. B. $a = -1$ và $b = 2$. C. $a = 2$ và $b = 3$. D. $a = 2$ và $b = -3$.

Lời giải.

Đường thẳng $y = ax + b$ song song với đường thẳng $y = 2x + 3$ nên ta có $\begin{cases} a = 2 \\ b \neq 3 \end{cases}$ (1).

Mặt khác $y = ax + b$ đi qua $M(1; -1)$ nên $a + b = -1$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} a = 2 \\ b = -3. \end{cases}$

Chọn đáp án **D** □

Câu 294. Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm $A(-3; 4)$ và $B(1; 6)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc trục tung sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng.

- A. $M\left(0; \frac{11}{2}\right)$. B. $M\left(0; -\frac{11}{2}\right)$. C. $M(0; 11)$. D. $M(0; -11)$.

Lời giải.

Điểm M cần tìm là giao điểm của đường thẳng AB và trục tung.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; 2)$, do đó đường thẳng AB nhận $(1; -2)$ làm một véc-tơ pháp tuyến.

Vậy $(AB): x - 2y + 11 = 0$.

Phương trình của trục tung là $x = 0$. Ta có hệ $\begin{cases} x - 2y + 11 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$.

Giải hệ này tìm được tọa độ của điểm M là $M\left(0; \frac{11}{2}\right)$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 295. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC với $A(1; 5)$, $B(-4; -5)$, $C(4; -1)$. Tìm tọa độ chân đường phân giác trong AD của tam giác ABC .

- A. $D\left(1; \frac{5}{2}\right)$. B. $D\left(1; -\frac{5}{2}\right)$. C. $D\left(-\frac{5}{2}; 1\right)$. D. $D(1; -5)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-5; -10)$ nên đường thẳng AB nhận $(2; -1)$ làm một véc-tơ pháp tuyến. Phương trình đường thẳng AB là $(AB): 2x - y + 3 = 0$.

Ta có $\overrightarrow{AC} = (3; -6)$ nên đường thẳng AC nhận $(2; 1)$ làm một véc-tơ pháp tuyến. Phương trình đường thẳng AC là $(AC): 2x + y - 7 = 0$.

Vậy phương trình hai đường phân giác là

$$\frac{2x - y + 3}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \pm \frac{2x + y - 7}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - 5 = 0. \end{cases}$$

Nhận thấy với B, C nằm khác phía đối với đường thẳng $(d_1): x - 1 = 0$, do đó đây là đường phân giác trong AD của tam giác ABC .

Ta có $\overrightarrow{BC} = (8; 4)$ nên đường thẳng BC nhận $(1; -2)$ làm một véc-tơ pháp tuyến. Phương trình đường thẳng BC là $(BC): x - 2y - 6 = 0$.

Điểm D là giao điểm của BC và d_1 nên có tọa độ thỏa hệ $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ x - 2y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{5}{2} \end{cases}$.

Vậy $D\left(1; -\frac{5}{2}\right)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 296. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $d_1: 2x + y + 4 - m = 0$ và $d_2: (m + 3)x + y - 2m - 1 = 0$. Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng d_1 song song với d_2 .

- A. $m = -1$. B. $m = 1$. C. $m = 2$. D. $m = 3$.

Lời giải.

Để d_1 song song với d_2 thì $\frac{m + 3}{2} = \frac{1}{1} \Leftrightarrow m = -1$.

Thử lại, với $m = -1$ ta có $d_1: 2x + y + 5 = 0$, $d_2: 2x + y + 1 = 0$; dễ thấy hai đường thẳng này song song với nhau. Vậy $m = -1$ là giá trị duy nhất thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 297. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho 2 đường thẳng $d_1: x + 2y - 5 = 0$, $d_2: 3x + my - 1 = 0$. Tìm m để góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 bằng 45° .

- A. $m = 1$. B. $m = 3$. C. $\begin{bmatrix} m = 1 \\ m = 9 \end{bmatrix}$. D. $\begin{bmatrix} m = 1 \\ m = -9 \end{bmatrix}$.

Lời giải.

$d_1: x + 2y - 5 = 0$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (1; 2)$,

$d_2: 3x + my - 1 = 0$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = (3; m)$.

Theo đề ta có: $\cos 45^\circ = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|3 + 2m|}{\sqrt{5}\sqrt{3^2 + m^2}} \Leftrightarrow 10(9 + m^2) = 4(3 + 2m)^2 \Leftrightarrow 6m^2 + 48m -$

$$54 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -9 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 298. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho 2 đường thẳng $d_1 : 2x + 3y - 2 = 0$, $d_2 : 3x - 2y - 5 = 0$ và điểm $M(1; 1)$. Đường thẳng d đi qua điểm M và tạo với các đường thẳng d_1, d_2 một tam giác cân. Tính góc giữa các đường thẳng d và d_1 .

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải.

d_1 có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (2; 3)$,

d_2 có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = (3; -2)$.

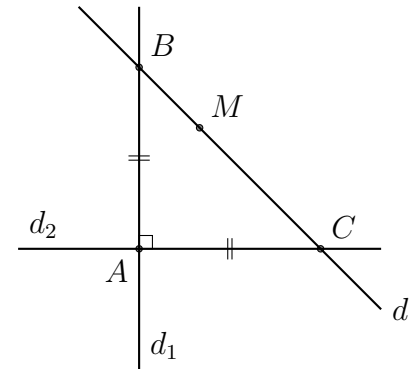
Ta có $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) = 0 \Rightarrow d_1 \perp d_2$.

Gọi A là giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 , B là giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d , C là giao điểm của hai đường thẳng d_2 và d . Khi đó tam giác ABC vuông tại A , suy ra nếu tam giác ABC cân thì nó vuông cân tại A .

Vậy $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 45^\circ$.

Chọn đáp án **(B)**

□



Câu 299. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ có phương trình đường chéo $BD: x + 2y - 5 = 0$, đỉnh $A(2; -1)$. Tính tổng các hệ số tự do trong phương trình của hai cạnh AB và AD biết rằng các hệ số trong phương trình cạnh AB và AD đã tối giản.

A. 1.

B. 2.

C. -1.

D. 0.

Lời giải.

Kiểm tra trực tiếp thấy không có đường thẳng nào qua AB và AD không có hệ số góc. Gọi k là hệ số góc của AB, AD . Phương trình AB, AD có dạng

$y = k(x - 2) - 1$ hay $kx - y - 2k - 1 = 0$.

Ta có AB và AD đều hợp với BD một góc 45° . Từ đó

$$\cos 45^\circ = \frac{|k - 2|}{\sqrt{5}\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Giải phương trình ta được $3k^2 + 8k - 3 = 0$ hay $k = \frac{1}{3}$ hoặc $k = -3$.

Suy ra phương trình $AB : -3x - y + 5 = 0$, $AD : x - 3y - 5 = 0$ hoặc ngược lại.

Vậy tổng các hệ số tự do trong phương trình của hai cạnh AB và AD là 0.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 300. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A và D , có đáy lớn là CD , đường thẳng AD có phương trình $3x - y = 0$, đường thẳng BD có phương trình $x - 2y = 0$, góc tọa bởi hai đường thẳng BC và AB bằng 45° . Viết phương trình đường thẳng BC biết diện tích hình thang bằng 24 và điểm B có hoành độ dương.

A. $x + 2y - 4\sqrt{10} = 0$. B. $2x + y - 4\sqrt{10} = 0$. C. $2x - y - 4\sqrt{10} = 0$. D. $x - 2y - 4\sqrt{10} = 0$.

Lời giải.

$D = AD \cap BD \Rightarrow D(0;0)$. Véc-tơ pháp tuyến của AD, BD lần lượt là $\vec{n}_1 = (3; -1), \vec{n}_2 = (1; -2)$.

Ta có $\cos \widehat{ADB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{ADB} = 45^\circ \Rightarrow AD = AB$.

Vì $(\widehat{BC}, \widehat{AB}) = 45^\circ \Rightarrow \widehat{BCD} = 45^\circ \Rightarrow \triangle BCD$ vuông cân tại $B \Rightarrow DC = 2AB$.

$$S_{ABCD} = 24 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(AB + CD)AD = 24 \Leftrightarrow \frac{3 \cdot AB^2}{2} = 24$$

$$\Rightarrow AB = 4 \Rightarrow BD = 4\sqrt{2}.$$

Gọi $B\left(x_B; \frac{x_B}{2}\right) \in BD, x_B > 0$.

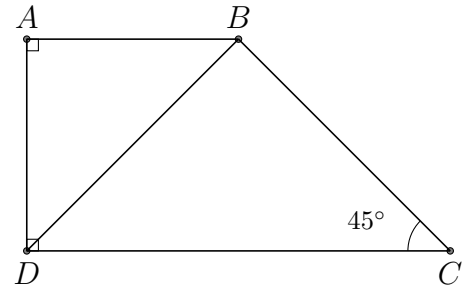
$$\text{Ta có } |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{x_B^2 + \left(\frac{x_B}{2}\right)^2} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow x_B = \frac{8\sqrt{10}}{5}$$

$$\Rightarrow B\left(\frac{8\sqrt{10}}{5}; \frac{4\sqrt{10}}{5}\right).$$

Đường thẳng BC đi qua B và vuông góc với BD nên có PT là

$$2x + y - 4\sqrt{10} = 0.$$

Chọn đáp án **(B)**



Câu 301. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ có $A(2;5), C(6;1)$. Đoạn thẳng MN có M, N lần lượt thuộc cạnh BC và CD sao cho $\widehat{MAN} = 45^\circ$. Véc-tơ nào sau đây là vectơ pháp tuyến của đường thẳng MN khi đoạn thẳng MN có độ dài nhỏ nhất.

A. $\vec{n}_1 = (1; -1)$.

B. $\vec{n}_2 = (1; 1)$.

C. $\vec{n}_3 = (1; 0)$.

D. $\vec{n}_4 = (0; 1)$.

Lời giải.

Nếu hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 1 và đặt $MB = x, DN = y$ thì ta chứng minh được $x + y + xy = 1$ (sử dụng hệ thức diện tích).

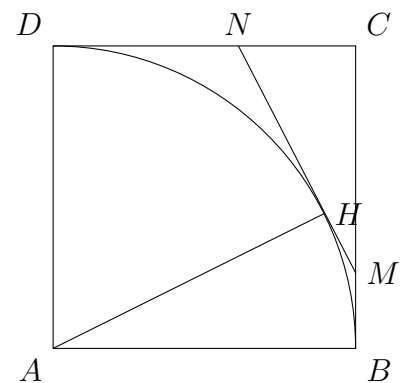
Ta có $MN = DN + BM = x + y$.

$$\text{Do } xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} \text{ nên ta có } \frac{(x+y)^2}{4} + x + y \geq 1 \Rightarrow x + y \geq -2 + 2\sqrt{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = -1 + \sqrt{2}$. Khi ấy $MN \perp AC$.

Áp dụng sang mô hình đồng dạng, có $\overrightarrow{AC} = (4; -4)$ nên véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng MN là $\vec{n}_1 = (1; -1)$.

Chọn đáp án **(A)**



Câu 302. Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $M(2;5)$ và $N(5;1)$. Phương trình đường thẳng đi qua M và cách N một đoạn có độ dài bằng 3 là

A. $x - 2 = 0$ hoặc $7x + 24y - 134 = 0$.

B. $y - 2 = 0$ hoặc $24x + 7y - 134 = 0$.

C. $x + 2 = 0$ hoặc $7x + 24y + 134 = 0$.

D. $y + 2 = 0$ hoặc $24x + 7y + 134 = 0$.

Lời giải.

Gọi d là đường thẳng đi qua M và cách N một khoảng bằng 3.

Do d đi qua M nên phương trình có dạng $A(x - 2) + B(y - 5) = 0$ hay $Ax + By - 2A - 5B = 0$.

$$\text{Khi đó } d(N, d) = \frac{|5A + B - 2A - 5B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 3$$

$$\Leftrightarrow |3A - 4B| = 3\sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\Leftrightarrow 7B^2 - 24AB = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ 7B = 24A \end{cases}.$$

a) Với $B = 0$, chọn $A = 1$, khi đó ta được đường thẳng d là $x - 2 = 0$.

b) Với $7B = 24A$, chọn $A = 7, B = 24$, khi đó đường thẳng d là $7x + 24y - 134 = 0$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 303. Trong mặt phẳng Oxy , cho $A(-1; 2)$, $B(3; 1)$ và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \end{cases}$. Biết điểm

$C(a; b)$, $a > 0$ thuộc Δ sao cho tam giác ABC cân tại B . Tính $2a - b$.

A. -1 .

B. 2 .

C. -3 .

D. 3 .

Lời giải.

Vì $C \in \Delta$ nên ta có thể đặt $C(x; x + 1)$. Do $BC = BA$ nên

$$(x - 3)^2 + x^2 = 17 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4. \end{cases}$$

Vì $a > 0$ nên $C(4; 5)$. Vậy $2a - b = 3$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 304. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ có $A(2; 2)$ và một đường chéo có phương trình $x + y - 5 = 0$. Tính $d(B, CD)$.

A. $d(B, CD) = 1$. B. $d(B, CD) = \frac{1}{2}$. C. $d(B, CD) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. D. $d(B, CD) = 2$.

Lời giải.

Do $2 + 2 - 5 \neq 0$ nên $x + y - 5 = 0$ là phương trình của đường chéo không đi qua điểm A , hay $x + y - 5 = 0$ là phương trình của đường chéo BD .

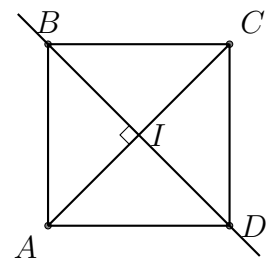
Đặt $a = d(B, CD)$, khi đó $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow d(A, BD) = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $d(A, BD) = \frac{|2 + 2 - 5|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Từ đó suy ra $a = 1$.

Chọn đáp án **(A)**

□



Câu 305. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , Cho điểm $M(m - 2; 2m + 5)$ di động và điểm $A(2; 1)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của khoảng cách AM khi m thay đổi.

A. $\frac{12}{\sqrt{5}}$. B. $\frac{11}{\sqrt{5}}$. C. $\frac{12}{\sqrt{3}}$. D. $\frac{11}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} x = m - 2 \\ y = 2m + 5 \end{cases}$ suy ra $\frac{x + 2}{1} = \frac{y - 5}{2}$ hay $2x - y + 9 = 0$.

Vậy M di động trên đường thẳng $\Delta: 2x - y + 9 = 0$.

Suy ra khoảng cách nhỏ nhất của AM là $d(A, \Delta) = \frac{|2 \cdot 2 - 1 + 9|}{\sqrt{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 306. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , phương trình đường thẳng d song song với đường thẳng $d' : 3x + 2y - 1 = 0$ và cách d' một khoảng là 13 và nằm trong nửa mặt phẳng bờ d' và chứa điểm gốc O có dạng $ax + by + c = 0$ với $\frac{b}{a}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a + b + c$.

- A. 13. B. 12. C. -7. D. 17.

Lời giải.

Gọi $M(x; y)$ là điểm bất kỳ trên d .

Ta có $d(M, d') = \sqrt{13}$ và O, M nằm cùng phía với d khi

$$\begin{cases} \frac{|3x + 2y - 1|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13} \\ (3x + 2y - 1)(3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 1) > 0 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \frac{|3x + 2y - 1|}{\sqrt{13}} = -\sqrt{13}.$$

Từ đó ta được phương trình đường thẳng $d : 3x + 2y + 12 = 0$ hay $a = 3, b = 2, c = 12$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 307. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình $d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ cùng qua điểm $A(6; 4)$ và cách điểm $B(1; 2)$ một khoảng là 5. Tính tổng $c_1 + c_2$ biết rằng hệ số đứng trước x trong phương trình đường thẳng d_1, d_2 đều bằng 1.

- A. $-\frac{85}{21}$. B. -35. C. $-\frac{167}{21}$. D. -47.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng d đi qua $A(6; 4)$ có dạng $a(x - 6) + b(y - 4) = 0$ với $a^2 + b^2 \neq 0$ hay $ax + by - 6a - 4b = 0$.

Ta có $d(B, d) = 5$ hay $\frac{|1a + 2b - 6a - 4b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 5$.

Biến đổi ta được $20ab - 21b^2 = 0$ suy ra $b = 0$ hoặc $a = \frac{21b}{20}$

Với $b = 0$ ta được phương trình $x - 6 = 0$.

Với $a = \frac{21b}{20}$ ta có $\frac{21}{20}bx + by - \frac{41b}{20} = 0$ hay $x + \frac{20}{21}y - \frac{41}{21} = 0$.

Từ đó ta có tổng các hệ số tự do là $-\frac{41}{21} - 6 = -\frac{167}{21}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 308. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có $A(2; -3), B(3; -2)$, diện tích tam giác ABC bằng $\frac{3}{2}$ và trọng tâm G thuộc đường thẳng $d : 3x - y - 8 = 0$. Tìm tung độ của đỉnh C ứng với hoành độ âm.

- A. 9. B. 7. C. 8. D. 10.

Lời giải.

Ta có $G \in d$ nên tọa độ $G(a; 3a - 8)$. Lại có $S_{GAB} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$.

Mà $AB = \sqrt{2}$, suy ra $d(G; AB) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Phương trình đường thẳng $AB : x - y - 5 = 0$, suy ra

$$\frac{|a - 3a + 8 - 5|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{hay} \quad |3 - 2a| = 1 \quad \text{suy ra} \quad a = 1 \quad \text{hoặc} \quad a = 2.$$

Với $a = 1$ tức là $G(1; -5)$ suy ra $C(-2; 10)$.

Với $a = 2$ tức là $G(2; -2)$ suy ra $C(1; -1)$.

Tung độ của đỉnh C ứng với hoành độ âm là 10.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 309. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC đều có đỉnh $A(1; 2)$, đỉnh B, C nằm trên đường thẳng $d: 3x - 4y - 2 = 0$. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ đi qua A sao cho tổng khoảng cách từ B và C đến Δ là lớn nhất.

- A. $3x - 4y + 5 = 0$. B. $3x + 4y - 5 = 0$. C. $4x + 3y - 10 = 0$. D. $4x + 3y - 10 = 0$.

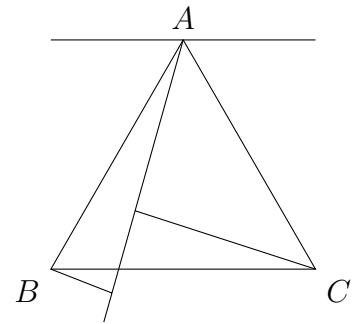
Lời giải.

Trường hợp đường thẳng Δ có điểm chung với đoạn BC thì tổng khoảng cách từ B và C tới Δ là lớn nhất bằng BC khi $\Delta \perp BC$.

Trường hợp Δ không có điểm chung với đoạn BC thì giá trị lớn nhất của tổng khoảng cách từ B và C tới Δ bằng 2 lần chiều cao AH của tam giác.

Đẳng thức xảy ra khi $\Delta \parallel BC$. Mặt khác $2 \cdot d(A, \Delta) > BC$.

Vậy đường thẳng Δ cần tìm đi qua A và song song với BC , có phương trình tổng quát là $3x - 4y + 5 = 0$.



Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 310. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $\Delta_m: (m - 2)x + (m - 1)y + 2m - 1 = 0$ với m là tham số, và điểm $A(2; 3)$. Giả sử $m = \frac{a}{b}$ (là phân số tối giản) để khoảng cách từ A đến đường thẳng Δ_m là lớn nhất. Khi đó, tính $S = a - 2b$.

- A. $S = 0$. B. $S = 1$. C. $S = 2$. D. $S = 3$.

Lời giải.

Ta có đường thẳng Δ_m luôn đi qua điểm cố định $M(1; -3)$. Gọi khoảng cách từ A đến Δ_m là AH , $H \in \Delta_m$. Khi đó AH lớn nhất khi $H \equiv M$. Khi đó $AM \perp \Delta_m$.

Ta có $\overrightarrow{AM}(-1; -6)$, Δ_m có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}(1 - m; m - 2)$.

$AM \perp \Delta_m \Leftrightarrow m = \frac{11}{5}$. Vậy $S = 1$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 311. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua điểm $A(1; -2)$ và cách điểm $M(-3; 5)$ một khoảng bằng 4.

- A. $\begin{cases} d: -x + 1 = 0 \\ d: 33x - 56y + 79 = 0 \end{cases}$. B. $\begin{cases} d: x - 1 = 0 \\ d: 33x + 56y + 79 = 0 \end{cases}$.
- C. $\begin{cases} d: x - 1 = 0 \\ d: 2x + 3y - 15 = 0 \end{cases}$. D. $\begin{cases} d: x + 1 = 0 \\ d: x - y + 1 = 0 \end{cases}$.

Lời giải.

Gọi phương trình tổng quát của $d: ax + by + c = 0$ ($a^2 + b^2 \neq 0$).

Do $A \in d$ nên $c = 2b - a$. Vậy $d: ax + by + 2b - a = 0$.

Do M cách d một khoảng bằng 4 nên $d(M, d) = 4$.

Suy ra $\frac{|-3a + 5b + 2b - a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 4 \Leftrightarrow (7b - 4a)^2 = 16(a^2 + b^2)$.

Rút gọn ta được: $33b^2 - 56ab = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 33b - 56a = 0 \end{cases}$.

Với $b = 0$, chọn $a = 1$ thì $d : x - 1 = 0$.

Với $33b - 56a = 0$, chọn $a = 33$ thì $b = 56$, vậy $d : 33x + 56y + 79 = 0$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 312. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$ và cách đều hai đường thẳng $\Delta_1 : x - 2y + 3 = 0$ và $\Delta_2 : 2x - y + 5 = 0$.

- A. $M(-2; 0)$. B. $M(-20; 4)$. C. $\begin{bmatrix} M(-2; 0) \\ M(-20; 4) \end{bmatrix}$. D. $\begin{bmatrix} M(-2; 0) \\ M\left(-\frac{20}{9}; \frac{4}{9}\right) \end{bmatrix}$.

Lời giải.

Do $M \in \Delta$ nên $M(-3 + t; 2 - 2t)$.

Do M cách đều Δ_1 và Δ_2 nên $d(M, \Delta_1) = d(M, \Delta_2)$.

$$\text{Suy ra } |-3 + t - 4 + 4t + 3| = |-6 + 2t - 2 + 2t + 5| \Leftrightarrow |5t - 4| = |4t - 3| \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{7}{9} \end{cases}$$

Vậy $M(-2; 0)$ hoặc $M\left(-\frac{20}{9}; \frac{4}{9}\right)$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 313. Một miếng giấy hình tam giác ABC diện tích S có I là trung điểm BC và O là trung điểm của AI . Cắt miếng giấy theo một đường thẳng qua O , đường thẳng này đi qua M, N lần lượt trên các cạnh AB, AC . Khi đó miếng giấy chứa điểm A có diện tích thuộc đoạn nào trong các đoạn sau đây?

- A. $\left[\frac{S}{4}; \frac{S}{3}\right]$. B. $\left[\frac{S}{3}; \frac{S}{2}\right]$. C. $\left[\frac{3S}{8}; \frac{S}{2}\right]$. D. $\left[\frac{S}{4}; \frac{3S}{8}\right]$.

Lời giải.

Đặt $S_1 = S_{\triangle AMO}$, $S_2 = S_{\triangle ANO}$ và $S = S_{\triangle ABC}$.

Đặt $\frac{AM}{AB} = x$, $\frac{AN}{AC} = y$, ta chứng minh được $\frac{1}{3} \leq x, y \leq 1$. Ta có:

$$\frac{S_{\triangle AMO}}{S_{\triangle ABI}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AO}{AI} \Leftrightarrow \frac{S_1}{\frac{1}{2}S} = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow S_1 = \frac{1}{4}xS.$$

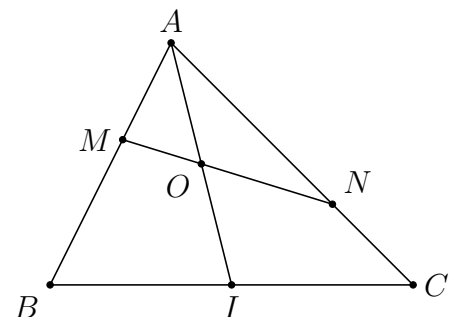
Tương tự ta có:

$$\frac{S_{\triangle ANO}}{S_{\triangle ACI}} = \frac{AN}{AC} \cdot \frac{AO}{AI} \Leftrightarrow \frac{S_2}{\frac{1}{2}S} = \frac{1}{2}y \Leftrightarrow S_2 = \frac{1}{4}yS.$$

Mặt khác

$$\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} \Leftrightarrow \frac{S_1 + S_2}{S} = xy \Leftrightarrow S_1 + S_2 = xyS.$$

Từ đó suy ra $4xy = x + y \Leftrightarrow y = \frac{x}{4x - 1}$. Diện tích phần chứa điểm A là $S_{\triangle AMN} = xyS$ nên để tìm GTLN, GTNN của $S_{\triangle AMN}$ ta đi tìm GTLN và GTNN của $xy = \frac{x^2}{4x - 1} = f(x)$. Xét hàm số



$f(x) = \frac{x^2}{4x-1}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$, ta có:

$$f'(x) = \frac{4x^2 - 2x}{(4x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin \left[\frac{1}{3}; 1\right] \\ x = \frac{1}{2} \in \left[\frac{1}{3}; 1\right] \end{cases}.$$

- $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.
- $f\left(\frac{1}{3}\right) = f(1) = \frac{1}{3}$.

Suy ra $\frac{S}{4} \leq S_{AMN} \leq \frac{S}{3}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 314. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $A(-3; 2)$ và điểm B thuộc đường thẳng $y = 2x - 1$. Để $AB > \sqrt{17}$. Điều kiện hoành độ x của B là

- A. $\begin{cases} x > 1 \\ 0 < x < \frac{1}{5} \end{cases}$ B. $\begin{cases} x > 1 \\ x < \frac{1}{5} \end{cases}$ C. $x > 0$. D. $x > 1$.

Lời giải.

Giả sử $B(x; 2x - 1)$.

$$AB > \sqrt{17} \Rightarrow (x+3)^2 + (2x-3)^2 > 17 \Leftrightarrow 5x^2 - 6x + 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < \frac{1}{5} \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 315. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = x_0 + u_1t \\ y = y_0 + u_2t \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hệ số góc của d là $k = \frac{u_2}{u_1}, u_1 \neq 0$. B. Hệ số góc của d là $k = \frac{u_1}{u_2}, u_2 \neq 0$.
C. Hệ số góc của d là $k = -\frac{u_1}{u_2}, u_2 \neq 0$. D. Hệ số góc của d là $k = -\frac{u_2}{u_1}, u_1 \neq 0$.

Lời giải.

Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}(u_1; u_2)$ nên có hệ số góc là $\frac{u_2}{u_1}$ với $u_1 \neq 0$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 316. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho $\triangle ABC$ có $A(1; 2), B(4; -2), C(-3; 5)$. Một véc-tơ chỉ phương của đường phân giác trong của góc A là

- A. $\vec{u} = (2; 1)$. B. $\vec{u} = (1; -1)$. C. $\vec{u} = (1; 1)$. D. $\vec{u} = (1; 2)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{AB} = (3; -4), \vec{AC} = (-4; 3) \Rightarrow |\vec{AB}| = |\vec{AC}|$, suy ra $\triangle ABC$ là tam giác cân tại A .

Gọi M là trung điểm của BC khi đó $\vec{AM}$ là véc-tơ chỉ phương của đường phân giác trong của góc A .

Ta có

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_C}{2} \\ y_M = \frac{y_B + y_C}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{4 + (-3)}{2} = \frac{1}{2} \\ y_M = \frac{-2 + 5}{2} = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

Suy ra $\overrightarrow{AM} = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Vậy một véc-tơ chỉ phương của đường phân giác trong của góc A có là $\vec{u} = (1; 1)$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 317. Cho hai đường thẳng: $\Delta_1 : \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 1 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ và $\Delta_2 : 3x + 2y - 14 = 0$. Khi đó

- A. Δ_1 và Δ_2 cắt nhau nhưng không vuông góc. B. Δ_1 và Δ_2 trùng nhau.
C. Δ_1 và Δ_2 vuông góc với nhau. D. Δ_1 và Δ_2 song song với nhau.

Lời giải.

Đường thẳng Δ_1 có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1(2; -3)$ và véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_1(3; 2)$. (1)

Đường thẳng Δ_2 có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_2(3; 2)$. (2)

Lấy $A(4; 1) \in \Delta_1$, kiểm tra thấy $A \in \Delta_2$. (3)

Từ (1)(2)(3) suy ra Δ_1 trùng Δ_2 .

Chọn đáp án **B** □

Câu 318. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , đường thẳng $d: 3x - 2y - 7 = 0$ cắt đường thẳng nào sau đây?

- A. $3x + 2y = 0$. B. $3x - 2y = 0$. C. $-3x + 2y - 7 = 0$. D. $6x - 4y - 14 = 0$.

Lời giải.

Quan sát 4 đáp án, chỉ đường thẳng có phương trình $3x + 2y = 0$ có véc-tơ pháp tuyến không cùng phương với véc-tơ pháp tuyến của d .

Chọn đáp án **A** □

Câu 319. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , phương trình nào sau đây biểu diễn đường thẳng **không** song song với đường thẳng $d: y = 2x - 1$.

- A. $2x - y + 5 = 0$. B. $2x - y - 5 = 0$. C. $-2x + y = 0$. D. $2x + y - 5 = 0$.

Lời giải.

Đường thẳng d có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2; -1)$ không cùng phương với véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng $2x + y - 5 = 0$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 320. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , xác định giá trị m sao cho hai đường thẳng $d_1: 2x + my - 4 = 0$ và $d_2: x + y - 1 = 0$ song song với nhau?

- A. $m = 4$. B. $m = 3$. C. $m = 1$. D. $m = -4$.

Lời giải.

Gọi $\vec{n}_1 = (2; m)$ và $\vec{n}_2 = (1; 1)$ lần lượt là véc-tơ pháp tuyến của d_1 và d_2 . Điều kiện cần để $d_1 \parallel d_2$ là $\vec{n}_1$ cùng phương với $\vec{n}_2$, ta tìm được $m = 2$. Kiểm tra lại, với $m = 2$ thì $d_1: 2x + 2y - 4 = 0$, điểm $M(1; 1)$ thuộc d_1 nhưng không thuộc d_2 nên $d_1 \parallel d_2$. Vậy để $d_1 \parallel d_2$ thì $m = 2$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 321. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm m để hai đường thẳng $y = 2x + 3$ và $y = (m - 1)x + \frac{1}{2}$ cắt nhau tại một điểm nằm trên trục hoành?

- A. $m = 0$. B. $m = 1$. C. $m = \frac{4}{3}$. D. $m = \frac{3}{4}$.

Lời giải.

Để d_1 và d_2 cắt nhau thì $2 \neq m - 1 \Leftrightarrow m \neq 3$. Khi đó giao điểm M của d_1 và d_2 có tọa độ thỏa hệ phương trình $\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = (m - 1)x + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2(m - 3)} \\ y = \frac{3m - 4}{m - 3} \end{cases}$. Để $M \in Ox$ thì $y_M = 0 \Leftrightarrow m = \frac{4}{3}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 322. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho ba đường thẳng $d_1: 2x + y - 1 = 0$, $d_2: x + 2y + 1 = 0$, $d_3: mx - y - 7 = 0$. Với giá trị nào của m thì ba đường thẳng trên đồng quy?

A. $m = -6$.

B. $m = 6$.

C. $m = -5$.

D. $m = 5$.

Lời giải.

Gọi A là giao điểm của đường thẳng d_1 và d_2 , khi đó tọa độ của A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow A(1; -1).$$

Để ba đường thẳng đồng quy thì d_3 cũng đi qua điểm A , hay $A \in d_3$, suy ra

$$m \cdot 1 - (-1) - 7 = 0 \Leftrightarrow m = 6.$$

Với $m = 6$ hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \\ 6x - y - 7 = 0 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất nên ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 đồng quy.

Vậy $m = 6$ là giá trị duy nhất của m thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 323. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho 3 đường thẳng $d_1: 2x + y - 4 = 0$, $d_2: 5x - 2y + 3 = 0$, $d_3: mx + 3y - 2 = 0$. Tìm giá trị của tham số m để 3 đường thẳng trên đồng quy.

A. $\frac{12}{5}$.

B. $-\frac{12}{5}$.

C. 12.

D. -12.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ 5x - 2y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{9} \\ y = \frac{26}{9} \end{cases}.$$

Vậy d_1 và d_2 cắt nhau tại điểm $M\left(\frac{5}{9}; \frac{26}{9}\right)$. Để d_1, d_2, d_3 đồng quy thì $M \in d_3$, tức là:

$$m \cdot \frac{5}{9} + 3 \cdot \frac{26}{9} - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -12.$$

Với $m = -12$, hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ 5x - 2y + 3 = 0 \\ mx + 3y - 2 = 0 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất nên d_1, d_2, d_3 đồng quy.

Vậy $m = -12$ là giá trị duy nhất thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 324. Cho đường thẳng $d: 2x + 3y - 1 = 0$ và đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(1; 0)$, $B(2; 3)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Đường thẳng d vuông góc với đường thẳng Δ và cắt đoạn thẳng AB .
- B. Đường thẳng d không vuông góc với đường thẳng Δ và không cắt đoạn thẳng AB .
- C. Đường thẳng d không vuông góc với đường thẳng Δ và cắt đoạn thẳng AB .
- D. Đường thẳng d vuông góc với đường thẳng Δ và không cắt đoạn thẳng AB .

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 3)$ nên chọn $\vec{n}_\Delta = (-3; 1)$.

Ta có $\vec{n}_d \cdot \vec{n}_{AB} \neq 0$ nên đường thẳng d không vuông góc với đường thẳng Δ .

Phương trình tham số đường thẳng Δ :
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3t. \end{cases}$$

Gọi M là giao điểm của (d) và đường thẳng Δ . Xét hệ phương trình
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3t \\ 2x + 3y - 1 = 0. \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $t = -\frac{1}{11}$ nên $M\left(\frac{10}{11}; -\frac{3}{11}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{MA} = \left(\frac{1}{11}; \frac{3}{11}\right)$, $\overrightarrow{MB} = \left(\frac{12}{11}; \frac{36}{11}\right)$ nên $\overrightarrow{MB} = 12\overrightarrow{MA}$.

Suy ra A, B nằm cùng phía với M .

Vậy đường thẳng d không vuông góc với đường thẳng Δ và không cắt đoạn thẳng AB .

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 325. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm m để $d_1: \begin{cases} x = 8 + (m+1)t \\ y = 10 - t \end{cases}$ song song với $d_2: mx + 6y - 76 = 0$.

- A. $m = -3$.
- B. $m = 2$.
- C. $m = 2$ hoặc $m = -3$.
- D. Không tồn tại m .

Lời giải.

Đường thẳng d_1 có vtcp là $\vec{u} = (m+1; -1)$ và đường thẳng d_2 có vtpt là $\vec{n} = (m; 6)$.

Để d_1 song song d_2 thì trước hết $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow m(m+1) - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 2$ hoặc $m = -3$.

Mặt khác, đường thẳng d_1 đi qua điểm $A(8; 10)$ nên để d_1 song song d_2 thì $A \notin d_2$, tức là $m \cdot 8 + 6 \cdot 10 - 76 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$.

Vậy $m = -3$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 326. Cho bốn điểm $A(1; 2)$, $B(4; 0)$, $C(1; -3)$, $D(7; -7)$. Vị trí tương đối của hai đường thẳng AB và CD là

- A. Song song.
- B. Cắt nhau nhưng không vuông góc với nhau.
- C. Trùng nhau.
- D. Vuông góc với nhau.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB} = (3; -2)$, $\overrightarrow{CD} = (6; -4)$ và $\overrightarrow{AC} = (0; -5)$. Ta thấy: $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương. Đường thẳng AB có phương trình $2x + 3y - 8 = 0$. Dễ thấy điểm C không thuộc đường thẳng AB nên hai đường thẳng AB và CD song song.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 327. Cho tam giác ABC với $A(1; 3)$, $B(-2; 4)$, $C(-1; 5)$ và đường thẳng $d: 2x - 3y + 6 = 0$. Đường thẳng d cắt cạnh nào của tam giác ABC ?

- A. Cạnh AB .
C. Cạnh AC .

- B. Cạnh BC .
D. Không cắt cạnh nào.

Lời giải.

Ta có

- $(2 \cdot 1 - 3 \cdot 3 + 6) \times (-2 \cdot 2 - 3 \cdot 4 + 6) = 10 > 0$ nên hai điểm A, B nằm cùng về một phía của đường thẳng $d \Rightarrow$ cạnh AB không cắt đường thẳng d .
- $(-2 \cdot 2 - 3 \cdot 4 + 6) \times (-1 \cdot 2 - 3 \cdot 5 + 6) = 110 > 0$ nên hai điểm B, C nằm cùng về một phía của đường thẳng $d \Rightarrow$ cạnh BC không cắt đường thẳng d .
- $(2 \cdot 1 - 3 \cdot 3 + 6) \times (-1 \cdot 2 - 3 \cdot 5 + 6) = 11 > 0$ nên hai điểm A, C nằm cùng về một phía của đường thẳng $d \Rightarrow$ cạnh AC không cắt đường thẳng d .

Chọn đáp án **D**

□

Câu 328. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $\Delta_1: mx + (m - 1)y - 3 = 0$ và $\Delta_2: x + y - 5 = 0$. Có bao nhiêu giá trị tham số m để góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 bằng 45° .

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải.

Δ_1 có véc-tơ chỉ phương $\vec{a}_1 = (m; m - 1)$, Δ_2 có véc-tơ chỉ phương $\vec{a}_2 = (1; 1)$. Khi đó,

$$\begin{aligned} \cos(\Delta_1, \Delta_2) &= \frac{|\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2|}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} \\ \Leftrightarrow \cos 45^\circ &= \frac{|m + m - 1|}{\sqrt{m^2 + (m - 1)^2} \cdot \sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} &= \frac{|2m - 1|}{\sqrt{2m^2 - 2m + 1} \cdot \sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow \sqrt{2m^2 - 2m + 1} &= |2m - 1| \\ \Leftrightarrow 2m^2 - 2m + 1 &= 4m^2 - 4m + 1 \\ \Leftrightarrow 2m^2 - 2m &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy có hai giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 329. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi α là góc giữa hai đường thẳng $d_1: 3x - 4y - 16 = 0$ và $d_2: 4x + 3y + 5 = 0$. Tìm giá trị của α .

- A. $\alpha = 60^\circ$. B. $\alpha = 30^\circ$. C. $\alpha = 45^\circ$. D. $\alpha = 90^\circ$.

Lời giải.

Ta có $\cos(d_1, d_2) = \frac{|3 \cdot 4 - 4 \cdot 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{4^2 + 3^2}} = 0$. Vậy hai đường thẳng d_1 và d_2 vuông góc với nhau.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 330. Các giá trị của tham số m để đường thẳng $\begin{cases} x = 2 + mt \\ y = 1 - 2t \end{cases}$ tạo với $x + 3y + 4 = 0$ một góc 45° là

- A. $m = 1, m = -4$. B. $m = -1, m = -4$. C. $m = -1, m = 4$. D. $m = 1, m = 4$.

Lời giải.

Ta có

$$\cos 45^\circ = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot m|}{\sqrt{2^2 + m^2} \cdot \sqrt{1^2 + 3^2}} \Leftrightarrow m^2 + 3m - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -4. \end{cases}$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 331. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $d: x + 2y + 4 = 0$ và $\Delta: 2x - y + 6 = 0$. Số đo của góc giữa hai đường thẳng d và Δ là

- A. 30° . B. 60° . C. 45° . D. 90° .

Lời giải.

Đường thẳng d có vtpt $\vec{a} = (1; 2)$, đường thẳng Δ có vtpt $\vec{b} = (2; -1)$.

Nhận thấy $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ nên góc giữa hai đường thẳng d và Δ bằng 90° .

Chọn đáp án **D** □

Câu 332. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $d_1: mx + y + 2 = 0$ và $d_2: x + my + m + 1 = 0$ (với m là tham số). Khi $d_1 \parallel d_2$ thì m thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(-2; 0)$. B. $(-4; -2)$. C. $(0; 2)$. D. $(2; 4)$.

Lời giải.

Để $d_1 \parallel d_2$ thì

$$\frac{m}{1} = \frac{1}{m} \neq \frac{2}{m+1} \quad (1)$$

Xét $\frac{m}{1} = \frac{1}{m} \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Nếu $m = 1$ ta có $d_1: x + y + 2 = 0 \equiv d_2$ (loại).

Nếu $m = -1$ ta có $d_1: -x + y + 2 = 0, d_2: x - y = 0$ (thỏa mãn).

Vậy $m = -1$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 333. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tính góc giữa hai đường thẳng $d_1: x + 2y + 4 = 0$ và $d_2: -x + 3y + 6 = 0$.

- A. $(d_1, d_2) = 45^\circ$. B. $(d_1, d_2) = 60^\circ$. C. $(d_1, d_2) = 30^\circ$. D. $(d_1, d_2) = 135^\circ$.

Lời giải.

Ta có $\cos(d_1, d_2) = \frac{|1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 3^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (d_1, d_2) = 45^\circ$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 334. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ biết $\vec{a} = (1; -2)$, $\vec{b} = (-1; -3)$. Tính góc giữa hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

- A. 45° . B. 60° . C. 30° . D. 135° .

Lời giải.

$$\text{Ta có } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-1 + 6}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Vậy } (\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 335. Cho hai đường thẳng $d_1: x - y - 2 = 0$ và $d_2: 2x + 3y + 3 = 0$. Góc tạo bởi đường thẳng d_1 và d_2 là (chọn kết quả gần đúng nhất)

A. $11^\circ 19'$.

B. $78^\circ 41'$.

C. $101^\circ 19'$.

D. $78^\circ 31'$.

Lời giải.

$d_1: x - y - 2 = 0$ có 1 véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (1; -1)$.

$d_2: 2x + 3y + 3 = 0$ có 1 véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (2; 3)$.

Gọi góc tạo bởi đường thẳng d_1 và d_2 là φ .

$$\text{Ta có } \cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|2 - 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{\sqrt{26}}{26} \Rightarrow \varphi \approx 78^\circ 41'.$$

Chọn đáp án **B**

□

ĐÁP ÁN

1. A	2. B	3. B	4. B	5. A	6. A	7. A	8. D	9. C	10. C
11. C	12. A	13. D	14. C	15. D	16. C	17. A	18. A	19. D	20. B
21. C	22. D	23. D	24. A	25. A	26. D	27. D	28. A	29. A	30. A
31. C	32. B	33. B	34. D	35. C	36. B	37. D	38. B	39. D	40. D
41. A	42. B	43. D	44. B	45. B	46. A	47. C	48. A	49. A	50. B
51. D	52. A	53. A	54. D	55. C	56. C	57. C	58. B	59. A	60. A
61. B	62. B	63. C	64. D	65. B	66. D	67. B	68. D	69. B	70. A
71. A	72. B	73. A	74. C	75. A	76. D	77. B	78. B	79. D	80. C
81. A	82. B	83. A	84. D	85. A	86. B	87. C	88. D	89. C	90. D
91. B	92. D	93. A	94. D	95. A	96. C	97. C	98. C	99. A	100. C
101. D	102. C	103. D	104. B	105. D	106. C	107. D	108. C	109. B	110. A
111. A	112. B	113. C	114. C	115. A	116. A	117. A	118. A	119. B	120. D
121. D	122. A	123. A	124. D	125. D	126. C	127. B	128. A	129. D	130. A
131. C	132. B	133. A	134. A	135. C	136. D	137. C	138. A	139. A	140. D
141. A	142. A	143. C	144. B	145. A	146. B	147. D	148. B	149. A	150. C
151. B	152. D	153. C	154. D	155. B	156. B	157. B	158. C	159. B	160. C
161. A	162. B	163. B	164. A	165. A	166. B	167. C	168. D	169. C	170. A
171. A	172. C	173. B	174. A	175. A	176. B	177. C	178. A	179. A	180. A
181. B	182. B	183. A	184. C	185. A	186. B	187. C	188. D	189. D	190. C
191. D	192. B	193. C	194. B	195. A	196. D	197. B	198. D	199. D	200. A
201. B	202. D	203. A	204. D	205. A	206. D	207. A	208. C	209. A	210. A
211. B	212. C	213. B	214. B	215. D	216. B	217. A	218. B	219. B	220. A
221. D	222. A	223. D	224. A	225. B	226. B	227. A	228. B	229. B	230. B
231. C	232. B	233. B	235. B	236. A	237. B	238. B	239. B	240. C	241. C
242. B	243. D	244. A	245. A	246. D	247. B	248. B	249. A	250. B	251. C
253. A	254. D	255. D	256. A	257. D	258. D	259. D	260. D	261. B	262. D
263. C	264. D	265. C	266. A	267. A	268. D	269. B	270. D	271. C	272. C
273. B	274. B	275. C	276. A	277. C	278. D	279. B	280. A	281. B	282. D
283. B	284. A	285. C	286. B	287. B	288. B	289. D	290. B	291. A	292. D
293. D	294. A	295. B	296. A	297. D	298. B	299. D	300. B	301. A	302. A
303. D	304. A	305. A	306. D	307. C	308. D	309. A	310. B	311. B	312. D
313. A	314. B	315. A	316. C	317. B	318. A	319. D	320. A	321. C	322. B
323. D	324. B	325. A	326. A	327. D	328. C	329. D	330. A	331. D	332. A
333. A	334. A	335. B							

§2 PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN KHI BIẾT TÂM VÀ BÁN KÍNH

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , phương trình đường tròn nhận điểm $I(a; b)$ làm tâm và có bán kính R là

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

2 DẠNG KHÁC CỦA PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

Phương trình dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ là phương trình của một đường tròn khi và chỉ khi

$$a^2 + b^2 - c > 0$$

Khi đó, tâm là $I(a; b)$, bán kính là $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

3 PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

Sau đây, ta có 2 công thức phương trình tiếp tuyến của đường tròn tại một điểm thuộc đường tròn (công thức tách đôi).

- Phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ tại điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc đường tròn là

$$(x_0 - a).(x - a) + (y_0 - b).(y - b) = R^2.$$

- Phương trình tiếp tuyến của đường tròn $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ tại điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc đường tròn là

$$x_0x + y_0y - a(x_0 + x) - b(y_0 + y) + c = 0.$$

Không dùng công thức tách đôi này, ta vẫn có thể viết được phương trình tiếp tuyến bằng cách tìm tọa độ vectơ pháp tuyến của tiếp tuyến này là $\overrightarrow{IM} = (x_0 - a; y_0 - b)$.

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tìm tâm và bán kính đường tròn.

Phương pháp giải:

- **Cách 1.** Đưa phương trình về dạng: $(C) : x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ (1). Xét dấu biểu thức $P = a^2 + b^2 - c$.
 - Nếu $P > 0$ thì (1) là phương trình đường tròn (C) có tâm $I(a; b)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.
 - Nếu $P \leq 0$ thì (1) không phải là phương trình đường tròn.
- **Cách 2.** Đưa phương trình về dạng: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = P$ (2).
 - Nếu $P > 0$ thì (2) là phương trình đường tròn có tâm $I(a; b)$ và bán kính $R = \sqrt{P}$.
 - Nếu $P \leq 0$ thì (2) không phải là phương trình đường tròn.

🔗🔗🔗 BÀI TẬP DẠNG 1 🔗🔗🔗

Ví dụ 1. Xét xem các phương trình sau có là phương trình của đường tròn không? Hãy xác định tâm và bán kính của các đường tròn đó (nếu có).

- a) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 9 = 0$ (1).
- b) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = 0$ (2).
- c) $2x^2 + 2y^2 - 6x - 4y - 1 = 0$ (3).
- d) $2x^2 + y^2 + 2x - 3y + 9 = 0$ (4).

Lời giải.

- a) Phương trình (1) có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ với $a = -1; b = 2; c = 9$.

Ta có $a^2 + b^2 - c = 1 + 4 - 9 < 0$.

Vậy phương trình (1) không phải là phương trình đường tròn.

- b) Ta có: $a^2 + b^2 - c = 9 + 4 - 13 = 0$.

Suy ra phương trình (2) không phải là phương trình đường tròn.

- c) Ta có: (3) $\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 3x - 2y - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{5}{2}$.

Vậy phương trình (3) là phương trình đường tròn tâm $I\left(\frac{3}{2}; 1\right)$ bán kính $R = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

- d) Phương trình (4) không phải là phương trình đường tròn vì hệ số của x^2 và y^2 khác nhau. □

Ví dụ 2. Xét xem các phương trình sau có là phương trình của đường tròn không? Hãy xác định tâm và bán kính của các đường tròn đó (nếu có).

- a) $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$ (1).
- b) $2x^2 + 2y^2 + 4x + 8y + 14 = 0$ (2).

Lời giải.

- a) Ta có:
$$\begin{cases} -2a = 2 \\ -2b = -6 \\ c = -15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \\ c = -15 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 - c = 25 > 0.$$

Vậy phương trình (1) là phương trình của đường tròn (C) có tâm $I(-1; 3)$ và bán kính $R = 5$.

- b) Ta có: (2) $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x + 4y + 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2a = 2 \\ -2b = 4 \\ c = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = 7 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 - c = -2 < 0.$

Vậy phương trình (2) không là phương trình của đường tròn. □

Ví dụ 3. Cho phương trình $x^2 + y^2 - 2mx - 4(m - 2)y + 6 - m = 0$ (1). Tìm điều kiện của m để (1) là phương trình đường tròn.

Lời giải.

Phương trình (1) là phương trình đường tròn khi và chỉ khi $a^2 + b^2 - c > 0$, với $a = m; b = 2(m - 2); c = 6 - m$.

$$\text{Hay } m^2 + 4(m - 2)^2 - 6 + m > 0 \Leftrightarrow 5m^2 - 15m + 10 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < 1 \end{cases}.$$

□

Dạng 2. Lập phương trình đường tròn.

Phương pháp giải:

- Cách 1.
 - Tìm toạ độ tâm $I(a; b)$ của đường tròn (C)
 - Tìm bán kính R của đường tròn (C)
 - Viết phương trình của (C) theo dạng $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.
- Cách 2.
 - Giả sử phương trình đường tròn (C) là: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ (hoặc $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$).
 - Từ điều kiện của đề bài thiết lập hệ phương trình với ba ẩn là a, b, c .
 - Giải hệ để tìm a, b, c , từ đó tìm được phương trình đường tròn (C) .

Chú ý:

- Cho đường tròn (C) có tâm I và bán kính R . $A \in (C) \Leftrightarrow IA = R$.
- (C) tiếp xúc với đường thẳng Δ tại $A \Leftrightarrow IA = d(I; \Delta) = R$.
- (C) tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1 và $\Delta_2 \Leftrightarrow d(I; \Delta_1) = d(I; \Delta_2) = R$.
- (C) cắt đường thẳng Δ_3 theo dây cung có độ dài $a \Leftrightarrow (d(I; \Delta_3))^2 + \frac{a^2}{4} = R^2$.

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 2 ❖❖❖

Ví dụ 1. Lập phương trình đường tròn có tâm $I(3; -5)$ bán kính $R = 2$.

Lời giải.

Ta có phương trình đường tròn là $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 2^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x + 10y + 30 = 0$.

□

Ví dụ 2. Lập phương trình đường tròn đường kính AB với $A(1; 6)$, $B(-3; 2)$.

Lời giải.

Đường tròn đường kính AB có:

- Tâm $I(-1; 4)$ là trung điểm AB .
- Bán kính $R = \frac{AB}{2} = 2\sqrt{2}$.

Do đó phương trình đường tròn là:

$$(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = (2\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 8y + 9 = 0.$$

□

Ví dụ 3. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm $I(-1; 2)$ và tiếp xúc với đường thẳng Δ : $x - 2y + 7 = 0$.

Lời giải.

Bán kính đường tròn (C) chính là khoảng cách từ I tới đường thẳng Δ nên

$$R = d(I; \Delta) = \frac{|-1 - 4 - 7|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Vậy phương trình đường tròn (C) là: $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = \frac{4}{5}$. □

Ví dụ 4. Viết phương trình đường tròn tâm $I(-2; 1)$, cắt đường thẳng $\Delta : x - 2y + 3 = 0$ tại hai điểm A, B thỏa mãn $AB = 2$.

Lời giải.

Gọi h là khoảng cách từ I đến đường thẳng Δ . Ta có:

$$h = d(I, \Delta) = \frac{|-2 - 2 + 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Gọi R là bán kính đường tròn, từ giả thiết suy ra:

$$R = \sqrt{h^2 + \frac{AB^2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{2^2}{4}} = \sqrt{\frac{6}{5}}.$$

Vậy phương trình đường tròn là: $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = \frac{6}{5}$. □

Ví dụ 5. Lập phương trình đường tròn đi qua ba điểm: $M(-2; 4)$, $N(5; 5)$, $P(6; -2)$.

Lời giải.

- Cách 1.* Gọi phương trình đường tròn (C) có dạng là: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$.
Do đường tròn đi qua ba điểm M, N, P nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4 + 16 + 4a - 8b + c = 0 \\ 25 + 25 - 10a - 10b + c = 0 \\ 36 + 4 - 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -20 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$.

- Cách 2.* Gọi $I(x; y)$ và R là tâm và bán kính đường tròn cần tìm. Ta suy ra:

$$IM = IN = IP \Leftrightarrow \begin{cases} IM^2 = IN^2 \\ IM^2 = IP^2 \end{cases}.$$

nên ta có hệ

$$\begin{cases} (x + 2)^2 + (y - 4)^2 = (x - 5)^2 + (y - 5)^2 \\ (x + 2)^2 + (y - 4)^2 = (x - 6)^2 + (y + 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Suy ra $I(2; 1)$, bán kính $IA = 5$.

Vậy phương trình đường tròn cần tìm (C): $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$. □

Ví dụ 6. Cho hai điểm $A(8; 0)$ và $B(0; 6)$.

- Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB .
- Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB .

Lời giải.

- Ta có tam giác OAB vuông ở O nên tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm của cạnh huyền AB suy ra $I(4; 3)$ và bán kính $R = IA = \sqrt{(8-4)^2 + (0-3)^2} = 5$.

Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB là: $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$.

- Ta có $OA = 8$; $OB = 6$; $AB = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$.

Mặt khác $\frac{1}{2}OA \cdot OB = pr$ (vì cùng bằng diện tích tam giác ABC).

$$\text{Suy ra } r = \frac{OA \cdot OB}{OA + OB + AB} = 2.$$

Để thấy đường tròn cần tìm có tâm thuộc góc phần tư thứ nhất và tiếp xúc với hai trục tọa độ nên tâm của đường tròn có tọa độ là $(2; 2)$.

Vậy phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB là $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$.

□

Ví dụ 7. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: 2x - y - 5 = 0$ và hai điểm $A(1; 2)$, $B(4; 1)$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm thuộc d và đi qua hai điểm A, B .

Lời giải.

- Cách 1.** Gọi I là tâm của (C) . Do $I \in d$ nên $I(t; 2t-5)$.

Hai điểm A, B cùng thuộc (C) nên

$$\begin{aligned} IA = IB &\Leftrightarrow (1-t)^2 + (7-2t)^2 = (4-t)^2 + (6-2t)^2 \\ &\Leftrightarrow t = 1 \end{aligned}$$

Suy ra $I(1; -3)$ và bán kính $R = IA = 5$.

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là:

$$(C): (x-1)^2 + (y+3)^2 = 25.$$

- Cách 2.** Gọi $M\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$ là trung điểm AB . Đường trung trực của đoạn AB đi qua M và nhận $\vec{AB} = (3; -1)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình $\Delta: 3x - y - 6 = 0$.

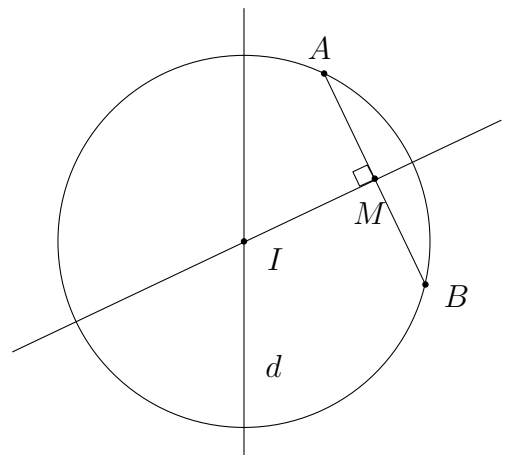
Tọa độ tâm I của (C) là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ 3x - y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(1; -3).$

Bán kính của đường tròn bằng $R = IA = 5$.

Vậy phương trình đường tròn cần tìm $(C): (x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$.

□

Ví dụ 8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $d_1: x + 3y + 8 = 0$, $d_2: 3x - 4y + 10 = 0$ và điểm $A(-2; 1)$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm thuộc d_1 , đi



qua điểm A và tiếp xúc với d_2 .

Lời giải.

Gọi I là tâm của (C) . Do $I \in d_1$ nên $I(-3t-8; t)$.

Theo giả thiết bài toán, ta có

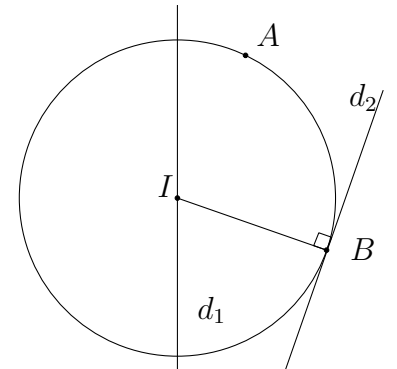
$$\begin{aligned} d(I, d_2) = IA &\Leftrightarrow \frac{|3(-3t-8) - 4t + 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \sqrt{(-3t-8+2)^2 + (t-1)^2} \\ &\Leftrightarrow t = -3. \end{aligned}$$

Suy ra $I(1; -3)$ và bán kính $R = IA = 5$.

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là

$$(C) : (x-1)^2 + (y+3)^2 = 25.$$

□



Ví dụ 9. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm nằm trên đường thẳng $d : x - 6y - 10 = 0$ và tiếp xúc với hai đường thẳng có phương trình $d_1 : 3x + 4y + 5 = 0$ và $d_2 : 4x - 3y - 5 = 0$.

Lời giải.

Vì đường tròn cần tìm có tâm K nằm trên đường thẳng d nên gọi $K(6a+10; a)$. Mặt khác đường tròn tiếp xúc với d_1, d_2 nên khoảng cách từ tâm K đến hai đường thẳng này bằng nhau và bằng bán kính R suy ra

$$\frac{|3(6a+10) + 4a + 5|}{5} = \frac{|4(6a+10) - 3a - 5|}{5}$$

$$\Leftrightarrow |22a + 35| = |21a + 35|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \frac{-70}{43} \end{cases}$$

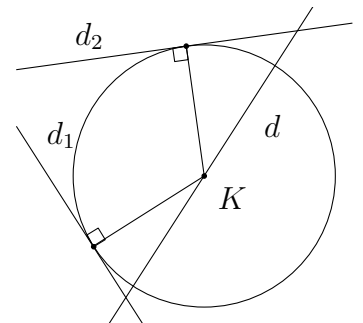
• Với $a = 0$ thì $K(10; 0)$ và $R = 7$ suy ra $(C) : (x-10)^2 + y^2 = 49$

• Với $a = \frac{-70}{43}$ thì $K\left(\frac{10}{43}; \frac{-70}{43}\right)$ và $R = \frac{7}{43}$ suy ra $(C) : \left(x - \frac{10}{43}\right)^2 + \left(y + \frac{70}{43}\right)^2 = \left(\frac{7}{43}\right)^2$

Vậy có hai đường tròn thỏa mãn có phương trình là

$$(C) : (x-10)^2 + y^2 = 49 \text{ và } (C) : \left(x - \frac{10}{43}\right)^2 + \left(y + \frac{70}{43}\right)^2 = \left(\frac{7}{43}\right)^2.$$

□



Ví dụ 10. Viết phương trình đường tròn tâm I thuộc đường thẳng $d_1 : x - y + 1 = 0$, bán kính $R = 2$ và cắt đường thẳng $d_2 : 3x - 4y = 0$ tại hai điểm A, B thỏa mãn $AB = 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Tâm I thuộc đường thẳng d_1 nên suy ra $I(a; a+1)$.

$$d(I, d_2) = \sqrt{R^2 - \frac{AB^2}{4}} = \sqrt{4 - \frac{12}{4}} = 1.$$

Do đó

$$\frac{|3a - 4(a + 1)|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 1 \Leftrightarrow |-a - 4| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -9 \end{cases}$$

- Với $a = 1$ ta có $I(1; 2)$, phương trình đường tròn là: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$.
- Với $a = -9$ ta có $I(-9; -8)$, phương trình đường tròn là: $(x + 9)^2 + (y + 8)^2 = 4$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , lập phương trình đường tròn đi qua ba điểm $A(-1; 3)$, $B(1; 4)$, $C(3; 2)$.

Lời giải.

Gọi phương trình đường tròn là $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$. Do đường tròn qua $A(-1; 3)$, $B(1; 4)$, $C(3; 2)$ nên ta có

$$\begin{cases} (-1)^2 + 3^2 - 2(-1)a - 2.3.b + c = 0 \\ 1^2 + 4^2 - 2.1.a - 2.4.b + c = 0 \\ 3^2 + 2^2 - 2.3.a - 2.2.b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 6b + c = -10 \\ -2a - 8b + c = -17 \\ -6a - 4b + c = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{6} \\ b = \frac{11}{6} \\ c = \frac{-2}{3} \end{cases}.$$

Phương trình đường tròn là $x^2 + y^2 - \frac{5}{3}x - \frac{11}{3}y - \frac{2}{3} = 0$.

□

Bài 2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: 2x - y - 4 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với các trục tọa độ và có tâm ở trên đường thẳng d .

Lời giải.

Gọi $I(m; 2m - 4) \in d$ là tâm đường tròn (C) . Theo giả thiết bài toán, ta có

$$d(I, Ox) = d(I, Oy) \Leftrightarrow |2m - 4| = |m| \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = \frac{4}{3} \end{cases}.$$

- Với $m = \frac{4}{3}$, suy ra $I\left(\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right)$. Bán kính đường tròn $R = d(I, Oy) = |m| = \frac{4}{3}$.

Vậy phương trình đường tròn $(C): \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$.

- Với $m = 4$, suy ra $I(4; 4)$. Bán kính đường tròn $R = d(I, Oy) = |m| = 4$.

Vậy phương trình đường tròn $(C): (x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 16$.

□

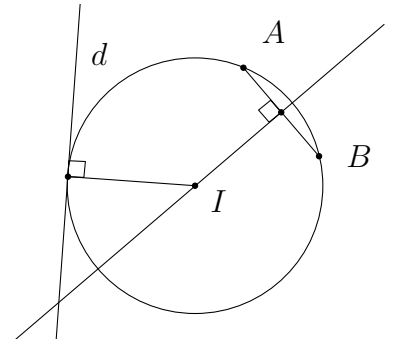
Bài 3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(-1; 1)$, $B(3; 3)$ và đường thẳng $d: 3x - 4y + 8 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với d .

Lời giải.

Đường trung trực Δ đi qua $M(1;2)$ là trung điểm AB và nhận $\overrightarrow{AB} = (4;2)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình $\Delta : 2x + y - 4 = 0$.

Do (C) đi qua hai điểm A, B nên tâm I của (C) thuộc trung trực Δ nên $I(t; 4 - 2t)$.

Theo giả thiết bài toán, ta có



$$\begin{aligned} IA = d(I, d) &\Leftrightarrow \sqrt{(-1-t)^2 + (2t-3)^2} = \frac{|3t - 4(4-2t) + 8|}{\sqrt{9+16}} \\ &\Leftrightarrow 5\sqrt{5t^2 - 10t + 10} = |11t - 8| \Leftrightarrow 2t^2 - 37t + 93 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = \frac{31}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

- Với $t = 3$, suy ra $I(3; -2)$. Bán kính $R = IA = 5$. Khi đó phương trình đường tròn cần tìm là

$$(C) : (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25.$$

- Với $t = \frac{31}{2}$, suy ra $I\left(\frac{31}{2}; -27\right)$. Bán kính $R = IA = \frac{65}{2}$. Khi đó phương trình đường tròn cần tìm là

$$(C) : \left(x - \frac{31}{2}\right)^2 + (y + 27)^2 = \frac{4225}{4}.$$

□

Bài 4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $d : x + 2y - 3 = 0$ và $\Delta : x + 3y - 5 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C) có bán kính bằng $\frac{2\sqrt{10}}{5}$, có tâm thuộc d và tiếp xúc với Δ .

Lời giải.

Gọi $I(-2t + 3; t) \in d$ là tâm của (C) . Theo giả thiết bài toán, ta có

$$d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|a - 2|}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ a = -2 \end{cases}.$$

- Với $a = 6$, suy ra $I(-9; 6)$. Phương trình đường tròn $(C) : (x + 9)^2 + (y - 6)^2 = \frac{8}{5}$.
- Với $a = -2$, suy ra $I(7; -2)$. Phương trình đường tròn $(C) : (x - 7)^2 + (y + 2)^2 = \frac{8}{5}$.

□

Bài 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $d_1 : \sqrt{3}x + y = 0$ và $d_2 : \sqrt{3}x - y = 0$. Gọi (C) là đường tròn tiếp xúc với d_1 tại A , cắt d_2 tại hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông tại B . Viết phương trình của (C) , biết tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và điểm A có hoành độ dương.

Lời giải.

Vì $A \in d_1 \Rightarrow A(a; -\sqrt{3}a), a > 0; B, C \in d_2 \Rightarrow B(b; \sqrt{3}b), C(c; \sqrt{3}c)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}(b-a; \sqrt{3}(a+b)), \overrightarrow{AC}(c-a; \sqrt{3}(c+a))$.

Tam giác ABC vuông tại B do đó AC là đường kính của đường tròn (C) .

Do đó

$$\begin{aligned} AC \perp d_1 &\Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ &\Rightarrow -1 \cdot (c-a) + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}(a+c) = 0 \\ &\Rightarrow 2a+c=0(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AB \perp d_2 &\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_2 = 0 \\ &\Rightarrow 1 \cdot (b-a) + 3(a+b) = 0 \\ &\Rightarrow 2b+a=0(2) \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác } S_{ABC} = \frac{1}{2}d(A; d_2) \cdot BC \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{|2\sqrt{3}a|}{2} \sqrt{(c-b)^2 + 3(c-b)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2a|c-b|=1(3)$$

Từ (1), (2) suy ra $2(c-b) = -3a$ thế vào (3) ta được $a|-3a|=1 \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\text{Do đó } b = -\frac{\sqrt{3}}{6}, c = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow A\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; -1\right), C\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; -2\right).$$

Suy ra (C) nhận $I\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}; -\frac{3}{2}\right)$ là trung điểm của AC làm tâm và bán kính là $R = \frac{AC}{2} = 1$.

$$\text{Vậy phương trình đường tròn cần tìm là } (C): \left(x + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = 1 \quad \square$$

Bài 6. Cho ba đường thẳng $d_1: x-y+1=0, d_2: 3x-4y=0, d_3: 4x-3y-3=0$. Viết phương trình đường tròn tâm I thuộc đường thẳng d_1 , cắt đường thẳng d_2 tại hai điểm A, B và cắt đường thẳng d_3 tại hai điểm C, D sao cho $AB = CD = 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

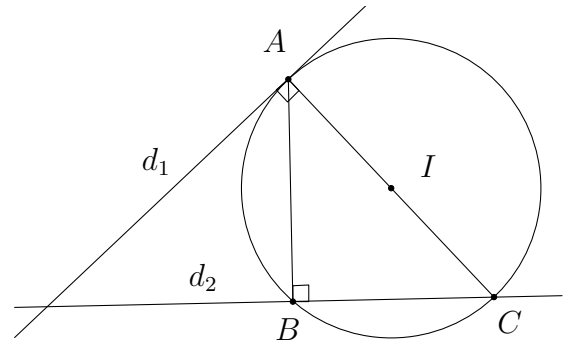
Tâm I thuộc đường thẳng d_1 nên suy ra $I(a; a+1)$.

$$\begin{aligned} d(I, d_2) &= \sqrt{R^2 - \frac{AB^2}{4}} = \sqrt{R^2 - 3} \\ d(I, d_3) &= \sqrt{R^2 - \frac{AB^2}{4}} = \sqrt{R^2 - 3} \end{aligned}$$

Suy ra

$$d(I, d_2) = d(I, d_3) \Rightarrow \frac{|-a-4|}{5} = \frac{|a-6|}{5} \Rightarrow a=1.$$

Với $a=1$ ta có $I(1; 2)$ và $R=2$, phương trình đường tròn là: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$. $\square$

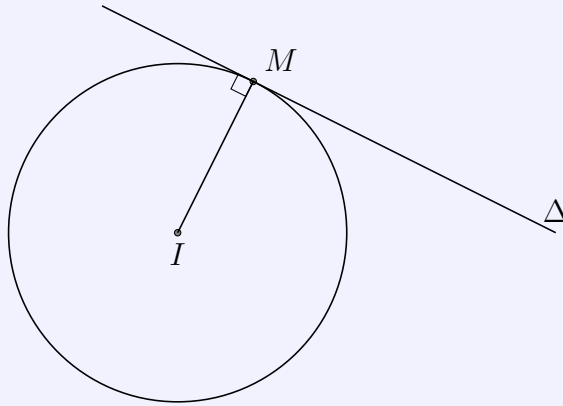


Dạng 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn tại một điểm

Viết phương trình tiếp tuyến (Δ) của đường tròn (C) tâm $I(a, b)$, tại điểm $M(x_0, y_0) \in (C)$.

Ta có $\overrightarrow{IM} = (x_0 - a; y_0 - b)$ là véc-tơ pháp tuyến của Δ .

Do đó Δ có phương trình là $(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$.



BÀI TẬP DẠNG 3

Ví dụ 1. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) : $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5$ tại điểm $M(3; -1)$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(2; -3)$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(3; -1)$ là:

$$\begin{aligned}(3 - 2)(x - 3) + (-1 + 3)(y + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x + 2y - 1 &= 0.\end{aligned}$$

Vậy phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(3; -1)$ là $x + 2y - 1 = 0$. □

Ví dụ 2. Cho đường tròn (C_m) : $x^2 + y^2 + 2(m - 1)x - 2my - 4 = 0$. Biết rằng khi m thay đổi, đường tròn (C_m) luôn đi qua điểm I cố định có hoành độ dương. Tìm giá trị của m sao cho tiếp tuyến của đường tròn (C_m) tại I song song với (d) : $x - 2y - 1 = 0$.

Lời giải.

Giả sử đường tròn (C_m) luôn đi qua điểm $I(x_0; y_0)$ cố định khi m thay đổi.

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} & x_0^2 + y_0^2 + 2(m-1)x_0 - 2my_0 - 4 = 0 \text{ với mọi } m \\ \Leftrightarrow & m(2x_0 - 2y_0) + x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 - 4 = 0 \text{ với mọi } m \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_0 = y_0 \\ x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 - 4 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_0 = y_0 \\ 2x_0^2 - 2x_0 - 4 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_0 = y_0 = -1 \\ x_0 = y_0 = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy ta có điểm $I(2; 2)$.

Đường tròn (C_m) có tâm $J(1-m; m)$. Véc-tơ pháp tuyến của tiếp tuyến của (C_m) tại I là $\overrightarrow{IJ} = (-m-1; m-2)$.

Để tiếp tuyến tại I song song với $(d): x-2y-1=0$ thì tồn tại k sao cho:

$$\overrightarrow{IJ} = k(1; -2) \Leftrightarrow \begin{cases} -m-1 = k \\ m-2 = -2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -4 \\ k = 3. \end{cases}$$

Vậy $m = -4$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C): (x+2)^2 + (y-3)^2 = 5$ tại điểm $M(-1; 1)$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(-2; 3)$.

Phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $M(-1; 1)$ là $1(x+1) - 2(y-1) = 0$ hay $x - 2y + 3 = 0$. □

Bài 2. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x = 0$ tại điểm $M(1; 1)$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1; 0)$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(1; 1)$ là $y = 1$. □

Bài 3. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ và đường thẳng $(\Delta): y - x + 1 = 0$. Gọi M, N là giao điểm của (C) và (Δ) . Tìm tọa độ giao điểm của tiếp tuyến của đường tròn (C) kẻ tại M, N .

Lời giải.

Tọa độ M, N là giao điểm của hệ phương trình sau

$$\begin{cases} y - x + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ 2y^2 - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; y = 0 \\ x = 3; y = 2. \end{cases}$$

Không mất tổng quát, ta giả sử $M(1; 0)$ và $N(3; 2)$. Đường tròn (C) có tâm $I(1; 2)$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $y = 0$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại N là $x = 3$.

Tọa độ giao điểm của hai tiếp tuyến là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} y = 0 \\ x = 3 \end{cases}$.

Vậy tọa độ giao điểm của hai tiếp tuyến là $A(3; 0)$. □

Bài 4. Cho hai đường tròn $(C_1) : x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$ và $(C_2) : x^2 + y^2 - 4x - 14y + 33 = 0$.

- Chứng minh rằng (C_1) và (C_2) tiếp xúc với nhau.
- Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn tại tiếp điểm.

Lời giải.

- Đường tròn (C_1) có tâm $I(-1; 1)$ và bán kính $R_1 = \sqrt{5}$.

Đường tròn (C_2) có tâm $J(2; 7)$ và bán kính $R_2 = 2\sqrt{5}$.

Ta có $IJ = \sqrt{(2+1)^2 + (7-1)^2} = 3\sqrt{5} = R_1 + R_2$. Do đó (C_1) tiếp xúc ngoài với (C_2) .

- Gọi M là tiếp điểm của (C_1) và (C_2) .

Khi đó ta có $\overrightarrow{IJ} = 3\overrightarrow{IM} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OJ} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OI}$.

Suy ra $M(0; 3) \Rightarrow \overrightarrow{IM} = (1; 2)$.

Phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn tại M là $x + 2(y - 3) = 0$ hay $x + 2y - 6 = 0$. □

Bài 5. Cho đường tròn $(C_m) : x^2 + y^2 - (m - 2)x + 2my - 1 = 0$.

- Chứng minh rằng khi m thay đổi, đường tròn (C_m) luôn đi qua điểm cố định.
- Gọi I là điểm cố định ở câu trên sao cho I có hoành độ âm. Tìm m sao cho tiếp tuyến của đường tròn (C_m) tại I song song với đường thẳng $(d) : x + 2y = 0$.

Lời giải.

- Giả sử $I(x_0; y_0)$ là điểm cố định thuộc đường tròn (C_m) khi m thay đổi. Khi đó ta có

$$x_0^2 + y_0^2 - (m - 2)x_0 + 2my_0 - 1 = 0 \text{ với mọi } m.$$

Điều này tương đương với

$$(2y_0 - x_0)m + x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 - 1 = 0 \text{ với mọi } m.$$

Do đó $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2y - x = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 5y^2 + 4y - 1 = 0. \end{cases}$

Giải hệ trên ta được hai nghiệm $(-2; -1)$ và $(\frac{2}{5}; \frac{1}{5})$.

Vậy (C_m) luôn đi hai điểm cố định là $(-2; -1)$ và $(\frac{2}{5}; \frac{1}{5})$ khi m thay đổi.

- Vì $x_I < 0$ nên $I(-2; -1)$. Đường tròn (C_m) có tâm $J(\frac{m-2}{2}; -m)$.

Véc-tơ pháp tuyến của tiếp tuyến tại I là $\overrightarrow{IJ} = (\frac{m+2}{2}; -m+1)$.

Để tiếp tuyến tại I song song với $(d) : x + 2y = 0$ thì $\overrightarrow{IJ}$ cùng phương với $\vec{n} = (1; 2)$, điều này tương đương với

$$\frac{m+2}{2} = \frac{-m+1}{2} \Leftrightarrow m+2 = -m+1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

□

Dạng 4. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn đi một điểm

Cho đường tròn (C) có tâm $I(a, b)$ và bán kính R . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $M(x_0, y_0)$.

- Nếu $IM < R$ thì không có tiếp tuyến nào đi qua M .
- Nếu $IM = R$ thì ta giải theo dạng 1.
- Nếu $IM > R$ thì ta thực hiện theo các bước bên dưới.
 - Gọi phương trình tiếp tuyến (Δ) của (C) đi qua M có dạng $m(x - x_0) + n(y - y_0) = 0$, trong đó $m^2 + n^2 \neq 0$.
 - Sử dụng điều kiện tiếp xúc của tiếp tuyến với đường tròn ta có $d(I, \Delta) = R$. Giải phương trình trên ta tìm được quan hệ giữa a, b .

BÀI TẬP DẠNG 4

Ví dụ 1. Viết phương trình tiếp tuyến (Δ) của đường tròn $(C) : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 8$ biết tiếp tuyến đi qua điểm $M(3; -2)$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1; 2)$ và bán kính $R = \sqrt{8}$.

Ta có $IM = \sqrt{(3-1)^2 + (-2-2)^2} = 2\sqrt{5}$.

Gọi phương trình tiếp tuyến (Δ) của (C) và đi qua $M(3; -2)$ là $a(x - 3) + b(y + 2) = 0$ ($a^2 + b^2 \neq 0$).

Ta có $d(I, \Delta) = \frac{|a(1-3) + b(2+2)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{8} \Leftrightarrow \frac{|-2a + 4b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{8}$.

Phương trình trên tương đương với

$$\begin{aligned} |-2a + 4b| &= \sqrt{8a^2 + 8b^2} \\ \Leftrightarrow (2a - 4b)^2 &= 8a^2 + 8b^2 \\ \Leftrightarrow 8b^2 - 16ab - 4a^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2b^2 - 4ab - a^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{2 + \sqrt{6}}{2}a \\ b = \frac{2 - \sqrt{6}}{2}a. \end{cases} \end{aligned}$$

- Nếu $b = \frac{2 + \sqrt{6}}{2}a$ thì ta chọn $a = 2 \Rightarrow b = 2 + \sqrt{6}$.

Khi đó phương trình của tiếp tuyến (Δ) là:

$$2(x - 3) + (2 + \sqrt{6})(y + 2) = 0 \text{ hay } 2x + (2 + \sqrt{6})y + 2\sqrt{6} - 2 = 0.$$

- Nếu $b = \frac{2 - \sqrt{6}}{2}a$ thì ta chọn $a = 2 \Rightarrow b = 2 - \sqrt{6}$.

Khi đó phương trình của tiếp tuyến (Δ) là:

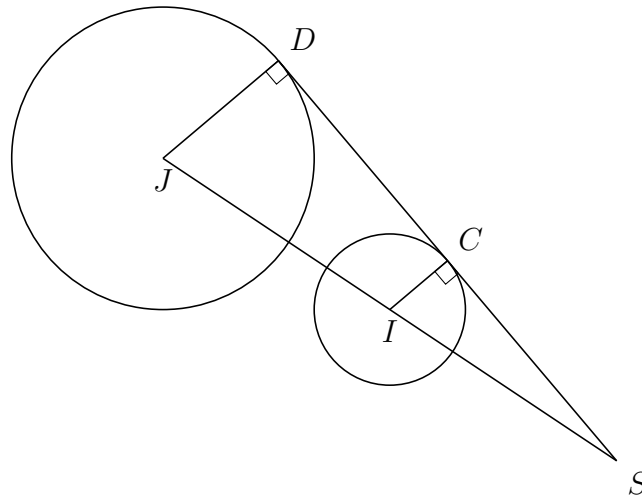
$$2(x - 3) + (2 - \sqrt{6})(y + 2) = 0 \text{ hay } 2x + (2 - \sqrt{6})y - 2\sqrt{6} - 2 = 0.$$

□

Ví dụ 2. Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn $(C_1) : x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$ và $(C_2) : x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ sao cho (C_1) và (C_2) nằm cùng một nửa mặt phẳng bờ là tiếp tuyến đó (tiếp tuyến này được gọi là tiếp tuyến chung ngoài).

Lời giải.

Đường tròn (C_1) có tâm $I(1; -1)$ và bán kính $R_1 = 1$. Đường tròn (C_2) có tâm $J(-2; 1)$ và bán kính $R_2 = 2$.



Gọi S là giao điểm của tiếp tuyến ngoài và IJ . Gọi C, D lần lượt là tiếp điểm của tiếp tuyến với đường tròn (C_1) và (C_2) .

Theo định lý Thales ta có $\frac{SI}{SJ} = \frac{CI}{DJ} = \frac{1}{2}$.

Vì vậy ta có $\overrightarrow{SJ} = 2\overrightarrow{SI}$. Do đó $\overrightarrow{OS} = 2\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OJ} \Rightarrow S(4; -3)$.

Gọi phương trình tiếp tuyến (Δ) tiếp xúc với $(C_1), (C_2)$ và đi qua S là $a(x - 4) + b(y + 3) = 0$ trong đó $a^2 + b^2 > 0$.

Ta có

$$\begin{aligned} d(I, \Delta) &= \frac{|2b - 3a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1 \Rightarrow |2b - 3a| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ &\Rightarrow 8a^2 - 12ab + 3b^2 = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3 + \sqrt{3}}{4}b \\ a = \frac{3 - \sqrt{3}}{4}b. \end{cases} \end{aligned}$$

Nếu $a = \frac{3 + \sqrt{3}}{4}b$ thì ta chọn $b = 4 \Rightarrow a = 3 + \sqrt{3}$. Khi đó phương trình tiếp tuyến (Δ) là

$$(3 + \sqrt{3})x + 4y - 4\sqrt{3} = 0.$$

Nếu $a = \frac{3 - \sqrt{3}}{4}b$ thì ta chọn $b = 4 \Rightarrow a = 3 - \sqrt{3}$. Khi đó phương trình tiếp tuyến (Δ) là

$$(3 - \sqrt{3})x + 4y + 4\sqrt{3} = 0.$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C) : (x - 3)^2 + y^2 = 9$ biết tiếp tuyến đi qua điểm $M(3; 5)$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(3; 0)$ và bán kính $R = 3$.

Ta có $IM = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5 > R = 3$.

Gọi tiếp tuyến (Δ) của đường tròn (C) và đi qua M là $a(x - 3) + b(y - 5) = 0$ với $a^2 + b^2 > 0$.

Ta có

$$\begin{aligned} d(I, \Delta) = R &\Rightarrow \frac{|-5b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 3 \\ &\Rightarrow |5b| = 3\sqrt{a^2 + b^2} \\ &\Rightarrow b = \pm \frac{3}{4}a. \end{aligned}$$

Nếu $b = -\frac{3}{4}a$ thì ta chọn $a = 4, b = -3$. Khi đó phương trình tiếp tuyến (Δ) là $4x - 3y + 3 = 0$.

Nếu $b = \frac{3}{4}a$ thì ta chọn $a = 4, b = 3$. Khi đó phương trình tiếp tuyến (Δ) là $4x + 3y - 27 = 0$. $\square$

Bài 2. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C) : x^2 + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$ biết tiếp tuyến đi qua điểm $M(-2; 5)$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(-1; 2)$ và bán kính $R = \sqrt{2}$.

Gọi phương trình tiếp tuyến (Δ) đi qua điểm $M(-2; 5)$ là $a(x + 2) + b(y - 5) = 0$ với $a^2 + b^2 > 0$.

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} d(I, \Delta) = \frac{|a - 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{2} &\Leftrightarrow |a - 3b| = \sqrt{2a^2 + 2b^2} \\ &\Leftrightarrow a^2 - 6ab + 9b^2 = 2a^2 + 2b^2 \\ &\Leftrightarrow a^2 + 6ab - 7b^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = -7b. \end{cases} \end{aligned}$$

Nếu $a = b$ thì ta chọn $a = b = 1$. Khi đó phương trình tiếp tuyến Δ là $x + y - 3 = 0$.

Nếu $a = -7b$ thì ta chọn $a = 7; b = -1$. Khi đó phương trình tiếp tuyến Δ là $7x - y + 19 = 0$. $\square$

Bài 3. Cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$. Qua điểm $A(1; 2)$ kẻ hai tiếp tuyến đến đường tròn (C) . Gọi tiếp điểm của hai tiếp tuyến đó là M, N . Tính MN .

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(-1; 1)$ và bán kính $R = 2$.

Gọi tiếp tuyến (Δ) đi qua $A(1, 2)$ của đường tròn (C) là $a(x - 1) + b(y - 2) = 0$ với $a^2 + b^2 > 0$.

Ta có

$$\begin{aligned} d(I, \Delta) = \frac{|-2a - b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2 &\Rightarrow 4a^2 + 4ab + b^2 = 4a^2 + 4b^2 \\ &\Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 4a = 3b. \end{cases} \end{aligned}$$

- Nếu $b = 0$ thì ta chọn $a = 1$. Khi đó phương trình (Δ_1) là $x = 1$.

Tiếp điểm của (Δ_1) và (C) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 1 \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1, y = 1.$$

- Nếu $4a = 3b$ thì ta chọn $a = 3, b = 4$. Khi đó phương trình của (Δ_2) là $3x + 4y - 11 = 0$.

Tiếp điểm của (Δ_2) và (C) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x + 4y - 11 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11 - 4y}{3} \\ \frac{25y^2}{9} - \frac{130y}{9} + \frac{169}{9} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5} \\ y = \frac{13}{5} \end{cases}.$$

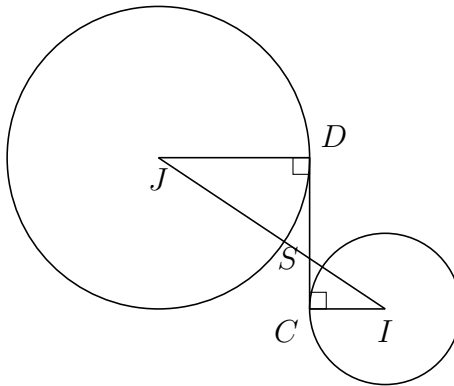
$$\text{Vậy } MN = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{5}\right)^2 + \left(1 - \frac{13}{5}\right)^2} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

□

Bài 4. Viết phương trình tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$ và $(C_2): x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$.

Lời giải.

Đường tròn (C_1) có tâm $I(1; -1)$ và bán kính $R_1 = 1$. Đường tròn (C_2) có tâm $J(-2; 1)$ và bán kính $R_2 = 2$.



Gọi S là giao điểm của tiếp tuyến ngoài và IJ . C, D lần lượt là tiếp điểm của tiếp tuyến với đường tròn (C_1) và (C_2) .

Theo định lý Thales ta có $\frac{SI}{SJ} = \frac{CI}{DJ} = \frac{1}{2}$.

Vì vậy ta có $\vec{SJ} = -2\vec{SI}$. Do đó $\vec{OS} = 2\vec{OI} + \vec{OJ} \Rightarrow S\left(0; -\frac{1}{3}\right)$.

Gọi phương trình tiếp tuyến (Δ) tiếp xúc với $(C_1), (C_2)$ và đi qua S là $ax + b\left(y + \frac{1}{3}\right) = 0$ trong đó $a^2 + b^2 > 0$.

Ta có

$$\begin{aligned} d(I, \Delta) &= \frac{|a - \frac{2}{3}b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1 \Leftrightarrow |2b - 3a| = \sqrt{9a^2 + 9b^2} \\ &\Leftrightarrow 5b^2 + 12ab = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 5b = -12a. \end{cases} \end{aligned}$$

- Nếu $b = 0$ thì ta chọn $a = 1$. Khi đó phương trình tiếp tuyến (Δ) là $x = 0$.
- Nếu $5b = -12a$ thì ta chọn $b = -12; a = 5$. Khi đó phương trình tiếp tuyến (Δ) là

$$5x - 12\left(y + \frac{1}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 5x - 12y - 4 = 0.$$

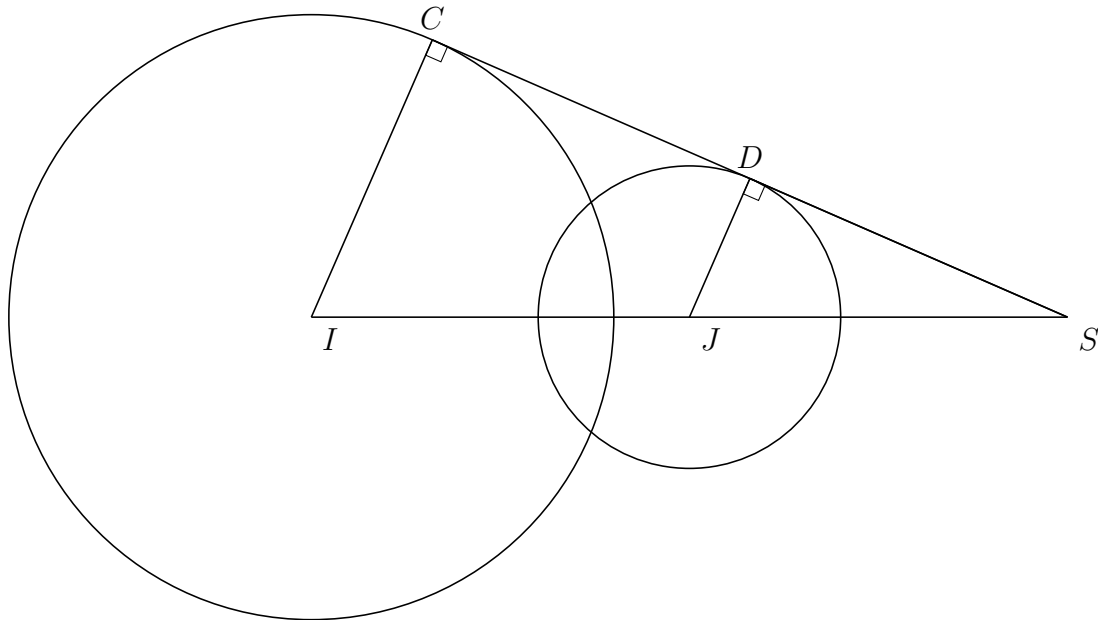
□

Bài 5. Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn $(C_1) : x^2 + y^2 + 6x - 7 = 0$ và $(C_2) : (x - 2)^2 + y^2 = 4$.

Lời giải.

Đường tròn (C_1) có tâm $I(-3; 0)$ và bán kính $R_1 = 4$. Đường tròn (C_2) có tâm $J(2; 0)$ và bán kính $R_2 = 2$.

Ta có $IJ = 5 < R_1 + R_2$ nên hai đường tròn cắt nhau. Do đó chúng chỉ có hai tiếp tuyến chung ngoài.



Gọi S là giao điểm của tiếp tuyến ngoài và IJ . C, D lần lượt là tiếp điểm của tiếp tuyến với đường tròn (C_1) và (C_2) .

Theo định lý Thales ta có $\frac{SI}{SJ} = \frac{CI}{DJ} = 2$.

Vì vậy ta có $\overrightarrow{SI} = 2\overrightarrow{SJ}$. Do đó $\overrightarrow{OS} = 2\overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{OI} \Rightarrow S(7; 0)$.

Gọi phương trình tiếp tuyến (Δ) tiếp xúc với $(C_1), (C_2)$ và đi qua S là $a(x - 7) + by = 0$ trong đó $a^2 + b^2 > 0$.

Ta có

$$\begin{aligned} d(I, \Delta) &= \frac{|-10a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 4 \Leftrightarrow 100a^2 = 16a^2 + 16b^2 \\ &\Leftrightarrow 84a^2 = 16b^2 \\ &\Leftrightarrow b = \pm \frac{\sqrt{21}}{2}a. \end{aligned}$$

- Nếu $b = \frac{\sqrt{21}}{2}a$ thì ta chọn $a = 2; b = \sqrt{21}$. Khi đó phương trình tiếp tuyến (Δ) là $2x + \sqrt{21}y - 14 = 0$.

- Nếu $b = -\frac{\sqrt{21}}{2}a$ thì ta chọn $a = 2; b = -\sqrt{21}$. Khi đó phương trình tiếp tuyến (Δ) là $2x - \sqrt{21}y - 14 = 0$.

□

Dạng 5. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn thỏa mãn điều kiện cho trước

Cho đường tròn (C) có tâm $I(a, b)$ và bán kính R . Viết phương trình tiếp tuyến (Δ) của (C) có phương xác định trước.

- Viết dạng phương trình tổng quát của Δ .
- Sử dụng điều kiện cho trước và $d(I, \Delta) = R$ để tìm phương trình tổng quát của Δ .

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 5 ❖❖❖

Ví dụ 1. Tìm điều kiện của tham số a để đường thẳng $(\Delta) : x + (a - 1)y - a = 0$ tiếp xúc với đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1; -2)$ và bán kính $R = \sqrt{1^2 + 2^2 - 2} = \sqrt{3}$.

Để đường thẳng (Δ) là tiếp tuyến của đường tròn (C) thì

$$\begin{aligned} d(I, \Delta) = R &\Leftrightarrow \frac{|1 - 2(a - 1) - a|}{\sqrt{1 + (a - 1)^2}} = \sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow \frac{|3 - 3a|}{\sqrt{a^2 - 2a + 2}} = \sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow |3 - 3a| = \sqrt{3a^2 - 6a + 6} \\ &\Leftrightarrow (3 - 3a)^2 = 3a^2 - 6a + 6 \\ &\Leftrightarrow 2a^2 - 4a + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $a = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ hoặc $a = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ thỏa mãn đề bài.

□

Ví dụ 2. Viết phương trình tiếp tuyến (Δ) của đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$ biết rằng tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x + 2y + 5 = 0$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1; -2)$ và bán kính $R = 1$.

Vì Δ vuông góc với đường thẳng $x + 2y + 5 = 0$ nên phương trình Δ có dạng $2x - y + m = 0$.

Vì Δ là tiếp tuyến của (C) nên ta có

$$\begin{aligned}d(I, \Delta) = R &\Leftrightarrow \frac{|2 + 2 + m|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = 1 \\&\Leftrightarrow |4 + m| = \sqrt{5} \\&\Leftrightarrow \begin{cases} m = \sqrt{5} - 4 \\ m = -\sqrt{5} - 4. \end{cases}\end{aligned}$$

Nếu $m = \sqrt{5} - 4$ thì phương trình của Δ là $2x - y + \sqrt{5} - 4 = 0$.

Nếu $m = -\sqrt{5} - 4$ thì phương trình của Δ là $2x - y - \sqrt{5} - 4 = 0$. □

Ví dụ 3. Viết phương trình tiếp tuyến (Δ) của đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ biết rằng tiếp tuyến hợp với đường thẳng $(d) : x + y - 5 = 0$ một góc 45° .

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1; 2)$ và bán kính $R = \sqrt{1^2 + 2^2 - 4} = 1$.

Gọi véc-tơ pháp tuyến của Δ là $\vec{n}_1 = (a; b)$ trong đó $a^2 + b^2 \neq 0$.

Véc-tơ pháp tuyến của d là $\vec{n}_2 = (1; 1)$.

Vì (Δ) tạo với d một góc 60° nên ta có

$$\begin{aligned}|\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \cos 45^\circ &\Leftrightarrow \frac{|a + b|}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\&\Leftrightarrow |a + b| = \sqrt{a^2 + b^2} \\&\Leftrightarrow (a + b)^2 = a^2 + b^2 \\&\Leftrightarrow ab = 0 \\&\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

- Với $a = 0$, phương trình Δ có dạng $y + m = 0$.

$$\text{Có } d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|2 + m|}{1} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -3. \end{cases}$$

Khi đó phương trình tiếp tuyến Δ là $y - 1 = 0$ hoặc $y - 3 = 0$.

- Với $b = 0$, phương trình Δ có dạng $x + m = 0$.

$$\text{Có } d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|1 + m|}{1} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -2. \end{cases}$$

Khi đó phương trình tiếp tuyến Δ là $x = 0$ hoặc $x - 2 = 0$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm Δ là $y - 1 = 0$ hoặc $y - 3 = 0$ hoặc $x = 0$ hoặc $x - 2 = 0$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Tìm giá trị của tham số m sao cho đường thẳng $(\Delta) : (m - 1)y + mx - 2 = 0$ là tiếp tuyến của đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(3; 0)$ và bán kính $R = 2$.

Để (Δ) là tiếp tuyến của đường tròn (C) thì ta phải có

$$d(I, \Delta) = \frac{|3m - 2|}{\sqrt{(m-1)^2 + m^2}} = 2 \Leftrightarrow 4(2m^2 - 2m + 1) = 9m^2 - 12m + 4 \Leftrightarrow m^2 - 4m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 4. \end{cases}$$

□

Bài 2. Cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ và đường thẳng $d : 3x + 4y - 6 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) thỏa mãn:

- Song song với đường thẳng d .
- Vuông góc với đường thẳng d .

Lời giải.

(C) có tâm $I(2; 3)$, bán kính $R = 5$.

- Phương trình đường thẳng Δ_1 song song với d có dạng: $3x + 4y + c_1 = 0$.

Δ_1 tiếp xúc với (C) nên $d(I, \Delta_1) = R$.

$$\text{Hay } \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + c_1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5 \Leftrightarrow |c_1 + 18| = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + 18 = 25 \\ c_1 + 18 = -25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 7 \\ c_1 = -43. \end{cases}$$

Vậy phương trình tiếp tuyến của (C) song song với d là $3x + 4y + 7 = 0$ hoặc $3x + 4y - 43 = 0$.

- Phương trình đường thẳng Δ_2 song song với d có dạng: $4x - 3y + c_2 = 0$.

Δ_2 tiếp xúc với (C) nên $d(I, \Delta_2) = R$.

$$\text{Hay } \frac{|4 \cdot 2 - 3 \cdot 3 + c_2|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 5 \Leftrightarrow |c_2 - 1| = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 - 1 = 25 \\ c_2 - 1 = -25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = 26 \\ c_2 = -24. \end{cases}$$

Vậy phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với d là $4x - 3y + 26 = 0$ hoặc $4x - 3y - 24 = 0$.

□

Bài 3. Cho đường tròn $(C) : (x - 1)^2 + y^2 = 9$. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) biết rằng tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 2x - 1$.

Lời giải.

Gọi phương trình tiếp tuyến (Δ) song song với $y = 2x - 1$ là $y - 2x + n = 0$.

Đường tròn (C) có tâm $I(1; 0)$ và bán kính $R = 3$.

Ta có

$$d(I, \Delta) = \frac{|n - 2|}{\sqrt{5}} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2 - 3\sqrt{5} \\ n = 2 + 3\sqrt{5}. \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến (Δ) là $y - 2x + 2 - 3\sqrt{5} = 0$ hoặc $y - 2x + 2 + 3\sqrt{5} = 0$.

□

Bài 4. Cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 = 25$. Viết phương trình tiếp tuyến (Δ) của đường tròn (C) biết tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông có cạnh góc vuông bằng nửa cạnh huyền và cạnh góc vuông nằm trên Ox lớn hơn cạnh góc vuông nằm trên Oy .

Lời giải.

Vì tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông có cạnh góc vuông bằng nửa cạnh huyền và cạnh góc vuông nằm trên Ox lớn hơn cạnh góc vuông nằm trên Oy nên ta suy ra tiếp tuyến tạo với trục Ox góc 30° .

Đường tròn (C) có tâm $O(0; 0)$ và bán kính $R = 5$.

Gọi véc-tơ pháp tuyến của (Δ) là $\vec{n} = (a, b)$ với $a^2 + b^2 > 0$.

Ta có $\cos(\Delta, Ox) = \frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a^2 = 3b^2 \Rightarrow a = \pm\sqrt{3}b$. □

- Nếu $a = \sqrt{3}b$ thì ta chọn $a = \sqrt{3}; b = 1$. Khi đó phương trình tiếp tuyến (Δ) có dạng $\sqrt{3}x + y + m = 0$.

Ta có

$$d(O; \Delta) = \frac{|m|}{\sqrt{3+1}} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 10 \\ m = -10. \end{cases}$$

Vậy phương trình tiếp tuyến (Δ) trong trường hợp này là $\sqrt{3}x + y - 10 = 0$ hoặc $\sqrt{3}x + y + 10 = 0$.

- Nếu $a = -\sqrt{3}b$ thì ta chọn $a = -\sqrt{3}; b = 1$. Khi đó phương trình tiếp tuyến (Δ) có dạng $-\sqrt{3}x + y + m = 0$.

Ta có

$$d(O; \Delta) = \frac{|m|}{\sqrt{3+1}} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 10 \\ m = -10. \end{cases}$$

Vậy phương trình tiếp tuyến (Δ) trong trường hợp này là $-\sqrt{3}x + y - 10 = 0$ hoặc $-\sqrt{3}x + y + 10 = 0$.

Bài 5. Cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn sao cho tiếp tuyến đó cắt các trục tọa độ tạo thành một tam giác cân.

Lời giải.

Phương trình đường tròn (C) có tâm $I(1; 2)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$.

Để tiếp tuyến cùng với các trục tọa độ tạo thành tam giác cân thì tiếp tuyến phải có hệ số góc là 1 hoặc -1 .

- a) Nếu tiếp tuyến có hệ số góc bằng -1 thì ta có thể giả sử phương trình tiếp tuyến (Δ) là $x + y + m = 0$.

Ta có

$$d(I, \Delta) = \frac{|m+3|}{\sqrt{2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 - \sqrt{10} \\ m = -3 + \sqrt{10}. \end{cases}$$

Do đó phương trình tiếp tuyến là $x + y - 3 - \sqrt{10} = 0$ hoặc $x + y - 3 + \sqrt{10} = 0$.

- b) Nếu tiếp tuyến có hệ số góc bằng 1 thì ta có thể giả sử phương trình tiếp tuyến (Δ) là $x - y + m = 0$.

Ta có

$$d(I, \Delta) = \frac{|m-1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 - \sqrt{10} \\ m = 1 + \sqrt{10}. \end{cases}$$

Do đó phương trình tiếp tuyến là $x - y + 1 - \sqrt{10} = 0$ hoặc $x - y + 1 + \sqrt{10} = 0$. □

Bài 6. Cho đường tròn (C_1) : $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 11 = 0$ và đường tròn (C_2) : $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$.
Viết phương trình tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) .

Lời giải.

(C_1) có tâm $I_1(3; 4)$, bán kính $R_1 = 6$.

(C_2) có tâm $I_2(1; 3)$, bán kính $R_2 = 4$

Có $2 = |R_1 - R_2| < I_1I_2 = \sqrt{(1-3)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{5} < R_1 + R_2 = 10$.

Do đó (C_1) và (C_2) cắt nhau và có 2 tiếp tuyến chung.

Phương trình tiếp tuyến chung Δ có dạng $ax + by + c = 0$, $(a^2 + b^2 \neq 0)$ (*).

Δ tiếp xúc với (C_1) và (C_2) khi và chỉ khi $\begin{cases} d(I_1, \Delta) = R_1 \\ d(I_2, \Delta) = R_2 \end{cases}$

$$\text{Hay } \begin{cases} \frac{|3a + 4b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 6 & (1) \\ \frac{|a + 3b + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 4 & (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2|3a + 4b + c| = 3|a + 3b + c|$$

$$\Leftrightarrow 2(3a + 4b + c) = \pm 3(a + 3b + c)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 3a - b \\ c = -\frac{9a + 17b}{5} \end{cases}$$

+ Thế $c = 3a - b$ vào (2) ta được $|4a + 2b| = 4\sqrt{a^2 + b^2}$

$$\Leftrightarrow 4a^2 + 4ab + b^2 = 4(a^2 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow b(3b - 4a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = \frac{4}{3}a \end{cases}$$

Với $b = 0$ thì $c = 3a$, (*) trở thành $ax + 3a = 0$ hay $x + 3 = 0$.

Với $b = \frac{4}{3}a$ thì $c = \frac{5}{3}a$, (*) trở thành $ax + \frac{4}{3}ay + \frac{5}{3}a = 0$ hay $3x + 4y + 5 = 0$.

+ Thế $c = -\frac{9a + 17b}{5}$ vào (2) ta được $|-4a - 2b| = 20\sqrt{a^2 + b^2}$

$$\Leftrightarrow 4a^2 + 4ab + b^2 = 100(a^2 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow 96a^2 - 4ab + 99b^2 = 0 \quad (\text{vô nghiệm}).$$

Vậy (C_1) và (C_2) có tiếp tuyến chung là $x + 3 = 0$ và $3x + 4y + 5 = 0$. □

Bài 7. Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn (C_1) : $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$ và (C_2) : $x^2 + y^2 - 4x - 14y + 48 = 0$ sao cho 2 đường tròn nằm cùng một nửa mặt phẳng bờ là tiếp tuyến chung đó..

Lời giải.

Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(-1; 1)$ và bán kính $R_1 = \sqrt{5}$.

Đường tròn (C_2) có tâm $I_2(2; 7)$ và bán kính $R_2 = \sqrt{5}$.

Do đó tiếp tuyến chung cần tìm của hai đường tròn song song với đường thẳng I_1I_2 .

Ta có $\overrightarrow{I_1I_2} = (3; 6)$. Suy ra véc-tơ pháp tuyến của I_1I_2 là $\vec{n} = (2; -1)$.

Do đó phương trình tiếp tuyến chung cần tìm (Δ) của $(C_1); (C_2)$ có dạng $2x - y + m = 0$.

Ta có

$$d(I_1; \Delta) = \frac{|-3 + m|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |m - 3| = 5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 8. \end{cases}$$

Vì vậy phương trình tiếp tuyến chung cần tìm của (C_1) và (C_2) là $2x - y - 2 = 0$ hoặc $2x - y + 8 = 0$.

□

BÀI TẬP TỔNG HỢP

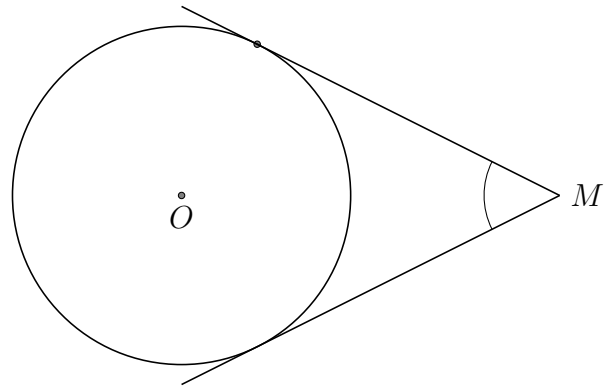
Bài 8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 4x = 0$. Tìm những điểm trên đường thẳng $x = 4$ mà từ những điểm đó kẻ được đến (C) hai tiếp tuyến hợp với nhau góc 30° .

Lời giải.

Gọi điểm $M(4; b)$ thuộc đường thẳng $x = 4$, $(b \in \mathbb{R})$.

$(C) : (x - 2)^2 + y^2 = 4$, (C) có tâm $I(2; 0)$, bán kính $R = 2$.

Vì đường thẳng $x = 4$ là một tiếp tuyến của đường tròn (C) , nên yêu cầu bài toán là tìm những điểm trên đường thẳng $x = 4$ sao cho kẻ được qua các điểm đó các tiếp tuyến đến (C) có hệ số góc là $k = \pm \tan 60^\circ = \pm \sqrt{3}$.



- $k = \sqrt{3}$: d là đường thẳng qua M có hệ số góc $k = \sqrt{3}$ có phương trình:

$$y = \sqrt{3}(x - 4) + b \Leftrightarrow \sqrt{3}x - y - 4\sqrt{3} + b = 0.$$

$$d \text{ tiếp xúc với } (C) \Leftrightarrow d(I, d) = R \Leftrightarrow |b - 2\sqrt{3}| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 + 2\sqrt{3} \\ b = -4 + 2\sqrt{3}. \end{cases}$$

- $k = -\sqrt{3}$: d' là đường thẳng qua M có hệ số góc $k = -\sqrt{3}$ có phương trình:

$$y = -\sqrt{3}(x - 4) + b \Leftrightarrow \sqrt{3}x + y - 4\sqrt{3} - b = 0.$$

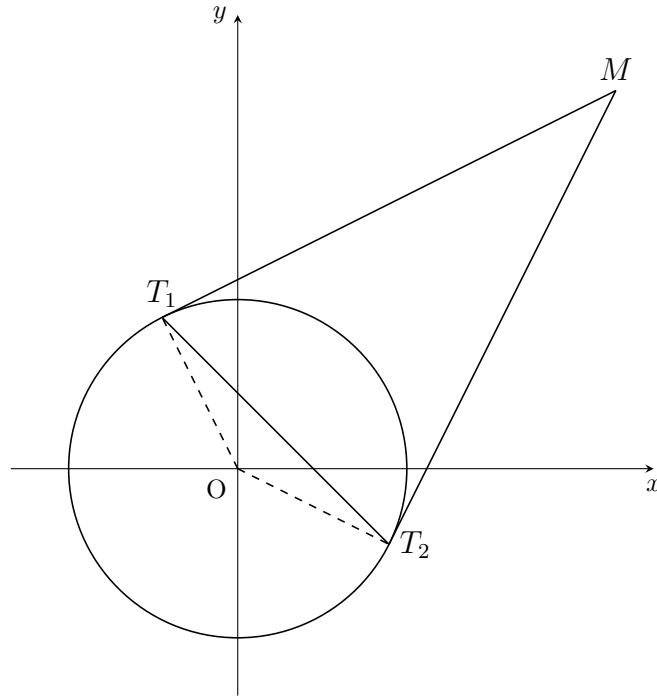
$$d \text{ tiếp xúc với } (C) \Leftrightarrow d(I, d) = R \Leftrightarrow |-b - 2\sqrt{3}| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4 - 2\sqrt{3} \\ b = 4 - 2\sqrt{3}. \end{cases}$$

Vậy có 4 điểm thỏa mãn: $(4; 4 + 2\sqrt{3})$, $(4; -4 + 2\sqrt{3})$, $(4; 4 - 2\sqrt{3})$, $(4; -4 - 2\sqrt{3})$. □

Bài 9. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = R^2$ và điểm $M(x_0; y_0)$ nằm ngoài (C) . Từ M kẻ hai tiếp tuyến MT_1 và MT_2 tới (C) (T_1, T_2 là các tiếp điểm).

a) Viết phương trình đường thẳng T_1T_2 .

b) Giả sử M chạy trên một đường thẳng d cố định không cắt (C) . Chứng minh rằng đường thẳng T_1T_2 luôn đi qua một điểm cố định.



Lời giải.

a) Giả sử $T_1 = (x_1; y_1), T_2 = (x_2; y_2)$.

Đường tròn (C) có tâm $O(0; 0)$, bán kính R .

Tiếp tuyến MT_1 đi qua điểm T_1 , có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{OT_1} = (x_1; y_1)$ có phương trình:

$$x_1x + y_1y = R^2.$$

Và tiếp tuyến MT_2 có phương trình: $x_2x + y_2y = R^2$.

$$\text{Có: } M \in MT_1, M \in MT_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1x_0 + y_1y_0 = R^2 \\ x_2x_0 + y_2y_0 = R^2. \end{cases}$$

Suy ra $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$ là các nghiệm của phương trình $x_0x + y_0y = R^2$. (1)

Vì M nằm ngoài (C) nên $x_0^2 + y_0^2 > 0$, do đó (1) là phương trình đường thẳng.

Vậy phương trình đường thẳng T_1T_2 là: $x_0x + y_0y - R^2 = 0$.

b)

- Xét trường hợp đường thẳng cố định d có phương trình dạng: $x = a, (|a| > R)$.

Khi đó: $M = (a; y_0)$ và phương trình T_1T_2 là $ax + y_0y - R^2 = 0$.

Vậy đường thẳng T_1T_2 luôn đi qua điểm cố định $\left(\frac{R^2}{a}; 0\right)$.

- Xét trường hợp đường thẳng cố định d có phương trình dạng: $y = kx + m$.

Do d không cắt (C) nên $m \neq 0$. Ta có $M = (x_0; kx_0 + m)$.

Phương trình đường thẳng T_1T_2 là:

$$x_0x + (kx_0 + m)y - R^2 = 0 \text{ hay } x_0(x + ky) + my - R^2 = 0.$$

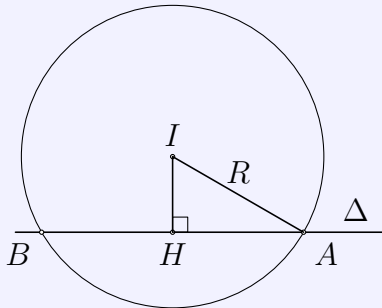
Vậy điểm cố định mà đường thẳng T_1T_2 luôn đi qua là $\left(\frac{-kR^2}{m}; \frac{R^2}{m}\right)$.

□

Dạng 6. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

Cho đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$ và đường tròn (C) có tâm $I(x_0; y_0)$, bán kính R . Đường thẳng Δ và đường tròn (C) có ba vị trí tương đối.

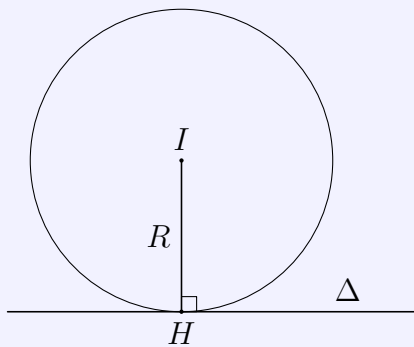
- Đường thẳng Δ và đường tròn (C) có hai điểm chung, ta nói Δ và (C) cắt nhau.



! Hệ thức liên hệ giữa bán kính và khoảng cách từ tâm đường tròn (C) đến đường thẳng Δ :

$$d(I, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} < R.$$

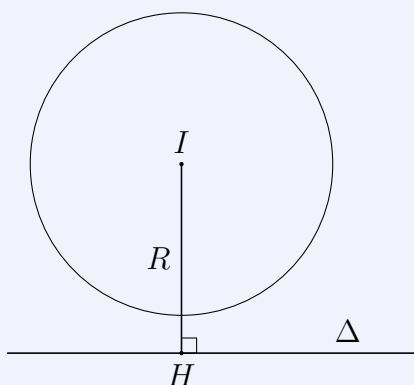
- Đường thẳng Δ và đường tròn (C) có một điểm chung, ta nói Δ tiếp xúc với (C) . Đường thẳng Δ còn được gọi là tiếp tuyến của đường tròn (C) .



! Hệ thức liên hệ giữa bán kính và khoảng cách từ tâm đường tròn (C) đến đường thẳng Δ :

$$d(I, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = R.$$

- Đường thẳng Δ và đường tròn (C) không có điểm chung nào, ta nói Δ và (C) không cắt nhau.



! Hệ thức liên hệ giữa bán kính và khoảng cách từ tâm đường tròn (C) đến đường thẳng Δ :

$$d(I, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} > R.$$

Khi đường thẳng Δ cho bởi phương trình tham số $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$. Để xét vị trí tương đối với đường tròn (C) ta có thể làm hai cách:

- Từ phương trình tham số chuyển về phương trình tổng quát, xét vị trí tương đối giống như trên.
- Thế phương trình tham số vào phương trình của đường tròn (C) ta được phương trình bậc hai có ẩn t , kí hiệu phương trình $(*)$.
 - Phương trình $(*)$ vô nghiệm. Ta nói Δ và (C) không cắt nhau.
 - Phương trình $(*)$ có một nghiệm. Ta nói Δ tiếp xúc với (C) .
 - Phương trình $(*)$ có hai nghiệm. Ta nói Δ và (C) cắt nhau.

Khi đường thẳng Δ cho bởi phương trình tổng quát $\Delta : ax + by + c = 0$, để xét vị trí tương đối của Δ và đường tròn $(C) : x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$, người ta xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0 \end{cases} (*)$$

- Hệ $(*)$ có hai nghiệm. Ta nói Δ và (C) cắt nhau.
- Hệ $(*)$ có một nghiệm. Ta nói Δ tiếp xúc với (C) .
- Hệ $(*)$ có vô nghiệm. Ta nói Δ và (C) không cắt nhau.

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 6 ❖❖❖

Ví dụ 1. [0H3B2] Cho đường thẳng $\Delta : x - 2y + 5 = 0$ và đường tròn $(C) : (x - 2)^2 + y^2 = 4$. Xét vị trí tương đối của Δ và (C) .

Lời giải.

(C) có tâm $I(2; 0)$ và bán kính $R = 2$.

Ta có: $d(I, \Delta) = \frac{|2 - 2 \cdot 0 + 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{7\sqrt{5}}{5} > 2$.

Vậy Δ và (C) không cắt nhau. □

Ví dụ 2. Cho đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = -5 - 2t \\ y = t \end{cases}$ và đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$. Xét vị trí tương đối của Δ và (C) .

Lời giải.

Thế phương trình của Δ vào phương trình (C) ta được phương trình:

$$(-5 - 2t)^2 + t^2 - 4(-5 - 2t) + 2t = 0 \Leftrightarrow 5t^2 + 30t + 45 = 0 \Leftrightarrow t = -3.$$

Vậy Δ tiếp xúc với (C) .

□

Ví dụ 3. Cho đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = 4t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$ và đường tròn $(C) : (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 10$. Xét vị trí tương đối của Δ và (C) , tìm tọa độ giao điểm nếu có.

Lời giải.

Thế phương trình của Δ vào phương trình (C) ta được phương trình:

$$20t^2 - 20t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1. \end{cases}$$

Vậy Δ cắt (C) .

$$\text{Với } t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \text{ và } t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4. \end{cases}$$

Vậy tọa độ giao điểm của Δ và (C) là: $A(0; 2), B(4; 4)$. □

Ví dụ 4. Cho đường thẳng $\Delta : 6x + 8y - 1 = 0$ và đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 2mx + 4y + m^2 - 5 = 0$. Tìm m để Δ cắt (C) .

Lời giải.

(C) có tâm $I(m; -2)$ và bán kính $R = 3$.

Để Δ cắt (C) thì $d(I, \Delta) < R$

$$\Leftrightarrow \frac{|6m + 8 \cdot (-2) - 1|}{\sqrt{36 + 64}} < 3 \Leftrightarrow |6m - 17| < 30 \Leftrightarrow -30 < 6m - 17 < 30 \Leftrightarrow -\frac{13}{6} < m < \frac{47}{6}.$$

$$\text{Vậy } -\frac{13}{6} < m < \frac{47}{6}. \quad \square$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho đường thẳng $\Delta : 4x + 3y + 1 = 0$ và đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$. Xét vị trí tương đối của Δ và (C) .

Lời giải.

(C) có tâm $I(3; 4)$ và bán kính $R = 5$.

$$\text{Ta có: } d(I, \Delta) = \frac{|4 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5 = R.$$

Vậy Δ tiếp xúc với (C) . □

Bài 2. Cho đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 + t \end{cases}$ và đường tròn $(C) : (x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 2$. Xét vị trí tương đối của Δ và (C) .

Lời giải.

Thế phương trình của Δ vào phương trình (C) ta được phương trình:

$$(4 - 4t)^2 + (1 + t)^2 = 2 \Leftrightarrow 17t^2 - 30t + 15 = 0 \text{ (vô nghiệm) .}$$

Vậy Δ không cắt (C) .

□

Bài 3. Cho đường thẳng $\Delta : x - y + 5 = 0$ và đường tròn $(C) : x^2 + y^2 + 6x - 2y - 3 = 0$. Tìm tọa độ giao điểm của Δ và (C) .

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của Δ và (C) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y + 5 = 0 \\ x^2 + y^2 + 6x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 5 \\ (y - 5)^2 + y^2 + 6(y - 5) - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 5 \\ 2y^2 - 6y - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 5 \\ y = 4 \text{ hoặc } y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -6 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Vậy tọa độ giao điểm của Δ và (C) là: $A(-1; 4), B(-6; -1)$. □

Bài 4. Cho đường thẳng $\Delta : x - 2y + m = 0$ và đường tròn $(C) : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$. Tìm m để Δ không cắt (C) .

Lời giải.

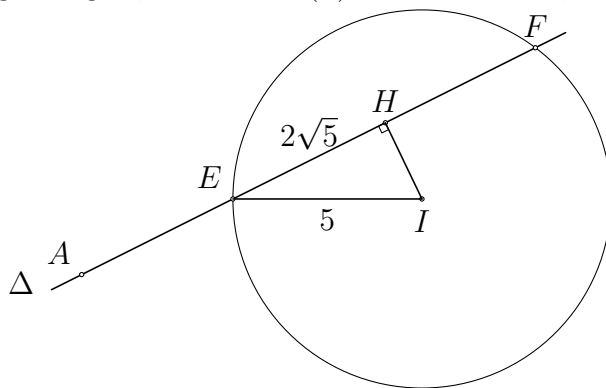
(C) có tâm $I(1; 2)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$.

Để Δ không cắt (C) thì $d(I, \Delta) > R$

$$\Leftrightarrow \frac{|1 - 2 \cdot 2 + m|}{\sqrt{1 + 4}} > \sqrt{5} \Leftrightarrow |m - 3| > 5 \Leftrightarrow \begin{cases} m - 3 > 5 \\ m - 3 < -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 8 \\ m < -2 \end{cases}.$$

Vậy $m < -2$ hoặc $m > 8$. □

Bài 5. Cho đường thẳng Δ đi qua $A(-6; 0)$ và đường tròn $(C) : (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$. Viết phương trình đường thẳng Δ , biết Δ cắt (C) tại hai điểm E, F sao cho $EF = 4\sqrt{5}$.



Lời giải.

(C) có tâm $I(3; 2)$ và bán kính $R = 5$.

Đường thẳng Δ đi qua $A(-6; 0)$ có phương trình $a(x + 6) + by = 0$ ($a^2 + b^2 > 0$).

Gọi H là trung điểm của EF , xét tam giác IEH vuông tại H , ta có: $IH = \sqrt{IE^2 - EH^2} = \sqrt{5^2 - (2\sqrt{5})^2} = \sqrt{5}$. Theo đề ta có:

$$d(I, \Delta) = IH \Leftrightarrow \frac{|a(3 + 6) + b \cdot 2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow |9a + 2b| = \sqrt{5(a^2 + b^2)} \Leftrightarrow 76a^2 + 36ab - 1b^2 = 0 (*).$$

Do $b = 0$ không là nghiệm của $(*)$, $(*) \Leftrightarrow 76 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 36 \left(\frac{a}{b}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = -\frac{1}{2}$ hoặc $\frac{a}{b} = \frac{1}{38}$.

Chọn $a = 1 \Rightarrow b = -2$ hoặc $b = 38$.

$$\text{Với } \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow \Delta : x - 2y + 6 = 0.$$

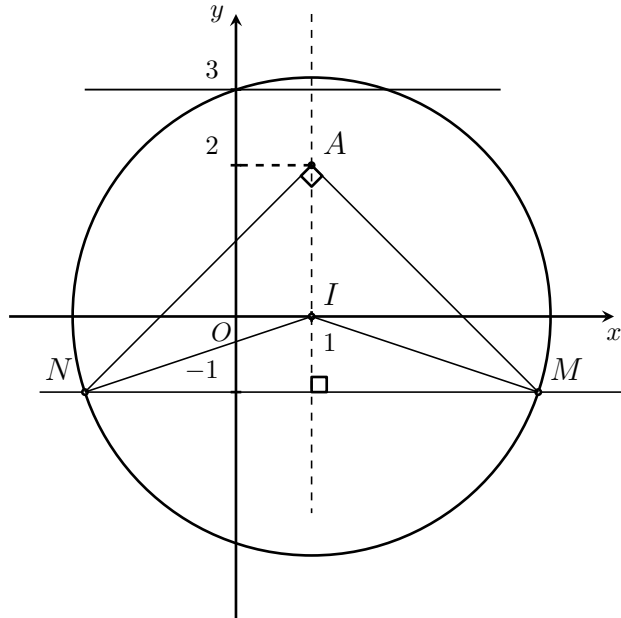
$$\text{Với } \begin{cases} a = 1 \\ b = 38 \end{cases} \Rightarrow \Delta : x + 38y + 6 = 0.$$

Vậy $\Delta : x - 2y + 6 = 0, \Delta : x + 38y + 6 = 0$.

□

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 6. Cho điểm $A(1; 2)$ và đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 2x - 9 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt (C) tại hai điểm M và N sao cho tam giác AMN vuông cân tại A .



Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1; 0)$ và bán kính $R = \sqrt{10}$.

Ta có $IM = IN$ và $AM = AN \Rightarrow AI \perp MN$, suy ra phương trình Δ có dạng $y = m$.

Hoành độ M, N là nghiệm phương trình: $x^2 - 2x + m^2 - 9 = 0$ (1).

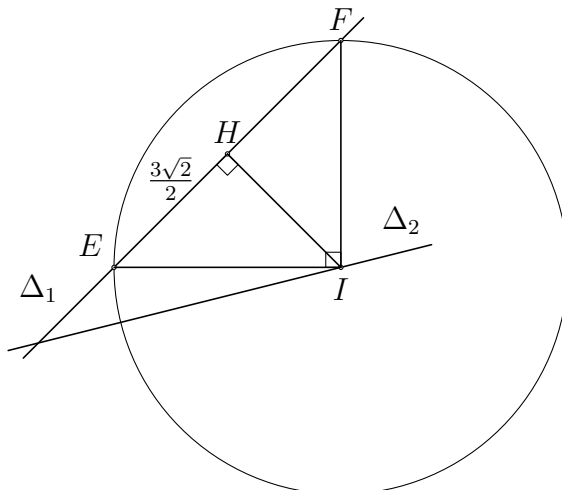
(1) có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 , khi và chỉ khi: $m^2 - 10 < 0$ (*). Khi đó ta có $M(x_1; m)$ và $N(x_2; m)$.

$AM \perp AN \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 0 \Leftrightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) + (m - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 - (x_1 + x_2) + m^2 - 4m + 5 = 0$.

Áp dụng Viét đối với (1), suy ra: $2m^2 - 4m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = -1$ hoặc $m = 3$, thỏa mãn (*).

Vậy phương trình $\Delta : y = -1$ hoặc $y = 3$. □

Bài 7. Cho đường thẳng $\Delta_1 : x - y + 4 = 0$ và $\Delta_2 : x - 4y + 7 = 0$ Viết phương trình đường tròn (C) có tâm I thuộc Δ_2 , cắt Δ_1 tại hai điểm E, F sao cho tam giác IEF vuông tại I và $EF = 3\sqrt{2}$.



Lời giải.

Gọi $I(4t - 7; t)$ thuộc Δ_2 .

Gọi H là trung điểm của EF , do tam giác IEF vuông cân tại I nên $IH = \frac{1}{2}EF = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ và $IE = R = \sqrt{IE^2 + IH^2} = 9$.

Ta có: $d(I, \Delta_1) = IH \Leftrightarrow \frac{|4t - 7 - t + 4|}{\sqrt{1+1}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow |3t - 3| = 3 \Leftrightarrow t = 0$ hoặc $t = 2$.

Với $t = 0 \Rightarrow I(-7; 0) \Rightarrow (C) : (x + 7)^2 + y^2 = 9$.

Với $t = 2 \Rightarrow I(1; 2) \Rightarrow (C) : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$.

Vậy $(C) : (x + 7)^2 + y^2 = 9$ hoặc $(C) : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$. □

Dạng 7. Vị trí tương đối của hai đường tròn.

Phương pháp giải: Cho đường tròn (C) có tâm I , bán kính R và đường tròn (C') có tâm I' , bán kính R' .

- Nếu $II' > R + R'$ suy ra hai đường tròn không cắt nhau và ở ngoài nhau.
- Nếu $II' < |R - R'|$ suy ra hai đường tròn không cắt nhau và lồng vào nhau.
- Nếu $II' = |R - R'|$ suy ra hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau.
- Nếu $|R - R'| < II' < R + R'$ suy ra hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 7 ❖❖❖

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng Oxy , cho hai đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$ và $(C') : x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3 = 0$. Chứng minh rằng hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B .

Lời giải.

- Cách 1. (C) có tâm $I(1; 3)$ và bán kính $R = 5$, (C') có tâm $I'(3; 1)$ và bán kính $R' = \sqrt{13}$.
Ta có $II' = \sqrt{(3-1)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{2}$.
Ta thấy $|R_1 - R_2| < II' < |R_1 + R_2|$ suy ra hai đường tròn cắt nhau.

- Cách 2. Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y+3)^2 + y^2 - 2(y+3) - 6y - 15 = 0 \\ x = y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - y - 6 = 0 \\ x = y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ y = 3 \\ x = y + 3 \end{cases}$$

Suy ra hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm có tọa độ là $A(1; -2)$ và $B(6; 3)$. □

Ví dụ 2. Cho hai đường tròn: $(C) : x^2 + y^2 = 1$ và $(C_m) : x^2 + y^2 - 2(m+1)x + 4my - 5 = 0$. Xác định m để (C_m) tiếp xúc với (C) .

Lời giải.

Để thấy (C) có tâm $O(0; 0)$ và bán kính $R = 1$.

(C_m) có tâm $I(m+1; -2m)$ và bán kính $R' = \sqrt{(m+1)^2 + 4m^2 + 5}$.

Ta thấy $OI = \sqrt{(m+1)^2 + 4m^2} < R'$ điểm O nằm trong đường tròn tâm I suy ra (C) và (C_m) chỉ có thể tiếp xúc trong nhau.

Điều kiện để hai đường tròn tiếp xúc trong là

$$R' - R = OI \Leftrightarrow \sqrt{(m+1)^2 + 4m^2} + 5 - 1 = \sqrt{(m+1)^2 + 4m^2}.$$

Giải phương trình ta được $m = -1$ hoặc $m = \frac{3}{5}$. □

Ví dụ 3. Cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ có tâm I và đường thẳng $\Delta : \sqrt{2}x + my + 1 - \sqrt{2} = 0$.

- Tìm m để đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B .
- Tìm m để diện tích tam giác IAB là lớn nhất.

Lời giải.

- a) Đường tròn (C) có tâm $I(1; -2)$, bán kính $R = 3$

Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi

$$d(I; \Delta) < R \Leftrightarrow \frac{|\sqrt{2} - 2m + 1 - \sqrt{2}|}{\sqrt{2 + m^2}} < 3. \Leftrightarrow 5m^2 + 5m + 17 > 0 \text{ (đúng với mọi } m).$$

- b) Ta có $S_{IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot IB \cdot \sin \widehat{AIB} = \frac{9}{2} \sin \widehat{AIB} \leq \frac{9}{2}$.

Suy $\max S_{IAB} = \frac{9}{2}$ khi và chỉ khi $\sin \widehat{AIB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{AIB} = 90^\circ$.

Gọi H là hình chiếu của I lên Δ khi đó $\widehat{AIH} = 45^\circ \Rightarrow IH = IA \cdot \cos 45^\circ = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

$$\text{Ta có } d(I; \Delta) = IH \Leftrightarrow \frac{|1 - 2m|}{\sqrt{2 + m^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m^2 + 8m + 16 = 0 \Leftrightarrow m = -4.$$

Vậy với $m = -4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

Dạng 8. Phương trình đường thẳng chứa tham số

Đối với bài toán tìm m : Ta dựa vào điều kiện bài ra đưa về phương trình ẩn m .

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 8 ❖❖❖

Ví dụ 1. Tìm m biết đường thẳng $d : (m+1)x - my + 2m - 1 = 0$ đi qua điểm $A(-1; 2)$.

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua điểm $A(-1; 2)$ khi và chỉ khi

$$-(m+1) - 2m + 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = -2.$$

□

Ví dụ 2. Tìm m biết đường thẳng $d : mx - (m-2)y + 3 = 0$ song song với đường thẳng $\Delta : 2x + 3y - 1 = 0$.

Lời giải.

Đường thẳng d song song với đường thẳng Δ khi và chỉ khi

$$\frac{m}{2} = \frac{-m+2}{3} \neq \frac{3}{-1} \Leftrightarrow m = \frac{4}{5}.$$

□

Ví dụ 3. Tìm m biết đường thẳng $d : x + (2m + 1)y + m$ vuông góc với đường thẳng $\Delta : x - y + 1 = 0$.

Lời giải.

Đường thẳng d có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_d = (1; 2m + 1)$. Đường thẳng Δ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_\Delta = (1; -1)$.

Đường thẳng d vuông góc với đường thẳng Δ khi và chỉ khi

$$\vec{n}_d \cdot \vec{n}_\Delta = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot 1 + (2m + 1)(-1) = 0 \Leftrightarrow m = 0.$$

□

Ví dụ 4. Tìm m biết đường thẳng $d : 2x - my + 2 = 0$ tạo với đường thẳng $\Delta : x + y + 1 = 0$ một góc 60° .

Lời giải.

Đường thẳng d và Δ có véc-tơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_d = (2; -m)$ và $\vec{n}_\Delta = (1; 1)$.

Theo bài ra ta có

$$\begin{aligned} \cos 60^\circ &= \frac{|\vec{n}_d \cdot \vec{n}_\Delta|}{|\vec{n}_d| \cdot |\vec{n}_\Delta|} = \frac{|2 - m|}{\sqrt{2^2 + m^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2^2 + m^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2} = 2|2 - m| \\ &\Leftrightarrow 2(m^2 + 4) = 4(4 - 4m + m^2) \\ &\Leftrightarrow m^2 - 8m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = 4 \pm 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 5. Tìm m để đường thẳng $d_m : mx + (m - 3)y + m^2 - 3m = 0$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 1.

Lời giải.

Điều kiện để đường thẳng d_m cắt hai trục tọa độ là $m(m - 3) \neq 0$.

Tọa độ giao điểm của đường thẳng d_m với Ox và Oy lần lượt là $A(3 - m; 0)$ và $B(0; -m)$.

Ta có

$$\begin{aligned} S_{OAB} &= \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \sqrt{(3 - m)^2} \cdot \sqrt{(-m)^2} = \frac{|3m - m^2|}{2} = 1 \\ &\Leftrightarrow |m^2 - 3m| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 = 0 \\ m^2 - 3m - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \\ m = \frac{3 - \sqrt{17}}{2} \\ m = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

□

Ví dụ 6. Tìm điểm cố định của họ đường thẳng $d_m : (2m - 1)x - (m + 1)y + 3 - m = 0$.

Lời giải.

Gọi $A(x_0; y_0)$ là điểm cố định của họ đường thẳng, khi đó ta có

$$(2m - 1)x_0 - (m + 1)y_0 + 3 - m = 0, \forall m \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (2x_0 - y_0 - 1)m + (3 - x_0 - y_0) = 0, \forall m \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 - y_0 = 1 \\ x_0 + y_0 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{4}{3} \\ y_0 = \frac{5}{3} \end{cases}.$$

Vậy $A\left(\frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right)$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho họ đường thẳng $d_m : (2m - 3)x + my - 2 = 0$. Tìm điều kiện của tham số m biết đường thẳng d_m đi qua $A(2; 3)$.

Lời giải.

Đường thẳng d_m đi qua $A(2; 3)$ khi và chỉ khi

$$(2m - 3)2 + 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow 7m - 8 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{8}{7}.$$

□

Bài 2. Cho họ đường thẳng $d_m : (2m - 3)x + my - 2 = 0$. Tìm điều kiện của tham số m biết đường thẳng d_m song song với đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có phương trình tổng quát của $\Delta : x - 2y - 1 = 0$.

Đường thẳng d_m song song với Δ khi và chỉ khi $\frac{2m - 3}{1} = \frac{m}{-2} \neq \frac{-2}{-1} \Leftrightarrow m = \frac{6}{5}$. □

Bài 3. Cho họ đường thẳng $d_m : (2m - 3)x + my - 2 = 0$. Tìm điều kiện của tham số m biết đường thẳng d_m vuông góc với đường thẳng $3x - 4y + 5 = 0$.

Lời giải.

Đường thẳng d_m và Δ lần lượt có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}_d = (2m - 3; m)$ và $\vec{n}_\Delta = (3; -4)$.

Để $d_m \perp \Delta$ khi và chỉ khi $\vec{n}_d \cdot \vec{n}_\Delta = 0 \Leftrightarrow 3(2m - 3) - 4m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{9}{2}$. □

Bài 4. Tìm điểm cố định của họ đường thẳng $d_m : (2m - 3)x + my - 2 = 0$.

Lời giải.

Gọi điểm cố định của họ đường thẳng là $A(x_0; y_0)$. Khi đó ta có

$$(2m - 3)x_0 + my_0 - 2 = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow (2x_0 + y_0)m - (3x_0 + 2) = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow x_0 = -\frac{2}{3}, y_0 = \frac{4}{3}.$$

Vậy $A\left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

□

Dạng 9. Phương trình đường tròn chứa tham số

Dựa theo điều kiện bài toán, ta đưa về phương trình theo tham số nào đó, từ đó giải ra tìm được điều kiện của tham số.

🔗🔗🔗 BÀI TẬP DẠNG 9 🔗🔗🔗

Ví dụ 1. Cho đường tròn $(C_m): x^2 + y^2 - (m+2)x - (m+4)y + m + 1 = 0$.

- Chứng minh rằng (C_m) luôn là đường tròn với mọi giá trị của tham số m .
- Tìm m để đường tròn (C_m) đi qua điểm $A(2; -3)$.
- Tìm tập hợp tâm các đường tròn (C_m) khi m thay đổi.
- Chứng minh rằng khi m thay đổi, họ các đường tròn (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định.
- Tìm những điểm trong mặt phẳng tọa độ mà họ (C_m) không đi qua với mọi giá trị của tham số m .

Lời giải.

a) Ta có $a^2 + b^2 - c = \frac{(m+2)^2}{4} + \frac{(m+4)^2}{4} - m - 1 = \frac{2m^2 + 8m + 16}{4} = \frac{m^2 + (m+4)^2}{4} > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Điều đó chứng tỏ (C_m) luôn là phương trình đường tròn.

b) Để (C_m) đi qua điểm $A(2; -3)$ khi và chỉ khi

$$2^2 + (-3)^2 - 2(m+2) - (m+4)(-3) + m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2m + 22 = 0 \Leftrightarrow m = -11.$$

c) Tọa độ tâm của họ đường tròn (C_m) là $I\left(\frac{m+2}{2}; \frac{m+4}{2}\right)$.

Đặt $x = \frac{m+2}{2}; y = \frac{m+4}{2} \Rightarrow y = x + 1$. Vậy quỹ tích tâm I là đường thẳng $y = x + 1$.

d) Giả sử $A(x_0; y_0)$ là điểm cố định của họ (C_m) , khi đó ta có

$$x_0^2 + y_0^2 - (m+2)x_0 - (m+4)y_0 + m + 1 = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow (1 - x_0 - y_0)m + (x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 - 4y_0 + 1) = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x_0 - y_0 = 0 \\ x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 - 4y_0 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 2 \\ x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}.$$

e) Giả sử $A(x_0; y_0)$ là điểm mà họ (C_m) không đi qua với mọi m , khi đó ta có

$$\begin{aligned} x_0^2 + y_0^2 - (m+2)x_0 - (m+4)y_0 + m + 1 &\neq 0, \forall m \\ \Leftrightarrow (1 - x_0 - y_0)m + (x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 - 4y_0 + 1) &\neq 0, \forall m \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x_0 - y_0 = 0 \\ x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 - 4y_0 + 1 \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Điều đó tương đương với họ (C_m) không đi qua mọi điểm nằm trong hình tròn $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ trừ hai điểm $A_1(-1; 2)$ và $A_2(1; 0)$. □

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 2x - 2my + m^2 - 24 = 0$ có tâm I và đường thẳng $\Delta : mx + 4y = 0$ (ở đó m là tham số). Tìm m biết đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn diện tích tam giác IAB bằng 12.

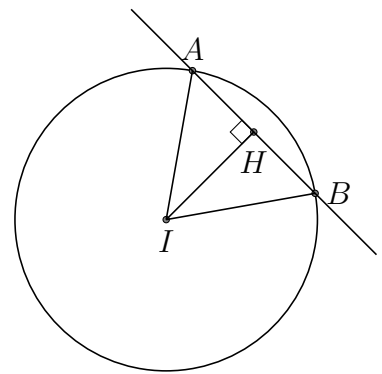
Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1; m)$, bán kính $R = 5$. Gọi H là trung điểm của dây cung AB . Ta có IH là đường cao của tam giác IAB và

$$\begin{aligned} IH &= d(I, \Delta) = \frac{|m + 4m|}{\sqrt{m^2 + 16}} = \frac{|5m|}{\sqrt{m^2 + 16}} \\ AH &= \sqrt{IA^2 - IH^2} = \sqrt{25 - \frac{(5m)^2}{m^2 + 16}} = \frac{20}{\sqrt{m^2 + 16}}. \end{aligned}$$

Theo bài ra ta có

$$\begin{aligned} S_{\triangle IAB} &= 12 \Leftrightarrow 2S_{\triangle IAH} = 12 \\ \Leftrightarrow d(I, \Delta) \cdot AH &= 12 \Leftrightarrow 25|m| = 3(m^2 + 16) \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 3 \\ m = \pm \frac{16}{3} \end{cases}. \end{aligned}$$



Ví dụ 3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho họ đường thẳng phụ thuộc tham số α là d_α có phương trình: $(x + 1) \cos \alpha + (y - 1) \sin \alpha - 1 = 0$. Chứng minh rằng họ đường thẳng đã cho luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Lời giải.

Lấy $A(-1; 1)$, ta có $d(A; d_\alpha) = \frac{|-1|}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}} = 1$. Vậy họ đường thẳng luôn tiếp xúc với đường tròn $(A; R = 1)$ cố định. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho họ đường tròn (C_m) có phương trình $x^2 + y^2 - 4mx - 2my + \frac{9m^2}{2} - m - \frac{1}{2}$.

- Tìm tập hợp tâm của (C_m) khi m thay đổi.
- Chứng minh rằng (C_m) luôn tiếp xúc với hai đường thẳng cố định.
- Tìm m để (C_m) tiếp xúc với đường thẳng $\Delta : x + y - 2$.

Lời giải.

- Quỹ tích tâm là đường thẳng $x - 2y = 0$.

- Họ đường tròn (C_m) có tâm $I(2m; m)$ và bán kính $R = \frac{|m+1|\sqrt{2}}{2}$.

Giả sử đường thẳng cố định cần tìm là $d : Ax + By + C = 0$. Suy ra $d(I; d) = R, \forall m$.

Điều đó tương đương với

$$\frac{|2Am + Bm + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|m+1|\sqrt{2}}{2}, \forall m$$

Giải ra ta được $\begin{cases} A = 1, B = -1, C = 1 \\ A = 1, B = -7, C = -5 \end{cases}$.

- Để đường thẳng Δ tiếp xúc với (C_m) thì $d(I; \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|2m + m - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{|m+1|\sqrt{2}}{2}$.

Giải ra ta được $m = \frac{3}{2}$ và $m = \frac{1}{4}$.

□

Bài 2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$. Tìm điều kiện của tham số m để đường thẳng $\Delta : x + (m-1)y + m = 0$ tiếp xúc với đường tròn (C) .

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(2; -4)$ và bán kính $R = \sqrt{2^2 + (-4)^2 - (-5)} = 5$.

Để đường thẳng Δ tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi

$$d(I; \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|2 - 4(m-1) + m|}{\sqrt{1 + (m-1)^2}} = 5$$

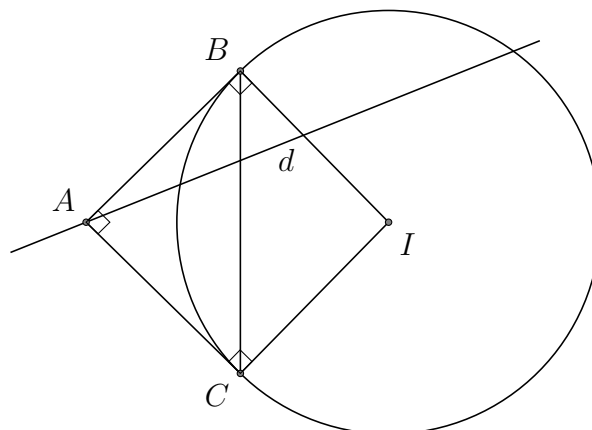
$$\Leftrightarrow (6 - 3m)^2 = 25(2 - 2m + m^2) \Leftrightarrow 8m^2 - 7m + 7 = 0 \text{ (vô nghiệm)}.$$

Vậy đường thẳng Δ không thể tiếp xúc đường tròn.

□

Bài 3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C) : (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ và đường thẳng $d : x + y + m = 0$. Tìm m để trên đường thẳng d có duy nhất một điểm A mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn (C) (B, C là hai tiếp điểm) sao cho tam giác ABC vuông.

Lời giải.



Đường tròn (C) có tâm $I(1; -2)$ và bán kính $R = 3$. Nếu tam giác ABC vuông góc tại A thì khi đó tứ giác $ABIC$ là hình vuông. Theo tính chất hình vuông ta có $IA = IB\sqrt{2}$. (1)

Nếu A nằm trên d thì $A(t; -m - t)$ suy ra $IA = \sqrt{(t-1)^2 + (t-2+m)^2}$. Thay vào (1) ta có

$$\sqrt{(t-1)^2 + (t-2+m)^2} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow 2t^2 - 2(m-1)t + m^2 - 4m - 13 = 0. \quad (2)$$

Để trên d có đúng một điểm A thì (2) có đúng một nghiệm t , từ đó ta có

$$\Delta = -(m^2 + 10m + 25) = 0 \Leftrightarrow -(m+5)^2 = 0 \Leftrightarrow m = -5.$$

Khi đó (2) có nghiệm kép là $t_1 = t_2 = t_0 = \frac{m-1}{2} = \frac{-5-1}{2} = -3 \Rightarrow A(-3; 8)$. $\square$

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ với hệ tọa độ Oxy , cho họ đường tròn $(C_m) : x^2 + y^2 - 2(m+1)x - 2(m+2)y + 6m + 7 = 0$ (với m là tham số). Xác định tọa độ tâm đường tròn thuộc họ đã cho tiếp xúc với trục tung.

Lời giải.

Họ đường tròn (C_m) có tâm $I(m+1; m+2)$ và bán kính

$$R = \sqrt{(m+1)^2 + (m+2)^2 - 6m - 7} = \sqrt{2m^2 - 2}.$$

Để (C_m) tiếp xúc với trục tung thì

$$|m+1| = \sqrt{2m^2 - 2} \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases}.$$

Thử lại ta được $m = 3$ thỏa mãn, từ đó ta được $I(4; 5)$. $\square$

Bài 5. Cho đường tròn $(C) : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$ và đường thẳng $\Delta : (m+1)x + my - 1 = 0$, với m là tham số.

- Chứng minh rằng đường thẳng Δ luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B .
- Tìm m để độ dài đoạn thẳng AB đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.

- Đường tròn (C) có tâm $I(2; 1)$ và bán kính $R = 3$.

$$\text{Ta có } d(I; \Delta) = \frac{|(m+1)2 + m - 1|}{\sqrt{(m+1)^2 + m^2}} = \frac{|3m+1|}{\sqrt{(m+1)^2 + m^2}}.$$

$$\text{Xét } d^2(I; \Delta) - R^2 = \frac{(3m+1)^2}{2m^2 + 2m + 1} - 9 = \frac{-9m^2 - 12m - 8}{(m+1)^2 + m^2} = \frac{-(3m+2)^2 - 4}{(m+1)^2 + m^2} < 0, \forall m.$$

Vậy $d(I; \Delta) < R, \forall m$, suy ra đường thẳng Δ luôn cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt A, B .

- Gọi M là trung điểm của dây AB suy ra

$$AB^2 = 4MA^2 = 4(R^2 - d^2(I; \Delta)) = 4 \frac{9m^2 + 12m + 8}{2m^2 + 2m + 1} = 4y.$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} 9m^2 + 12m + 8 &= 2ym^2 + 2ym + y \\ \Leftrightarrow (2y-9)m^2 + (2y-12)m + (y-8) &= 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Để tồn tại m thì phương trình (*) phải có nghiệm.

Khi $y = \frac{9}{2}$ thì ta có phương trình $-3m - \frac{7}{2} = 0$ có nghiệm.

Khi $y \neq \frac{9}{2}$ ta xét $\Delta' = (y-6)^2 - (2y-9)(y-8) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{19 - \sqrt{217}}{2} \leq y \leq \frac{19 + \sqrt{217}}{2}$.

□

Bài 6. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để hệ phương trình sau có đúng hai nghiệm

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1+a) \\ (x+y)^2 = 4 \end{cases}.$$

Lời giải.

Phương trình thứ hai tương đương với $\begin{cases} x+y-2=0 \\ x+y+2=0 \end{cases}$.

Nhận thấy $d_1: x+y-2=0$ và $d_2: x+y+2=0$ là hai đường thẳng đối xứng nhau qua gốc tọa độ, mặt khác đường tròn $(C): x^2+y^2=2(1+a)$ ($a > -1$) cũng đối xứng qua gốc tọa độ. Vì vậy để hệ có đúng hai nghiệm thì đường tròn (C) phải tiếp xúc với d_1 . Từ đó ta có

$$\frac{|-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{2(1+a)} \Leftrightarrow 1+a=1 \Leftrightarrow a=0.$$

□

Bài 7. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho họ đường tròn $(C_m): x^2+y^2-2mx-2(1-m)y+2m^2-2m-3=0$. Tìm quỹ tích tâm của họ đường tròn (C_m) .

Lời giải.

Quỹ tích tâm đường tròn (C_m) là đường thẳng $y=1-x$.

□

Dạng 10. Tìm tọa độ một điểm thỏa một điều kiện cho trước

Ở đây, ta xét bài toán tìm tọa độ một điểm thỏa một điều kiện cho trước về độ dài, về góc, về khoảng cách, diện tích, liên quan đến đường tròn, tạo hình vuông, tam giác đều, ...

Trong mặt phẳng Oxy , xét đường tròn $(\mathcal{C}): (x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

Tìm điểm $M \in (\mathcal{C})$, ta làm như sau:

Cách 1

- Gọi $M(x_0; y_0) \in (\mathcal{C})$, ta có: $(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=R^2$.
- Dựa vào điều kiện cho trước ta có thêm hệ thức liên hệ giữa x_0 và y_0 . Từ đó tìm được tọa độ của điểm M .

Cách 2

- Chuyển phương trình đường tròn $(\mathcal{C})$ về dạng tham số: $\begin{cases} x=a+R\sin t \\ y=b+R\cos t \end{cases}$ với $t \in [0; 360^\circ)$.
- Gọi $M(x_0; y_0) \in (\mathcal{C})$, ta có: $\begin{cases} x_0=a+R\sin t \\ y_0=b+R\cos t \end{cases}$ với $t \in [0; 360^\circ)$.
- Sử dụng điều kiện cho trước để xác định $\sin t$ và $\cos t$. Từ đó tìm được tọa độ của điểm M .

❖❖❖ BÀI TẬP DẠNG 10 ❖❖❖

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC vuông cân tại A . Biết $M(1; -1)$ là trung điểm cạnh BC và $G\left(\frac{2}{3}; 0\right)$ là trọng tâm tam giác ABC . Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC .

Lời giải.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC và M là trung điểm cạnh BC nên ta có $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} \Rightarrow A(0; 2)$.

Vì tam giác ABC vuông cân tại A nên $AM \perp BC$ và $MA = MB = MC$.

Phương trình đường thẳng BC đi qua điểm $M(1; -1)$ và nhận $\overrightarrow{AM} = (1; -3)$ làm véc-tơ pháp tuyến là: $1(x - 1) - 3(y + 1) = 0$ hay $x - 3y - 4 = 0$.

Vì $MA = MB = MC = \sqrt{10}$ nên hai điểm B, C thuộc đường tròn $(\mathcal{C}) : (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 10$.

Do đó, tọa độ hai điểm B, C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 3y - 4 = 0 \\ (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}.$$

Vậy $A(0; 2), B(4; 0), C(-2; -2)$ hoặc $A(0; 2), B(-2; -2), C(4; 0)$. □

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường tròn $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 4x - 6y + 5 = 0$.

- Tìm các điểm thuộc $(\mathcal{C})$ có tọa độ nguyên.
- Xác định tọa độ các đỉnh B, C của tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $(\mathcal{C})$, biết điểm $A(4; 5)$.

Lời giải.

- a) Ta xem phương trình đường tròn $(\mathcal{C})$ đã cho là phương trình bậc hai với ẩn số là y :

$$y^2 - 6y + x^2 - 4x + 5 = 0. \quad (1)$$

$$\text{Phương trình (1) có nghiệm} \Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow 2 - 2\sqrt{2} \leq x \leq 2 + 2\sqrt{2}. \quad (2)$$

$$\text{Từ (2) suy ra các điểm thuộc } (\mathcal{C}) \text{ có hoành độ nguyên là: } 0; 1; 2; 3; 4. \quad (3)$$

Lần lượt thay các hoành độ nguyên ở (3) vào (1) ta tìm được các điểm thuộc $(\mathcal{C})$ có tọa độ nguyên là: $(0; 1), (0; 5), (4; 1), (4; 5)$.

- b) Đường tròn $(\mathcal{C})$ có tâm $I(2; 3)$ và bán kính $R = 2\sqrt{2}$.

Vì tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn $(\mathcal{C})$ nên tâm I của $(\mathcal{C})$ là trọng tâm, đồng thời là trực tâm của tam giác ABC .

Gọi $H(x; y)$ là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh BC , ta có:

$$\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{IH} \Rightarrow H(1; 2).$$

Phương trình đường thẳng BC đi qua điểm $H(1; 2)$ và nhận $\overrightarrow{AI} = (-2; -2) = -2(1; 1)$ làm véc-tơ pháp tuyến có dạng: $x + y - 3 = 0$.

Do đó, tọa độ hai điểm B, C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 6y + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - y \\ 2y^2 - 8y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{3} \\ y = 2 + \sqrt{3} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 1 + \sqrt{3} \\ y = 2 - \sqrt{3} \end{cases}.$$

Vậy $B(1 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}), C(1 + \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3})$ hoặc $B(1 + \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3}), C(1 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3})$. □

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường tròn $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ và đường thẳng $(d) : x + y - 2 = 0$.

- Chứng minh rằng (d) luôn cắt $(\mathcal{C})$ tại hai điểm phân biệt A, B . Tính độ dài đoạn thẳng AB .
- Tìm điểm C thuộc $(\mathcal{C})$ sao cho tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

Lời giải.

- a) Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - y \\ 2y^2 - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Hệ phương trình trên có hai nghiệm $(2; 0)$ và $(0; 2)$ nên suy ra (d) luôn cắt $(\mathcal{C})$ tại hai điểm phân biệt $A(2; 0), B(0; 2)$.

Ta có: $AB = \sqrt{(0 - 2)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

- b) Ta có $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

Phương trình của $(\mathcal{C})$ được viết dưới dạng tham số là: $\begin{cases} x = 2 + 2 \sin t \\ y = 2 + 2 \cos t \end{cases}$ với $t \in [0; 360^\circ)$.

Vì $C \in (\mathcal{C})$ nên suy ra $C(2 + 2 \sin t; 2 + 2 \cos t)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên AB , ta có: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CH = CH\sqrt{2}$.

Suy ra tam giác ABC có diện tích lớn nhất khi và chỉ khi CH có độ dài lớn nhất.

Ta có $CH = d(C, (d)) = \frac{|2 + 2 \sin t + 2 + 2 \cos t - 2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}|\sqrt{2} \sin(t + 45^\circ) + 1|$.

Do đó, CH lớn nhất $\Leftrightarrow \sin(t + 45^\circ) = 1 \Leftrightarrow t = 45^\circ$.

Vậy $C(2 + \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2})$.

□

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường tròn $(\mathcal{C}) : (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2$ và đường thẳng $(d) : x - y - 2 = 0$.

- Tìm trên $(\mathcal{C})$ điểm P sao cho khoảng cách từ P đến đường thẳng (d) đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.
- Tìm điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc $(\mathcal{C})$ sao cho $x_0 + y_0$ đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Lời giải.

- a) Đường tròn $(\mathcal{C})$ có tâm $I(2; 3)$ và bán kính $R = \sqrt{2}$.

Ta có $d(I, (d)) = \frac{|2 - 3 - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} > \sqrt{2} = R \Rightarrow (d)$ không cắt $(\mathcal{C})$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua tâm I của $(\mathcal{C})$ và vuông góc với (d) . Khi đó phương trình đường thẳng Δ là: $1(x - 2) + 1(y - 3) = 0$ hay $x + y - 5 = 0$.

Tọa độ giao điểm của Δ và $(\mathcal{C})$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - y \\ y^2 - 6y + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Suy ra Δ cắt $(\mathcal{C})$ tại hai điểm phân biệt $P_1(1; 4)$ và $P_2(3; 2)$.

Ta có:

$$d(P_1, (d)) = \frac{|1 - 4 - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

$$d(P_2, (d)) = \frac{|3 - 2 - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy khi $P \equiv P_1$ thì khoảng cách từ P đến đường thẳng (d) đạt giá trị lớn nhất và khi $P \equiv P_2$ thì khoảng cách từ P đến đường thẳng (d) đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Phương trình của $(\mathcal{C})$ được viết dưới dạng tham số là: $\begin{cases} x = 2 + \sqrt{2} \sin t \\ y = 3 + \sqrt{2} \cos t \end{cases}$ với $t \in [0; 360^\circ)$.

Vì $M(x_0; y_0) \in (\mathcal{C})$ nên suy ra $\begin{cases} x_0 = 2 + \sqrt{2} \sin t \\ y_0 = 3 + \sqrt{2} \cos t. \end{cases}$

Ta có $x_0 + y_0 = 5 + \sqrt{2}(\sin t + \cos t) = 5 + 2 \sin(t + 45^\circ)$.

Do đó, ta có:

$x_0 + y_0$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow \sin(t + 45^\circ) = 1 \Leftrightarrow t = 45^\circ \Rightarrow M(1; 2)$.

$x_0 + y_0$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow \sin(t + 45^\circ) = -1 \Leftrightarrow t = 225^\circ \Rightarrow M(3; 4)$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường tròn $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 = 4$ và hai điểm $A\left(1; -\frac{8}{3}\right)$, $B(3; 0)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc $(\mathcal{C})$ sao cho tam giác MAB có diện tích bằng $\frac{20}{3}$.

Lời giải.

Ta có $AB = \sqrt{(3-1)^2 + \left(0 + \frac{8}{3}\right)^2} = \frac{10}{3}$.

Phương trình đường thẳng AB đi qua điểm $B(3; 0)$ và nhận $\overrightarrow{AB} = \left(2; \frac{8}{3}\right) = \frac{2}{3}(3; 4)$ làm véc-tơ chỉ phương có dạng: $4(x-3) - 3(y-0) = 0$ hay $4x - 3y - 12 = 0$.

Gọi $M(x; y)$. Ta có: $S_{\triangle MAB} = \frac{20}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2}d(M, AB) \cdot AB = \frac{20}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{|4x - 3y - 12|}{5} \cdot \frac{10}{3} = \frac{20}{3} \Leftrightarrow |4x - 3y - 12| = 20.$ (1)

Lại có $M \in (\mathcal{C}) \Rightarrow x^2 + y^2 = 4.$ (2)

Từ (1) & (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ |4x - 3y - 12| = 20 \end{cases}.$

Giải hệ phương trình trên, ta tìm được $M(-2; 0)$ hoặc $M\left(-\frac{14}{25}; \frac{48}{75}\right).$ □

Bài 2. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng $\Delta : x + y + 2 = 0$ và đường tròn $(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$. Gọi I là tâm của đường tròn $(\mathcal{C})$ và M là một điểm thuộc đường thẳng Δ . Qua M , kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn $(\mathcal{C})$ (A, B là các tiếp điểm). Tìm tọa độ điểm M sao cho tứ giác $MAIB$ có diện tích bằng 10.

Lời giải.

Đường tròn $(\mathcal{C})$ có tâm $I(2; 1)$ và bán kính $R = \sqrt{5} \Rightarrow AI = \sqrt{5}$.

Ta có $S_{MAIB} = 10 \Leftrightarrow S_{\triangle MAI} = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot AM \cdot AI = 5 \Leftrightarrow AM = 2\sqrt{5}$.

Suy ra $IM^2 = IA^2 + AM^2 = 5 + 20 = 25$.

Ta có $M \in \Delta \Rightarrow M(m; -m-2)$. Do đó, ta có:

$$IM^2 = 20 \Leftrightarrow (m-2)^2 + (m+3)^2 = 20 \Leftrightarrow m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = 2. \end{cases}$$

Vậy $M(2; -3)$ hoặc $M(-3; 1)$. □

Bài 3. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường tròn $(\mathcal{C}) : (x-3)^2 + (y-2)^2 = 8$ và điểm $A(2; 3)$.

- Tìm các điểm thuộc $(\mathcal{C})$ có tọa độ nguyên.
- Tìm điểm M thuộc $(\mathcal{C})$ sao cho MA đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Lời giải.

- Ta xem phương trình đường tròn $(\mathcal{C})$ đã cho là phương trình bậc hai với ẩn số là y :

$$y^2 - 4y + x^2 - 6x + 5 = 0. \quad (1)$$

$$\text{Phương trình (1) có nghiệm} \Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 + 6x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow 3 - 2\sqrt{2} \leq x \leq 3 + 2\sqrt{2}. \quad (2)$$

$$\text{Từ (2) suy ra các điểm thuộc } (\mathcal{C}) \text{ có hoành độ nguyên là: } 1; 2; 3; 4; 5. \quad (3)$$

Lần lượt thay các hoành độ nguyên ở (3) vào (1) ta tìm được các điểm thuộc $(\mathcal{C})$ có tọa độ nguyên là: $(1; 0)$, $(1; 4)$, $(5; 0)$, $(5; 4)$.

- Phương trình của $(\mathcal{C})$ được viết dưới dạng tham số là: $\begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{2} \sin t \\ y = 2 + 2\sqrt{2} \cos t \end{cases}$ với $t \in [0; 360^\circ)$.

Vì $M \in (\mathcal{C})$ nên suy ra $M(3 + 2\sqrt{2} \sin t; 2 + 2\sqrt{2} \cos t)$.

$$\text{Ta có } MA^2 = (2\sqrt{2} \sin t + 1)^2 + (2\sqrt{2} \cos t - 1)^2 = 10 + 8 \sin(t - 45^\circ).$$

$$\text{Suy ra } 2 \leq MA^2 \leq 18 \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq MA \leq 3\sqrt{2}.$$

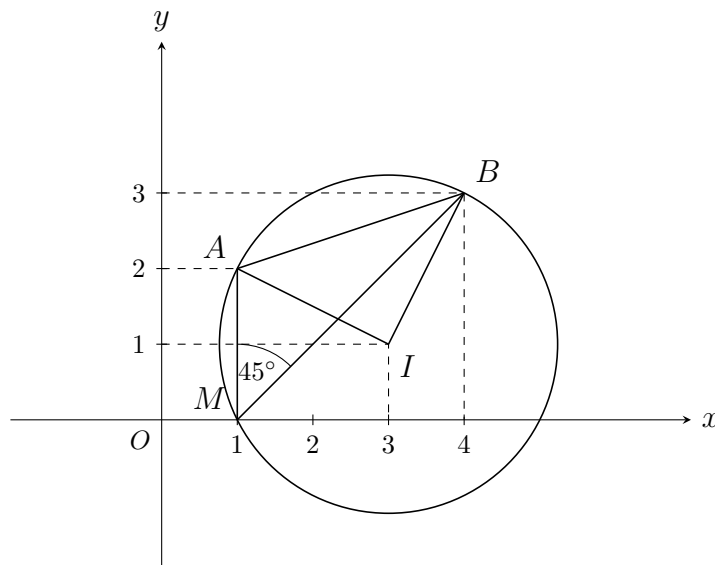
Do đó, ta có:

- MA đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow \sin(t - 45^\circ) = 1 \Leftrightarrow t = 135^\circ \Rightarrow M(1; 4)$.
- MA đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow \sin(t - 45^\circ) = -1 \Leftrightarrow t = 315^\circ \Rightarrow M(5; 0)$.

□

Bài 4. Trong mặt phẳng Oxy , cho hai điểm $A(1; 2)$, $B(4; 3)$. Tìm trên trục hoành điểm M sao cho $\widehat{AMB} = 45^\circ$.

Lời giải.



Giả sử đã tìm được điểm $M \in Ox$ sao cho $\widehat{AMB} = 45^\circ$. Vẽ đường tròn tâm $I(x; y)$ qua ba điểm A, B ,

M . Khi đó, ta có tam giác ABI vuông cân tại I . Do đó, ta có:

$$\begin{cases} AI = BI \\ \vec{AI} \cdot \vec{BI} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-4)^2 + (y-3)^2 \\ (x-1)(x-4) + (y-2)(y-3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 10 \\ x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 2 \\ y = 4. \end{cases}$$

Vậy $I(3; 1)$ hoặc $I(2; 4)$.

Trong cả hai trường hợp này ta đều có $IA = \sqrt{5}$.

Đường tròn tâm $I(2; 4)$, bán kính $\sqrt{5}$ không cắt trục hoành.

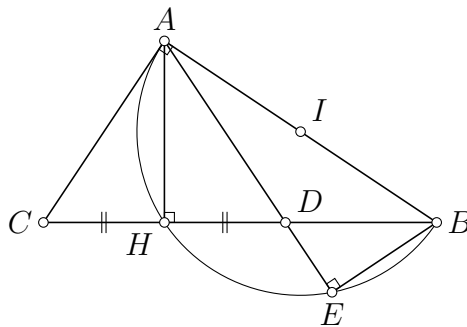
Đường tròn tâm $I(3; 1)$, bán kính $\sqrt{5}$ có phương trình $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$, nó cắt trục hoành tại hai điểm $(1; 0)$ và $(5; 0)$.

Vậy $M(1; 0)$ hay $M(5; 0)$. □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC vuông tại $A(2; 4)$ có $AB > AC$ và $B(8; 0)$. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A , điểm D nằm trên đường thẳng BC sao cho H là trung điểm CD . Gọi E là điểm nằm trên đường thẳng AD sao cho BC là phân giác góc $\widehat{ABE}$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE .

Lời giải.

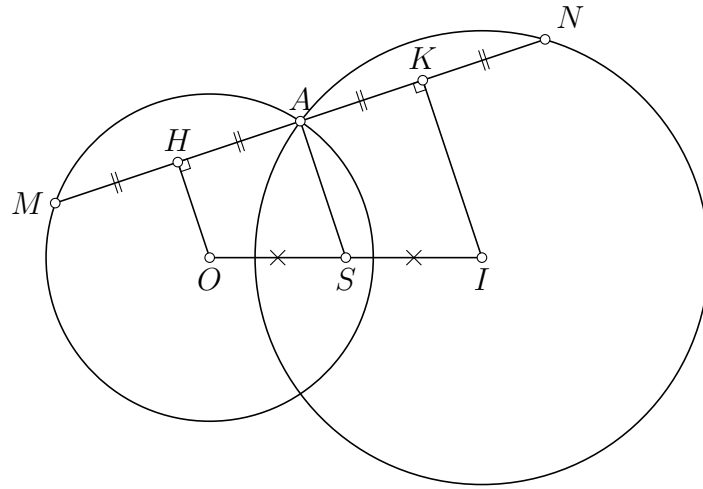


Dễ thấy tam giác ACD cân tại A có AH là đường cao nên $\widehat{CAH} = \widehat{DAH}$. Ta có $\widehat{EBD} = \widehat{ABD} = \widehat{CAH} = \widehat{DAH}$ nên tứ giác $AHEB$ nội tiếp. Mà $\widehat{AHB} = 90^\circ$ nên tam giác ABE nội tiếp đường tròn đường kính AB .

Gọi I là trung điểm của AB . Ta có $I(5; 2)$ và $IA = \sqrt{13}$. Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 13$. □

Bài 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 = 13$ và $(C_2): (x-6)^2 + y^2 = 25$. Gọi A là giao điểm của (C_1) và (C_2) sao cho A có tung độ dương. Viết phương trình đường thẳng đi qua A cắt (C_1) và (C_2) theo hai dây cung có độ dài bằng nhau.

Lời giải.

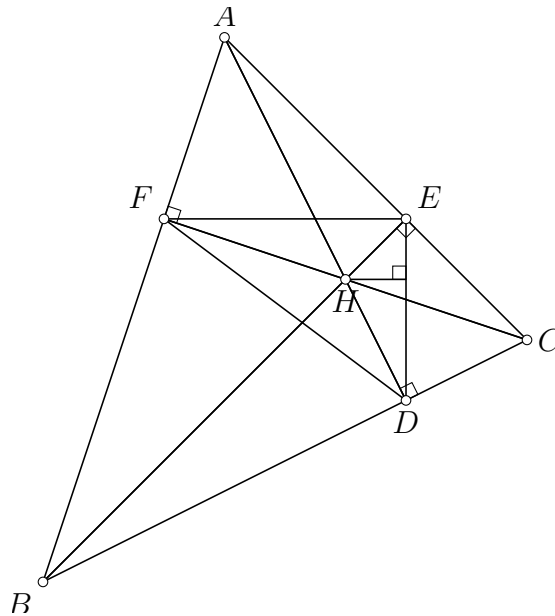


Tâm và bán kính của hai đường tròn (C_1) , (C_2) lần lượt là $O(0; 0)$, $R_1 = \sqrt{13}$ và $I(6; 2)$, $R_2 = 5$. Gọi S , H , K lần lượt là trung điểm của OI , MA , NA .

Giao điểm của (C_1) và (C_2) là nghiệm của hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ (x - 6)^2 + y^2 = 25 \end{cases}$. Giải hệ ta suy ra $A(2; 3)$ (A có tung độ dương). Ta có $OH \parallel IK$ (cùng vuông góc với d), lại theo giả thiết suy ra $AH = AK$ nên SA là đường trung bình của hình thang $HOIK$. Do đó $SA \perp d$. Đường thẳng d qua A nhận $\overrightarrow{SA}$ làm véc-tơ pháp tuyến có phương trình $x - 3y + 7 = 0$. $\square$

Bài 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(-1; 5)$, $B(-4; -4)$, $C(4; 0)$. Gọi D , E , F lần lượt là chân các đường cao hạ từ A , B , C . Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác DEF .

Lời giải.



Lời giải.

Gọi H là trực tâm tam giác ABC . Dễ thấy $BFHD$ và $CEHD$ là các tứ giác nội tiếp. Suy ra $\widehat{HDE} = \widehat{HCE} = \widehat{HBF} = \widehat{HDF}$, do đó HD là tia phân giác góc $\widehat{EDF}$. Tương tự HE là tia phân giác góc $\widehat{DEF}$. Vậy H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF .

Các đường thẳng BC và AC lần lượt có phương trình $x - 2y - 4 = 0$ và $x + y - 4 = 0$. Các đường thẳng AD và BE lần lượt đi qua A , B và vuông góc với BC , CA nên chúng lần lượt có phương trình

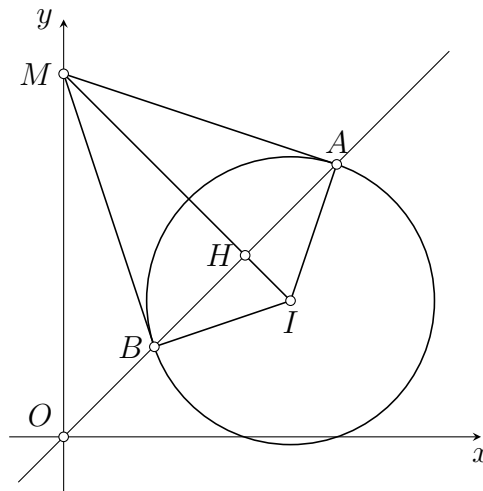
là $2x + y - 3 = 0$ và $x - y = 0$. Do H là giao điểm của AD và BE nên $H(1; 1)$. Do D, E lần lượt là giao điểm của AD với BC , BE với CA nên $D(2; -1)$, $E(2; 2)$. Suy ra phương trình đường thẳng DE là $y = 2$. Do đó $d(H; DE) = 1$.

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$. □

□

Bài 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d : x - y = 0$. Đường tròn (C) có bán kính $R = \sqrt{10}$ cắt d tại hai điểm AB sao cho $AB = 4\sqrt{2}$. Tiếp tuyến của (C) tại A và B cắt nhau tại một điểm trên trục tung. Viết phương trình đường tròn (C) .

Lời giải.



Đặt $M(0; m)$. Gọi H là trung điểm của AB , suy ra $AH = 2\sqrt{2}$. Ta có $IH = \sqrt{IA^2 - AH^2} = \sqrt{2}$, suy ra $MH = \frac{AH^2}{IH} = 4\sqrt{2}$. Do đó

$$4\sqrt{2} = MH = d(M, AB) = \frac{|m|}{\sqrt{2}} \Rightarrow m \pm 8.$$

- Với $m = 8$ ta được $M(0; 8)$. Giả sử $I(a; b)$. Đường thẳng IM đi qua M vuông góc AB có phương trình $x + y - 8 = 0$. Ta có

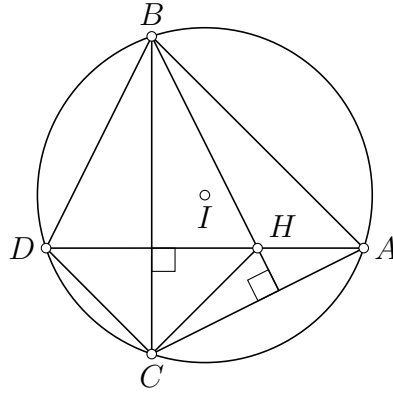
$$\begin{cases} I \text{ khác phía } M \text{ đối với } AB \\ I \in IM \\ d(I, AB) = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (0 - 8)(a - b) < 0 \\ a + b - 8 = 0 \\ \frac{|a - b|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 3. \end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 10$.

- Với $m = -8$, tương tự ta được phương trình đường tròn cần tìm là $(x + 5)^2 + (y + 3)^2 = 10$. □

Bài 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có trực tâm $H(2; 1)$ và $B(1; 3)$, $C(1; 0)$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Lời giải.



Gọi D là điểm đối xứng với H qua đường thẳng BC . Dễ thấy $\widehat{HBC} = 180^\circ - \widehat{BAC}$, mà D đối xứng với H qua BC nên $\widehat{BDC} = \widehat{BHC} = 180^\circ - \widehat{BAC}$. Suy ra tứ giác $ABDC$ là tứ giác nội tiếp, do đó đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cũng là đường tròn ngoại tiếp tam giác DBC .

Giả sử $D(u; v)$. Phương trình đường thẳng BC là $x = 1$. Do $HD \perp BC$ nên đường thẳng BC nhận véc-tơ $\overrightarrow{HA} = (u - 2; v - 1)$ làm một véc-tơ pháp tuyến. Suy ra $v = 1$.

Mặt khác trung điểm của HD nằm trên BC nên $\frac{u+2}{2} = 1$ hay $u = 0$. Vậy $D(0; 1)$.

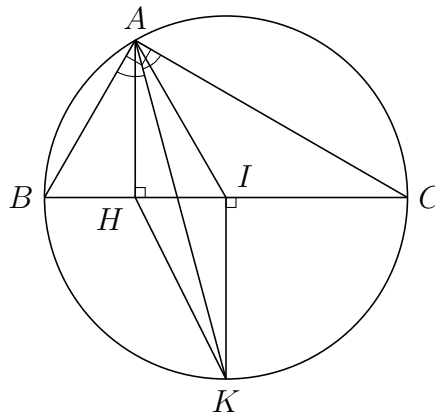
Giả sử phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác DBC có dạng $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Do D, B, C thuộc đường tròn nên tọa độ của chúng thỏa mãn phương trình đường tròn hay

$$\begin{cases} 0^2 + 1^2 + a \cdot 0 + b \cdot 1 + c = 0 \\ 1^2 + 3^2 + a \cdot 1 + b \cdot 3 + c = 0 \\ 1^2 + 0^2 + a \cdot 1 + b \cdot 0 + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -3 \\ c = 2. \end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $x^2 + y^2 - 3x - 3y + 2 = 0$. □

Bài 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $AB < AC$ nội tiếp đường tròn (C) : $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 8$ và $B(1; -1), C(5; 3)$. Tia phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$ cắt đường tròn (C) tại K . Hình chiếu của A trên đường thẳng BC là H . Tìm tọa độ điểm A biết $\frac{AH}{HK} = \frac{\sqrt{15}}{5}$ và A có tung độ dương.

Lời giải.



Đường tròn (C) có tâm $I(3; 1)$, bán kính $R = 2\sqrt{2}$ và BC là đường kính của đường tròn (C) . Dễ thấy

K là điểm chính giữa cung BC nên $IK \perp BC$. Ta có

$$\begin{aligned}\frac{3}{5} &= \frac{AH^2}{HK^2} = \frac{BH \cdot CH}{IH^2 + IK^2} \\ &= \frac{(R - IH)(R + IH)}{R^2 + IH^2} \\ &= \frac{R^2 - IH^2}{R^2 + IH^2} \\ \Rightarrow IH &= \frac{R}{2}.\end{aligned}$$

Do đó H là trung điểm BI , suy ra A nằm trên đường trung trực của BI , có phương trình $x + y - 2 = 0$.

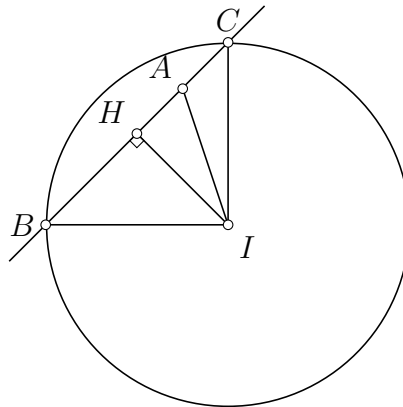
Do A là giao điểm của đường trung trực của đoạn BI và đường tròn (C) nên tọa độ của điểm A là

ng nghiệm của hệ
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 8 \end{cases}.$$

Giải hệ ta được $A(2 - \sqrt{3}; \sqrt{3})$. □

Bài 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 16$ có tâm I và điểm $A(0; 2)$. Viết phương trình đường thẳng d qua A cắt (C) tại hai điểm phân biệt B, C sao cho tam giác IBC và có diện tích bằng 8.

Lời giải.



Để thấy $I = (1; -1)$ và $IA = \sqrt{10} < 4$ nên A nằm trong đường tròn (C) . Do đó đường thẳng d qua A luôn cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt B, C .

Ta có $8 = S_{IBC} = \frac{1}{2}IB \cdot IC \sin \widehat{BIC}$ nên $\sin \widehat{BIC} = 1$. Do đó $\widehat{BIC} = 90^\circ$. Gọi H là trung điểm BC ta có $IH = 2\sqrt{2}$. Đường thẳng đi qua A có phương trình dạng

$$ax + b(y - 2) = 0 \quad (a^2 + b^2 > 0).$$

$$\text{Ta có } d(I, d) = IH = 2\sqrt{2} \Rightarrow \frac{|a - 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow a^2 + 6ab - b^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -b \\ b = 7a \end{cases}.$$

- Với $a = -b$, chọn $a = 1, b = -1$ ta được đường thẳng $d_1: x - y + 2 = 0$.
- Với $b = 7a$ chọn $a = 1, b = 7$, ta được đường thẳng $d_2: x + 7y - 14 = 0$.

□

Bài 12. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 + 4\sqrt{3}x - 4 = 0$. Tia Oy cắt (C) tại A . Viết phương trình đường tròn (C') , bán kính $R' = 2$ và tiếp xúc ngoài với (C) tại A .

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(-2\sqrt{3}; 0)$, bán kính $R = 4$.

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4\sqrt{3}x - 4 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ với $y > 0$, suy ra $A(0; 2)$.

Đường thẳng IA đi qua hai điểm I và A nên có phương trình $IA : \begin{cases} x = 2\sqrt{3}t \\ y = 2t + 2 \end{cases}$.

Đường tròn (C') tiếp xúc ngoài với (C) nên tâm I' thuộc đường thẳng IA , suy ra $I'(2\sqrt{3}t; 2t + 2)$.

Hơn nữa, $R = 2R'$ nên $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{I'A} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{3} - 0 = 2(0 - 2\sqrt{3}t) \\ 0 - 2 = 2(2 - 2t - 2) \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$.

Với $t = \frac{1}{2}$, suy ra $I'(\sqrt{3}; 3)$. Phương trình đường tròn $(C') : (x - \sqrt{3})^2 + (y - 3)^2 = 4$. $\square$

Bài 13. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C') có tâm $M(5; 1)$, biết (C') cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho $AB = \sqrt{3}$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1; -2)$, bán kính $R = \sqrt{3}$.

Phương trình đường thẳng nối hai tâm IM là $3x - 4y - 11 = 0$.

Gọi $H(x; y)$ là trung điểm của AB . Ta có

$$\begin{cases} H \in IM \\ IH = \sqrt{R^2 - AH^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y - 11 = 0 \\ (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{5} \\ y = -\frac{29}{10} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \frac{11}{5} \\ y = -\frac{11}{10} \end{cases}.$$

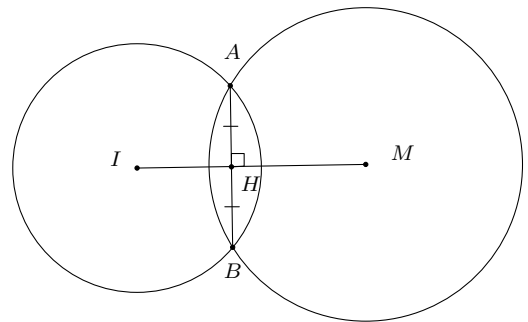
Suy ra $H\left(-\frac{1}{5}; -\frac{29}{10}\right)$ hoặc $H\left(\frac{11}{5}; -\frac{11}{10}\right)$.

- Với $H\left(-\frac{1}{5}; -\frac{29}{10}\right)$. Ta có $R'^2 = MH^2 + AH^2 = 43$.

Phương trình đường tròn $(C') : (x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 43$.

- Với $H\left(\frac{11}{5}; -\frac{11}{10}\right)$. Ta có $R'^2 = MH^2 + AH^2 = 13$.

Phương trình đường tròn $(C') : (x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 13$. $\square$



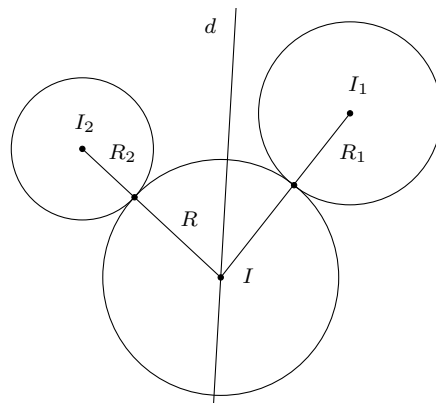
Bài 14. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d : x - y - 1 = 0$ và hai đường tròn có phương trình $(C_1) : (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 8$, $(C_2) : (x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 32$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm I thuộc d và tiếp xúc ngoài với (C_1) và (C_2) .

Lời giải.

Gọi I, I_1, I_2, R, R_1, R_2 lần lượt là tâm và bán kính của $(C), (C_1)$ và (C_2) .

Giả sử $I(t; t-1) \in d$. Theo giả thiết bài toán: (C) tiếp xúc ngoài với (C_1) và (C_2) nên

$$\begin{cases} II_1 = R + R_1 \\ II_2 = R + R_2 \end{cases}$$



Suy ra

$$II_1 - R_1 = II_2 - R_2 \Leftrightarrow \sqrt{(t-3)^2 + (t+3)^2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{(t-5)^2 + (t+5)^2} - 4\sqrt{2} \Leftrightarrow t = 0.$$

Với $t = 0$, suy ra $I(0; -1)$ và $R = II_1 - R_1 = \sqrt{2}$.

Phương trình đường tròn $(C) : x^2 + (y+1)^2 = 2$. □

C CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Đường tròn (C) có tâm là gốc tọa độ $O(0; 0)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 8x + 6y + 100 = 0$. Bán kính R của đường tròn (C) bằng

- A. $R = 4$. B. $R = 6$. C. $R = 8$. D. $R = 10$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } R = d(O; \Delta) = \frac{|100|}{\sqrt{64 + 36}} = 10.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 2. Đường tròn (C) có tâm $I(-2; -2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 5x + 12y - 10 = 0$. Bán kính R của đường tròn (C) bằng

- A. $R = \frac{44}{13}$. B. $R = \frac{24}{13}$. C. $R = 44$. D. $R = \frac{7}{13}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } R = d(I; \Delta) = \frac{|-10 - 24 - 10|}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{44}{13}.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 3. Với giá trị nào của m thì đường thẳng $\Delta: \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + m = 0$ tiếp xúc với đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 1$?

- A. $m = 1$. B. $m = 0$. C. $m = \sqrt{2}$. D. $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Gọi I và R lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn (C) .

Khi đó $I = O(0; 0)$ và $R = 1$.

Ta có (Δ) tiếp xúc đường tròn (C) khi và chỉ khi $d(I; \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|m|}{\sqrt{1}} = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 4. Tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn $(C): (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 16$ là

- A. $I(-1; 3), R = 4$. B. $I(1; -3), R = 4$. C. $I(1; -3), R = 16$. D. $I(-1; 3), R = 16$.

Lời giải.

$$(C): (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 16 \Rightarrow I(1; -3), R = \sqrt{16} = 4.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 5. Tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn $(C): x^2 + (y + 4)^2 = 5$ là

- A. $I(0; -4), R = \sqrt{5}$. B. $I(0; -4), R = 5$. C. $I(0; 4), R = \sqrt{5}$. D. $I(0; 4), R = 5$.

Lời giải.

$$(C): x^2 + (y + 4)^2 = 5 \Rightarrow I(0; -4), R = \sqrt{5}.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 6. Tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn $(C): (x + 1)^2 + y^2 = 8$ là

- A. $I(-1; 0), R = 8$. B. $I(-1; 0), R = 64$. C. $I(-1; 0), R = 2\sqrt{2}$. D. $I(1; 0), R = 2\sqrt{2}$.

Lời giải.

$$(C): (x + 1)^2 + y^2 = 8 \Rightarrow I(-1; 0), R = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 7. Tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 9$ là

- A. $I(0; 0), R = 9$. B. $I(0; 0), R = 81$. C. $I(1; 1), R = 3$. D. $I(0; 0), R = 3$.

Lời giải.

$$(C): x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow I(0; 0), R = \sqrt{9} = 3.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 8. Đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ có tâm I và bán kính R lần lượt là

- A. $I(3; -1), R = 4$. B. $I(-3; 1), R = 4$. C. $I(3; -1), R = 2$. D. $I(-3; 1), R = 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}(C): x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0 &\Rightarrow a = \frac{-6}{-2} = 3, b = \frac{2}{-2} = -1, c = 6 \\ &\Rightarrow I(3; -1), R = \sqrt{3^2 + (-1)^2 - 6} = 2.\end{aligned}$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 9. Đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ có tâm I và bán kính R lần lượt là

- A. $I(2; -3), R = 5$. B. $I(-2; 3), R = 5$. C. $I(-4; 6), R = 5$. D. $I(-2; 3), R = 1$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}(C): x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0 &\Rightarrow a = 2, b = -3, c = -12 \\ &\Rightarrow I(2; -3), R = \sqrt{4 + 9 + 12} = 5.\end{aligned}$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 10. Tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x + 2y - 3 = 0$ là

- A. $I(2; -1), R = 2\sqrt{2}$. B. $I(-2; 1), R = 2\sqrt{2}$. C. $I(2; -1), R = 8$. D. $I(-2; 1), R = 8$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}(C): x^2 + y^2 - 4x + 2y - 3 = 0 &\Rightarrow a = 2, b = -1, c = -3 \\ &\Rightarrow I(2; -1), R = \sqrt{4 + 1 + 3} = 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 11. Tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn $(C): 2x^2 + 2y^2 - 8x + 4y - 1 = 0$ là

- A. $I(-2; 1), R = \frac{\sqrt{21}}{2}$. B. $I(2; -1), R = \frac{\sqrt{22}}{2}$. C. $I(4; -2), R = \sqrt{21}$. D. $I(-4; 2), R = \sqrt{19}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}(C): 2x^2 + 2y^2 - 8x + 4y - 1 = 0 &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 2y - \frac{1}{2} = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} a = 2, b = -1 \\ c = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow I(2; -1), R = \sqrt{4 + 1 + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{22}}{2}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 12. Tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn $(C): 16x^2 + 16y^2 + 16x - 8y - 11 = 0$ là

- A. $I(-8; 4), R = \sqrt{91}$. B. $I(8; -4), R = \sqrt{91}$. C. $I(-8; 4), R = \sqrt{69}$. D. $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right), R = 1$.

Lời giải.

$$(C): 16x^2 + 16y^2 + 16x - 8y - 11 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - \frac{1}{2}y - \frac{11}{16} = 0 \Rightarrow \begin{cases} I\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right) \\ R = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{11}{16}} = 1. \end{cases}$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 13. Tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 10x - 11 = 0$ là

- A. $I(-10; 0), R = \sqrt{111}$. B. $I(-10; 0), R = \sqrt{89}$.
C. $I(-5; 0), R = 6$. D. $I(5; 0), R = 6$.

Lời giải.

$$(C): x^2 + y^2 - 10x - 11 = 0 \Rightarrow I(-5; 0), R = \sqrt{25 + 0 + 11} = 6.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 14. Tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 5y = 0$ là

- A. $I(0; 5), R = 5$. B. $I(0; -5), R = 5$. C. $I\left(0; \frac{5}{2}\right), R = \frac{5}{2}$. D. $I\left(0; -\frac{5}{2}\right), R = \frac{5}{2}$.

Lời giải.

$$(C): x^2 + y^2 - 5y = 0 \Rightarrow I\left(0; \frac{5}{2}\right), R = \sqrt{0 + \frac{25}{4} - 0} = \frac{5}{2}.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 15. Đường tròn $(C): (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$ có dạng khai triển là

- A. $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y + 30 = 0$. B. $(C): x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$.
C. $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$. D. $(C): x^2 + y^2 + 2x - 4y + 30 = 0$.

Lời giải.

$$(C): (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 16. Đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 12x - 14y + 4 = 0$ có dạng chính tắc là

- A. $(C): (x + 6)^2 + (y - 7)^2 = 9$. B. $(C): (x + 6)^2 + (y - 7)^2 = 81$.
C. $(C): (x + 6)^2 + (y - 7)^2 = 89$. D. $(C): (x + 6)^2 + (y - 7)^2 = \sqrt{89}$.

Lời giải.

$$(C): x^2 + y^2 + 12x - 14y + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} I(-6; 7) \\ R = \sqrt{36 + 49 - 4} = 9 \end{cases} \Rightarrow (C): (x + 6)^2 + (y - 7)^2 = 81.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 17. Tâm của đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 10x + 1 = 0$ cách trục Oy một khoảng bằng

- A. -5 . B. 0 . C. 10 . D. 5 .

Lời giải.

$$(C): x^2 + y^2 - 10x + 1 = 0 \Rightarrow I(5; 0) \Rightarrow d(I; Oy) = 5.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 18. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 5x + 7y - 3 = 0$. Tính khoảng cách từ tâm của (C) đến trục Ox .

A. 5.

B. 7.

C. 3,5.

D. 2,5.

Lời giải.

$$(C): x^2 + y^2 + 5x + 7y - 3 = 0 \Rightarrow I\left(-\frac{5}{2}; -\frac{7}{2}\right) \Rightarrow d(I; Ox) = \left|-\frac{7}{2}\right| = \frac{7}{2}.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 19. Đường tròn có tâm trùng với gốc tọa độ, bán kính $R = 1$ có phương trình là

A. $x^2 + (y + 1)^2 = 1$.

B. $x^2 + y^2 = 1$.

C. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$.

D. $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$.

Lời giải.

$$(C): \begin{cases} I(0; 0) \\ R = 1 \end{cases} \Rightarrow (C): x^2 + y^2 = 1.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 20. Đường tròn có tâm $I(1; 2)$, bán kính $R = 3$ có phương trình là

A. $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0$.

B. $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$.

C. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$.

D. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$.

Lời giải.

$$(C): \begin{cases} I(1; 2) \\ R = 3 \end{cases} \Rightarrow (C): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 21. Đường tròn (C) có tâm $I(1; -5)$ và đi qua $O(0; 0)$ có phương trình là

A. $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 26$.

B. $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = \sqrt{26}$.

C. $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 26$.

D. $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = \sqrt{26}$.

Lời giải.

$$(C): \begin{cases} I(1; -5) \\ R = OI = \sqrt{26} \end{cases} \Rightarrow (C): (x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 26.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 22. Đường tròn (C) có tâm $I(-2; 3)$ và đi qua $M(2; -3)$ có phương trình là

A. $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = \sqrt{52}$.

B. $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 52$.

C. $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 57 = 0$.

D. $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 39 = 0$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} (C): \begin{cases} I(-2; 3) \\ R = IM = \sqrt{(2 + 2)^2 + (-3 - 3)^2} = \sqrt{52} \end{cases} \\ \Rightarrow (C): (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 52 \\ \Leftrightarrow (C): x^2 + y^2 + 4x - 6y - 39 = 0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 23. Đường tròn đường kính AB với $A(3; -1)$, $B(1; -5)$ có phương trình là

- A. $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$.
B. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 17$.
C. $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = \sqrt{5}$.
D. $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5$.

Lời giải.

$$(C): \begin{cases} I(2; -3) \\ R = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(1-3)^2 + (-5+1)^2} = \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow (C): (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 24. Đường tròn đường kính AB với $A(1; 1)$, $B(7; 5)$ có phương trình là

- A. $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 12 = 0$.
B. $x^2 + y^2 + 8x - 6y - 12 = 0$.
C. $x^2 + y^2 + 8x + 6y + 12 = 0$.
D. $x^2 + y^2 - 8x - 6y - 12 = 0$.

Lời giải.

$$(C): \begin{cases} I(4; 3) \\ R = IA = \sqrt{(4-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{13} \end{cases} \\ \Rightarrow (C): (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 13 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8x - 6y + 12 = 0.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 25. Đường tròn (C) có tâm $I(2; 3)$ và tiếp xúc với trục Ox có phương trình là

- A. $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$.
B. $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$.
C. $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 3$.
D. $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$.

Lời giải.

$$(C): \begin{cases} I(2; 3) \\ R = d(I; Ox) = 3 \end{cases} \Rightarrow (C): (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 26. Đường tròn (C) có tâm $I(2; -3)$ và tiếp xúc với trục Oy có phương trình là

- A. $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$.
B. $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$.
C. $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$.
D. $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$.

Lời giải.

$$(C): \begin{cases} I(2; -3) \\ R = d(I; Oy) = 2 \end{cases} \Rightarrow (C): (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 27. Đường tròn (C) có tâm $I(-2; 1)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 3x - 4y + 5 = 0$ có phương trình là

- A. $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$.
B. $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{25}$.
C. $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 1$.
D. $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$.

Lời giải.

$$(C): \begin{cases} I(-2; 1) \\ R = d(I; \Delta) = \frac{|-6 - 4 + 5|}{\sqrt{9 + 16}} = 1 \end{cases} \Rightarrow (C): (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 28. Đường tròn (C) có tâm $I(-1; 2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: x - 2y + 7 = 0$ có phương trình là

- A. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = \frac{4}{25}$.
B. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = \frac{4}{5}$.
C. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$.
D. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$.

Lời giải.

$$(C): \begin{cases} I(-1; 2) \\ R = d(I; \Delta) = \frac{|-1 - 4 + 7|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow (C): (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = \frac{4}{5}.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 29. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn đi qua ba điểm $A(0; 4)$, $B(2; 4)$, $C(4; 0)$.

- A. $I(0; 0)$.
B. $I(1; 0)$.
C. $I(3; 2)$.
D. $I(1; 1)$.

Lời giải.

$$A, B, C \in (C): x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 16 + 8b + c = 0 \\ 20 + 4a + 8b + c = 0 \\ 16 + 8a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \\ c = -8 \end{cases} \Rightarrow I(1; 1).$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 30. Tìm bán kính R của đường tròn đi qua ba điểm $A(0; 4)$, $B(3; 4)$, $C(3; 0)$.

- A. $R = 5$.
B. $R = 3$.
C. $R = \sqrt{10}$.
D. $R = \frac{5}{2}$.

Lời giải.

$$\begin{cases} \overrightarrow{BA} = (-3; 0) \\ \overrightarrow{BC} = (0; -4) \end{cases} \Rightarrow BA \perp BC \Rightarrow R = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{(3-0)^2 + (0-4)^2}}{2} = \frac{5}{2}.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 31. Đường tròn (C) đi qua ba điểm $A(-3; -1)$, $B(-1; 3)$ và $C(-2; 2)$ có phương trình là

- A. $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$.
B. $x^2 + y^2 + 2x - y - 20 = 0$.
C. $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$.
D. $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 20$.

Lời giải.

$$A, B, C \in (C): x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 10 - 6a - 2b + c = 0 \\ 10 - 2a + 6b + c = 0 \\ 8 - 4a + 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = -20 \end{cases}.$$

Vậy $(C): x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 32. Cho tam giác ABC có $A(-2; 4)$, $B(5; 5)$, $C(6; -2)$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình là

A. $x^2 + y^2 - 2x - y + 20 = 0$.

B. $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 20$.

C. $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 20 = 0$.

D. $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$.

Lời giải.

$$A, B, C \in (C): x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 20 - 4a + 8b + c = 0 \\ 50 + 10a + 10b + c = 0 \\ 40 + 12a - 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \\ c = -20. \end{cases}$$

Vậy $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 33. Cho tam giác ABC có $A(1; -2)$, $B(-3; 0)$, $C(2; -2)$. Tam giác ABC nội tiếp đường tròn có phương trình là

A. $x^2 + y^2 + 3x + 8y + 18 = 0$.

B. $x^2 + y^2 - 3x - 8y - 18 = 0$.

C. $x^2 + y^2 - 3x - 8y + 18 = 0$.

D. $x^2 + y^2 + 3x + 8y - 18 = 0$.

Lời giải.

$$A, B, C \in (C): x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5 + 2a - 4b + c = 0 \\ 9 - 6a + c = 0 \\ 8 + 4a - 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = -4 \\ c = -18. \end{cases}$$

Vậy $(C): x^2 + y^2 - 3x - 8y - 18 = 0$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 34. Đường tròn (C) đi qua ba điểm $O(0; 0)$, $A(8; 0)$ và $B(0; 6)$ có phương trình là

A. $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$.

B. $(x + 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$.

C. $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5$.

D. $(x + 4)^2 + (y + 3)^2 = 5$.

Lời giải.

$$O(0; 0), A(8; 0), B(0; 6) \Rightarrow OA \perp OB \Rightarrow \begin{cases} I(4; 3) \\ R = \frac{AB}{2} = 5 \end{cases} \Rightarrow (C): (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 35. Đường tròn (C) đi qua ba điểm $O(0; 0)$, $A(a; 0)$, $B(0; b)$ có phương trình là

A. $x^2 + y^2 - 2ax - by = 0$.

B. $x^2 + y^2 - ax - by + xy = 0$.

C. $x^2 + y^2 - ax - by = 0$.

D. $x^2 - y^2 - ay + by = 0$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} O(0; 0), A(a; 0), B(0; b) \Rightarrow OA \perp OB \Rightarrow \begin{cases} I\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right) \\ R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} \end{cases} \\ \Rightarrow (C): \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4} \Leftrightarrow (C): x^2 + y^2 - ax - by = 0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 36. Đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(1; 1)$, $B(5; 3)$ và có tâm I thuộc trục hoành có phương trình là

A. $(x + 4)^2 + y^2 = 10$.

B. $(x - 4)^2 + y^2 = 10$.

C. $(x - 4)^2 + y^2 = \sqrt{10}$.

D. $(x + 4)^2 + y^2 = \sqrt{10}$.

Lời giải.

$$I(a; 0) \Rightarrow IA = IB = R \Leftrightarrow R^2 = (a - 1)^2 + 1^2 = (a - 5)^2 + 3^2 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ I(4; 0) \\ R^2 = 10. \end{cases}$$

Vậy đường tròn cần tìm là $(x - 4)^2 + y^2 = 10$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 37. Đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(1; 1)$, $B(3; 5)$ và có tâm I thuộc trục tung có phương trình là

A. $x^2 + y^2 - 8y + 6 = 0$.

B. $x^2 + (y - 4)^2 = 6$.

C. $x^2 + (y + 4)^2 = 6$.

D. $x^2 + y^2 + 4y + 6 = 0$.

Lời giải.

$$I(0; a) \Rightarrow IA = IB = R \Leftrightarrow R^2 = 1^2 + (a - 1)^2 = 3^2 + (a - 5)^2 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ I(0; 4) \\ R^2 = 10. \end{cases}$$

Vậy đường tròn cần tìm là $x^2 + (y - 4)^2 = 10$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 38. Đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(-1; 2)$, $B(-2; 3)$ và có tâm I thuộc đường thẳng $\Delta : 3x - y + 10 = 0$. Phương trình của đường tròn (C) là:

A. $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = \sqrt{5}$.

B. $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = \sqrt{5}$.

C. $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 5$.

D. $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$.

Lời giải.

Ta có: $I \in \Delta \Rightarrow I(a; 3a + 10)$.

$$IA = IB = R \Leftrightarrow R^2 = (a + 1)^2 + (3a + 8)^2 = (a + 2)^2 + (3a + 7)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ I(-3; 1) \\ R^2 = 5. \end{cases}$$

Vậy đường tròn cần tìm là: $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 39. Đường tròn (C) có tâm I thuộc đường thẳng $d : x + 3y + 8 = 0$, đi qua điểm $A(-2; 1)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta : 3x - 4y + 10 = 0$. Phương trình của đường tròn (C) là:

A. $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 25$.

B. $(x + 5)^2 + (y + 1)^2 = 16$.

C. $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 9$.

D. $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$.

Lời giải.

Dễ thấy $A \in \Delta$ nên tâm I của đường tròn nằm trên đường thẳng qua A vuông góc với Δ là Δ' :

$$4x + 3y + 5 = 0 \Rightarrow I = \Delta' \cap d : \begin{cases} 4x + 3y + 5 = 0 \\ x + 3y + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I(1; -3) \\ R = IA = 5. \end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn là: $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 40. Đường tròn (C) có tâm I thuộc đường thẳng $d : x + 3y - 5 = 0$, bán kính $R = 2\sqrt{2}$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta : x - y - 1 = 0$. Phương trình của đường tròn (C) là:

- A. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 8$ hoặc $(x - 5)^2 + y^2 = 8$.
- B. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 8$ hoặc $(x + 5)^2 + y^2 = 8$.
- C. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 8$ hoặc $(x - 5)^2 + y^2 = 8$.
- D. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 8$ hoặc $(x + 5)^2 + y^2 = 8$.

Lời giải.

$$I \in d \Rightarrow I(5 - 3a; a) \Rightarrow d[I; \Delta] = R = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|4 - 4a|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I(5; 0) \\ I(-1; 2) \end{cases}.$$

Vậy các phương trình đường tròn là: $(x - 5)^2 + y^2 = 8$ hoặc $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 8$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 41. Đường tròn (C) có tâm I thuộc đường thẳng $d : x + 2y - 2 = 0$, bán kính $R = 5$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta : 3x - 4y - 11 = 0$. Biết tâm I có hoành độ dương. Phương trình của đường tròn (C) là:

- A. $(x + 8)^2 + (y - 3)^2 = 25$.
- B. $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 25$ hoặc $(x + 8)^2 + (y - 3)^2 = 25$.
- C. $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 25$ hoặc $(x - 8)^2 + (y + 3)^2 = 25$.
- D. $(x - 8)^2 + (y + 3)^2 = 25$.

Lời giải.

$$I \in d \Rightarrow I(2 - 2a; a), a < 1 \Rightarrow d[I; \Delta] = R = 5 \\ \Leftrightarrow \frac{|10a + 5|}{5} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ a = -3 \end{cases} \Rightarrow I(8; -3).$$

Vậy phương trình đường tròn là: $(x - 8)^2 + (y + 3)^2 = 25$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 42. Đường tròn (C) có tâm I thuộc đường thẳng $d : x + 5y - 12 = 0$ và tiếp xúc với hai trục tọa độ có phương trình là:

- A. $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$.
- B. $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$.
- C. $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$ hoặc $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$.
- D. $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$ hoặc $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} I \in d &\Rightarrow I(12 - 5a; a) \Rightarrow R = d[I; Ox] = d[I; Oy] = |12 - 5a| = |a| \\ &\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \Rightarrow I(-3; 3), R = 3 \\ a = 2 \Rightarrow I(2; 2), R = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình các đường tròn là: $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$ hoặc $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 43. Đường tròn (C) có tâm I thuộc đường thẳng $\Delta : x = 5$ và tiếp xúc với hai đường thẳng $d_1 : 3x - y + 3 = 0$, $d_2 : x - 3y + 9 = 0$ có phương trình là:

- A. $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 40$ hoặc $(x - 5)^2 + (y - 8)^2 = 10$.
 B. $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 40$.
 C. $(x - 5)^2 + (y - 8)^2 = 10$.
 D. $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 40$ hoặc $(x - 5)^2 + (y + 8)^2 = 10$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} I \in \Delta &\Rightarrow I(5; a) \Rightarrow R = d[I; d_1] = d[I; d_2] = \frac{|18 - a|}{\sqrt{10}} = \frac{|14 - 3a|}{\sqrt{10}} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \Rightarrow I(5; 8), R = \sqrt{10} \\ a = -2 \Rightarrow I(5; -2), R = 2\sqrt{10}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình các đường tròn: $(x - 5)^2 + (y - 8)^2 = 10$ hoặc $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 40$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 44. Đường tròn (C) đi qua điểm $A(1; -2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta : x - y + 1 = 0$ tại $M(1; 2)$. Phương trình của đường tròn (C) là:

- A. $(x - 6)^2 + y^2 = 29$. B. $(x - 5)^2 + y^2 = 20$. C. $(x - 4)^2 + y^2 = 13$. D. $(x - 3)^2 + y^2 = 8$.

Lời giải.

Tâm I của đường tròn nằm trên đường thẳng qua M vuông góc với Δ là $\Delta' : x + y - 3 = 0 \Rightarrow I(a; 3 - a)$.

Ta có: $R^2 = IA^2 = IM^2 = (a - 1)^2 + (a - 5)^2 = (a - 1)^2 + (a - 1)^2 \Leftrightarrow a = 3 \Rightarrow \begin{cases} I(3; 0) \\ R^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow (C) :$

$$(x - 3)^2 + y^2 = 8.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 45. Đường tròn (C) đi qua điểm $M(2; 1)$ và tiếp xúc với hai trục tọa độ Ox, Oy có phương trình là:

- A. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ hoặc $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$.
 B. $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$ hoặc $(x + 5)^2 + (y + 5)^2 = 25$.
 C. $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$.
 D. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$.

Lời giải.

Vì $M(2; 1)$ thuộc góc phần tư (I) nên $A(a; a), a > 0$. Khi đó: $R = a^2 = IM^2 = (a - 2)^2 + (a - 1)^2$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \Rightarrow I(1; 1), R = 1 \Rightarrow C: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1 \\ a = 5 \Rightarrow I(5; 5), R = 5 \Rightarrow C: (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25. \end{cases}$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 46. Đường tròn (C) đi qua điểm $M(2; -1)$ và tiếp xúc với hai trục tọa độ Ox, Oy có phương trình là:

- A. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ hoặc $(x + 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$.
 B. $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$.
 C. $(x - 5)^2 + (y + 5)^2 = 25$.
 D. $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$ hoặc $(x - 5)^2 + (y + 5)^2 = 25$.

Lời giải.

Vì $M(2; -1)$ thuộc góc phần tư (IV) nên $A(a; -a), a > 0$. Khi đó:

$$R = a^2 = IM^2 = (a - 2)^2 + (a - 1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \Rightarrow I(1; -1), R = 1 \Rightarrow C: (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1 \\ a = 5 \Rightarrow I(5; -5), R = 5 \Rightarrow C: (x - 5)^2 + (y + 5)^2 = 25. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 47. Đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(1; 2), B(3; 4)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 3x + y - 3 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C), biết tâm của (C) có tọa độ là những số nguyên.

- A. $x^2 + y^2 - 3x - 7y + 12 = 0$.
 B. $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 5 = 0$.
 C. $x^2 + y^2 - 8x - 2y - 10 = 0$.
 D. $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 20 = 0$.

Lời giải.

$AB: x - y + 1 = 0$, đoạn AB có trung điểm $M(2; 3) \Rightarrow$ trung trực của đoạn AB là

$$d: x + y - 5 = 0 \Rightarrow I(a; 5 - a), a \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ta có: } R = IA = d[I; \Delta] = \frac{|2a + 2|}{\sqrt{10}} = \sqrt{(a - 1)^2 + (a - 3)^2} \Leftrightarrow a = 4 \Rightarrow I(4; 1), R = \sqrt{10}.$$

$$\text{Vậy phương trình đường tròn là: } (x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 10 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 48. Đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(1; 1), B(3; 3)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 3x - 4y + 8 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C), biết tâm của (C) có hoành độ nhỏ hơn 5.

- A. $x^2 + 2y^2 - 4x - 8y + 1 = 0$.
 B. $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 5$.
 C. $(x + 5)^2 + (y + 2)^2 = 5$.
 D. $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 25$.

Lời giải.

$AB: x - 2y + 5 = 0$, đoạn AB có trung điểm $M(1; 2)$ Phương trình đường trung trực của đoạn AB là

$$d: 2x + y - 4 = 0 \Rightarrow I(a; 4 - 2a), a < 5.$$

$$\text{Ta có } R = IA = d[I; \Delta] = \frac{|11a - 8|}{5} = \sqrt{(a + 1)^2 + (2a - 3)^2} \Leftrightarrow a = 3 \Rightarrow I(3; -2), R = 5.$$

$$\text{Vậy phương trình đường tròn là: } (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 49. Cho phương trình $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ (1). Điều kiện để (1) là phương trình đường tròn là:

- A. $a^2 - b^2 > c$.
 B. $a^2 + b^2 > c$.
 C. $a^2 + b^2 < c$.
 D. $a^2 - b^2 < c$.

Lời giải.

Suy ra từ lý thuyết

Chọn đáp án (B) □

Câu 50. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình của một đường tròn?

A. $4x^2 + y^2 - 10x - 6y - 2 = 0$.

B. $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 20 = 0$.

C. $x^2 + 2y^2 - 4x - 8y + 1 = 0$.

D. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$.

Lời giải.

Xét phương trình dạng : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, lần lượt tính các hệ số a, b, c và kiểm tra điều kiện $a^2 + b^2 - c > 0$.

• Xét phương trình: $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0 \Rightarrow a = 2, b = -3, c = -12 \Rightarrow a^2 + b^2 - c > 0$.

• Các phương trình $4x^2 + y^2 - 10x - 6y - 2 = 0, x^2 + 2y^2 - 4x - 8y + 1 = 0$ không có dạng đã nêu nên loại.

• Phương trình $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 20 = 0$ không thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 - c > 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 51. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình của một đường tròn?

A. $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 9 = 0$.

B. $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = 0$.

C. $2x^2 + 2y^2 - 8x - 4y - 6 = 0$.

D. $5x^2 + 4y^2 + x - 4y + 1 = 0$.

Lời giải.

Loại các đáp án $5x^2 + 4y^2 + x - 4y + 1 = 0$ vì không có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$. Xét đáp án $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 9 = 0 \Rightarrow a = -1, b = 2, c = -9 \Rightarrow a^2 + b^2 - c < 0 \Rightarrow$ loại.

Xét đáp án

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = 0 \Rightarrow a = 3, b = -2, c = 13 \Rightarrow a^2 + b^2 - c < 0 \Rightarrow \text{loại.}$$

Xét đáp án

$$2x^2 + 2y^2 - 8x - 4y - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 - c > 0.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 52. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình của một đường tròn?

A. $x^2 + y^2 - x - y + 9 = 0$.

B. $x^2 + y^2 - x = 0$.

C. $x^2 + y^2 - 2xy - 1 = 0$.

D. $x^2 - y^2 - 2x + 3y - 1 = 0$.

Lời giải.

Loại các đáp án $x^2 + y^2 - 2xy - 1 = 0$ và $x^2 - y^2 - 2x + 3y - 1 = 0$ vì không có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$.

Xét đáp án $x^2 + y^2 - x - y + 9 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}, c = 9 \Rightarrow a^2 + b^2 - c < 0 \Rightarrow$ loại.

Xét đáp án $x^2 + y^2 - x = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = c = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 - c > 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 53. Trong các phương trình sau, phương trình nào **không** phải là phương trình của đường tròn?

A. $x^2 + y^2 - x + y + 4 = 0$.

B. $x^2 + y^2 - 100y + 1 = 0$.

C. $x^2 + y^2 - 2 = 0$.

D. $x^2 + y^2 - y = 0$.

Lời giải.

Xét $x^2 + y^2 - x + y + 4 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}, c = 4 \Rightarrow a^2 + b^2 - c < 0$.

Các đáp án còn lại các hệ số a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 - c > 0$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 54. Cho phương trình $x^2 + y^2 + 2mx + 2(m-1)y + 2m^2 = 0$ (1). Tìm điều kiện của m để (1) là phương trình đường tròn.

A. $m < \frac{1}{2}$.

B. $m \leq \frac{1}{2}$.

C. $m > 1$.

D. $m = 1$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } x^2 + y^2 + 2mx + 2(m-1)y + 2m^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -m \\ b = 1 - m \\ c = 2m^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 - c > 0 \Leftrightarrow -2m + 1 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 55. Cho phương trình $x^2 + y^2 - 2mx - 4(m-2)y + 6 - m = 0$ (1). Tìm điều kiện của m để (1) là phương trình đường tròn.

A. $m \in \mathbb{R}$.

B. $m \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

C. $m \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$.

D. $m \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (2; +\infty)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } x^2 + y^2 - 2mx - 4(m-2)y + 6 - m = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = m \\ b = 2(m-2) \\ c = 6 - m \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 - c > 0 \Leftrightarrow 5m^2 - 15m + 10 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > 2. \end{cases}$$

Chọn đáp án **B** □

Câu 56. Cho phương trình $x^2 + y^2 - 2x + 2my + 10 = 0$ (1). Có bao nhiêu giá trị m nguyên dương không vượt quá 10 để (1) là phương trình của đường tròn?

A. Không có.

B. 6.

C. 7.

D. 8.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } x^2 + y^2 - 2x + 2my + 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -m \\ c = 10 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 - c > 0 \Leftrightarrow m^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m > 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m = 4; 5 \dots; 10.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 57. Cho phương trình $x^2 + y^2 - 8x + 10y + m = 0$ (1). Tìm điều kiện của m để (1) là phương trình đường tròn có bán kính bằng 7.

A. $m = 4$.

B. $m = 8$.

C. $m = 8$.

D. $m = 4$.

Lời giải.

$$x^2 + y^2 - 8x + 10y + m = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -5 \Rightarrow a^2 + b^2 - c = R^2 = 49 \Leftrightarrow m = -8. \\ c = m \end{cases}$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 58. Cho phương trình $x^2 + y^2 - 2(m+1)x + 4y - 1 = 0$ (1). Với giá trị nào của m để (1) là phương trình đường tròn có bán kính nhỏ nhất?

A. $m = 2$.

B. $m = -1$.

C. $m = 1$.

D. $m = -2$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } x^2 + y^2 - 2(m+1)x + 4y - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = m+1 \\ b = -2 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow R^2 = a^2 + b^2 - c = (m+1)^2 + 5 \Rightarrow R_{\min} = 5 \Leftrightarrow m = -1.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 59. Phương trình tiếp tuyến d của đường tròn $C : (x+2)^2 + (y+2)^2 = 25$ tại điểm $M(2;1)$ là:

A. $d : -y + 1 = 0$.

B. $d : 4x + 3y + 14 = 0$.

C. $d : 3x - 4y - 2 = 0$.

D. $d : 4x + 3y - 11 = 0$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(-2; -2)$ nên tiếp tuyến tại M có VTPT là $\vec{n} = \overrightarrow{IM} = (4; 3)$ nên có phương trình là: $4(x-2) + 3(y-1) = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y - 11 = 0$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 60. Cho đường tròn $(C) : (x-1)^2 + (y+2)^2 = 8$. Viết phương trình tiếp tuyến d của (C) tại điểm $A(3; -4)$.

A. $d : x + y + 1 = 0$.

B. $d : x - 2y - 11 = 0$.

C. $d : x - y - 7 = 0$.

D. $d : x - y + 7 = 0$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1; -2)$ nên tiếp tuyến tại A có VTPT là $\vec{n} = \overrightarrow{IA} = (2; -2)$.

Nên có phương trình là: $1(x-3) - 1(y+4) = 0 \Leftrightarrow x - y - 7 = 0$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 61. Phương trình tiếp tuyến d của đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 3x - y = 0$ tại điểm $N(1; -1)$ là:

A. $d : x + 3y - 2 = 0$.

B. $d : x - 3y + 4 = 0$.

C. $d : x - 3y - 4 = 0$.

D. $d : x + 3y + 2 = 0$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$ nên tiếp tuyến tại N có VTPT là $\vec{n} = \overrightarrow{IN} = \left(\frac{-1}{2}; \frac{-3}{2}\right)$.

Nên có phương trình là: $1(x-1) + 3(y+1) = 0 \Leftrightarrow x + 3y + 2 = 0$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 62. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C) : (x-3)^2 + (y+1)^2 = 5$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d : 2x + y + 7 = 0$.

A. $2x + y + 1 = 0$ hoặc $2x + y - 1 = 0$.

B. $2x + y = 0$ hoặc $2x + y - 10 = 0$.

C. $2x + y + 10 = 0$ hoặc $2x + y - 10 = 0$.

D. $2x + y = 0$ hoặc $2x + y + 10 = 0$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(3; -1)$, $R = \sqrt{5}$ và tiếp tuyến có dạng $\Delta: 2x + y + c = 0$ ($c \neq 7$).

$$\text{Ta có } R = d[I; \Delta] \Leftrightarrow \frac{|c + 5|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ c = -10. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 63. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 4x + 4y - 17 = 0$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: 3x - 4y - 2018 = 0$.

A. $3x - 4y + 23 = 0$ hoặc $3x - 4y - 27 = 0$.

B. $3x - 4y + 23 = 0$ hoặc $3x - 4y + 27 = 0$.

C. $3x - 4y - 23 = 0$ hoặc $3x - 4y + 27 = 0$.

D. $3x - 4y - 23 = 0$ hoặc $3x - 4y - 27 = 0$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(-2; -2)$, $R = 5$ và tiếp tuyến có dạng $\Delta: 3x - 4y + c = 0$ ($c \neq -2018$).

$$\text{Ta có } R = d[I; \Delta] \Leftrightarrow \frac{|c + 2|}{5} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 23 \\ c = -27. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 64. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C): (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: 4x + 3y + 14 = 0$.

A. $4x + 3y + 14 = 0$ hoặc $4x + 3y - 36 = 0$.

B. $4x + 3y + 14 = 0$.

C. $4x + 3y - 36 = 0$.

D. $4x + 3y - 14 = 0$ hoặc $4x + 3y - 36 = 0$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(2; 1)$, $R = 5$ và tiếp tuyến có dạng $\Delta: 4x + 3y + c = 0$ ($c \neq 14$).

$$\text{Ta có } R = d[I; \Delta] \Leftrightarrow \frac{|c + 11|}{5} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 14 \\ c = -36. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 65. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C): (x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 25$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: 3x - 4y + 5 = 0$.

A. $4x + 3y + 5 = 0$ hoặc $4x + 3y - 21 = 0$.

B. $4x + 3y + 5 = 0$ hoặc $4x + 3y + 3 = 0$.

C. $4x + 3y + 29 = 0$.

D. $4x + 3y + 29 = 0$ hoặc $4x + 3y - 21 = 0$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(2; -4)$, $R = 5$ và tiếp tuyến có dạng $\Delta: 4x + 3y + c = 0$.

$$\text{Ta có } R = d[I; \Delta] \Leftrightarrow \frac{|c - 4|}{5} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 29 \\ c = -21. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 66. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $C: x^2 + y^2 + 4x - 2y - 8 = 0$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: 2x - 3y + 2018 = 0$.

A. $3x + 2y - 17 = 0$ hoặc $3x + 2y - 9 = 0$.

B. $3x + 2y + 17 = 0$ hoặc $3x + 2y + 9 = 0$.

C. $3x + 2y + 17 = 0$ hoặc $3x + 2y - 9 = 0$.

D. $3x + 2y - 17 = 0$ hoặc $3x + 2y + 9 = 0$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(-2; 1)$, $R = \sqrt{13}$ và tiếp tuyến có dạng $\Delta: 3x + 2y + c = 0$.

$$\text{Ta có } R = d[I; \Delta] \Leftrightarrow \frac{|c - 4|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 17 \\ c = -9. \end{cases}$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 67. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$, biết tiếp tuyến vuông góc với trục hoành.

A. $x = 0$.

B. $y = 0$ hoặc $y - 4 = 0$.

C. $x = 0$ hoặc $x - 4 = 0$.

D. $y = 0$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(2; 2)$, $R = 2$ và tiếp tuyến có dạng $\Delta: x + c = 0$.

$$\text{Ta có } R = d[I; \Delta] \Leftrightarrow |c + 2| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ c = -4. \end{cases}$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 68. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đường tròn $(C): (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 8$, biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(5; -2)$.

A. $\Delta: x - 5 = 0$.

B. $\Delta: x + y - 3 = 0$ hoặc $\Delta: x - y - 7 = 0$.

C. $\Delta: x - 5 = 0$ hoặc $\Delta: x + y - 3 = 0$.

D. $\Delta: y + 2 = 0$ hoặc $\Delta: x - y - 7 = 0$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1; -2)$, $R = 2\sqrt{2}$.

Tiếp tuyến có dạng $\Delta: ax + by - 5a + 2b = 0$ ($a^2 + b^2 \neq 0$).

$$\text{Ta có: } d[I; \Delta] = R \Leftrightarrow \frac{|4a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \Rightarrow a = b = 1 \\ a = -b \Rightarrow a = 1, b = -1. \end{cases}$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 69. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đường tròn $C: x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$, biết tiếp tuyến đi qua điểm $B(4; 6)$.

A. $\Delta: x - 4 = 0$ hoặc $\Delta: 3x + 4y - 36 = 0$.

B. $\Delta: x - 4 = 0$ hoặc $\Delta: y - 6 = 0$.

C. $\Delta: y - 6 = 0$ hoặc $\Delta: 3x + 4y - 36 = 0$.

D. $\Delta: x - 4 = 0$ hoặc $\Delta: 3x - 4y + 12 = 0$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(2; 2)$, $R = 2$ và tiếp tuyến có dạng $\Delta: ax + by - 4a - 6b = 0$ ($a^2 + b^2 \neq 0$).

$$\text{Ta có: } d[I; \Delta] = R \Leftrightarrow \frac{|2a + 4b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2 \Leftrightarrow b(3b + 4a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \Rightarrow a = 1, b = 0 \\ 3b = -4a \Rightarrow a = 3, b = -4. \end{cases}$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 70. Cho đường tròn $(C): (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$ và điểm $M(9; -4)$. Gọi Δ là tiếp tuyến của (C) , biết Δ đi qua M và không song song với các trục tọa độ. Khi đó khoảng cách từ điểm $P(6; 5)$ đến Δ bằng:

A. $\sqrt{3}$.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(-1; 1)$, $R = 5$ và tiếp tuyến có dạng $\Delta: ax + by - 9a + 4b = 0$ ($ab \neq 0$).

$$\text{Ta có: } d[I; \Delta] = R \Leftrightarrow \frac{|10a - 5b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 5 \Leftrightarrow a(3a - 4b) = 0 \Leftrightarrow 3a = 4b \Rightarrow a = 4, b = 3 \Rightarrow \Delta:$$

$$4x + 3y - 24 = 0. d[P; \Delta] = \frac{|24 + 15 - 24|}{5} = 3.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 71. Có bao nhiêu đường thẳng đi qua gốc tọa độ O và tiếp xúc với đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$?

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1; -2)$, $R = 4 \Rightarrow OI = \sqrt{5} < R \Rightarrow$ không có tiếp tuyến nào của đường tròn kẻ từ O

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 72. Cho đường tròn $(C) : (x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 1$. Qua điểm $M(4; -3)$ có thể kẻ được bao nhiêu đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (C) ?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. Vô số.

Lời giải.

Vì $M \in (C)$ nên có đúng 1 tiếp tuyến của đường tròn kẻ từ M

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 73. Có bao nhiêu đường thẳng đi qua điểm $N(-2; 0)$ tiếp xúc với đường tròn $(C) : (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. Vô số.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(2; -3)$, $R = 2 \Rightarrow IN = \sqrt{16 + 9} = 5 > R \Rightarrow$ có đúng hai tiếp tuyến của đường tròn kẻ từ N .

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 74. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$. Đường thẳng d đi qua $M(2; 3)$ cắt (C) tại hai điểm A và B . Tiếp tuyến của đường tròn tại A và B cắt nhau tại E . Biết $S_{AEB} = \frac{32}{5}$ và phương trình đường thẳng d có dạng $ax - y + c = 0$ với $a, c \in \mathbb{Z}$, $a > 0$. Khi đó $a + 2c$ bằng

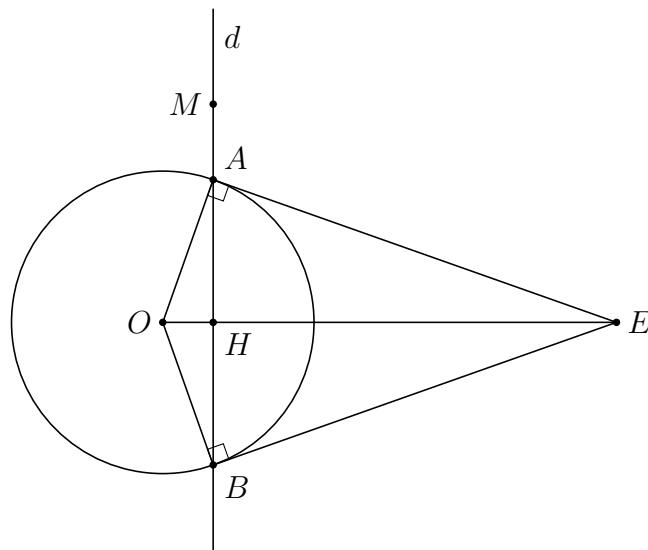
A. 1.

B. -1.

C. -4.

D. 0.

Lời giải.



(C): $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ có tâm $O(1; 3)$ và bán kính $R = 2$.

$$OH = d(O, d) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} \Rightarrow OE = \frac{OA^2}{OH} = \frac{4\sqrt{a^2 + 1}}{a} \text{ và } HE = \frac{3a^2 + 4}{a\sqrt{a^2 + 1}}.$$

$$AH^2 = OA^2 - OH^2 = \frac{3a^2 + 4}{a^2 + 1} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3a^2 + 4}}{\sqrt{a^2 + 1}}.$$

Do $S_{AEB} = \frac{32}{5}$ nên

$$\begin{aligned} AH \cdot HE &= \frac{32}{5} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3a^2+4}}{\sqrt{a^2+1}} \cdot \frac{3a^2+4}{a\sqrt{a^2+1}} = \frac{32}{5} \\ &\Leftrightarrow 5\sqrt{(3a^2+4)^3} = 32a\sqrt{a^2+1} \\ &\Leftrightarrow 25(3a^2+4)^3 = 1024a^2(a^2+1) \end{aligned} \quad (1)$$

Đặt $t = a^2$ thì $(1) \Leftrightarrow -349t^3 + 652t^2 + 2576t + 1600 = 0 \Leftrightarrow t = 4 \Leftrightarrow a = 2 \Rightarrow c = -1$.

$$\text{Vậy } a + 2c = 0.$$

Chọn đáp án D

Câu 75. Đường tròn có phương trình: $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ có tâm và bán kính là

- A.** Tâm $I(-1; 2)$, bán kính $R = 9$.
B. Tâm $I(2; -4)$, bán kính $R = 9$.
C. Tâm $I(-1; 2)$, bán kính $R = 3$.
D. Tâm $I(1; -2)$, bán kính $R = 3$.

Lời giải.

Ta có $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$. Vậy tâm $I(-1; 2)$, bán kính $R = 3$.

Chọn đáp án **C**

Câu 76. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$. Đường thẳng (d) đi qua $M(2; 3)$ cắt (C) tại hai điểm A và B . Tiếp tuyến của đường tròn tại A và B cắt nhau tại E . Biết $S_{AEB} = \frac{32}{5}$ và phương trình đường thẳng (d) có dạng $ax - y + c = 0$ với $a, c \in \mathbb{Z}, a > 0$. Khi đó $a + 2c$ bằng

- A. 1. B. -1. C. -4. D. 0.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1; 3)$ và bán kính $R = 2$.

$IM = 1 < R$ nên M nằm trong đường tròn và do đó d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt.

Ta có $M(2; 3) \in d \Rightarrow 2a - 3 + c = 0 \Leftrightarrow c = 3 - 2a$.

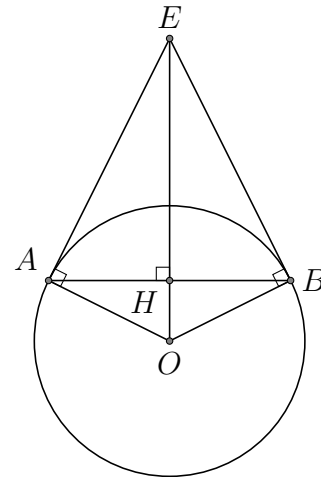
Gọi H là trung điểm của AB ,

$$IH = d(I, d) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} \quad (\text{vì } a > 0).$$

$$\text{Suy ra } IE = \frac{IA^2}{IH} = \frac{4\sqrt{a^2 + 1}}{a},$$

$$EH = IE - IH = \frac{3a^2 + 4}{a\sqrt{a^2 + 1}}.$$

$$AH = \sqrt{IA^2 - IH^2} = \frac{\sqrt{3a^2 + 4}}{\sqrt{a^2 + 1}}.$$



$$\begin{aligned} S_{AEB} = \frac{32}{5} &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot EH \cdot AB = \frac{32}{5} \\ &\Leftrightarrow EH \cdot AH = \frac{32}{5} \\ &\Leftrightarrow \frac{3a^2 + 4}{a\sqrt{a^2 + 1}} \cdot \frac{\sqrt{3a^2 + 4}}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{32}{5} \\ &\Leftrightarrow 5\sqrt{(3a^2 + 4)^3} = 32a(a^2 + 1) \Leftrightarrow 25(3a^2 + 4)^3 = 1024a^2(a^2 + 1)^2 \quad (*). \end{aligned}$$

Đặt $t = a^2$, ta có

$$(*) \Leftrightarrow -349t^3 + 652t^2 + 2576t + 1600 = 0 \Leftrightarrow t = 4 \Leftrightarrow a = 2 \Rightarrow c = -1.$$

Suy ra $a + 2c = 0$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 77. Cho hai điểm $A(7; -3)$ và $B(1; 7)$. Phương trình đường tròn đường kính AB là

- A. $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 136$. B. $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = \frac{34}{4}$.
C. $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 34$. D. $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 34$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm AB , ta được $I(4; 2)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-6; 10) \Rightarrow AB = 2\sqrt{34}$.

Đường tròn đường kính AB có dạng $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 34$.

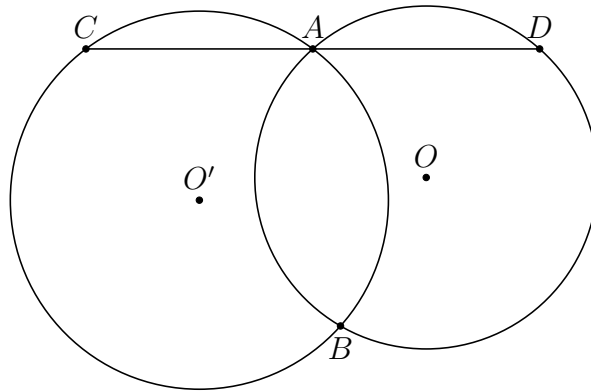
Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 78. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 = 13$ và $(C_2): (x - 6)^2 + y^2 = 25$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A(2; 3)$, B . Đường thẳng $d: ax + by + c = 0$ đi qua A (không qua B) và cắt (C_1) , (C_2) theo hai dây cung có độ dài bằng nhau. Tính $\frac{2b + c}{a}$.

- A. $\frac{2b + c}{a} = \frac{1}{3}$. B. $\frac{2b + c}{a} = 1$. C. $\frac{2b + c}{a} = -1$. D. $\frac{2b + c}{a} = -\frac{1}{3}$.

Lời giải.



Gọi C, D lần lượt là giao điểm của d với (C_2) và (C_1) .

Giả sử $D(m; n) \neq A(2; 3)$. Vì A là trung điểm CD nên $C(4 - m; 6 - n)$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} m^2 + n^2 = 13 \\ (m + 2)^2 + (n - 6)^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow D\left(-\frac{17}{5}; \frac{6}{5}\right).$$

Từ đó ta có phương trình $AD: x - 3y + 7 = 0$. Vậy $\frac{2b + c}{a} = 1$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 79. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y - 25 = 0$ và điểm $M(2; 1)$. Dây cung của (C) đi qua M có độ dài ngắn nhất là

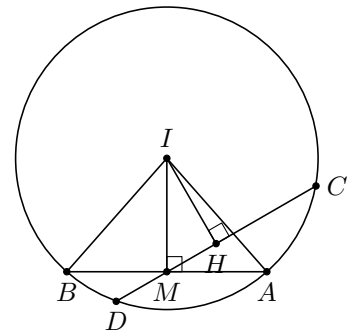
- A. $2\sqrt{7}$. B. $16\sqrt{2}$. C. $8\sqrt{2}$. D. $4\sqrt{7}$.

Lời giải.

Xét $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y - 25 = 0 \Rightarrow$ tâm $I(1; 2)$, bán kính $R = \sqrt{30}$.

Gọi AB là dây đi qua M và vuông góc với IM , CD là một dây cung tùy ý đi qua M và $IH \perp CD$. Ta có tam giác IMH vuông tại H nên $IM \geq IH \Rightarrow AB \leq CD$, do đó trong các dây cung đi qua M thì dây AB có độ dài nhỏ nhất.

Ta có $IM = \sqrt{2}$, $MA = \sqrt{R^2 - IM^2} = \sqrt{30 - 2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$
 $\Rightarrow AB = 4\sqrt{7}$.



Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 80. Cho hai điểm $A(1; 1)$, $B(7; 5)$. Phương trình đường tròn đường kính AB là

- A. $x^2 + y^2 + 8x + 6y + 12 = 0$. B. $x^2 + y^2 - 8x - 6y - 12 = 0$.
 C. $x^2 + y^2 + 8x + 6y - 12 = 0$. D. $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 12 = 0$.

Lời giải.

Với $A(1; 1)$, $B(7; 5)$ ta có $I(4; 3)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB và độ dài $AB = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$.

Đường tròn (C) đường kính AB có tâm I và bán kính $R = \sqrt{13}$.

Phương trình của $(C): (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 13 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8x - 6y + 12 = 0$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 81. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2x - 6y + 5 = 0$. Tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $d: x + 2y - 15 = 0$ có phương trình là

A. $x + 2y = 0, x + 2y - 10 = 0$.

B. $x + 2y - 1 = 0, x + 2y - 3 = 0$.

C. $x + 2y = 0, x + 2y + 10 = 0$.

D. $x + 2y - 1 = 0, x + 2y - 3 = 0$.

Lời giải.

Ta có $(C): (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$, cho nên (C) có tâm $I(-1; 3)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$. Đường thẳng d' song song với d có dạng $d': x + 2y + c = 0, c \neq -15$. Theo giả thiết d' tiếp xúc với (C) suy ra

$$d(I, d') = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|5 + c|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ c = -10 \end{cases}.$$

Khi đó phương trình các tiếp tuyến là $x + 2y = 0; x + 2y - 10 = 0$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 82. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có tâm $I(1; -1)$ và bán kính $R = 5$. Biết rằng đường thẳng $d: 3x - 4y + 8 = 0$ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B . Tính độ dài đoạn thẳng AB .

A. $AB = 8$.

B. $AB = 4$.

C. $AB = 3$.

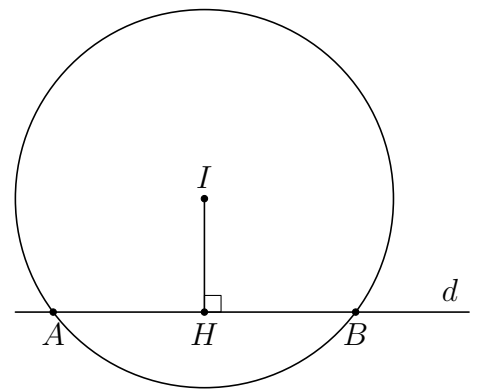
D. $AB = 6$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm AB thì $IH \perp AB$.

$$\text{Ta có } IH = d(I, d) = \frac{|3 \cdot 1 - 4 \cdot (-1) + 8|}{5} = 3.$$

$$\text{Suy ra } HA = \sqrt{R^2 - IH^2} = 4 \Rightarrow AB = 2HA = 8.$$



Chọn đáp án **(A)** □

Câu 83. Cho đường tròn $(C): (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ và đường thẳng $(d): 4x + 3y + 3 = 0$. Gọi A, B là giao điểm của đường thẳng (d) với đường tròn (C) . Tính độ dài AB .

A. 2.

B. $\sqrt{3}$.

C. $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

D. $2\sqrt{3}$.

Lời giải.

(C) có tâm $I(-1; 2)$, bán kính $R = 2$.

Ta có (d) cắt (C) tại A, B , suy ra

$$AB = 2\sqrt{R^2 - d^2(I, (d))} = 2\sqrt{3}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 84. Tam giác ABC có đỉnh $A(-1; 2)$, trực tâm $H(3; 0)$, trung điểm của BC là $M(6; 1)$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

A. 5.

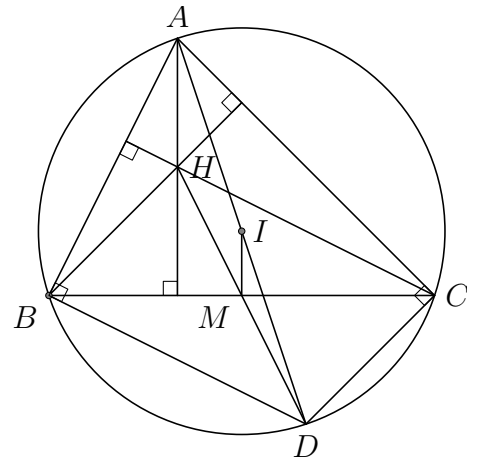
B. $\sqrt{5}$.

C. 3.

D. 4.

Lời giải.

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Kẻ đường kính AD .
Dễ thấy $BDCH$ là hình bình hành. Suy ra M cũng là trung điểm HD . Suy ra IM là đường trung bình $\triangle ADH$. Suy ra $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{IM}$.
Ta có $\overrightarrow{AH} = (4; -2)$. Từ đó suy ra $I(4; 2)$. Khi đó bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R = IA = \sqrt{(-5)^2} = 5$.



Chọn đáp án **A**

□

Câu 85. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho đường tròn (C) có phương trình $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$ và đường thẳng $d: 3x + 4y + 7 = 0$. Gọi A, B là các giao điểm của đường thẳng d với đường tròn (C) . Tính độ dài dây cung AB .

- A. $AB = \sqrt{3}$. B. $AB = 2\sqrt{3}$. C. $AB = 2\sqrt{3}$. D. $AB = 4$.

Lời giải.

Đường tròn C có tâm $I(2; -2)$ bán kính $R = 2$.

Ta có $d(I, d) = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot (-2) + 7|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 1 < R = 2$ nên d cắt (C) tại hai điểm phân biệt.

Gọi A, B là các giao điểm của đường thẳng d với đường tròn (C) , ta có

$$AB = 2\sqrt{R^2 - d^2(I, d)} = 2\sqrt{3}.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 86. Trên hệ trục tọa độ Oxy , cho đường tròn (C) có tâm $I(-3; 2)$ và một tiếp tuyến của nó có phương trình là $3x + 4y - 9 = 0$. Viết phương trình của đường tròn (C) .

- A. $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 2$. B. $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 2$.
C. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$. D. $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

Lời giải.

Vì đường tròn (C) có tâm $I(-3; 2)$ và một tiếp tuyến của nó là đường thẳng Δ có phương trình là $3x + 4y - 9 = 0$ nên bán kính của đường tròn là $R = d(I, \Delta) = \frac{|3 \cdot (-3) + 4 \cdot 2 - 9|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$.

Vậy phương trình đường tròn là: $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 87. Trên hệ trục tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 6y - 4 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(2; -1)$ và cắt đường tròn (C) theo một dây cung có độ dài lớn nhất.

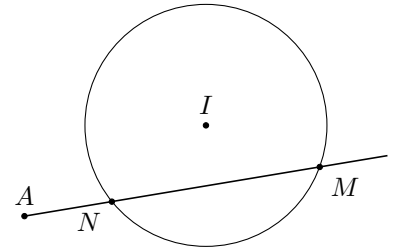
- A. $4x + y - 1 = 0$. B. $2x - y - 5 = 0$. C. $3x - 4y - 10 = 0$. D. $4x + 3y - 5 = 0$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1; -3)$.

Đường thẳng d đi qua $A(2; -1)$ và cắt đường tròn theo một dây cung có độ dài lớn nhất $\Rightarrow d$ đi qua tâm I của đường tròn $\Rightarrow d$ là đường thẳng đi qua hai điểm A và I .

- $\vec{AI} = (-1; -2) \Rightarrow d$ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}(2; -1)$.
- d đi qua điểm $A(2; -1)$.



Suy ra, phương trình đường thẳng d là $2(x - 2) - 1(y + 1) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 5 = 0$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 88. Trong hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 15 = 0$. Gọi I là tâm của (C) , đường thẳng d qua $M(1; -3)$ cắt (C) tại A, B . Biết tam giác IAB có diện tích là 8. Phương trình đường thẳng d là $x + by + c = 0$. Tính $b + c$.

- A. Có vô số giá trị. B. 1. C. 2. D. 8.

Lời giải.

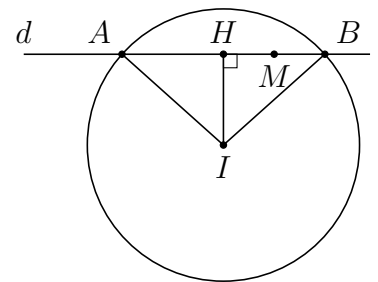
Đường tròn (C) có tâm $I(2; -1)$ và bán kính $R = \sqrt{20}$.

Ta thấy điểm $M(1; -3)$ nằm trong đường tròn (C) .

Đường thẳng d đi qua điểm $M(1; -3)$ nên $1 - 3b + c = 0 \Leftrightarrow c = 3b - 1$.

Phương trình đường thẳng $d: x + by + 3b - 1 = 0$.

Gọi H là hình chiếu của I trên đường thẳng d thì H là trung điểm của AB và $IH \leq IM = \sqrt{5}$.



Theo giả thiết tam giác IAB có diện tích bằng 8 nên

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}AB \cdot IH &= 8 \\ \Leftrightarrow \sqrt{R^2 - IH^2} \cdot IH &= 8 \\ \Leftrightarrow \sqrt{20 - IH^2} \cdot IH &= 8. \\ \Rightarrow \begin{cases} IH^2 = 16 \\ IH^2 = 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Do $IH \leq IM = \sqrt{5}$ nên $IH^2 = 4$.

Ta lại có $IH = d(I, d) = \frac{|2b + 1|}{\sqrt{b^2 + 1}} \Rightarrow |2b + 1| = 2\sqrt{b^2 + 1} \Leftrightarrow b = \frac{3}{4}$.

Với $b = \frac{3}{4}$ thì $c = 3 \cdot \frac{3}{4} - 1 = \frac{5}{4}$.

Vậy $b + c = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = 2$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 89. Đường tròn $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ cắt đường thẳng $x + y - a - b = 0$ theo một dây cung có độ dài bằng bao nhiêu?

- A. $R\sqrt{2}$. B. $2R$. C. R . D. $\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

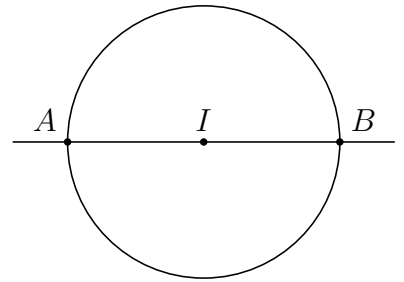
Lời giải.

Đường tròn $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ có tâm $I(a; b)$ và bán kính R .

Thay tọa độ điểm I vào phương trình đường thẳng $x + y - a - b = 0$ ta được $a + b - a - b = 0$ (luôn đúng) nên I thuộc đường thẳng $x + y - a - b = 0$.

Khi đó đường thẳng cắt đường tròn theo một dây cung có độ dài bằng đường kính đường tròn là $2R$.

Chọn đáp án **(B)**



Câu 90. Tìm tọa độ tâm I và tính bán kính R của đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$.

- A. $I(-1; 2), R = 4$. B. $I(1; -2), R = 2$. C. $I(-1; 2), R = \sqrt{5}$. D. $I(1; -2), R = 4$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1; -2)$ và bán kính $R = \sqrt{1^2 + (-2)^2 - 1} = 2$.

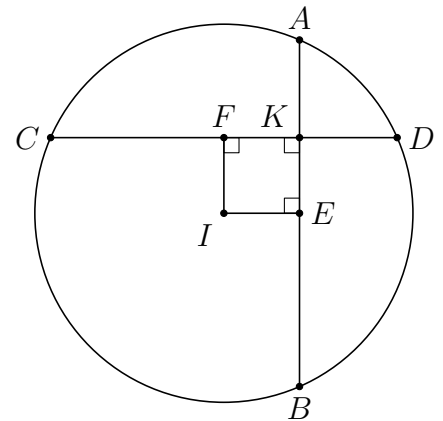
Chọn đáp án **(B)**

Câu 91. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn $(C): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ và các đường thẳng $d_1: mx + y - m - 1 = 0, d_2: x - my + m - 1 = 0$. Tìm các giá trị của tham số m để mỗi đường thẳng d_1, d_2 cắt (C) tại hai điểm phân biệt sao cho bốn điểm đó lập thành một tứ giác có diện tích lớn nhất. Khi đó tổng các giá trị của tham số m là

- A. 0. B. 1. C. 3. D. 2.

Lời giải.

Xét đường tròn $(I; R)$ với các điểm như hình bên, trong đó K cố định, AB và CD vuông góc với nhau, E, F lần lượt là các trung điểm của AB và CD . Ta có



$$\begin{aligned} S_{ADBC} &= \frac{1}{2} AB \cdot CD \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2AE \cdot 2CF \\ &= 2\sqrt{IA^2 - IE^2} \sqrt{IC^2 - IF^2} \\ &= 2\sqrt{R^4 - (IE^2 + IF^2)R^2 + IE^2 IF^2} \\ &= 2\sqrt{R^4 - IK^2 R^2 + IE^2 IF^2}. \end{aligned}$$

Do K cố định nên diện tích $ADBC$ lớn nhất khi $IE \cdot IF$ lớn nhất. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm IE và IF , ta có

$$IE \cdot IF \leq \frac{IE^2 + IF^2}{2} = \frac{IK^2}{2}.$$

Ta suy ra $IE \cdot IF$ lớn nhất khi $IE = IF = \frac{IK}{\sqrt{2}}$.

Trở lại câu hỏi chính, (C) có tâm $I(1; 2)$ và bán kính $R = 2$, d_1 có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (m; 1)$ và d_2 có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = (1; -m)$, ta dễ thấy d_1 và d_2 vuông góc, $K(1; 1)$ là giao điểm của d_1 và d_2 , đồng thời $IK < R$ nên K nằm trong đường tròn; E, F lần lượt là trung điểm AB và CD , ta có

$$IE = d(I, d_1) = \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1}}, \quad IF = d(I, d_2) = \frac{|m|}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

Từ đó ta có, diện tích của tứ giác tạo thành lớn nhất khi

$$\frac{1}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{|m|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{IK}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ta tìm được $m = 1$ hoặc $m = -1$. Như vậy, tổng các giá trị của tham số m bằng 0.

Chọn đáp án **A** □

Câu 92. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$. Gọi I là tâm và R là bán kính của (C) . Gọi $M(a; b)$ ($a > 0$) thuộc đường thẳng $d: 2x - y + 3 = 0$ sao cho $MI = 2R$. Tính tổng $a^2 + b^2$.

A. 15.

B. 137.

C. $\frac{333}{5}$.

D. 136.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(2; 3)$, bán kính $R = 5$.

Điểm $M \in d: 2x - y + 3 = 0 \Rightarrow M(t; 2t + 3)$.

Ta có $\overrightarrow{IM} = (t - 2; 2t)$.

$$\text{Do đó, } IM = 2R \Leftrightarrow \sqrt{(t-2)^2 + (2t)^2} = 10 \Leftrightarrow 5t^2 - 4t - 96 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \Rightarrow M(4; 11) \\ t = -\frac{24}{5} \Rightarrow M\left(-\frac{24}{5}; -\frac{33}{5}\right) \end{cases}$$

Vậy $a = 4, b = 11 \Rightarrow a^2 + b^2 = 137$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 93. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(0; 5), B(2; 3)$. Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A, B và có bán kính R bằng $\sqrt{10}$.

A. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 10$ và $(x-3)^2 + (y-6)^2 = 10$.

B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 10$ và $(x-3)^2 + (y-6)^2 = 10$.

C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = \sqrt{10}$ và $(x+3)^2 + (y+6)^2 = \sqrt{10}$.

D. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 10$ và $(x+3)^2 + (y+6)^2 = 10$.

Lời giải.

Gọi $I(a; b)$ là tâm của đường tròn. Ta có

$$\begin{aligned} IA = IB = \sqrt{10} &\Leftrightarrow \begin{cases} IA = \sqrt{10} \\ IA = IB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + (5-b)^2 = 10 \\ a^2 + (5-b)^2 = (2-a)^2 + (3-b)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + (5-b)^2 = 10 \\ 4a - 4b = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b - 3 \\ (b-3)^2 + (5-b)^2 = 10 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = b - 3 \\ 2b^2 - 16b + 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b - 3 \\ \begin{bmatrix} b = 2 \\ b = 6 \end{bmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 3 \\ b = 6 \end{cases} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đường tròn là $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 10$ và $(x-3)^2 + (y-6)^2 = 10$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 94. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d_1: \sqrt{3}x + y = 0$ và $d_2: \sqrt{3}x - y = 0$. Gọi (T) là đường tròn tiếp xúc với d_1 tại A , cắt d_2 tại B và C sao cho tam giác ABC vuông tại B . Biết $\triangle ABC$ có diện tích bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và điểm A có $x_A > 0$. Khi đó phương trình của (T) là

- A. $\left(x + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 1.$ B. $\left(x + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 4.$
C. $\left(x - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 1.$ D. $\left(x - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 4.$

Lời giải.

Ta nhận thấy d_1 và d_2 cắt nhau tại O có

$$\cos(d_1, d_2) = \frac{|\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} - 1 \cdot 1|}{\sqrt{3+1} \cdot \sqrt{3+1}} = \frac{1}{2}$$

và $\triangle OAB$ vuông tại B , do đó $\widehat{OBA} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^\circ$ (tính chất góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung).

Ta có

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} (OA \cdot \sin 60^\circ) \cdot (OA \cdot \tan 60^\circ) \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{8} OA^2. \end{aligned}$$

Theo giả thiết $S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OA^2 = \frac{4}{3}$.

Tọa độ $A(x; y)$ với $x > 0$, thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} \sqrt{3}x + y = 0 \\ x^2 + y^2 = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; -1\right).$$

Đường thẳng AC qua A và vuông góc với d_1 nên có phương trình $\sqrt{3}x - 3y - 4 = 0$.

Tọa độ $C(x; y)$ thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} \sqrt{3}x - y = 0 \\ \sqrt{3}x - 3y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}; -2\right).$$

Đường tròn (T) có đường kính AC nên tâm của (T) là $I\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}; -\frac{3}{2}\right)$ và bán kính $IA = 1$.

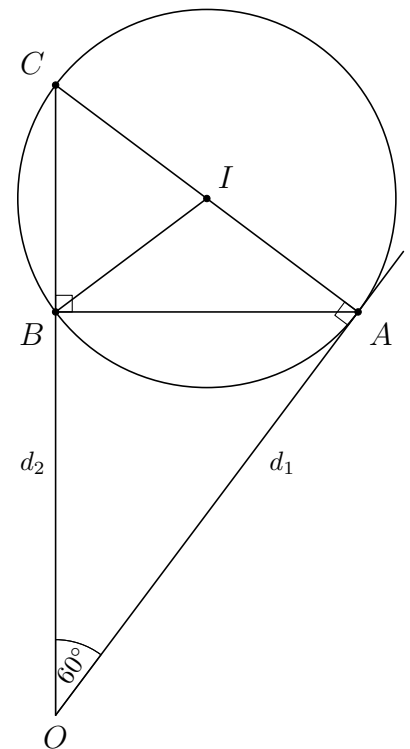
Phương trình của (T) là: $\left(x + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 1.$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 95. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng $d: x - y + 1 - \sqrt{2} = 0$ và điểm $A(-1; 1)$. Khi đó có hai phương trình đường tròn đi qua A , gốc tọa độ O và tiếp xúc với đường thẳng d có tâm lần lượt là I, K . Tìm độ dài IK .

- A. 3. B. $\sqrt{2}$. C. 2. D. 1.



Lời giải.

Gọi $I(a; b)$ là tâm đường tròn. Ta có:

$$\begin{cases} IA^2 = IO^2 \\ IO^2 = d^2(I, (d)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)^2 + (b-1)^2 = a^2 + b^2 & (1) \\ a^2 + b^2 = \frac{|a-b+1-\sqrt{2}|^2}{2} & (2) \end{cases}$$

(1) $\Leftrightarrow b = a + 1$ thế vào (2) được:

$$a^2 + (a+1)^2 = 1 \Leftrightarrow 2a^2 + 2a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \Rightarrow b = 1 \\ a = -1 \Rightarrow b = 0. \end{cases}$$

Suy ra $IK = \sqrt{2}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 96. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 4x + 4y + 6 = 0$ và đường thẳng $\Delta: x + my - 2m + 3 = 0$, với m là tham số thực. Gọi I là tâm đường tròn (C) . Tìm tổng các giá trị m để Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho diện tích tam giác IAB lớn nhất.

- A. $\frac{15}{8}$. B. $\frac{8}{15}$. C. $\frac{16}{7}$. D. $\frac{17}{6}$.

Lời giải.

Ta có (C) có tâm $I(-2; -2)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.

Diện tích tam giác IAB là $S = \frac{1}{2}IA \cdot IB \cdot \sin \widehat{AIB} \leq \frac{1}{2}R^2 = 1$.

Diện tích S lớn nhất khi và chỉ khi $IA \perp IB$.

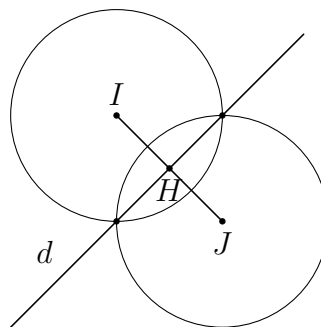
$$\text{Khi đó } d(I, \Delta) = \frac{R}{\sqrt{2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{|-2 - 2m - 2m + 3|}{\sqrt{1 + m^2}} = 1 \Leftrightarrow (1 - 4m)^2 = 1 + m^2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{8}{15} \end{cases}$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 97. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đề-các vuông góc Oxy cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ và đường thẳng $d: x - y - 1 = 0$. Đường tròn (C') đối xứng với đường tròn (C) qua đường thẳng d . Tìm tọa độ các giao điểm của (C) và (C') .

- A. $A(0; 1)$ và $B(2; 3)$. B. $A(1; 0)$ và $B(3; 2)$.
C. $A(1; 0)$ và $B(2; 3)$. D. $A(-1; 0)$ và $B(-3; 2)$.

Lời giải.



Từ $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ suy ra (C) có tâm $I(1; 2)$ và bán kính $R = 2$.

Đường thẳng d có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; -1)$.

Do đó đường thẳng Δ đi qua $I(1; 2)$ và vuông góc với d có phương trình

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} \Leftrightarrow x+y-3=0.$$

Tọa độ giao điểm H của d và Δ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x-y-1=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow H(2; 1).$$

Gọi J là điểm đối xứng với $I(1; 2)$ qua d . Khi đó $\begin{cases} x_J = 2x_H - x_I = 3 \\ y_J = 2y_H - y_I = 0 \end{cases} \Rightarrow J(3; 0).$

Vì (C') đối xứng với (C) qua d nên (C') có tâm là $J(3; 0)$ và bán kính $R = 2$.

Do đó phương trình (C') : $(x-3)^2 + y^2 = 4$.

Tọa độ giao điểm của (C) và (C') là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ (x-3)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-1=0 \\ (x-3)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-1 \\ 2x^2-8x+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, y=0 \\ x=3, y=2. \end{cases}$$

Vậy tọa độ giao điểm của (C) và (C') là $A(1; 0)$ và $B(3; 2)$.

Cách khác:

Từ (C) : $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ suy ra (C) có tâm $I(1; 2)$ và bán kính $R = 2$.

! $d(I; d) < R$ nên d cắt (C) .

Vì (C') đối xứng với (C) qua d nên tọa độ giao điểm của (C) và (C') cũng chính là tọa độ giao điểm của d và (C) .

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 98. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đề-các vuông góc Oxy cho đường tròn (C) : $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ và đường thẳng d : $x-y-1=0$. Đường tròn (C') đối xứng với đường tròn (C) qua đường thẳng d có tâm $(a; b)$. Tính tổng $T = a + b$.

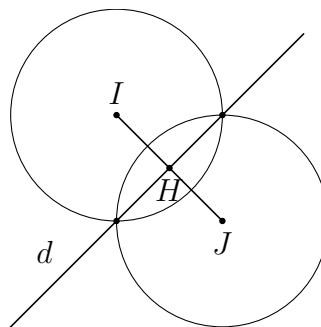
A. $T = -3$.

B. $T = 3$.

C. $T = 2$.

D. $T = -4$.

Lời giải.



Ta có (C) : $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ suy ra (C) có tâm $I(1; 2)$ và bán kính $R = 2$.

Đường thẳng d có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; -1)$.

Do đó đường thẳng Δ đi qua $I(1; 2)$ và vuông góc với d có phương trình

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} \Leftrightarrow x+y-3=0.$$

Tọa độ giao điểm H của d và Δ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow H(2; 1).$$

Gọi J là điểm đối xứng với $I(1; 2)$ qua d . Khi đó $\begin{cases} x_J = 2x_H - x_I = 3 \\ y_J = 2y_H - y_I = 0 \end{cases} \Rightarrow J(3; 0).$

Vì (C') đối xứng với (C) qua d nên (C') có tâm là $J(3; 0)$.

Vậy $T = a + b = 3$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 99. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đề-các vuông góc Oxy cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ và đường thẳng $d: x - y - 1 = 0$. Đường tròn (C') đối xứng với đường tròn (C) qua đường thẳng d , gọi các giao điểm của (C) và (C') là A và B . Tính độ dài đoạn AB .

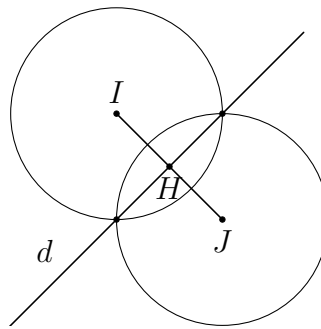
A. $AB = 3\sqrt{2}$.

B. $AB = 2\sqrt{2}$.

C. $AB = 2\sqrt{5}$.

D. $AB = 2$.

Lời giải.



Ta có $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ suy ra (C) có tâm $I(1; 2)$ và bán kính $R = 2$.

Đường thẳng d có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; -1)$.

Do đó đường thẳng Δ đi qua $I(1; 2)$ và vuông góc với d có phương trình

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} \Leftrightarrow x + y - 3 = 0.$$

Tọa độ giao điểm H của d và Δ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow H(2; 1).$$

Gọi J là điểm đối xứng với $I(1; 2)$ qua d . Khi đó $\begin{cases} x_J = 2x_H - x_I = 3 \\ y_J = 2y_H - y_I = 0 \end{cases} \Rightarrow J(3; 0).$

Vì (C') đối xứng với (C) qua d nên (C') có tâm là $J(3; 0)$ và bán kính $R = 2$.

Do đó phương trình $(C'): (x-3)^2 + y^2 = 4$.

Tọa độ giao điểm của (C) và (C') là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \\ (x-3)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ (x-3)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ 2x^2 - 8x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, y = 0 \\ x = 3, y = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Tọa độ giao điểm của (C) và (C') là $A(1; 0)$ và $B(3; 2)$.

Vậy $AB = 2\sqrt{2}$.

Cách khác:

Từ (C): $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ suy ra (C) có tâm $I(1; 2)$ và bán kính $R = 2$.

! $d(I; d) < R$ nên d cắt (C).

Vì (C') đối xứng với (C) qua d nên tọa độ giao điểm của (C) và (C') cũng chính là tọa độ giao điểm của d và (C).

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 100. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (C): $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 10$. Biết cạnh AB đi qua điểm $M(-3; -2)$ và điểm A có hoành độ $x_A > 0$. Hỏi $x_A + y_C$ bằng?

A. 10.

B. 8.

C. 11.

D. 9.

Lời giải.

Ta có: (C) có tâm $I(2; 3)$, bán kính $R = \sqrt{10}$.

Phương trình đường thẳng AB đi qua $M(-3; -2)$ có dạng:

$$ax + by + 3a + 2b = 0 \text{ với } (a^2 + b^2 \neq 0).$$

$$d(I, (AB)) = R \Leftrightarrow \sqrt{10} = \frac{|2a + 3b + 3a + 2b|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Leftrightarrow 10(a^2 + b^2) = 25(a + b)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -3b \\ b = -3a \end{cases}$$

Với $a = -3b \Rightarrow (AB): 3x - y + 7 = 0$. Gọi $A(t; 3t + 7)$, $(t > 0)$. Ta có:

$$IA = R\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -2 \end{cases} \text{ (loại)}.$$

Với $b = -3a \Rightarrow (AB): x - 3y - 3 = 0$. Gọi $A(3t + 3; t)$, $(t > -1)$. Ta có:

$$IA = R\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (thỏa mãn)} \\ t = -1 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy $A(6; 1) \Rightarrow C(-2; 5)$. Ta có $x_A + y_C = 11$.

Hướng tư duy: Hình vuông nội tiếp hoặc ngoại tiếp đường tròn cho ta các độ dài và khoảng cách liên quan đến bán kính đường tròn. Khi ta biết đường thẳng đi qua điểm nào và khoảng cách, ta giải quyết được bài toán

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 101. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC cân tại $A(-1; 3)$. Gọi D là một điểm trên cạnh AB sao cho $AB = 3AD$ và H là hình chiếu của B trên CD . Điểm $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ là trung điểm của đoạn HC . Biết điểm B nằm trên đường thẳng $d: x + y + 7 = 0$. Hỏi điểm C nằm trên đường thẳng có phương trình nào sau đây?

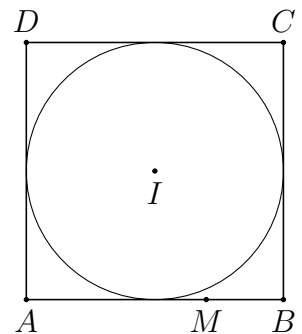
A. $x + 2y - 3 = 0$.

B. $2x - y + 3 = 0$.

C. $x + y - 2 = 0$.

D. $x - y - 5 = 0$.

Lời giải.

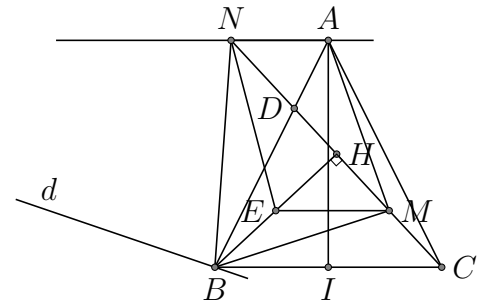


Gọi Δ là đường thẳng qua A , song song với BC . Kéo dài CD cắt Δ tại N .

Gọi E là trung điểm BH thì tứ giác $NAME$ là hình bình hành.

Lấy I là trung điểm của BC . Do tam giác ABC cân tại A . Dễ chứng minh được $ANBI$ là hình chữ nhật.

Từ đó chứng minh được E là trực tâm $\triangle NBM$ nên $NE \perp BM$, lại có $NE \parallel AM$ nên $BM \perp AM$.



Đường thẳng BM đi qua $M\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$, nhận $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{3}{2}; -\frac{9}{2}\right) = \frac{3}{2}(1; -3)$ làm vec-tơ pháp tuyến nên có phương trình là: $x - 3y - 5 = 0$.

Do $B = BM \cap BC$ nên tọa độ của B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + y = -7 \\ x - 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow B(-4; -3)$.

Do $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AD}$ nên $D(-2; 1)$. Khi đó phương trình của đường thẳng CD đi qua D, M là $x + y + 1 = 0$. Phương trình đường thẳng BH đi qua B , vuông góc với CD là $x - y + 1 = 0$.

Mà $H = CD \cap BH$ nên $H(-1; 0)$. Lại có M là trung điểm HC nên $C(2; -3)$, do đó C thuộc đường thẳng $x - y - 5 = 0$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 102. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có đỉnh $A(-3; 1)$ và điểm C thuộc đường thẳng $d: x - 2y - 5 = 0$. Gọi E là giao điểm thứ 2 của đường tròn tâm B bán kính BD với đường thẳng CD . Hình chiếu vuông góc của $D(a; b)$ xuống đường thẳng BE là điểm $N(6; -2)$. Tính $S = a + b$.

A. 2.

B. 8.

C. -6.

D. 10.

Lời giải.

Vì $ABCD$ nằm trên đường tròn đường kính BD .

Mặt khác $\widehat{DNB} = 90^\circ$ nên N cũng nằm trên đường tròn đường kính BD .

Đường tròn này cũng có đường kính AC .

Suy ra $\widehat{ANC} = 90^\circ$ hay $AN \perp NC$.

Ta có $\overrightarrow{AN}(9; -3)$.

Vì $C \in d \Rightarrow C(2t + 5; t) \Rightarrow \overrightarrow{NC} = (2t - 1; t + 2)$.

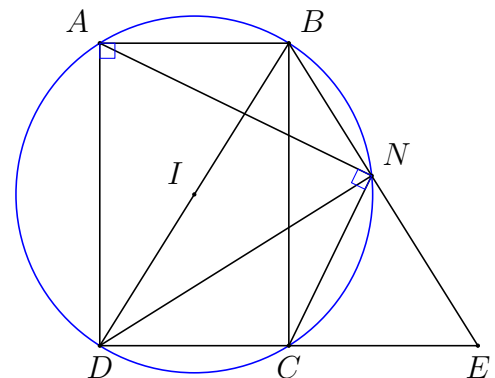
$$\begin{aligned} AN \perp NC &\Leftrightarrow \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{NC} = 0 \\ &\Leftrightarrow 9(2t - 1) - 3(t + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow C(7; 1). \end{aligned}$$

Suy ra $AC = 10$.

Tâm I của hình chữ nhật $ABCD$ có tọa độ là $I(2; 1)$.

Phương trình đường tròn (C) ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ là $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$.

Do C là trung điểm DE nên $BN \parallel AC$, $\overrightarrow{AC}(10; 0)$.



Đường thẳng BN qua N nhận $\overrightarrow{AC}$ làm vec tơ chỉ phương, nên nhận $\vec{u}(0; 1)$ làm vec tơ pháp tuyến.

Phương trình $BN: y + 2 = 0$.

Khi đó $B = BN \cap (C), B \neq N$.

$$\text{Xét hệ } \begin{cases} y + 2 = 0 \\ (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6; y = -2 \\ x = -2; y = -2 \end{cases} \Rightarrow B(-2; -2).$$

I là trung điểm BD nên $D(6; 4) \Rightarrow S = 10$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 103. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm $J(4; 5)$, nội tiếp đường tròn tâm $I(6; 6)$. Biết $A(2; 3)$, gọi $B(x_B; y_B), C(x_C; y_C)$.

Tính $P = x_B + x_C + y_B + y_C$.

A. 18.

B. 22.

C. 24.

D. 28.

Lời giải.

Ta có phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $(C): (x - 6)^2 + (y - 6)^2 = 25$.

Đường phân giác trong AJ đi qua hai điểm A, J nên phương trình $AJ: x - y + 1 = 0$.

Đường thẳng AJ cắt đường tròn (C) tại điểm thứ hai D có tọa độ thỏa mãn:

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ (x - 6)^2 + (y - 6)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2; y = 3 \\ x = 9; y = 10 \end{cases}.$$

Suy ra $D(9; 10)$.

Gọi (C_1) là đường tròn tâm D bán kính DJ thì $(C_1): (x - 9)^2 + (y - 10)^2 = 50$.

Ta có $\widehat{DCJ} = \widehat{DJC} = \frac{\widehat{BAC} + \widehat{BCA}}{2}$ nên tam giác DJC là tam giác cân tại D .

Tương tự ta có tam giác DJB cân tại D .

Suy ra B, C là giao điểm của (C) và (C_1) nên tọa độ B, C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} (x - 9)^2 + (y - 10)^2 = 50 \\ (x - 6)^2 + (y - 6)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2; y = 9 \\ x = 10; y = 3 \end{cases}.$$

Do đó: $B(2; 9), C(10; 3)$ hoặc $B(10; 3), C(2; 9)$.

Suy ra $P = x_B + x_C + y_B + y_C = 24$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 104. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(1; 2), B(4; 3)$. Tính tổng tất cả các hoành độ của điểm M thuộc trục Ox sao cho $\widehat{AMB} = 45^\circ$.

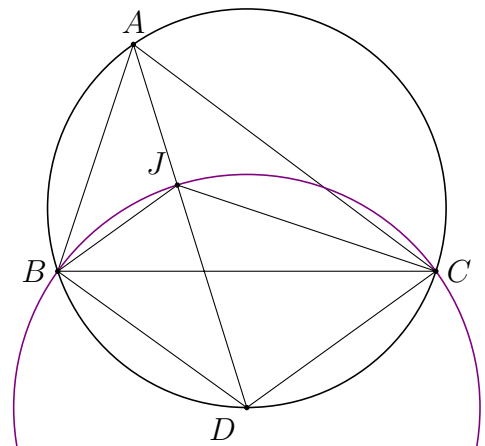
A. 1.

B. 5.

C. 6.

D. 4.

Lời giải.



Giả sử đã tìm được điểm M thuộc trục Ox thỏa mãn $\widehat{AMB} = 45^\circ$.

Gọi $I(x; y)$ là tâm đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABM .

Do $\widehat{AMB} = 45^\circ$, suy ra $\widehat{AIB} = 90^\circ$ (Góc ở tâm gấp hai lần góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{AB}$).

Khi đó:

$$\begin{cases} |\vec{AI}| = |\vec{BI}| \\ \vec{AI} \cdot \vec{BI} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-4)^2 + (y-3)^2 \\ (x-1)(x-4) + (y-2)(y-3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3; y = 1 \\ x = 2; y = 4 \end{cases}.$$

Vậy $I(3; 1)$ hoặc $I(2; 4)$.

Với $I(3; 1)$ thì $(C): (x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$ suy ra $M = Ox \cap (C)$ nên $M(1; 0)$ hoặc $M(5; 0)$.

Với $I(2; 4)$ ta thấy (C) và Ox không giao nhau nên không thỏa mãn.

Kết luận có hai điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán $M(1; 0)$ hoặc $M(5; 0)$. Vậy tổng các hoành độ của các điểm M là 6.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 105. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có trực tâm $H(1; 3)$. Đường tròn (E) đi qua trung điểm các cạnh của tam giác ABC có phương trình $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 10$. Đỉnh A thuộc đường thẳng $(d): x-3y+20=0$. Tọa độ đỉnh $C(a; b)$ với $a > 0$. Giá trị của $S = a - b$ bằng

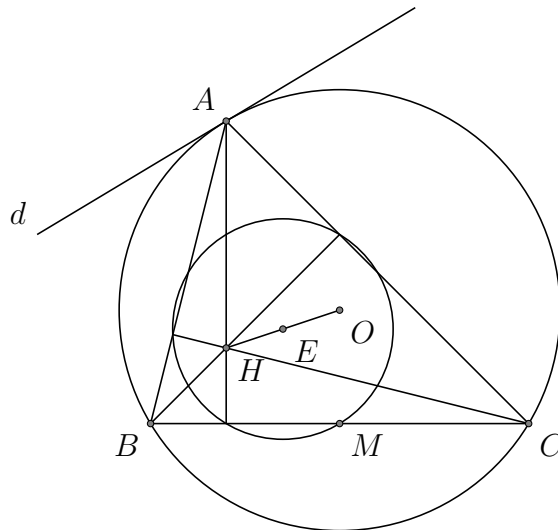
A. 10.

B. 9.

C. 0.

D. -8.

Lời giải.



Đường tròn (E) có tâm $E(2; 2)$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Vì (E) đi qua trung điểm các cạnh của tam giác ABC nên tâm E là trung điểm của OH nên $O(3; 1)$. Gọi $A(x; y)$. Vì $A \in (d)$ nên $x-3y+20=0$. Ngoài ra ta có $OA = R_{(O)} = 2R_{(E)} = 2\sqrt{10}$. Từ đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x-3y+20=0 \\ (x-3)^2 + (y-1)^2 = (2\sqrt{10})^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=7 \end{cases}$$

Gọi M là trung điểm của BC thì vì $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$ nên $M(3; -1)$. Đường thẳng BC qua M và vuông góc với AH có phương trình $y = -1$ nên $C(a; -1)$. Vì $OC = R_{(O)} = 2\sqrt{10}$ nên $(a - 3)^2 + 4 = 40$. Từ đó $a = 9$ hoặc $a = -3$. Vì $a > 0$ nên $a = 9$. Do đó $C(9; -1)$ và $S = a - b = 10$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 106. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (T) có phương trình $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$. Các điểm $K(-1; 1), H(2; 5)$ lần lượt là chân đường cao hạ từ A, B của tam giác ABC . Tính diện tích tam giác CHK biết rằng đỉnh C có hoành độ dương.

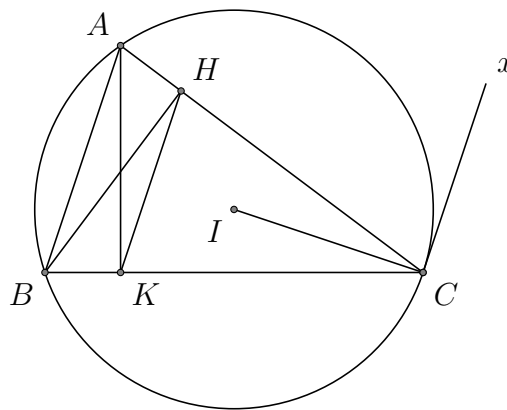
A. $S = 18$.

B. $S = 12$.

C. $S = 15$.

D. $S = 16$.

Lời giải.



Đường tròn (T) có tâm $I(1; 2)$. Gọi Cx là tiếp tuyến của (T) tại C .

Ta có $\widehat{HCx} = \widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{AC}$. (1)

Do $\widehat{AHB} = \widehat{AKB} = 90^\circ$ nên $AHKB$ là tứ giác nội tiếp, từ đó có $\widehat{ABC} = \widehat{KHC}$ (cùng bù với góc $\widehat{AHK}$). (2)

Từ (1) và (2) có $\widehat{HCx} = \widehat{KHC} \Rightarrow HK \parallel Cx$.

Mà $IC \perp Cx \Rightarrow IC \perp HK$. Do đó IC có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{KH} = (3; 4)$, IC có phương trình $3x + 4y - 11 = 0$.

Do C là giao của IC và (T) nên tọa độ điểm C là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} 3x + 4y - 11 = 0 \\ (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25 \end{cases}$$

Hệ trên có nghiệm $\begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases}, \begin{cases} x = -3 \\ y = 5 \end{cases}$.

Do $x_C > 0$ nên $C(5; -1)$. Từ đó diện tích tam giác CHK là $S = 15$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 107. Cho đường tròn $(C): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ ngoại tiếp tam giác ABC . Điểm $K(-1; 1), H(2; 5)$ là chân đường cao vẽ từ A, B của tam giác ABC . Gọi $I(1; 2)$ là tâm của đường tròn. Giả sử $C(a; b)$ mà $a > 0$ thì $P = a + b$ bằng

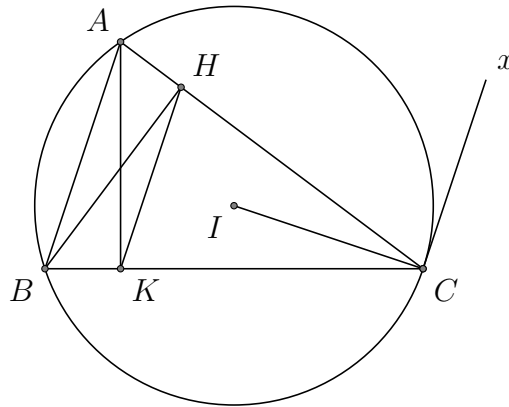
A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. $\frac{7}{2}$.

Lời giải.



$$\text{Giả sử } C(a; b) \in (C) \Rightarrow (a - 1)^2 + (b - 2)^2 = 25. \quad (1)$$

+ Chứng minh $CI \perp HK$.

Gọi Cx là tiếp tuyến của (C) tại C .

$$\text{Ta có } \widehat{HCx} = \widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{aC}. \quad (2)$$

Do $\widehat{AHB} = \widehat{AKB} = 90^\circ$ nên $AHKB$ là tứ giác nội tiếp, từ đó có $\widehat{ABC} = \widehat{KHC}$ (cùng bù với góc $\widehat{AHK}$). (3)

Từ (2) và (3) có $\widehat{HCx} = \widehat{KHC} \Rightarrow HK \parallel Cx \Rightarrow HK \perp CI$.

Ta có $\vec{IC} = (a - 1; b - 2); \vec{KH} = (3; 4)$.

Mà $\vec{IC} \cdot \vec{KH} = 0 \Leftrightarrow 3a + 4b - 11 = 0 \Rightarrow b = \frac{11 - 3a}{4}$, thế vào phương trình (1) ta có

$$(a - 1)^2 + \left(\frac{3 - 3a}{4}\right)^2 = 25 \Leftrightarrow (a - 1)^2 + \frac{9}{16}(a - 1)^2 = 25.$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} a - 1 = 4 \\ a - 1 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ a = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C(5; -1) \\ C(-3; 5) \end{cases}$$

Suy ra $a = 5; b = -1 \Rightarrow P = a + b = 4$.

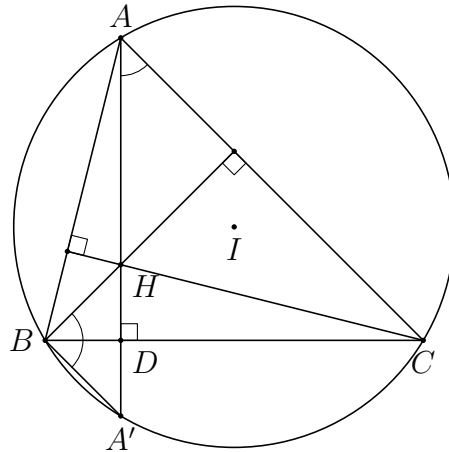
Chọn đáp án

□

Câu 108. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có ba góc nhọn và nội tiếp đường tròn tâm I , bán kính R . Biết rằng $A(3; -1)$, $H(1; 2)$ là trực tâm của tam giác ABC , điểm B thuộc đường thẳng $d: x + 2y + 5 = 0$ và điểm D là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng BC thỏa mãn hệ thức $2ID^2 + AD^2 = 2R^2$. Giả sử $C(x_0; y_0)$, tính $S = x_0 + y_0$.

- A. $S = 10$. B. $S = 9$. C. $S = 8$. D. $S = 14$.

Lời giải.



Ta có:

- $\widehat{HBC} = \widehat{HAC} = \widehat{A'BC} \Rightarrow \triangle HBA'$ cân tại $B \Rightarrow DH = DA'$.
- $DA \cdot DA' = R^2 - ID^2 \Rightarrow DA \cdot DH = R^2 - ID^2$.
- $2ID^2 + AD^2 = 2R^2 \Rightarrow \frac{1}{2}AD^2 = R^2 - ID^2$.

Suy ra $DA \cdot DH = \frac{1}{2}AD^2 \Rightarrow AD = 2DH \Rightarrow H$ là trung điểm của AD .

Từ $A(3; -1)$, $H(1; 2)$ suy ra $D(-1; 5)$.

Đường thẳng BC đi qua $D(-1; 5)$ và nhận $\overrightarrow{AH} = (-2; 3)$ làm vectơ pháp tuyến nên BC có phương trình $2x - 3y + 17 = 0$.

B là giao điểm của BC và $d: x + 2y + 5 = 0$ nên $B(-7; 1)$.

CH đi qua $H(1; 2)$ và nhận $\overrightarrow{AB} = (-10; 2)$ làm vectơ pháp tuyến nên CH có phương trình $5x - y - 3 = 0$.

Điểm C là giao điểm của hai đường thẳng BC và CH nên $C(2; 7)$.

Như vậy $x_0 = 2$, $y_0 = 7$. Vậy $S = 9$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 109. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC nhọn, đường tròn đường kính BC có phương trình $(C): (x+1)^2 + (y+2)^2 = \frac{5}{3}$. Từ A kẻ các tiếp tuyến tới đường tròn (C) tiếp xúc với đường tròn tại M và N . Biết rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nằm trên đường thẳng MN , biết A thuộc đường thẳng $d: 2x + y - 1 = 0$. Khi đó tọa độ $A(x_0; y_0)$. Tính giá trị biểu thức $T = 2x_0 + y_0$.

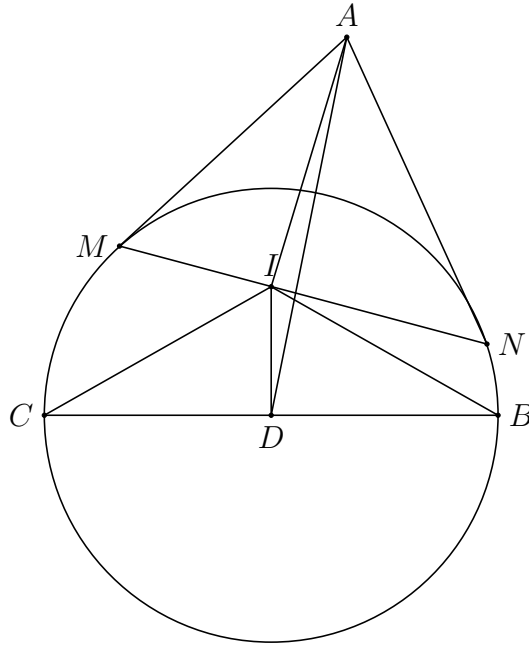
A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải.



Gọi D, I thứ tự là tâm của (C) và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , r là bán kính đường tròn (C) ; (C') là đường tròn tâm A và bán kính AM .

Khi đó ta có phương tích của điểm I đối với (C') là $IA^2 - AM^2$.

Phương tích của điểm I đối với (C) là $ID^2 - r^2$.

Đường thẳng MN là trục đẳng phương của hai đường tròn (C) và (C') mà I nằm trên đường thẳng MN nên

$$\begin{aligned} IA^2 - AM^2 &= ID^2 - r^2 \Leftrightarrow IA^2 - AD^2 + r^2 = IC^2 - 2r^2 \\ &\Leftrightarrow AD^2 = 3r^2 \text{ hay } AD^2 = 5. \end{aligned}$$

Ta có $A(x; 1 - 2x) \Rightarrow AD^2 = (x + 1)^2 + (3 - 2x)^2$.

Theo giả thiết

$$\begin{aligned} (x + 1)^2 + (3 - 2x)^2 &= 5 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow A(1; -1). \end{aligned}$$

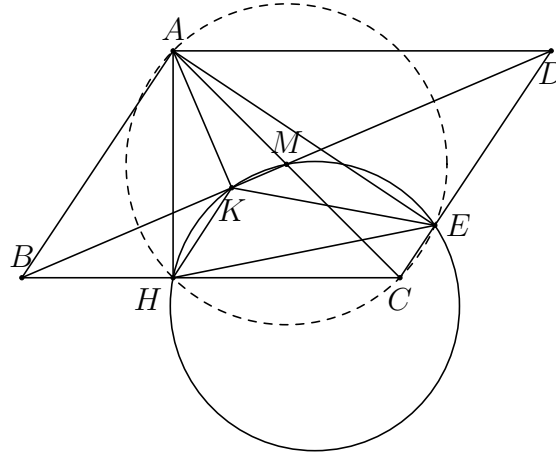
Chọn đáp án **B**

□

Câu 110. Cho hình bình hành $ABCD$ có góc B nhọn, $A(-2; -1)$. Gọi H, K, E theo thứ tự là hình chiếu của A xuống BC, BD, CD . Đường tròn ngoại tiếp tam giác HKE có phương trình $x^2 + y^2 + x + 4y + 3 = 0$. Tìm tọa độ C biết C có hoành độ dương và thuộc đường thẳng $x - y - 3 = 0$.

- A. $C(1, -2)$. B. $C(4, 1)$. C. $C(3, 0)$. D. $C(2; -1)$.

Lời giải.



Gọi M là giao của AC , BD . Ta sẽ chứng minh (HKE) đi qua M .

Thật vậy, dễ thấy M chính là tâm ngoại tiếp của tứ giác nội tiếp $AHCE$. Nên:

$$\begin{aligned}\widehat{HME} &= 2\widehat{HAE} = 2(\widehat{BAD} - \widehat{BAH} - \widehat{EAD}) \\ &= 2[(180^\circ - \widehat{ABC}) - (90^\circ - \widehat{ABC}) - (90^\circ - \widehat{ADC})] \\ &= 2\widehat{ABC}. \quad (1)\end{aligned}$$

Chú ý các tứ giác $AKHB$, $AKED$ nội tiếp:

$$\begin{aligned}\widehat{HKE} &= 360^\circ - \widehat{AKH} - \widehat{AKE} \\ &= 360^\circ - (180^\circ - \widehat{ABH}) - (180^\circ - \widehat{ADH}) \\ &= \widehat{ABC} + \widehat{ADE} \\ &= 2\widehat{ABC}. \quad (2)\end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{HME} = \widehat{HKE}$, hay M thuộc (HKE) .

Giả sử $C(c; c-3)$ với $c > 0$. Trung điểm M của AC có tọa độ $M\left(\frac{c-2}{2}; \frac{c-4}{2}\right)$. M thuộc (HKE) nên

$$\left(\frac{c-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-4}{2}\right)^2 + \frac{c-2}{2} + 2(c-4) + 3 = 0 \Leftrightarrow c \in \{-1; 2\}.$$

Tuy nhiên vì $c > 0$ nên $c = 2$. Vậy ta được $C(2; -1)$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 111. Cho số thực α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$). Góc giữa hai tiếp tuyến được vẽ từ điểm P đến đường tròn có phương trình $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9\sin^2 \alpha + 13\cos^2 \alpha = 0$ là 2α . Quỹ tích điểm P là đường tròn nào sau đây?

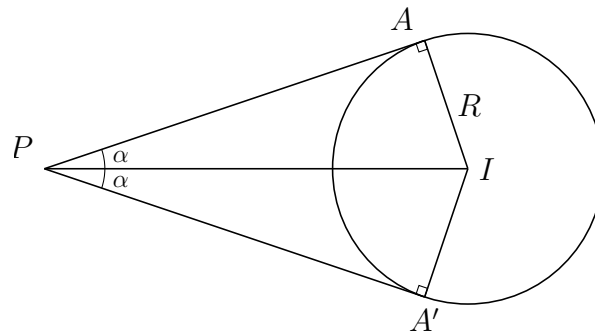
A. $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$.

B. $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 9 = 0$.

D. $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 4 = 0$.

Lời giải.



Tâm đường tròn $I(-2; 3)$, $R = \sqrt{4 + 9 - 9\sin^2\alpha - 13\cos^2\alpha} = 2\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = 2\sin\alpha$.

Gọi $P(x, y)$, xét tam giác IAP ta có $\sin\alpha = \frac{IA}{IP} = \frac{R}{IP} = \frac{2\sin\alpha}{\sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2}}$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2} = 2 \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-3)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 112. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường thẳng $\Delta: x - y = 0$. Đường tròn (C) có bán kính $R = \sqrt{10}$ cắt Δ tại hai điểm A, B sao cho $AB = 4\sqrt{2}$. Các tiếp tuyến của (C) tại hai điểm A, B cắt nhau tại một điểm thuộc tia Oy . Phương trình của đường tròn (C) là

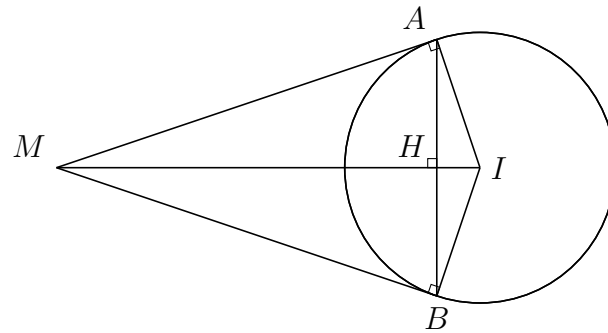
A. $(x+5)^2 + (y+3)^2 = 10$.

B. $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 10$.

C. $(x-5)^2 + (y+3)^2 = 10$.

D. $(x+5)^2 + (y-3)^2 = 10$.

Lời giải.



Giả sử đường tròn (C) có tâm I . Gọi M là giao điểm của các tiếp tuyến tại A, B của (C) , $H = IM \cap AB$.

Suy ra H là trung điểm của AB , $AH = \frac{AB}{2} = 2\sqrt{2}$.

Vì M thuộc tia Oy nên $M(0; t)$, $t \geq 0$. Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AI^2} \Rightarrow AM = 2\sqrt{10}$.

Vậy $MH = \sqrt{MA^2 - AH^2} = 4\sqrt{2}$.

Mà $MH = d(M, \Delta) \Rightarrow \frac{|t|}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \Rightarrow t = 8 \Rightarrow M(0; 8)$.

Đường thẳng IM qua M và vuông góc với Δ nên có phương trình $x + y - 8 = 0$.

Toạ độ H là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow H(4; 4)$.

Ta có $IH = \sqrt{IA^2 - AH^2} = \sqrt{2} = \frac{HM}{4} \Rightarrow \overrightarrow{IH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HM} \Rightarrow I(5; 3)$.

Vậy phương trình đường tròn (C) là $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 10$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 113. Cho đường thẳng $(\Delta) : 3x + 4y - 25 = 0$ và điểm $M \in (\Delta)$. Trên tia OM lấy điểm N sao cho $OM \cdot ON = a$, $(a > 0)$. Khi M thay đổi thì N di động trên một đường tròn cố định có tâm $I(x_I, y_I)$. Biết $3x_I + 4y_I = \frac{1}{2}$. Giá trị của a là

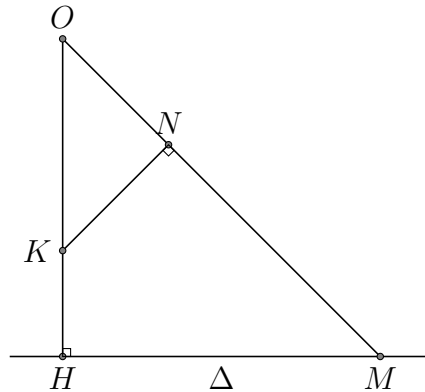
A. $\frac{1}{2}$.

B. 1.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng $\Delta \Rightarrow (OH) : 4x - 3y = 0$

$H = (\Delta) \cap (OH) \Rightarrow$ Tọa độ của H là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x + 4y - 25 = 0 \\ 4x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow H(3; 4).$$

Gọi $K \in OH$ thỏa $OK \cdot OH = OM \cdot ON = a$. Khi đó tứ giác $HKNM$ nội tiếp.

Mà $\widehat{KHM} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{KNM} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{KNO} = 90^\circ$.

Suy ra N di động trên đường tròn đường kính OK . Hay $I(x_I, y_I)$ là trung điểm của OK .

Ta có $\overrightarrow{OH} = (3; 4)$. Mặt khác $\overrightarrow{OH} \uparrow \uparrow \overrightarrow{OK} \Rightarrow \overrightarrow{OK} = (3m, 4m)$, $(m > 0)$.

$$OK \cdot OH = \overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{OH} = 9m + 16m = a \Leftrightarrow m = \frac{a}{25} \Rightarrow K\left(\frac{3a}{25}; \frac{4a}{25}\right) \Rightarrow I\left(\frac{3a}{50}; \frac{2a}{25}\right).$$

$$\text{Vậy } 3x_I + 4y_I = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{3a}{50} + 4 \cdot \frac{2a}{25} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 1.$$

Gọi $N(x, y) \Rightarrow \overrightarrow{ON} = (x, y)$, $ON^2 = x^2 + y^2$

$$OM \cdot ON = a \Leftrightarrow OM = \frac{a}{ON} = \frac{a}{ON^2} \cdot ON, \text{ mà } \overrightarrow{OM} \uparrow \uparrow \overrightarrow{ON} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{a}{ON^2} \cdot \overrightarrow{ON}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x_M = \frac{ax}{x^2 + y^2} \\ y_M = \frac{ay}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

Mặt khác $M \in (\Delta) \Leftrightarrow 3x_M + 4y_M - 25 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{3ax}{x^2 + y^2} + \frac{4ay}{x^2 + y^2} - 25 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{3a}{25}x - \frac{4a}{25}y = 0.$$

$$\text{Vậy } I\left(\frac{3a}{50}; \frac{2a}{25}\right) \Rightarrow 3x_I + 4y_I = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{3a}{50} + 4 \cdot \frac{2a}{25} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 1.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 114. Trong hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 10$ và đường thẳng $d: 2x - y - 2 = 0$. Biết đường thẳng $(\Delta): ax + by + c = 0$ là tiếp tuyến của đường tròn (C) , biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng d một góc 45° , với a, b là số nguyên dương và ước chung lớn nhất của a, b bằng 1. Tính tổng $S = a + b + c$.

A. 0.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

(C) có tâm $I(1; 1)$ bán kính $R = \sqrt{10}$ và $\vec{n} = (a; b)$ là VTPT của tiếp tuyến ($a^2 + b^2 \neq 0$),
Vì $(\Delta, d) = 45^\circ$ nên $\frac{|2a - b|}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot |2a - b| = \sqrt{5} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\Leftrightarrow 3a^2 - 8ab - 3b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3b \\ b = -3a. \end{cases}$$

• Với $a = 3b \Rightarrow \Delta: 3x + y + c = 0$. Mặt khác $d(I; \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|4 + c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 6 \\ c = -14. \end{cases}$

• Với $b = -3a \Rightarrow \Delta: x - 3y + c = 0$.

$$\text{Mặt khác } d(I; \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|-2 + c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -8 \\ c = 12 \end{cases} \text{ (loại).}$$

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm $3x + y + 6 = 0; 3x + y - 14 = 0$.

Do đó $S = 3 + 1 + 6 + 3 + 1 - 14 = 0$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 115. Trong hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 10$ và đường thẳng $d: 2x - y - 2 = 0$. Tìm số tiếp tuyến của đường tròn (C) , biết các tiếp tuyến tạo với đường thẳng d một góc 45° .

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải.

(C) có tâm $I(1; 1)$ bán kính $R = \sqrt{10}$. Gọi $\vec{n} = (a; b)$ là VTPT của tiếp tuyến ($a^2 + b^2 \neq 0$),
Vì $(\Delta, d) = 45^\circ$ nên $\frac{|2a - b|}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot |2a - b| = \sqrt{5} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\Leftrightarrow 3a^2 - 8ab - 3b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3b \\ b = -3a. \end{cases}$$

• Với $a = 3b \Rightarrow \Delta: 3x + y + c = 0$. Mặt khác $d(I; \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|4 + c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 6 \\ c = -14. \end{cases}$

• Với $b = -3a \Rightarrow \Delta: x - 3y + c = 0$. Mặt khác $d(I; \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|-2 + c|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -8 \\ c = 12. \end{cases}$

Vậy có bốn tiếp tuyến cần tìm $3x + y + 6 = 0; 3x + y - 14 = 0; x - 3y - 8 = 0; x - 3y + 12 = 0$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 116. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm $I(6; 6)$ và ngoại tiếp đường tròn tâm $K(4; 5)$. Biết đỉnh $A(2; 3)$, phương trình đường thẳng BC có dạng $ax + by + c = 0$, với $a, b \in \mathbb{N}$ và a, b nguyên tố cùng nhau. Tính tổng $a + b + c$.

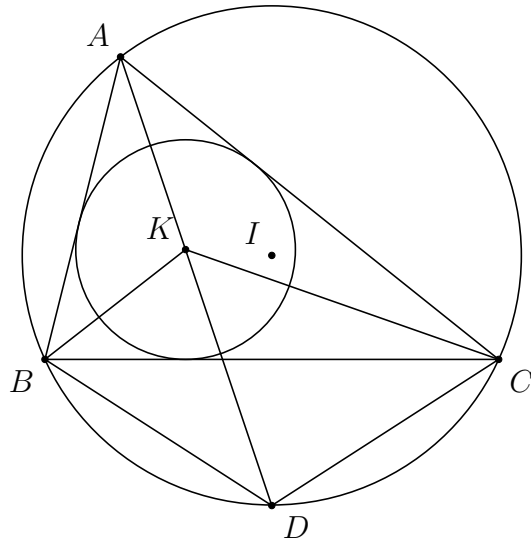
A. -35.

B. 49.

C. -8.

D. 22.

Lời giải.



Ta có $IA = 5$ nên phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

$$(x - 6)^2 + (y - 6)^2 = 25 \quad (C).$$

Đường phân giác AK qua A và K nên có phương trình $x - y + 1 = 0$, dễ tìm được AK cắt (C) tại điểm thứ hai $D(9; 10)$. Ta suy ra $\widehat{DCK} = \widehat{DKC} = \frac{\widehat{A} + \widehat{C}}{2}$, nên tam giác KBD cân tại D , do đó $DC = DK = DB \Rightarrow B, C$ thuộc đường tròn tâm D , bán kính $DK = \sqrt{50}$.

Vậy B, C thỏa mãn hệ phương trình
$$\begin{cases} (x - 6)^2 + (y - 6)^2 = 25 \\ (x - 9)^2 + (y - 10)^2 = 50. \end{cases}$$

Suy ra phương trình $BC: 3x + 4y - 42 = 0 \Rightarrow a + b + c = -35$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 117. Trong mặt phẳng tọa độ, cho hai đường tròn $(C_1): (x+2)^2 + y^2 = 1$ và $(C_2): (x-2)^2 + y^2 = 16$. Biết đường thẳng $d: ax + by - 10 = 0$ là một tiếp tuyến chung của hai đường tròn (C_1) và (C_2) . Tính $S = a^2 + b^2$.

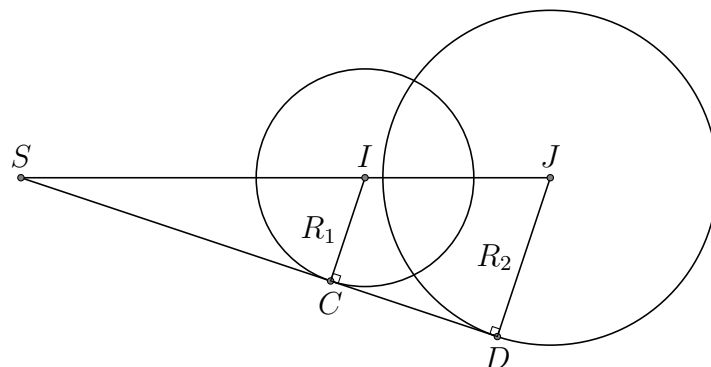
A. $S = 12$.

B. $S = 16$.

C. $S = 20$.

D. $S = 24$.

Lời giải.



- **Cách 1.** Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn (C_1) và (C_2) . Ta có $I(-2;0), J(2;0)$ lần lượt là tâm của hai đường tròn đó. Vì $IJ = 4 < 1 + 4 = R_1 + R_2$ nên hai đường tròn đã cho cắt nhau, do đó chúng chỉ có hai tiếp tuyến chung ngoài. Gọi S là giao điểm của IJ và tiếp tuyến chung ngoài CD của hai đường tròn.

Ta có $\frac{SI}{SJ} = \frac{IC}{JD} = \frac{1}{4}$, suy ra $4\overrightarrow{SI} - \overrightarrow{SJ} = \vec{0}$ hay $3\overrightarrow{OS} = 4\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OJ}$. Do đó $S = \left(-\frac{10}{3}; 0\right)$.

Giả sử tiếp tuyến CD có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (u; v)$. Phương trình đường thẳng CD là

$$u\left(x + \frac{10}{3}\right) + vy = 0. \text{ Suy ra } 1 = R_1 = d(I, CD) = \frac{\left|\frac{4}{3}u\right|}{\sqrt{u^2 + v^2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{7}}{3}u = \pm v.$$

Kết hợp giả thiết ta có $\frac{a}{u} = \frac{b}{v} = \frac{-10}{\frac{10u}{3}}$ hay $a = -3$ và $b = \pm v$. Từ đó $b = \pm\sqrt{7}$.

Trong tất cả các trường hợp ta đều có $a^2 + b^2 = 16$.

- **Cách 2.** (d) tiếp xúc với (C_1) nên $\frac{|-2a - 10|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = |2a + 10|$ (1)

$$(d) \text{ tiếp xúc với } (C_2) \text{ nên } \frac{|2a - 10|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 4 \Leftrightarrow 4\sqrt{a^2 + b^2} = |2a - 10| \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } |2a - 10| = 4|2a + 10| \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 10 = 8a + 40 \\ 2a - 10 = -8a - 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{25}{3} \\ a = -3. \end{cases}$$

Với $a = -3$ thì ta có $\sqrt{a^2 + b^2} = 4 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 16$. Lúc này $b = \pm\sqrt{7}$ (nhận).

Với $a = -\frac{25}{3}$ thì ta có $\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{20}{3} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \frac{400}{9}$. Lúc này $b^2 = -\frac{225}{9}$ (loại).

Vậy $a^2 + b^2 = 16$.

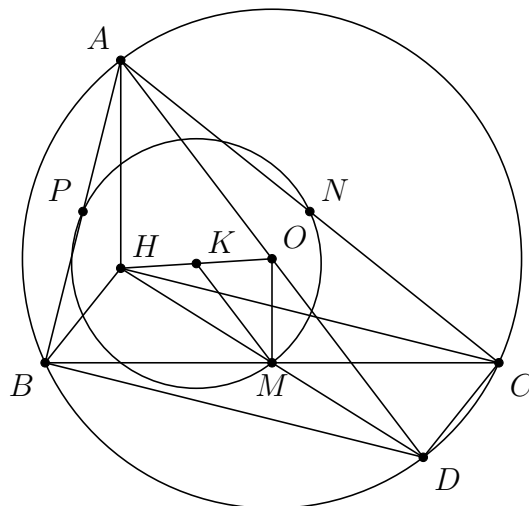
Chọn đáp án **B**

□

Câu 118. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có trực tâm $H(-1;3)$, đường tròn đi qua ba trung điểm của các cạnh tam giác ABC có phương trình là $x^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đi qua điểm nào sau đây?

- A. (3;6). B. (5;5). C. (-5;0). D. (1;2).

Lời giải.



Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ có tâm O và

bán kính R . Gọi K là trung điểm của HO . Kẻ đường kính AD của đường tròn (O) .

Ta có tứ giác $HBDC$ là hình bình hành. Suy ra M là trung điểm của HD .

Do đó $KM = \frac{1}{2} \cdot OD = \frac{1}{2} \cdot R$. Tương tự ta có $KN = KP = \frac{1}{2} \cdot R$.

Vậy đường tròn đi qua 3 điểm M, N, P có tâm là K và bán kính là $r = \frac{1}{2}R$.

Theo bài ra ta có $K\left(0; \frac{5}{2}\right)$ và $r = \frac{5}{2}$.

Vì K là trung điểm của HO nên $O(1; 2)$ và $R = 2r = 5$.

Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$.

Vì điểm $(5; 5)$ thỏa mãn phương trình $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 119. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn tâm I và điểm C nằm ngoài đường tròn (I) . Từ C kẻ hai tiếp tuyến CA, CB của (I) (với A, B là hai tiếp điểm). Đường tròn (I) cắt IC tại K . Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC biết $A(8; 12), K(12; 4)$ và $D(16; 6)$ thuộc đường thẳng AC .

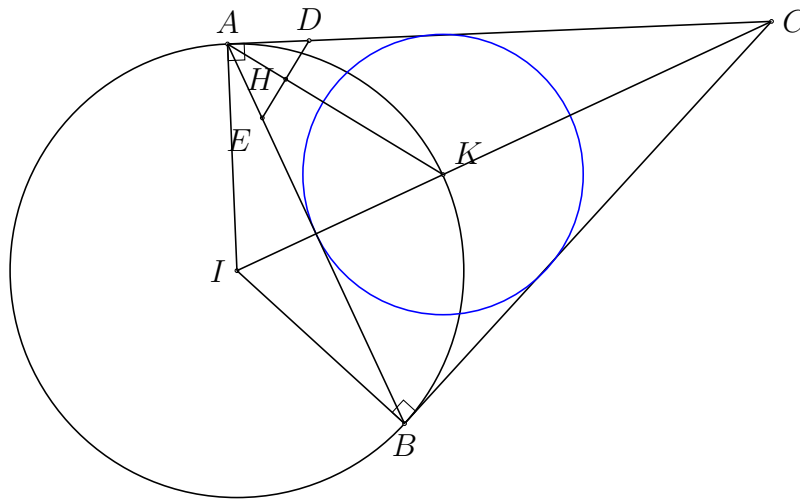
A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 5.

Lời giải.



$$\text{Ta có } \begin{cases} \widehat{CAK} + \widehat{KAI} = 90^\circ \\ \widehat{KAB} + \widehat{AKI} = 90^\circ \\ \widehat{KAI} = \widehat{AKI} \end{cases} \Rightarrow \widehat{CAK} = \widehat{KAB} \Rightarrow AK \text{ là phân giác góc } \widehat{CAB}.$$

Mặt khác, IC là phân giác góc $\widehat{ACB}$ và $K = IC \cap AK$ nên K là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Phương trình đường thẳng AK : $2x + y - 28 = 0$.

Gọi E là điểm đối xứng với D qua AK . Phương trình đường thẳng DE : $x - 2y - 4 = 0$.

Gọi $H = AK \cap DE$, tọa độ điểm H là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + y - 28 = 0 \\ x - 2y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow H(12; 4).$$

Do H là trung điểm của DE nên $E(8; 2)$. Phương trình đường thẳng AB : $x - 8 = 0$.

Vậy Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC là $r = d(K, AB) = 4$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 120. Trong mặt phẳng Oxy , góc giữa tiếp tuyến của $(P): y = x^2$ và tiếp tuyến của đường tròn $(C): x^2 + (y - 1)^2 = \frac{3}{4}$ tại điểm chung $M_0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ của chúng có số đo là

- A. 15° . B. 30° . C. 0° . D. 60° .

Lời giải.

Gọi phương trình tiếp tuyến d_1 tại M_0 với (P) là $y = ax + b$.

Khi đó: $M \in d_1 \Leftrightarrow a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + b = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}a$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là $x^2 = ax + b$ (1).

Theo đề phương trình (1) có nghiệm duy nhất hay $\Delta = a^2 + 4b = 0 \Leftrightarrow a^2 - 2\sqrt{2}a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = \sqrt{2}$.

Khi đó phương trình d_1 là $y = \sqrt{2}x + \frac{1}{2}$ hay $\sqrt{2}x - y - \frac{1}{2} = 0$.

Đường tròn (C) có tâm $I(0; 1)$ suy ra $\overrightarrow{IM} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

Gọi d_2 là tiếp tuyến với (C) tại M_0 nên d_2 có vec-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (\sqrt{2}; -1)$.

d_1 có vec-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (\sqrt{2}; -1)$.

Suy ra hai tiếp tuyến song song hoặc trùng nhau nên góc giữa chúng là 0° .

Chọn đáp án **C**

□

Câu 121. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$. Đường thẳng (d) đi qua $M(2; 3)$ cắt (C) tại hai điểm A, B . Tiếp tuyến của đường tròn tại A và cắt nhau tại E . Biết $S_{AEB} = \frac{32}{5}$ và phương trình đường thẳng (d) có dạng $ax - y + c = 0$ với $a, c \in \mathbb{Z}, a > 0$. Khi đó $a + 2c$ bằng:

- A. 1. B. -1. C. -4. D. 0.

Lời giải.

Ta có $M(2; 3) \in d: 2a - 3 + c = 0 \Leftrightarrow 3 - 2a$

$(C): x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ có tâm $O(1; 3), r = 2$.

$OH = d(O, d) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} \Rightarrow OE = \frac{OA^2}{OH} = \frac{4\sqrt{a^2 + 1}}{a}$,

$HE = \frac{3a^2 + 4}{a\sqrt{a^2 + 1}}$

$AH^2 = OA^2 - OH^2 = \frac{3a^2 + 4}{a^2 + 1} = \frac{\sqrt{3a^2 + 4}}{\sqrt{a^2 + 1}}$

Mà $S_{AEB} = \frac{32}{5} \Leftrightarrow AH \cdot HE = \frac{32}{5} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3a^2 + 4}}{\sqrt{a^2 + 1}} \cdot \frac{3a^2 + 4}{a\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{32}{5}$

$\Leftrightarrow 5\sqrt{(3a^2 + 4)^3} = 32a\sqrt{a^2 + 1} \Leftrightarrow 25(3a^2 + 4)^3 = 1024a^2(a^2 + 1)$ (1)

Đặt $t = a$ thì (1) $\Leftrightarrow -349t^3 + 652t^2 + 2576t + 1600 = 0 \Leftrightarrow t = 4 \Leftrightarrow a = 2 \Leftrightarrow c = -1$. Vậy $a + 2c = 0$

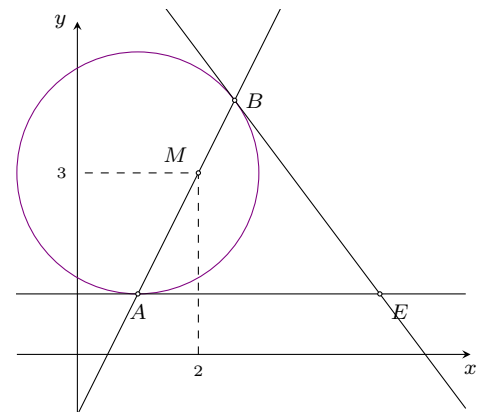
Chọn đáp án **D**

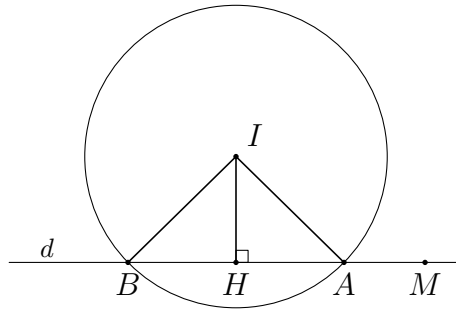
□

Câu 122. Trong hệ tọa độ Oxy . Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 15 = 0$. I là tâm (C) , đường thẳng d qua $M(1; -3)$ cắt (C) tại A, B . Biết tam giác IAB có diện tích là 8. Phương trình đường thẳng d là $x + by + c = 0$. Tính $(b + c)$.

- A. có vô số giá trị. B. 1. C. 2. D. 8.

Lời giải.





Đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 15 = 0$ có tâm $I(2; -1)$ bán kính $R = \sqrt{2^2 + 1^2 + 15} = 2\sqrt{5}$.

Vì đường thẳng d : $x + by + c = 0$ đi qua điểm $M(1; -3)$ ta có pt: $1 - 3b + c = 0 \Leftrightarrow c = 3b - 1$.

$$\text{Khi đó } IH = d(I, d) = \frac{|2 - b + c|}{\sqrt{1 + b^2}} = \frac{|2b + 1|}{\sqrt{1 + b^2}} \Rightarrow AH = \sqrt{IA^2 - IH^2} = \sqrt{20 - \frac{(2b + 1)^2}{1 + b^2}}.$$

$$\text{Vì diện tích tam giác } IAB \text{ bằng } 8 \text{ nên } IH \cdot AH = 8 \Leftrightarrow \frac{|2b + 1|}{\sqrt{1 + b^2}} \cdot \sqrt{\frac{16b^2 - 4b + 19}{1 + b^2}} = 8.$$

$$\Leftrightarrow (2b + 1)^2(16b^2 - 4b + 19) = 64(1 + b^2)(1 + b^2).$$

$$\Leftrightarrow 64b^4 + 64b^3 + 16b^2 - 16b^3 - 16b^2 - 4b + 76b^2 + 76b + 19 = 64b^4 + 128b^2 + 64.$$

$$\Leftrightarrow 48b^3 - 52b^2 + 72b - 45 = 0 \Leftrightarrow b = \frac{3}{4} \Rightarrow c = \frac{5}{4} \Rightarrow b + c = 2.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 123. Cho hai điểm $A(3; 0)$, $B(0; 4)$. Đường tròn nội tiếp tam giác OAB có phương trình là

A. $x^2 + y^2 = 1$.

B. $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$.

C. $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25 = 0$.

D. $x^2 + y^2 = 2$.

Lời giải.

Ta có $OA = 3$, $OB = 4$, $AB = 5$.

Gọi $I(x_I; y_I)$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OAB .

Từ hệ thức $AB \cdot \vec{IO} + OB \cdot \vec{IA} + OA \cdot \vec{IB} = \vec{0}$. Chứng minh ta được

$$\begin{cases} x_I = \frac{AB \cdot x_O + OB \cdot x_A + OA \cdot x_B}{AB + OB + OA} = \frac{4 \cdot 3}{5 + 4 + 3} = 1 \\ y_I = \frac{AB \cdot y_O + OB \cdot y_A + OA \cdot y_B}{AB + OB + OA} = \frac{3 \cdot 4}{5 + 4 + 3} = 1 \end{cases} \Rightarrow I(1; 1).$$

Mặt khác tam giác OAB vuông tại O với r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác thì

$$r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2}OA \cdot OB}{\frac{OA + OB + AB}{2}} = \frac{3 \cdot 4}{3 + 4 + 5} = 1.$$

(S, p lần lượt là diện tích và nửa chu vi tam giác).

Vậy phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB là

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1 \text{ hay } x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 124. Trong các đường tròn sau đây, đường tròn nào tiếp xúc với trục Ox ?

- A. $x^2 + y^2 = 5$. B. $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$.
C. $x^2 + y^2 - 10x + 1 = 0$. D. $x^2 + y^2 - 2x + 10 = 0$.

Lời giải.

Xét đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ có tâm $I(2; 1)$ và bán kính $R = 1$.

Do $d(I; Ox) = y_I = 1 = R \Rightarrow (C)$ tiếp xúc với Ox .

Chọn đáp án (B) □

Câu 125. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC với $A(2; 7)$, $B(6; 3)$, $C(2; -1)$. Tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

- A. $I(3; 2)$. B. $I(2; 3)$. C. $I(-2; 3)$. D. $I(3; -2)$.

Lời giải.

Nhận thấy $AB = 4\sqrt{2}$, $AC = 8$, $BC = 4\sqrt{2}$ nên $AB^2 + BC^2 = AC^2$. Vậy tam giác ABC là tam giác vuông tại B . Do đó tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là trung điểm AC . Vậy $I(2; 3)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 126. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$. Gọi I là tâm và R là bán kính của (C) . Gọi $M(a; b)$ ($a > 0$) thuộc đường thẳng $d: 2x - y + 3 = 0$ sao cho $MI = 2R$. Tính tổng $a^2 + b^2$.

- A. 15. B. 137. C. $\frac{333}{5}$. D. 136.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(2; 3)$, bán kính $R = 5$.

Điểm $M \in d: 2x - y + 3 = 0 \Rightarrow M(t; 2t + 3)$.

Ta có $\overrightarrow{IM} = (t - 2; 2t)$.

$$\text{Do đó, } IM = 2R \Leftrightarrow \sqrt{(t - 2)^2 + (2t)^2} = 10 \Leftrightarrow 5t^2 - 4t - 96 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \Rightarrow M(4; 11) \\ t = -\frac{24}{5} \Rightarrow M\left(-\frac{24}{5}; -\frac{33}{5}\right) \end{cases}$$

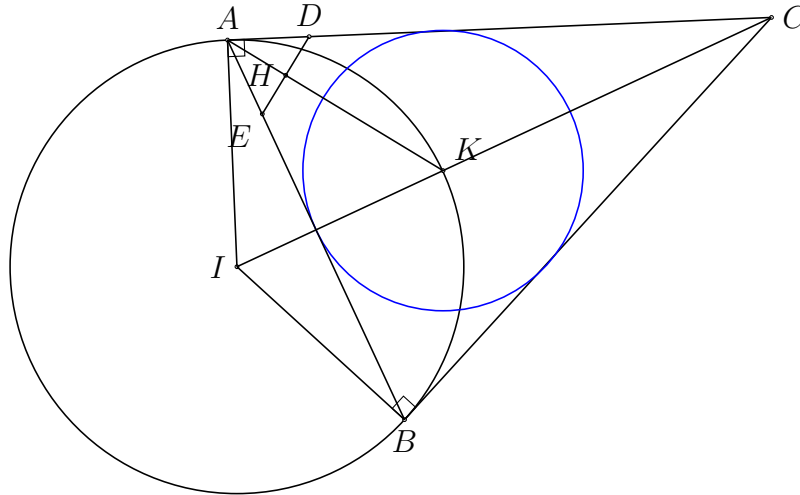
Vậy $a = 4$, $b = 11 \Rightarrow a^2 + b^2 = 137$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 127. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn tâm I và điểm C nằm ngoài đường tròn (I) . Từ C kẻ hai tiếp tuyến CA, CB của (I) (với A, B là hai tiếp điểm). Đường tròn (I) cắt IC tại K . Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC biết $A(8; 12)$, $K(12; 4)$ và $D(16; 6)$ thuộc đường thẳng AC .

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 5.

Lời giải.



Ta có
$$\begin{cases} \widehat{CAK} + \widehat{KAI} = 90^\circ \\ \widehat{KAB} + \widehat{AKI} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{CAK} = \widehat{KAB} \Rightarrow AK \text{ là phân giác góc } \widehat{CAB}. \\ \widehat{KAI} = \widehat{AKI} \end{cases}$$

Mặt khác, IC là phân giác góc $\widehat{ACB}$ và $K = IC \cap AK$ nên K là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Phương trình đường thẳng AK : $2x + y - 28 = 0$.

Gọi E là điểm đối xứng với D qua AK . Phương trình đường thẳng DE : $x - 2y - 4 = 0$.

Gọi $H = AK \cap DE$, tọa độ điểm H là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + y - 28 = 0 \\ x - 2y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow H(12; 4).$$

Do H là trung điểm của DE nên $E(8; 2)$. Phương trình đường thẳng AB : $x - 8 = 0$.

Vậy Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC là $r = d(K, AB) = 4$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 128. Đường tròn (C) có tâm là gốc tọa độ $O(0; 0)$ và tiếp xúc với đường thẳng Δ : $8x + 6y + 100 = 0$. Bán kính R của đường tròn (C) bằng

- A. $R = 4$. B. $R = 6$. C. $R = 8$. D. $R = 10$.

Lời giải.

Ta có $R = d(O; \Delta) = \frac{|100|}{\sqrt{64 + 36}} = 10$.

Chọn đáp án **D** □

ĐÁP ÁN

1. D	2. A	3. A	4. B	5. A	6. C	7. D	8. C	9. A	10. A
11. B	12. D	13. C	14. C	15. C	16. B	17. D	18. C	19. B	20. A
21. C	22. D	23. D	24. A	25. A	26. C	27. A	28. B	29. D	30. D
31. A	32. D	33. B	34. A	35. C	36. B	37. B	38. D	39. D	40. A
41. D	42. D	43. A	44. D	45. A	46. D	47. D	48. A	49. B	50. D
51. C	52. B	53. A	54. A	55. B	56. C	57. C	58. B	59. D	60. C
61. D	62. B	63. A	64. C	65. D	66. C	67. C	68. B	69. D	70. B
71. A	72. C	73. C	74. D	75. C	76. D	77. C	78. B	79. D	80. D
81. A	82. A	83. D	84. A	85. C	86. D	87. B	88. C	89. B	90. B
91. A	92. B	93. A	94. A	95. B	96. B	97. B	98. B	99. B	100. C
101. D	102. D	103. C	104. C	105. A	106. C	107. C	108. B	109. B	110. D
111. B	112. B	113. B	114. A	115. A	116. A	117. B	118. B	119. A	120. C
121. D	122. C	123. B	124. B	125. B	126. B	127. A	128. D		

§3 ĐƯỜNG ELIP

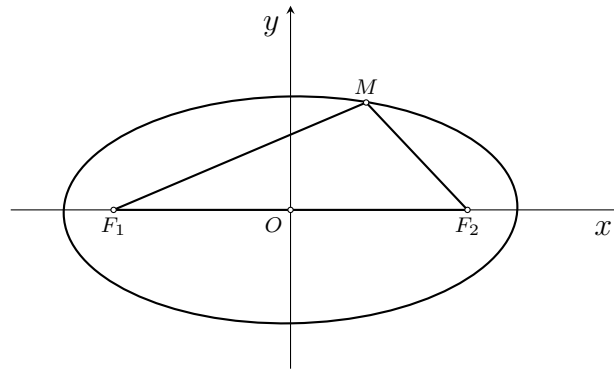
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA

Trong mặt phẳng cho hai điểm cố định F_1, F_2 với $F_1F_2 = 2c$ và một độ dài không đổi $2a$ ($0 < c < a$). Elip (E) là tập hợp tất cả các điểm M trong mặt phẳng thỏa mãn $MF_1 + MF_2 = 2a$.

Ta gọi:

- F_1, F_2 là các tiêu điểm của elip;
- $F_1F_2 = 2c$: Tiêu cự của elip;
- MF_1, MF_2 : Bán kính qua tiêu.



2 PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA ELIP

Phương trình chính tắc của elip:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

trong đó $a^2 = b^2 + c^2$.

Chứng minh. Cho Elip có hai tiêu điểm F_1 và F_2 . Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$.

$$\text{Khi đó: } MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \Leftrightarrow MF_1^2 = (x+c)^2 + y^2$$

$$MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Leftrightarrow MF_2^2 = (x-c)^2 + y^2$$

$$\Rightarrow MF_1^2 - MF_2^2 = 4cx \text{ mà } M \in (E) \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 2a \text{ nên } MF_1 - MF_2 = \frac{2cx}{a}.$$

Ta có hệ:

$$\begin{cases} MF_1 - MF_2 = \frac{2cx}{a} \\ MF_1 + MF_2 = 2a \end{cases} \quad (3.1)$$

Suy ra:

$$\begin{cases} MF_1 = a + \frac{cx}{a} \\ MF_2 = a - \frac{cx}{a} \end{cases} \quad (3.2)$$

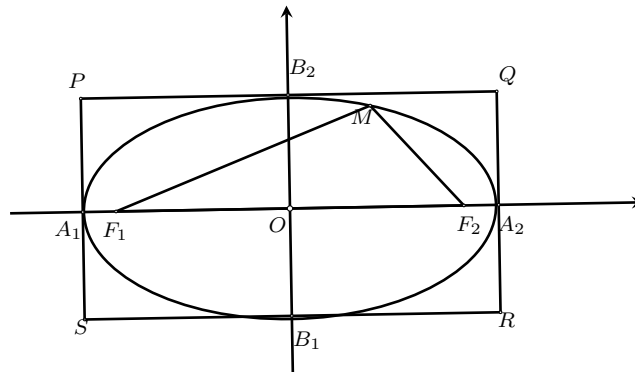
Lại có: $MF_1 = a + \frac{cx}{a} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ hay $\left(a + \frac{cx}{a}\right)^2 = (x+c)^2 + y^2$

Từ đó, phân tích và rút gọn ta được: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$

Do $a^2 - c^2 > 0$ nên đặt $a^2 - c^2 = b^2$ ($b > 0$), ta được: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (*)

Phương trình (*) gọi là phương trình chính tắc của elip.

3 HÌNH DẠNG CỦA ELIP



- a) *Trục đối xứng của elip*: Elip có phương trình (*) nhận các trục tọa độ làm trục đối xứng và nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.
- b) *Hình chữ nhật cơ sở*: Vẽ qua A_1 và A_2 hai đường thẳng song song với trục tung, vẽ qua B_1 và B_2 hai đường thẳng song song với trục hoành. Bốn đường thẳng đó tạo thành hình chữ nhật PQRS. Ta gọi hình chữ nhật đó là hình chữ nhật cơ sở của elip.
- Từ đó suy ra Mọi điểm của elip nếu không phải là đỉnh đều nằm trong hình chữ nhật cơ sở của nó, bốn đỉnh của elip là trung điểm các cạnh của hình chữ nhật cơ sở.

Các điểm: $A_1(-a; 0)$; $A_2(a; 0)$; $B_1(0; -b)$; $B_2(0; b)$ gọi là các đỉnh của elip.

! $A_1A_2 = 2a$: Độ dài trục lớn. $B_1B_2 = 2b$: Độ dài trục bé.

- c) *Tâm sai của elip*: Tỷ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn của elip gọi là tâm sai của elip và được kí hiệu là e tức là $e = \frac{c}{a}$.
- Nếu tâm sai e càng bé (tức là càng gần 0) thì b càng gần a và hình chữ nhật cơ sở càng gần với hình vuông, do đó đường elip càng “béo”.
 - Nếu tâm sai e càng lớn (tức là càng gần 1) thì tỷ số $\frac{b}{a}$ càng gần tới 1 và hình chữ nhật cơ sở càng “dẹt”, do đó đường elip càng “gầy”.

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xác định các yếu tố của elip

Xác định tọa độ các đỉnh, tọa độ các tiêu điểm, độ dài các trục, độ dài tiêu cự của elip bằng cách áp dụng các công thức:

- a) $c^2 = a^2 - b^2$.
- b) Độ dài trục lớn: $A_1A_2 = 2a$, độ dài trục nhỏ: $B_1B_2 = 2b$.
- c) Độ dài tiêu cự: $F_1F_2 = 2c$.

BÀI TẬP DẠNG 1

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Xác định tọa độ các đỉnh và độ dài các trục của các elip có phương trình sau:

a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

b) $x^2 + 4y^2 = 1$.

Lời giải.

- a) Từ phương trình $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ ta có: $a = 4$, $b = 2$.
 Các đỉnh: $A_1(-4; 0)$, $A_2(4; 0)$, $B_1(0; -2)$, $B_2(0; 2)$.
 Độ dài trục lớn: $A_1A_2 = 2a = 8$, $B_1B_2 = 2b = 4$.

- b) Ta có $x^2 + 4y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$: $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$.
 Các đỉnh: $A_1(-1; 0)$, $A_2(1; 0)$, $B_1(0; -\frac{1}{2})$, $B_2(0; \frac{1}{2})$.
 Độ dài trục lớn: $A_1A_2 = 2a = 2$, $B_1B_2 = 2b = 1$.

□

Ví dụ 2. Xác định tọa độ các tiêu điểm và độ dài tiêu cự của các elip có phương trình sau:

a) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

b) $4x^2 + 25y^2 = 36$.

Lời giải.

- a) Từ phương trình $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ta có: $a^2 = 4$, $b^2 = 3$, suy ra $c = 1$.
 Các tiêu điểm: $F_1(-1; 0)$, $F_2(1; 0)$.
 Độ dài tiêu cự: $F_1F_2 = 2c = 2$.

- b) Ta có $4x^2 + 25y^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{36}{4}} + \frac{y^2}{\frac{36}{25}} = 1$, suy ra: $a^2 = 9$, $b^2 = \frac{36}{25} \Rightarrow c = \frac{3\sqrt{21}}{5}$.
 Các tiêu điểm: $F_1(-\frac{3\sqrt{21}}{5}; 0)$, $F_2(\frac{3\sqrt{21}}{5}; 0)$.
 Độ dài tiêu cự: $F_1F_2 = 2c = \frac{6\sqrt{21}}{5}$.



Ví dụ 3. Cho elip (E) có độ dài trục lớn bằng 10, tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn là $\frac{3}{5}$.
Tính độ dài trục nhỏ của elip.

Lời giải.

Ta có $2a = 10 \Rightarrow a = 5$. Mà $\frac{c}{a} = \frac{3}{5} \Rightarrow c = 3$.

Do đó $b^2 = a^2 - c^2 = 16 \Rightarrow b = 4$. Vậy độ dài trục nhỏ $2b = 8$.



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Xác định tọa độ các đỉnh và các tiêu điểm của các elip có phương trình sau:

a) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$

b) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

Lời giải.

a) Ta có $a^2 = 100, b^2 = 64 \Rightarrow a = 10, b = 8, c = 6$.

Vậy $A_1(-10; 0), A_2(10; 0), B_1(0; -8), B_2(0; 8), F_1(-6; 0), F_2(6; 0)$.

b) Ta có $a^2 = 4, b^2 = 1 \Rightarrow a = 2, b = 1, c = \sqrt{3}$.

Vậy $A_1(-2; 0), A_2(2; 0), B_1(0; -1), B_2(0; 1), F_1(-\sqrt{3}; 0), F_2(\sqrt{3}; 0)$.



Bài 2. Xác định tọa độ các đỉnh và các tiêu điểm của các elip có phương trình sau:

a) $16x^2 + 25y^2 = 1$

b) $0,25x^2 + 9y^2 = 1$.

Lời giải.

a) Ta có $16x^2 + 25y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{16}} + \frac{y^2}{\frac{1}{25}} = 1$.

Do đó: $A_1(-\frac{1}{4}; 0), A_2(\frac{1}{4}; 0), B_1(0; -\frac{1}{5}), B_2(0; \frac{1}{5}), F_1(-\frac{3}{20}; 0), F_2(\frac{3}{20}; 0)$.

b) Ta có $0,25x^2 + 9y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{1}{9}} = 1$.

Vậy: $A_1(-\frac{1}{4}; 0), A_2(\frac{1}{4}; 0), B_1(0; -\frac{1}{5}), B_2(0; \frac{1}{5}), F_1(-\frac{3}{20}; 0), F_2(\frac{3}{20}; 0)$.



Bài 3. Tìm độ dài trục lớn, trục nhỏ và tiêu cự của các elip có phương trình sau:

a) $16x^2 + 64y^2 = 100$

b) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 2$.

Lời giải.

a) Ta có $16x^2 + 64y^2 = 100 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{100}{16}} + \frac{y^2}{\frac{100}{64}} = 1$. Vậy $2a = 5, 2b = \frac{5}{2}, 2c = \frac{5\sqrt{3}}{2}$.

b) Ta có $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$. Vậy $2a = 8, 2b = 4, 2c = 4\sqrt{3}$.



Bài 4. Xác định độ dài các trục của elip (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $(a > b > 0)$ biết rằng (E) có độ dài tiêu cự bằng 6 và đi qua điểm $A(5; 0)$.

Lời giải.

Ta có $2c = 6 \Rightarrow c = 3$, $a = 5 \Rightarrow b = 4$. Vậy $2a = 10$, $2b = 8$. □

Bài 5. Xác định tọa độ các đỉnh của elip (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $(a > b > 0)$ biết rằng (E) đi qua hai điểm $M(0; -2)$ và $N(2; \sqrt{3})$.

Lời giải.

Ta có $b = 2$. (E) đi qua điểm $N(2; \sqrt{3})$ nên $a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$.

Vậy $A_1(-4; 0)$, $A_2(4; 0)$, $B_1(0; -2)$, $B_2(0; 2)$. □

Bài 6. Cho elip (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Biết (E) đi qua điểm $M\left(2\sqrt{3}; \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$ và có tiêu cự bằng $\frac{3}{4}$ độ dài trục lớn. Tính độ dài trục nhỏ của (E) .

Lời giải.

Ta có $c = \frac{3}{4}a$, $b^2 = a^2 - c^2 = \frac{7}{16}a^2$. Vì $M \in (E)$ nên $b^2 = 7$. Suy ra $2b = 2\sqrt{7}$. □

Bài 7. Tìm tọa độ các đỉnh của elip (E) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, biết rằng (E) đi qua điểm $M(2; 1)$ và các đỉnh trên trục nhỏ nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông.

Lời giải.

Gọi B là đỉnh trên trục nhỏ, F_1, F_2 là hai tiêu điểm.

Khi đó tam giác F_1BF_2 vuông cân nên $b = c$. Do đó $a^2 = b^2 + c^2 = 2b^2$.

Mặt khác $M \in (E)$ nên $\frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$. Từ đó suy ra $b^2 = 3$, $a^2 = 6$.

Vậy $A_1(-\sqrt{6}, 0)$, $A_2(\sqrt{6}, 0)$, $B_1(0; -\sqrt{3})$, $B_2(0; \sqrt{3})$. □

Bài 8. Cho elip (E) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Xác định tọa độ các tiêu điểm của (E) biết rằng (E) đi qua điểm $M(\sqrt{5}; 1)$ và khoảng cách từ một đỉnh nằm trên trục lớn đến một đỉnh nằm trên trục nhỏ bằng tiêu cự.

Lời giải.

Gọi $A(a; 0)$, $B(0; b)$ là hai đỉnh. Khi đó $AB = 2c$ suy ra $a^2 + b^2 = 4c^2$.

Mà $c^2 = a^2 - b^2$ nên $3a^2 = 5b^2$.

Vì $M \in (E)$ suy ra $b^2 = 4$, $a^2 = \frac{20}{3} \Rightarrow c = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Vậy $F_1\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}; 0\right)$, $F_2\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}; 0\right)$. □

Dạng 2. Viết phương trình đường Elip

Viết phương trình elip là quá trình tìm các đặc trưng của elip, đó là độ dài trục lớn ($2a$), độ dài trục nhỏ ($2b$).

Khi làm dạng bài này, đầu tiên cần giả sử phương trình elip có dạng $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Sau đó từ những giả thiết bài toán, giải tìm a, b và viết phương trình.

* Khi làm bài cần chú ý các tính chất sau của elip:

a) Elip nhận hai trục Ox, Oy làm trục đối xứng.

b) Tâm sai của elip $e = \frac{c}{a}$.

c) Bán kính qua tiêu của điểm $M(x; y) \in (E)$: $MF_1 = a + ex$; $MF_2 = a - ex$.

d) Đường chuẩn của elip:

Đường thẳng $d_1 : x + \frac{a}{e} = 0$ được gọi là đường chuẩn của elip, ứng với tiêu điểm $F_1(-c; 0)$.

Đường thẳng $d_2 : x - \frac{a}{e} = 0$ được gọi là đường chuẩn của elip, ứng với tiêu điểm $F_2(c; 0)$.

BÀI TẬP DẠNG 2

Ví dụ 1. Lập phương trình chính tắc của elip (E) mà độ dài trục lớn bằng 6, độ dài trục nhỏ bằng 4.

Lời giải.

Giả sử phương trình elip có dạng $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Độ dài trục lớn bằng 6 $\Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$.

Độ dài trục nhỏ bằng 4 $\Rightarrow 2b = 4 \Rightarrow b = 2$.

Vậy phương trình elip là $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. □

Ví dụ 2. Lập phương trình chính tắc của elip (E) có độ dài trục lớn bằng 10, tiêu cự có độ dài bằng 6.

Lời giải.

Giả sử phương trình elip có dạng $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Độ dài trục lớn bằng 10 $\Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5$.

Độ dài tiêu cự bằng 6 $\Rightarrow 2c = 6 \Rightarrow c = 3$.

Ta có $b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b = 4$.

Vậy phương trình elip có dạng $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. □

Ví dụ 3. Viết phương trình chính tắc của elip đi qua hai điểm $M(1; 0), N(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1)$.

Lời giải.

Giả sử phương trình elip có dạng $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Điểm $M \in (E) \Rightarrow \frac{1}{a^2} = 1 \Rightarrow a = 1$.

Điểm $N \in (E) \Rightarrow \frac{3}{4} + \frac{1}{b^2} = 1 \Rightarrow b = 2$.

Vậy phương trình chính tắc của elip có dạng $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Lập phương trình chính tắc của elip biết elip đi qua điểm $M(8; 12)$ và có bán kính qua tiêu điểm bên phải của M bằng 20.

Lời giải.

Giả sử phương trình elip có dạng $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$M(8; 12) \in (E) \Rightarrow \frac{64}{a^2} + \frac{144}{b^2} = 1.$$

Bán kính qua tiêu điểm bên phải: $MF_2 = 20 \Rightarrow a - ex = 20 \Rightarrow a - \frac{8c}{a} = 20 \Rightarrow c = \frac{a^2 - 20a}{8}$.

Lại có $b^2 = a^2 - c^2$, thay vào ta được phương trình ẩn a sau khi quy đồng và khử mẫu có dạng: $a^4 - 40a^3 + 272a^2 + 2560a - 12288 = 0 \Leftrightarrow (a - 4)(a - 16)(a^2 - 20a - 192) = 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a = 16 \\ a = 10 - 2\sqrt{73} \\ a = 10 + 2\sqrt{73} \end{cases}$$

Chú ý là $c > 0 \Rightarrow a = 10 + 2\sqrt{73} \Rightarrow c = 24 \Rightarrow b^2 = 40\sqrt{73} - 184$.

Vậy phương trình elip cần tìm là: $\frac{x^2}{(10 + 2\sqrt{73})^2} + \frac{y^2}{40\sqrt{73} - 184} = 1$. □

Bài 2. Viết phương trình chính tắc của elip đi qua $M\left(\frac{8}{\sqrt{5}}; \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$ và $\widehat{F_1MF_2} = 90^\circ$.

Lời giải.

Giả sử phương trình elip có dạng $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$M \in (E) \Rightarrow \frac{64}{5a^2} + \frac{16}{5b^2} = 1 \quad (1).$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{F_1M} = \left(\frac{8}{\sqrt{5}} + c; \frac{4}{\sqrt{5}}\right); \overrightarrow{F_2M} = \left(\frac{8}{\sqrt{5}} - c; \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\overrightarrow{F_1M} \cdot \overrightarrow{F_2M} = 0 \Rightarrow c = 4.$$

Lại có $b^2 = a^2 - c^2$. Thay vào (1), ta có phương trình ẩn a : $\frac{64}{5a^2} + \frac{16}{5(a^2 - 16)} = 1$.

$$\text{Giải phương trình trên ta có } \begin{cases} a^2 = \frac{80 + 16\sqrt{5}}{5} \\ a^2 = \frac{80 - 16\sqrt{5}}{5} \end{cases} \text{ Với } a > c \Rightarrow a^2 = \frac{80 + 16\sqrt{5}}{5}$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = \frac{16\sqrt{5}}{5}.$$

Vậy phương trình elip cần tìm là: $\frac{x^2}{\frac{80 + 16\sqrt{5}}{5}} + \frac{y^2}{\frac{16\sqrt{5}}{5}} = 1$. □

Bài 3. Viết phương trình chính tắc của đường elip biết hình chữ nhật cơ sở của (E) có một cạnh nằm trên đường thẳng $y - 2 = 0$ và có độ dài đường chéo bằng 6.

Lời giải.

Giả sử phương trình elip có dạng $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Một cạnh của hình chữ nhật cơ sở nằm trên đường thẳng $y = 2$ suy ra $b = 2$.

Đường chéo của hình chữ nhật cơ sở có độ dài bằng 6 suy ra $4a^2 = 36 - 16 = 20 \Rightarrow a^2 = 5$.

Vậy phương trình elip cần tìm là $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$. □

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 2BD$ và đường tròn tiếp xúc với các cạnh của hình thoi có phương trình $x^2 + y^2 = 4$. Viết phương trình chính tắc của elip đi qua các đỉnh A, B, C, D của hình thoi. Biết điểm A nằm trên trục Ox .

Lời giải.

Đường tròn nội tiếp hình thoi $ABCD$ có tâm trùng với giao điểm của hai đường chéo AC, BD của hình thoi.

Do $A \in Ox \Rightarrow C \in Ox, B, D \in Oy$. Nên A, B, C, D chính là bốn đỉnh của (E) .

Giả sử phương trình elip có dạng $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

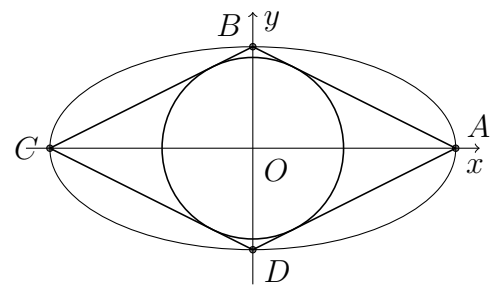
Từ việc bốn đỉnh của hình thoi là bốn đỉnh của hình thoi và giả thiết $AC = 2BD$ suy ra $a = 2b$.

Xét tam giác vuông OAD trong hệ mặt phẳng Oxy với AD là tiếp tuyến của đường tròn nội tiếp hình thoi $ABCD$, đường cao xuất phát từ đỉnh O của tam giác này có độ dài là h bằng bán kính đường tròn nội tiếp hình thoi $ABCD$.

Ta có $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OD^2}$, với $h = 2, OA = a = 2b = 2OD$.

Từ đó ta có $a^2 = 20, b^2 = 5$.

Vậy phương trình elip cần tìm là $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$. □



Bài 5. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho điểm $M(1; 2)$ và đường tròn $(C) : x^2 + y^2 = 21$. Viết phương trình chính tắc của elip (E) biết hình chữ nhật cơ sở của (E) nội tiếp đường tròn (C) và điểm M nhìn hai tiêu điểm của (E) dưới một góc 60° .

Lời giải.

Giả sử phương trình elip có dạng $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Vì đường tròn (C) có tâm $O(0; 0)$ trùng với tâm của hình chữ nhật cơ sở và tâm của elip nên ta có $2\sqrt{a^2 + b^2} = 2R$ suy ra $a^2 + b^2 = 21$.

Ta có hai tiêu điểm $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$, lại có $\widehat{F_1MF_2} = 60^\circ$

$$\Rightarrow (F_1F_2)^2 = (MF_1)^2 + (MF_2)^2 - 2MF_1.MF_2.\cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow 4c^2 = (2 + c)^2 + 1 + (2 - c)^2 + 1 - \sqrt{1 + (2 + c)^2}.\sqrt{1 + (2 - c)^2}$$

$$\Rightarrow 3c^4 - 34c^2 + 75 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c^2 = 3 \\ c^2 = \frac{25}{3} \end{cases}$$

Với $c^2 = 3 \Rightarrow a^2 = 12, b^2 = 9 \Rightarrow (E) : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Với $c^2 = \frac{25}{3} \Rightarrow a^2 = \frac{44}{3}, b^2 = \frac{19}{3} \Rightarrow (E) : \frac{x^2}{\frac{44}{3}} + \frac{y^2}{\frac{19}{3}} = 1.$ □

Bài 6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 = 9$, viết phương trình chính tắc của cho elip (E) có tâm sai $e = \frac{1}{3}$. Biết (E) cắt (C) tại 4 điểm phân biệt A, B, C, D sao cho AB song song với Ox và $AB = 3BC$.

Lời giải.

Giả sử phương trình elip có dạng $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Tâm sai của (E) bằng $\frac{1}{3}$ suy ra $\frac{c}{a} = \frac{1}{3} \Rightarrow 8a^2 - 9b^2 = 0$ (1)

Toạ độ của A, B, C, D là nghiệm của hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9(2) \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(3) \end{cases}$

Do (E) và (C) cùng nhận Ox, Oy làm trục đối xứng nên ta có $ABCD$ là hình chữ nhật.

Giả sử $A(x; y)$, vì $AB \parallel Ox$ nên $B(-x; y); C(-x; -y); D(x; -y).$

Ta có $AB = 3BC \Leftrightarrow x^2 = 9y^2$ (4)

Từ (2) thay vào (4) ta có: $x^2 = \frac{81}{10}, y^2 = \frac{9}{10}$, thay vào (3), ta được $\frac{81}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1$ (5)

Từ (1) và (5) ta có hệ sau: $\begin{cases} 8a^2 - 9b^2 = 0 \\ \frac{81}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{729}{80} \\ b^2 = \frac{81}{10} \end{cases}$

Vậy phương trình elip (E) cần tìm là $\frac{x^2}{\frac{729}{80}} + \frac{y^2}{\frac{81}{10}} = 1.$ □

Dạng 3. Tìm điểm thuộc elip thỏa điều kiện cho trước

Từ phương trình chính tắc của elip $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ suy ra rằng nếu điểm $M(x_0; y_0) \in (E)$ thì toạ độ của M phải thỏa phương trình trên, tức $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$. Kết hợp với các điều kiện khác để tìm điểm M .

BÀI TẬP DẠNG 3

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng Oxy , cho elip $(E) : 9x^2 + 16y^2 = 144$. Tìm tất cả điểm M thuộc elip sao cho góc $\widehat{F_1MF_2}$ bằng 60° .

Lời giải.

Phương trình chính tắc của elip $(E) : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Khi đó: $a = 4, b = 3, c = \sqrt{7}$.

Gọi $M(x; y)$ là điểm cần tìm. Ta có:

$$MF_1 = 4 + \frac{\sqrt{7}}{4}x; \quad MF_2 = 4 - \frac{\sqrt{7}}{4}x; \quad F_1F_2 = 2\sqrt{7}$$

Áp dụng định lí cosin trong tam giác F_1MF_2 , ta được:

$$F_1F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2 - 2MF_1.MF_2 \cdot \cos \widehat{F_1MF_2}$$

$$28 = 2 \left(16 + \frac{7}{16}x^2 \right) - \left(4 + \frac{\sqrt{7}}{4}x \right) \left(4 - \frac{\sqrt{7}}{4}x \right) \Leftrightarrow x^2 = \frac{64}{7}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{8}{\sqrt{7}} \text{ hoặc } x = -\frac{8}{\sqrt{7}}.$$

Vậy có 4 điểm thỏa đề bài là $\left(\frac{8}{\sqrt{7}}; \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \right); \left(-\frac{8}{\sqrt{7}}; \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \right); \left(\frac{8}{\sqrt{7}}; -\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \right); \left(-\frac{8}{\sqrt{7}}; -\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \right)$. $\square$

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng Oxy , cho elip $(E) : \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$. Tìm tất cả các điểm thuộc elip có tọa độ là số nguyên.

Lời giải.

Gọi $M(x; y)$ là điểm cần tìm.

Khi đó $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1 \Rightarrow |x| \leq 2\sqrt{2}$ nên $|x|$ chỉ có thể nhận các giá trị 0, 1 hoặc 2.

Với $|x| = 0$ ta có $|y| = \sqrt{2}$ (loại).

Với $|x| = 1$ ta có $|y| = \frac{\sqrt{7}}{2}$ (loại).

Với $|x| = 2$ ta có $|y| = 1$.

Vậy tất cả các điểm thuộc (E) có tọa độ nguyên là $(2; 1), (2; -1), (-2; 1), (-2; -1)$. $\square$

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng Oxy , cho elip $(E) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Gọi M là điểm di động trên elip. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của M lên các trục tọa độ Ox và Oy . Tìm tất cả điểm M để tứ giác $OHMK$ có diện tích lớn nhất.

Lời giải.

Gọi $M(x; y)$ là điểm cần tìm. Dễ thấy tứ giác $OHKM$ là hình chữ nhật. Khi đó,

$$S_{OHKM} = OH \cdot OK = |x| \cdot |y| = |xy|.$$

Mặt khác, ta có

$$1 = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{9} \cdot \frac{y^2}{4}} = \frac{1}{3}|xy| \Rightarrow |xy| \leq 3$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x^2}{9} = \frac{y^2}{4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$ và $y = \pm\sqrt{2}$.

Vậy, tứ giác $OHMK$ có diện tích lớn nhất khi M nằm tại một trong các điểm

$$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2} \right); \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\sqrt{2} \right); \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2} \right); \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\sqrt{2} \right).$$

$\square$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong mặt phẳng Oxy , cho elip $(E) : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$. Gọi F_1, F_2 lần lượt là tiêu điểm bên trái và bên phải của elip. Tìm tất cả điểm M thuộc elip sao cho:

- a) $MF_1 = 3$.
b) $MF_1 = 3MF_2$.

Lời giải.

Ta có: $a = 4; b = \sqrt{7}; c = 3$. Gọi $M(x; y)$ là điểm cần tìm. Khi đó:

$$MF_1 = 4 + \frac{3}{4}x; \quad MF_2 = 4 - \frac{3}{4}x.$$

- a) Theo đề bài, ta có

$$MF_1 = 3 \Leftrightarrow 4 + \frac{3}{4}x = 3 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}.$$

Thay vào phương trình của elip, ta được $y = \pm \frac{2\sqrt{14}}{3}$.

Vậy, điểm cần tìm là $\left(-\frac{4}{3}; \frac{2\sqrt{14}}{3}\right); \left(-\frac{4}{3}; -\frac{2\sqrt{14}}{3}\right)$.

- b) Theo đề bài, ta có

$$MF_1 = 3MF_2 \Leftrightarrow 4 + \frac{3}{4}x = 3\left(4 - \frac{3}{4}x\right) \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$$

Thay vào phương trình của elip, ta được $y = \pm \frac{\sqrt{35}}{3}$.

Vậy điểm cần tìm là $\left(\frac{8}{3}; \frac{\sqrt{35}}{3}\right); \left(\frac{8}{3}; -\frac{\sqrt{35}}{3}\right)$.

□

Bài 2. Trong mặt phẳng Oxy , cho elip $(E): x^2 + 5y^2 - 20 = 0$, có F_1, F_2 lần lượt là tiêu điểm bên trái và bên phải. Tìm tất cả điểm M thuộc elip sao cho:

- a) $\widehat{F_1MF_2} = 90^\circ$.
b) $\widehat{F_1MF_2} = 120^\circ$.

Lời giải.

Phương trình chính tắc $(E): \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Ta có $a = 2\sqrt{5}; b = 2; c = 4; F_1F_2 = 2c = 8$. Gọi $M(x; y)$ là điểm cần tìm. Khi đó,

$$MF_1 = 2\sqrt{5} + \frac{2}{\sqrt{5}}x; \quad MF_2 = 2\sqrt{5} - \frac{2}{\sqrt{5}}x$$

- a) Theo đề bài, ta có

$$F_1F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2 \Leftrightarrow 64 = \left(2\sqrt{5} + \frac{2}{\sqrt{5}}x\right)^2 + \left(2\sqrt{5} - \frac{2}{\sqrt{5}}x\right)^2 \Leftrightarrow x^2 = 15 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{15}.$$

Vậy điểm cần tìm là $(\sqrt{15}; 1); (\sqrt{15}; -1); (-\sqrt{15}; 1); (-\sqrt{15}; -1)$.

- b) Áp dụng định lí cosin trong tam giác MF_1F_2 ta được

$$\begin{aligned} F_1F_2^2 &= MF_1^2 + MF_2^2 - 2MF_1 \cdot MF_2 \cdot \cos F_1MF_2 \\ \Leftrightarrow 64 &= \left(2\sqrt{5} + \frac{2}{\sqrt{5}}x\right)^2 + \left(2\sqrt{5} - \frac{2}{\sqrt{5}}x\right)^2 + \left(2\sqrt{5} + \frac{2}{\sqrt{5}}x\right) \cdot \left(2\sqrt{5} - \frac{2}{\sqrt{5}}x\right) \\ \Leftrightarrow x^2 &= 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Vậy điểm cần tìm là $(\sqrt{5}; \sqrt{3}); (\sqrt{5}; -\sqrt{3}); (-\sqrt{5}; \sqrt{3}); (-\sqrt{5}; -\sqrt{3})$.

□

Bài 3. Trong mặt phẳng Oxy , cho elip $(E) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ và điểm $A(-3; 0)$. Tìm tất cả các điểm B, C thuộc elip sao cho tam giác ABC nhận điểm $I(-1; 0)$ làm tâm đường tròn ngoại tiếp.

Lời giải.

Gọi (C) là đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$, có tâm là $I(-1; 0)$ và bán kính $IA = 2$. Khi đó, phương trình đường tròn (C) là $(x+1)^2 + y^2 = 4$. Do B, C thuộc elip nên tọa độ của B, C là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 4 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \text{ hoặc } x = -\frac{3}{5} \\ y^2 = 4 - (x+1)^2 \end{cases}$$

Với $x = -3$ thì $y = 0$. Suy ra A, B, C trùng nhau (loại).

Với $x = -\frac{3}{5}$ thì $y = \pm \frac{4\sqrt{6}}{5}$. Vậy, tất cả các điểm thỏa bài toán là

$$B\left(-\frac{3}{5}; \frac{4\sqrt{6}}{5}\right); C\left(-\frac{3}{5}; -\frac{4\sqrt{6}}{5}\right) \text{ hoặc } B\left(-\frac{3}{5}; -\frac{4\sqrt{6}}{5}\right); C\left(-\frac{3}{5}; \frac{4\sqrt{6}}{5}\right).$$

□

Bài 4. Cho elip $(E) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$. Tìm tọa độ các điểm A và B thuộc (E) có hoành độ dương sao cho tam giác OAB cân tại O và có diện tích lớn nhất.

Lời giải.

Gọi $A(x; y)$ thì $B(x; -y)$ với $x > 0$. Ta có $AB = 2|y| = \sqrt{4-x^2}$.

Gọi H là trung điểm của AB thì $OH = x$ suy ra

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}OH \cdot AB = \frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2(4-x^2)} \leq 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = \sqrt{2}$.

Vậy ta có $A\left(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right), B\left(\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ hoặc $A\left(\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), B\left(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

□

Bài 5. Cho elip $(E) : \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ và điểm $M(3; 2)$. Gọi A và B là hai điểm nằm trên elip và đối xứng nhau qua M . Viết phương trình đường thẳng AB .

Lời giải.

Gọi $A(x; y) \in (E)$, ta có $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$.

Từ M là trung điểm của AB suy ra $B(6-x; 4-y)$. (1)

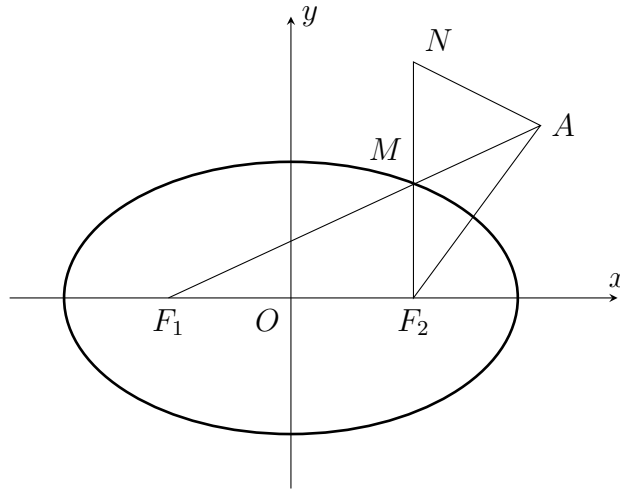
Ta cũng có $B \in (E)$ nên suy ra $\frac{(6-x)^2}{100} + \frac{(4-y)^2}{36} = 1$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $27x + 50y - 131 = 0$. (*)

Do tọa độ của A và B đều thỏa (*) nên (*) chính là phương trình đường thẳng AB cần tìm. □

Bài 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(2; \sqrt{3})$ và elip $(E) : \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$. Gọi F_1, F_2 là các tiêu điểm của (E) (F_1 có hoành độ âm); M là giao điểm của đường thẳng AF_1 với (E) (M có tung độ dương); N là điểm đối xứng của F_2 qua M . Tìm tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ANF_2 .

Lời giải.



Ta có $F_1(-1; 0), F_2(1; 0)$.

Đường thẳng AF_1 có phương trình $x - \sqrt{3}y + 1 = 0$.

M là giao điểm có tung độ dương của AF_1 với (E) suy ra $M\left(1; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Ta tính được $MA = MF_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Do N đối xứng với F_2 qua M nên $MF_2 = MN$, suy ra $MA = MF_2 = MN$.

Do đó đường tròn ngoại tiếp tam giác ANF_2 là đường tròn tâm M , bán kính $MA = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. $\square$

Bài 7. Cho elip $(E) : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ và hai điểm $A(-5; 3), B(5; -3)$. Tìm trên (E) điểm C có hoành độ và tung độ dương sao cho diện tích tam giác ABC lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất đó.

Lời giải.

Ta có $AB = 2\sqrt{34}$ và phương trình đường thẳng $AB : 3x + 5y = 0$.

Gọi $C(x; y) \in (E)$ ($x > 0, y > 0$), ta có $d(C, AB) = \frac{|3x + 5y|}{\sqrt{34}}$. Khi đó diện tích tam giác ABC là

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot d(C, AB) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{34} \cdot \frac{|3x + 5y|}{\sqrt{34}} = |3x + 5y|.$$

$$\text{Mà } |3x + 5y| = 15 \left| \frac{x}{5} + \frac{y}{3} \right| \leq 15 \sqrt{2 \left(\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} \right)} = 15\sqrt{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{x}{5} = \frac{y}{3}$. Thay vào phương trình của (E) và chú ý $x > 0, y > 0$ ta tìm được $x = \frac{5\sqrt{2}}{2}, y = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Vậy $M\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$. $\square$

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Bài 8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , viết phương trình chính tắc của elip (E) biết khi M thay đổi trên (E) thì độ dài nhỏ nhất của OM bằng 4 và độ dài lớn nhất của MF_1 bằng 8 với F_1 là tiêu điểm có hoành độ âm.

Lời giải.

Giả sử phương trình elip có dạng $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$M(x; y) \in (E) \Rightarrow MF_1 = a + \frac{cx}{a}$, mà $-a \leq x \leq a$ nên MF_1 lớn nhất bằng $a + c$ khi $x = a, y = 0$.

Vì $a > b$ nên $\frac{x^2}{a^2} \leq \frac{x^2}{b^2} \Rightarrow 1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{x^2 + y^2}{b^2} = \frac{OM^2}{b^2} \Rightarrow OM \geq b$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của OM bằng b khi $x = 0, y = \pm b$.

Kết hợp với giả thiết ta có: $\begin{cases} b = 4 \\ a + c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = 5 \end{cases}$.

Vậy phương trình của (E) : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. □

Bài 9. Trong mặt phẳng Oxy , lập phương trình chính tắc của elip (E) , biết có một đỉnh và hai tiêu điểm của (E) tạo thành một tam giác đều và chu vi hình chữ nhật cơ sở của (E) là $12(2 + \sqrt{3})$.

Lời giải.

Giả sử phương trình elip có dạng $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Chu vi của hình chữ nhật cơ sở là $2(2a + 2b)$

Suy ra $2(2a + 2b) = 12(2 + \sqrt{3}) \Leftrightarrow a + b = 3(2 + \sqrt{3})$ (1)

Do các đỉnh $A_1(-a; 0), A_2(a; 0)$ và $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$ cùng nằm trên Ox nên theo giả thiết F_1, F_2 cùng với đỉnh $B_2(0, b)$ trên Oy tạo thành một tam giác đều $\Leftrightarrow B_2F_2 = F_1F_2 = B_2F_1$ (*)

Lại có F_1F_2 đối xứng nhau qua Oy nên tam giác $B_2F_1F_2$ luôn là tam giác cân tại B_2 .

Do đó: (*) $\Leftrightarrow B_2F_2 = F_1F_2 \Leftrightarrow \sqrt{c^2 + b^2} = 2c \Leftrightarrow b^2 = 3c^2$.

Lại có: $a^2 - c^2 = b^2 \Rightarrow 3a^2 = 4b^2$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $a = 6$ và $b = 3\sqrt{3}$.

Vậy phương trình elip (E) là $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$ □

Bài 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Đường thẳng $\Delta: 2x - 3y = 0$ cắt (E) tại hai điểm B, C . Tìm tọa độ điểm A trên (E) sao cho tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

Lời giải.

Do $\Delta \cap (E) = \{B; C\}$ nên B, C cố định hay độ dài BC không đổi.

Do đó diện tích $\triangle ABC$ lớn nhất khi khoảng cách $h = d(A, \Delta)$ lớn nhất.

Phương trình tham số của (E) có dạng: $\begin{cases} x = 3 \sin t \\ y = 2 \cos t \end{cases}$

Mà $A \in (E) \Rightarrow A(3 \sin t; 2 \cos t)$, khi đó

$$h = (A, \Delta) = \frac{|6 \sin t - 6 \cos t|}{\sqrt{13}} = \frac{6|\sin t - \cos t|}{\sqrt{13}} = \frac{6\sqrt{2} \left| \sin \left(t - \frac{\pi}{4} \right) \right|}{\sqrt{13}} \leq \frac{6\sqrt{26}}{13}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi: } \left| \sin \left(t - \frac{\pi}{4} \right) \right| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \left(t - \frac{\pi}{4} \right) = 1 \\ \sin \left(t - \frac{\pi}{4} \right) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ t = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$+ \text{ Với } t = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \Rightarrow A \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2} \right)$$

$$+ \text{ Với } t = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \Rightarrow A \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2} \right)$$

□

Bài 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ và $P(1; -1)$. Gọi d là đường thẳng đi qua P cắt (E) tại hai điểm M, N . Tìm tọa độ hai điểm M, N sao cho $PM \cdot PN$ lớn

nhất.

Lời giải.

Ta có $P(1; -1)$ thuộc miền trong của (E) nên d luôn cắt (E) tại M, N .

Gọi phương trình đường thẳng d có dạng $\begin{cases} x = 1 + mt \\ y = -1 + nt \end{cases}$ với $t \in \mathbb{R}, m^2 + n^2 \neq 0$. Gọi $M(1 + mt_1; -1 + nt_1); N(1 + mt_2; -1 + nt_2)$. Trong đó t_1, t_2 là nghiệm của phương trình

$$\frac{(1 + mt)^2}{8} + \frac{(-1 + nt)^2}{4} = 1 \Leftrightarrow (m^2 + 2n^2)t^2 + 2(m - 2n)t - 5 = 0.$$

Theo hệ thức Vi-et ta có $t_1.t_2 = \frac{-5}{m^2 + 2n^2}$

Khi đó $PM.PN = \sqrt{(mt_1)^2 + (nt_2)^2} \cdot \sqrt{(mt_2)^2 + (nt_2)^2} = (m^2 + n^2)|t_1.t_2| = \frac{5(m^2 + n^2)}{m^2 + 2n^2} = \frac{5}{2 - \frac{m^2}{M^2 + n^2}}$.

Mặt khác $0 \leq \frac{m^2}{m^2 + n^2} \leq 1$, do đó $PM.PN$ lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{m^2}{m^2 + n^2} \Leftrightarrow n = 0$.

Khi đó phương trình của đường thẳng d có dạng $y = -1$, suy ra tọa độ của các điểm M, N là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 6 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{6} \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(\sqrt{6}; -1) \\ N(-\sqrt{6}; -1) \\ M(-\sqrt{6}; -1) \\ N(\sqrt{6}; -1) \end{cases}.$$

□

Bài 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip $(E) : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$. Viết phương trình đường thẳng d cắt (E) tại hai điểm phân biệt có tọa độ là các số nguyên.

Lời giải.

Gọi $M(x_0; y_0) \in (E) \Rightarrow \frac{x_0^2}{2} + \frac{y_0^2}{8} = 1$
 $\Rightarrow x_0^2 \leq 2 \Rightarrow x_0 \in \{-1; 0; 1\}$. (1)

Với $x_0 = \pm 1 \Rightarrow y_0 = \pm 2$ (thỏa mãn).

Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = \pm 2\sqrt{2}$ (loại).

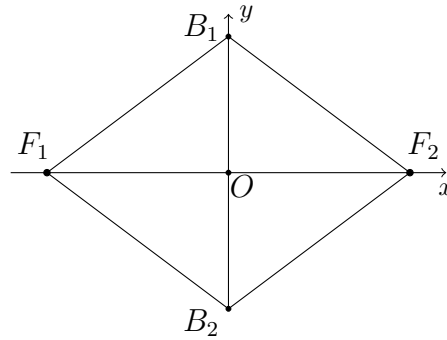
Vậy có bốn điểm có tọa độ nguyên trên (E) là $M_1(1; 2); M_2(1; -2); M_3(-1; 2); M_4(-1; -2)$.

Do đó ta sẽ lập được 6 phương trình đường thẳng d thỏa mãn đề bài là:

$y = 2; 2x + y = 0; -2x + y = 0; x = -1; x = 1; y = -2$. □

Bài 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , viết phương trình chính tắc của (E) có tâm sai bằng $\frac{4}{5}$. Biết rằng diện tích của tứ giác tạo bởi các tiêu điểm và các đỉnh trên trục bé của (E) là 24.

Lời giải.



Gọi phương trình chính tắc của elip (E) có dạng

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ với } a > b > 0 \text{ và } a^2 = b^2 + c^2.$$

Ta có tâm sai $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow a = \frac{5}{4}c$.

Gọi $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$ là các tiêu điểm và $B_1(0; -b), B_2(0; b)$ là các đỉnh trên trục bé.

Suy ra $F_1B_2F_2B_1$ là hình thoi, khi đó $S_{F_1B_2F_2B_1} = \frac{1}{2}F_1F_2 \cdot B_1B_2 = \frac{1}{2}2c \cdot 2b = 2bc = 24 \Leftrightarrow b = \frac{12}{c}$.

Khi đó

$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{4}c\right)^2 = \left(\frac{12}{c}\right)^2 + c^2 \Leftrightarrow 25c^4 = 2304 + 16c^4 \Leftrightarrow c^4 = 256 \Leftrightarrow c = 4 (\text{do } c > 0).$$

Suy ra $a = 5; b = 3$. Vậy phương trình chính tắc của elip (E) cần tìm là: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ □

Bài 14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(4; 3), B(6; 4)$. Xác định điểm M thuộc elip $(E) : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$ sao cho diện tích tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

Ta có $AB = \sqrt{5}$ và phương trình đường thẳng $AB : 2x + y - 11 = 0$.

Gọi $M(x_0, y_0) \in (E)$. Khi đó $\frac{x_0^2}{2} + \frac{y_0^2}{8} = 1$. (1)

Từ (1) suy ra $|x_0| \leq \sqrt{2}; y_0 \leq 2\sqrt{2} \Rightarrow 2x_0 + y_0 < 11$.

$$\text{Ta lại có } d(M, AB) = \frac{|2x_0 + y_0 - 11|}{\sqrt{5}} = \frac{11 - (2x_0 + y_0)}{\sqrt{5}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$(2x_0 + y_0)^2 \leq (8 + 8) \left(\frac{x_0^2}{2} + \frac{y_0^2}{8} \right) = 16 \Rightarrow -4 \leq 2x_0 + y_0 \leq 4$$

$$\text{Suy ra } d(M, AB) \geq \frac{7}{\sqrt{5}} \Rightarrow (d(M, AB))_{\min} = \frac{7}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Vậy } \min S_{MAB} = \frac{1}{2} \cdot (d(M, AB))_{\min} \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow M(1; 2). \quad \square$$

Bài 15. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $(E) : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ và điểm $M(2; 3)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua M , cắt (E) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho M là trung điểm của AB .

Lời giải.

Ta có M thuộc miền trong của (E) , do đó d luôn cắt (E) tại hai điểm phân biệt.

$$\text{Gọi phương trình đường thẳng } d \text{ có dạng: } \begin{cases} x = 2 + mt \\ y = 3 + nt \end{cases} \text{ với } t \in \mathbb{R}, m^2 + n^2 \neq 0.$$

Gọi $A(2 + mt_1; 3 + nt_1), B(2 + mt_2; 3 + nt_2)$. Khi đó t_1, t_2 là nghiệm của phương trình

$$\frac{(1 + mt)^2}{25} + \frac{(2 + nt)^2}{9} = 1 \Leftrightarrow (9m^2 + 25n^2)t^2 + 2(9m + 50n)t - 116 = 0$$

Theo hệ thức Vi-et ta có $t_1 + t_2 = -\frac{2(9m + 50n)}{9m^2 + 25n^2}$

Mặt khác ta lại có M là trung điểm của AB , do đó $\begin{cases} x_A + x_B = 2x_M \\ y_A + y_B = 2y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + (t_1 + t_2)m = 4 \\ 6 + (t_1 + t_2)n = 6 \end{cases}$

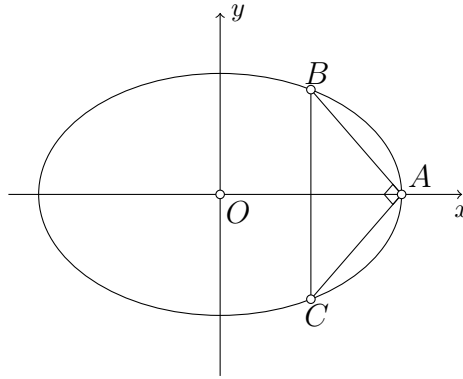
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m(t_1 + t_2) = 0 \\ n(t_1 + t_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t_1 + t_2 = 0 \quad (m^2 + n^2 \neq 0)$$

$$\Rightarrow -\frac{2(9m + 50n)}{9m^2 + 25n^2} = 0 \Leftrightarrow 9m + 50n = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{50}{9}n.$$

Chọn $m = 9 \Rightarrow n = -50$. Khi đó phương trình đường thẳng d là $\begin{cases} x = 2 + 9t \\ y = 3 - 50t \end{cases}$ □

Bài 16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(4; 0)$ và elip $(E) : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Tìm tọa độ các điểm B, C thuộc (E) sao cho tam giác ABC vuông cân tại A .

Lời giải.



Ta có B, C thuộc (E) và tam giác ABC vuông cân tại A . Mặt khác $A(4; 0) \in Ox$ và (E) nhận các trục Ox, Oy là trục đối xứng nên B, C đối xứng nhau qua trục Ox .

Do đó gọi $B(m; n), C(m; -n) \in (E)$ với $n \neq 0$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (m - 4; n) \\ \overrightarrow{AC} = (m - 4; -n) \end{cases}, \text{ khi đó } \begin{cases} \frac{m^2}{16} + \frac{n^2}{9} = 1 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m^2}{16} + \frac{n^2}{9} = 1 \\ (m - 4)^2 - n^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m^2}{16} + \frac{n^2}{9} = 1 \\ n^2 = (m - 4)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{m^2}{16} + \frac{(m - 4)^2}{9} = 1 \Leftrightarrow 25m^2 - 128m + 112 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = \frac{28}{25} \end{cases}.$$

Với $m = 4 \Rightarrow n = 0$

$$\text{Với } m = \frac{28}{25} \Rightarrow n = \pm \frac{72}{25}. \text{ Suy ra } \begin{cases} B\left(\frac{28}{25}; \frac{72}{25}\right) \\ C\left(\frac{28}{25}; -\frac{72}{25}\right) \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} B\left(\frac{28}{25}; -\frac{72}{25}\right) \\ C\left(\frac{28}{25}; \frac{72}{25}\right) \end{cases} \quad \square$$

Bài 17. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d : x + y - 4 = 0$ và elip $(E) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$. Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với d và cắt (E) tại hai điểm A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 2.

Lời giải.

Ta có $\Delta \perp d$ do đó phương trình đường thẳng Δ có dạng: $x - y + c = 0$.

Phương trình hoành độ giao điểm của Δ và (E) là:

$$2x^2 + 4(x + c)^2 = 8 \Leftrightarrow 6x^2 + 8cx + 4c^2 - 8 = 0 \quad (1)$$

Ta lại có Δ cắt (E) tại hai điểm phân biệt do đó (1) phải có hai nghiệm phân biệt, nghĩa là

$$\Delta' = 48 - 8c^2 > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{6} < c < \sqrt{6} \quad (2)$$

Ta có $A(x_1, x_1 + c)$, $B(x_2, x_2 + c)$ là các giao điểm của Δ với (E) , khi đó x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình (1).

$$\text{Do đó } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{4c}{3} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{2c^2 - 4}{3} \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác ta lại có } AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} = \sqrt{2(x_1 + x_2)^2 - 8x_1 \cdot x_2}$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{\frac{32c^2}{9} - \frac{16c^2 - 32}{9}} = \frac{4}{3}\sqrt{c^2 + 2}$$

$$\text{Ta lại có } d(O, \Delta) = \frac{|c|}{\sqrt{2}}$$

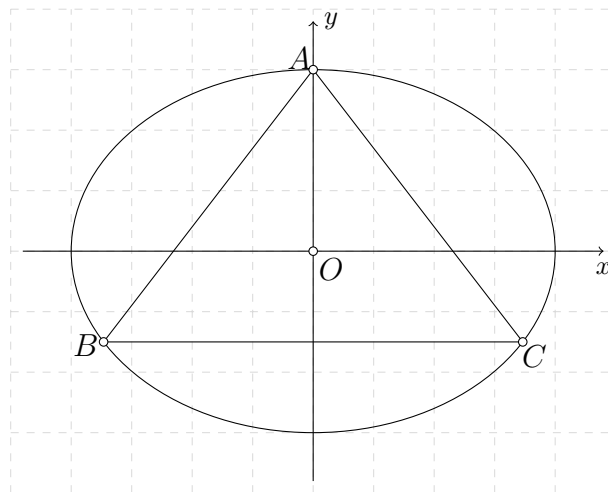
$$\text{Mà } S_{ABC} = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot AB \cdot d(O, \Delta) = 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \sqrt{c^2 + 2} \cdot \frac{|c|}{\sqrt{2}} = 2 \Leftrightarrow c^4 + 2c^2 - 18 = 0 \Leftrightarrow c = \pm \sqrt{-1 + \sqrt{19}} \text{ (thỏa mãn (2))}$$

Vậy đường thẳng Δ cần lập là $\Delta : x - y + \sqrt{-1 + \sqrt{19}} = 0$ hoặc $\Delta : x - y - \sqrt{-1 + \sqrt{19}} = 0$ $\square$

Bài 18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip $(E) : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ ngoại tiếp tam giác đều ABC . Tính diện tích tam giác ABC , biết (E) nhận $A(0; 3)$ làm đỉnh và trục tung làm trục đối xứng.

Lời giải.



Do $\triangle ABC$ đều và có $A(0; 3)$ nên B, C đối xứng với nhau qua trục tung, nên gọi $B(m, n) \Rightarrow C(-m, n)$ với $m > 0 \Rightarrow a = BC = 2m$ và chiều cao của tam giác là $h = 3 - n$.

$$\text{Khi đó } h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 3 - n = \sqrt{3}m \Leftrightarrow n = 3 - \sqrt{3}m \Rightarrow B(m; 3 - \sqrt{3}m)$$

$$\text{Mặt khác } B \in (E), \text{ do đó } \frac{m^2}{16} + \frac{(3 - \sqrt{3}m)^2}{9} = 1 \Leftrightarrow 9m^2 - 32\sqrt{3}m = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{32\sqrt{3}}{19} \text{ (thỏa mãn) và } m = 0 \text{ (loại).}$$

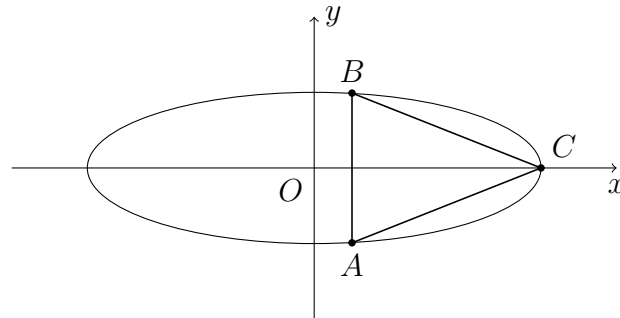
$$\text{Khi đó } n = \frac{-39}{19} \Rightarrow \begin{cases} h = \frac{96}{19} \\ BC = \frac{64\sqrt{3}}{19} \end{cases} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}h.BC = \frac{3072\sqrt{3}}{361} \quad \square$$

C CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $C(3; 0)$ và elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$. A, B là hai điểm thuộc (E) sao cho $\triangle ABC$ đều, biết tọa độ của $A\left(\frac{a}{2}; \frac{c\sqrt{3}}{2}\right)$ và A có tung độ âm. Khi đó $a + c$ bằng

A. 2. B. 0. C. -2. D. -4.

Lời giải.



Ta thấy $C(3; 0)$ là đỉnh của ê-lip nên để $\triangle ABC$ đều thì A và B phải đối xứng qua trục Ox . Suy ra $B\left(\frac{a}{2}; -\frac{c\sqrt{3}}{2}\right)$.

Ta có

$$A\left(\frac{a}{2}; \frac{c\sqrt{3}}{2}\right) \in (E) \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{9} + \frac{\left(\frac{c\sqrt{3}}{2}\right)^2}{1} = 1 \Leftrightarrow \frac{a^2}{36} + \frac{3c^2}{4} = 1. \quad (1)$$

$\triangle ABC$ đều nên $AB^2 = AC^2 \Leftrightarrow 3c^2 = \left(\frac{a}{2} - 3\right)^2 + \frac{3c^2}{4} \Leftrightarrow c^2 = \frac{4}{9} \left(\frac{a}{2} - 3\right)^2$, thay vào (1) ta được

$$\frac{a^2}{36} + \frac{1}{3} \left(\frac{a}{2} - 3\right)^2 = 1 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow c = -1 \text{ (vì } c < 0\text{)}.$$

Suy ra $a + c = 2$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho điểm $C(3; 0)$ và elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$. A và B là hai điểm thuộc (E) sao cho tam giác ABC đều. Biết tọa độ điểm $A\left(\frac{a}{2}; \frac{c\sqrt{3}}{2}\right)$ và A có tung độ âm. Khi đó $a + c$ bằng

A. 2. B. 0. C. -2. D. -4.

Lời giải.

Ta có C là một đỉnh của elip, thuộc trục Ox . Hơn nữa $CA = CB$ nên A và B là hai điểm đối xứng nhau qua Ox , do đó $B\left(\frac{a}{2}; -\frac{c\sqrt{3}}{2}\right)$. Từ $A \in (E)$ và $AB = AC$, ta có hệ

$$\begin{cases} \frac{a^2}{36} + \frac{3c^2}{4} = 1 \\ 3c^2 = \left(3 - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3c^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^2}{36} + \frac{1}{3} \left(3 - \frac{a}{2}\right)^2 = 1 & (1) \\ \frac{3c^2}{4} = \frac{1}{3} \left(3 - \frac{a}{2}\right)^2 & (2). \end{cases}$$

Từ (1) ta có $a^2 - 9a + 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = 6. \end{cases}$

- Với $a = 3$, từ (2) ta có $\frac{3c^2}{4} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow c = \pm 1$.
- Với $a = 6$, từ (2) ta có $\frac{3c^2}{4} = 0 \Leftrightarrow c = 0$.

Do A có tung độ âm nên $c = -1, a = 3$ thỏa mãn. Khi đó $a + c = 2$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 3. Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $M(x; y)$ thỏa mãn $\sqrt{(x + \sqrt{3})^2 + y^2} + \sqrt{(x - \sqrt{3})^2 + y^2} = 4$ và $OM = \frac{\sqrt{10}}{2}$. Khi đó, kết quả $|xy|$ là

- A. 1. B. 4. C. $\frac{\sqrt{10}}{4}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Ta thấy $OM = \frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow M \in (\mathcal{C}): x^2 + y^2 = \frac{5}{2}$. (1)

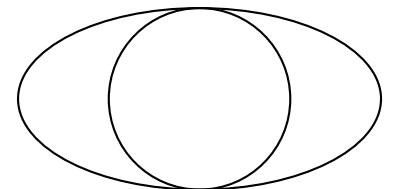
Ta thấy M thỏa mãn $\sqrt{(x + \sqrt{3})^2 + y^2} + \sqrt{(x - \sqrt{3})^2 + y^2} = 4 \Rightarrow M \in (E): \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. (2)

Từ (1) và (2) ta được $\begin{cases} x^2 = 2 \\ y^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow |xy| = 1$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 4.

Ông Hoàng có một mảnh vườn hình Elip có chiều dài trục lớn và trục nhỏ lần lượt là 60 m và 30 m. Ông chia mảnh vườn ra làm hai nửa bằng một đường tròn tiếp xúc trong với Elip để làm mục đích sử dụng khác nhau (xem hình vẽ). Nửa bên trong đường tròn ông trồng cây lâu năm, nửa bên ngoài đường tròn ông trồng hoa màu.



Tính tỉ số diện tích T giữa phần trồng cây lâu năm so với diện tích trồng hoa màu. Biết diện tích hình Elip được tính theo công thức $S = \pi ab$ với a, b lần lượt là nửa độ dài trục lớn và nửa độ dài trục bé. Biết độ rộng của đường Elip là không đáng kể.

- A. $T = \frac{1}{2}$. B. $T = \frac{3}{2}$. C. $T = 1$. D. $T = \frac{2}{3}$.

Lời giải.

Xét hệ trục tọa độ Oxy như **hình vẽ**.

Khi đó đường tròn có bán kính là $R = 15$ và elip có nửa độ dài trục lớn là $a = 30$, nửa độ dài trục bé là $b = 15$.

Diện tích đường tròn là $S_{(C)} = \pi R^2 = \pi \cdot 15^2 = 225\pi$.

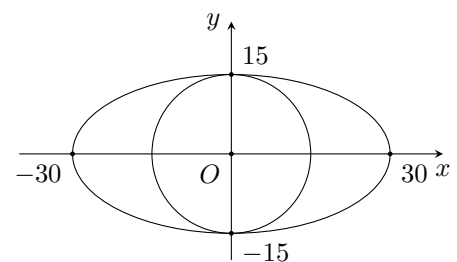
Diện tích Elip là $S_{(E)} = \pi ab = \pi 30 \cdot 15 = 450\pi$.

Diện tích nửa bên ngoài đường tròn trồng hoa màu là

$S = S_{(E)} - S_{(C)} = 450\pi - 225\pi = 225\pi$.

Vậy tỉ số diện tích $T = \frac{225\pi}{225\pi} = 1$.

Chọn đáp án **(C)** □



Câu 5. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , viết phương trình chính tắc của e-líp có trục lớn gấp đôi trục bé và có tiêu cự bằng $4\sqrt{3}$.

A. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$. B. $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{6} = 1$. C. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{24} = 1$. D. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Lời giải.

E-líp cần tìm có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$). Ta có

$$\begin{cases} 2c = 4\sqrt{3} \\ a = 2b \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2\sqrt{3} \\ b^2 = 4 \\ a^2 = 16. \end{cases}$$

Vậy e-líp cần tìm là $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 6. Phương trình chính tắc của elip có độ dài trục lớn bằng 8, độ dài trục bé bằng 6 là

A. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$. B. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$. C. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} = 1$. D. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Lời giải.

Độ dài trục lớn bằng $2a = 8$ nên $a = 4$.

Độ dài trục bé bằng $2b = 6$ nên $b = 3$.

Phương trình chính tắc của elip là $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 7. Cho elip (E) có độ dài trục lớn gấp hai lần độ dài trục nhỏ và tiêu cự bằng 6. Viết phương trình của (E) ?

A. $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1$. B. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$. C. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{12} = 1$. D. $\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{12} = 1$.

Lời giải.

Phương trình (E) có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ($0 < a < b$).

Từ giả thiết, ta có $a = 2b, 2c = 6 \Rightarrow c = 3$.

$$\text{Mà } a^2 - b^2 = c^2 \Rightarrow 4b^2 - b^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} b^2 = 3 \\ a^2 = 12. \end{cases}$$

Vậy phương trình (E) là $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 8. Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $C(2; 0)$ và elip $(E) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$. Tìm các điểm A, B thuộc (E) , biết rằng 2 điểm A, B đối xứng nhau qua trục hoành và tam giác ABC là tam giác đều. Khi đó diện tích S của tam giác ABC là kết quả nào dưới đây?

A. $S = \frac{4\sqrt{3}}{7}$. B. $S = \frac{16\sqrt{3}}{49}$. C. $S = \frac{48\sqrt{3}}{49}$. D. $S = \frac{16}{49}$.

Lời giải.

Gọi $A(x; y)$. Do A, B đối xứng nhau qua Ox nên $B(x; -y)$ và Ox là đường trung trực của BC .
Có $C(2; 0) \in Ox$. Suy ra $CA = CB = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$, có $AB = 2|y|$

$$\text{Có } A(x; y) \in (E) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{4}(4 - x^2). \quad (1)$$

$$\triangle ABC \text{ đều} \Leftrightarrow AB = AC = BC$$

$$\Leftrightarrow 4y^2 = (x - 2)^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow 3y^2 = (x - 2)^2 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta được} \quad \frac{3}{4}(4 - x^2) = (x - 2)^2$$

$$\Leftrightarrow 7x^2 - 16x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = 0 (\equiv C) \\ x = \frac{2}{7} \Rightarrow y = \pm \frac{4\sqrt{3}}{7} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } A\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right) \text{ và } B\left(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right) \text{ hay } A\left(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right), B\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right).$$

$$\text{Khi đó } AB = \frac{8\sqrt{3}}{7}, S_{ABC} = \frac{AB^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{48\sqrt{3}}{49}.$$

Chọn đáp án 

□

Câu 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $C(2; 0)$ và elip $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$. Các điểm A, B thuộc (E) và A, B đối xứng qua trục hoành đồng thời tam giác ABC là tam giác đều. Gọi S, P, R, r lần lượt là diện tích, chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $\frac{S}{\sqrt{3}} < 1$.

B. $\frac{P}{\sqrt{3}} > 4$.

C. $\frac{S}{P} < 1$.

D. $\frac{S}{P} = \frac{R}{2}$.

(dangvanquanggb1@gmail.com)

Lời giải.

Gọi $A(a; b)$.

Vì A, B đối xứng với nhau qua trục hoành suy ra $B(a; -b)$.

$$\text{Có } A(a; b) \in (E) \Leftrightarrow \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{1} = 1 \Leftrightarrow b^2 = 1 - \frac{a^2}{4} \quad (1)$$

$$\text{Tam giác } ABC \text{ cân tại } C \text{ nên tam giác đều } AB = AC \Leftrightarrow 4b^2 = (a - 2)^2 + b^2 \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta có hệ

$$\begin{aligned} \begin{cases} b^2 = 1 - \frac{a^2}{4} \\ 4b^2 = (a - 2)^2 + b^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{7} \\ b^2 = \frac{48}{49} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{7} \\ b = \frac{4\sqrt{3}}{7} \\ a = \frac{2}{7} \\ b = -\frac{4\sqrt{3}}{7} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} A\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right); B\left(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right) \\ A\left(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right); B\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right) \end{cases} \end{aligned}$$

Khi đó $AB = \frac{8\sqrt{3}}{7}$; $d(C, AB) = \frac{12}{7}$ suy ra $S = \frac{48\sqrt{3}}{49}$; $P = \frac{24\sqrt{3}}{7}$; $r = \frac{2}{7}$; $R = \frac{4}{7}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho elip có phương trình $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Xét điểm M chuyển động trên tia Ox và điểm N chuyển động trên tia Oy sao cho đường thẳng MN luôn tiếp xúc với (E) . Biết rằng khi tọa độ của M, N thỏa mãn đoạn MN có độ dài nhỏ nhất. Giá trị nhỏ nhất đó thuộc khoảng nào dưới đây.

- A. $(6; 9)$. B. $(\sqrt{21}; 2\sqrt{7})$. C. $(46; 48)$. D. $(48; 50)$.

(chitoannd@gmail.com)

Lời giải.

Giả sử $M(m; 0)$, $N(0; n)$ với $m > 0$; $n > 0$ là hai điểm chuyển động trên hai tia Ox, Oy .

Phương trình của đường thẳng $MN: \frac{x}{m} + \frac{y}{n} - 1 = 0$.

Đường thẳng tiếp xúc với (E) khi và chỉ khi $16\left(\frac{1}{m}\right)^2 + 9\left(\frac{1}{n}\right)^2 = 1$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có

$$MN^2 = m^2 + n^2 = (m^2 + n^2) \left(\frac{16}{m^2} + \frac{9}{n^2} \right) = 25 + 16\frac{n^2}{m^2} + 9\frac{m^2}{n^2} \geq 25 + 2\sqrt{16 \cdot 9} = 49 \Rightarrow MN \geq 7.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: } \begin{cases} \frac{16n^2}{m^2} = \frac{9m^2}{n^2} \\ m^2 + n^2 = 49 \\ m > 0, n > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2\sqrt{7} \\ n = \sqrt{21} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(2\sqrt{7}; 0) \\ N(0; \sqrt{21}) \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 11. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho elip có phương trình: $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Xét điểm M chuyển động trên tia Ox và điểm N chuyển động trên tia Oy sao cho đường thẳng MN luôn tiếp xúc với (E) . Biết rằng khi tọa độ của M, N thỏa mãn đoạn MN có độ dài nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $T = 2018x_M + 2019\sqrt{3}y_N$.

- A. $T = 10093\sqrt{7}$. B. $T = -2021\sqrt{7}$. C. $T = 10039\sqrt{7}$. D. $T = 2021\sqrt{7}$.

(chitoannd@gmail.com)

Lời giải.

Giả sử $M(m; 0)$, $N(0; n)$ với $m > 0$; $n > 0$ là hai điểm chuyển động trên hai tia Ox, Oy .

Phương trình của đường thẳng $MN: \frac{x}{m} + \frac{y}{n} - 1 = 0$.

Đường thẳng tiếp xúc với (E) khi và chỉ khi $16\left(\frac{1}{m}\right)^2 + 9\left(\frac{1}{n}\right)^2 = 1$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có

$$MN^2 = m^2 + n^2 = (m^2 + n^2) \left(\frac{16}{m^2} + \frac{9}{n^2} \right) = 25 + 16\frac{n^2}{m^2} + 9\frac{m^2}{n^2} \geq 25 + 2\sqrt{16 \cdot 9} = 49 \Rightarrow MN \geq 7.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:
$$\begin{cases} \frac{16n^2}{m^2} = \frac{9m^2}{n^2} \\ m^2 + n^2 = 49 \\ m > 0, n > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2\sqrt{7} \\ n = \sqrt{21} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(2\sqrt{7}; 0) \\ N(0; \sqrt{21}) \end{cases}.$$

Suy ra $T = 2018x_M + 2019\sqrt{3}y_N = 10093\sqrt{7}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(2; \sqrt{3})$ và elip $(E): \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$. Gọi F_1, F_2 là các tiêu điểm của (E) , (F_1 có hoành độ âm), M là giao điểm có tung độ dương của đường thẳng AF_1 với (E) , N là điểm đối xứng với F_2 qua M . Bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ANF_2 có độ dài là

A. $R = 1$.

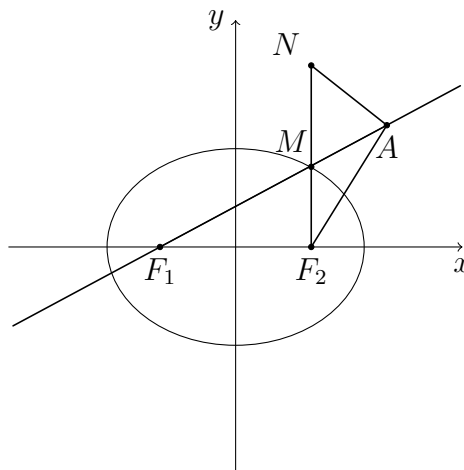
B. $R = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

C. $R = 2$.

D. $R = \sqrt{3}$.

(Nguyễn Đăng Dũng-Tên FB: Dũng Nguyễn Đăng)

Lời giải.



Ta có $(E): \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 3 - 2 = 1$.

Do đó $F_1(-1; 0), F_2(1; 0)$.

Phương trình đường thẳng $AF_1: x - \sqrt{3}y + 1 = 0$.

M là giao điểm có tung độ dương của đường thẳng AF_1 với (E)

Suy ra tọa độ M là nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ x - \sqrt{3}y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow M\left(1; \frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

N là điểm đối xứng với F_2 qua M suy ra $N\left(1; \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$ và $\overrightarrow{NA} = \left(1; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Mà $\overrightarrow{F_2A} = (1; \sqrt{3}) \Rightarrow \overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{F_2A} = 0 \Rightarrow \triangle ANF_2$ vuông tại A nên đường tròn ngoại tiếp tam giác này có đường kính là F_2N .

Suy ra bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ANF_2 là $R = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 13. Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $C(3;0)$ và elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$. A, B là 2 điểm thuộc (E) sao cho $\triangle ABC$ đều, biết tọa độ của $A\left(\frac{a}{2}; \frac{c\sqrt{3}}{2}\right)$ và A có tung độ âm. Khi đó $a + c$ bằng:

A. 2. B. 0. C. -2. D. -4.

Lời giải.

Nhận xét: Điểm $C(3;0)$ là đỉnh của elip $(E) \Rightarrow$ điều kiện cần để $\triangle ABC$ đều đó là A, B đối xứng với nhau qua Ox . Suy ra A, B là giao điểm của đường thẳng $\Delta: x = x_0$ và elip (E)

$$+ \text{Ta có elip } (E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{3}\sqrt{9-x^2} \\ y = \frac{1}{3}\sqrt{9-x^2} \end{cases}$$

+ Theo giả thiết A có tung độ âm nên tọa độ của $A\left(x_0; -\frac{1}{3}\sqrt{9-x_0^2}\right)$ (điều kiện $x_0 < 3$ do $A \neq C$)

$$+ \text{Ta có: } AC = \sqrt{(3-x_0)^2 + \frac{1}{9}(9-x_0^2)}$$

$$\text{và } d_{(C;\Delta)} = |3-x_0|$$

$$+ \triangle ABC \text{ đều} \Leftrightarrow d_{(C;\Delta)} = \frac{\sqrt{3}}{2} AC \Leftrightarrow |3-x_0| = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{(3-x_0)^2 + \frac{1}{9}(9-x_0^2)}$$

$$\Leftrightarrow (3-x_0)^2 = \frac{3}{4} \left[(3-x_0)^2 + \frac{1}{9}(9-x_0^2) \right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}x_0^2 - \frac{3}{2}x_0 + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{3}{2} \text{ (t/m)} \\ x_0 = 3 \text{ (R)} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow a + c = 2$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 14. Cho elip $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ và điểm M nằm trên (E) . Nếu điểm M có hoành độ bằng 1 thì các khoảng cách từ M tới 2 tiêu điểm của (E) bằng bao nhiêu?

- A. 3,5 và 4,5. B. $4 \pm \sqrt{2}$. C. 3 và 5. D. $4 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Giả sử phương trình $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ c^2 = a^2 - b^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ c = 2. \end{cases}$$

Gọi F_1, F_2 lần lượt là hai tiêu điểm của Elip (E) , $M(1; y_M) \in (E)$, ta có

$$\begin{cases} MF_1 = a + \frac{c}{a}x_M = 4 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 4,5 \\ MF_2 = a - \frac{c}{a}x_M = 4 - \frac{1}{2} \cdot 1 = 3,5. \end{cases}$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 15. Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $C(2;0)$ và elip $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$. Tìm các điểm A, B thuộc (E) , biết rằng 2 điểm A, B đối xứng nhau qua trục hoành và tam giác ABC là tam giác đều. Khi đó diện tích S của tam giác ABC là kết quả nào dưới đây?

A. $S = \frac{4\sqrt{3}}{7}$.

B. $S = \frac{16\sqrt{3}}{49}$.

C. $S = \frac{48\sqrt{3}}{49}$.

D. $S = \frac{16}{49}$.

Lời giải.

Gọi $A(x; y)$. Do A, B đối xứng nhau qua Ox nên $B(x; -y)$ và Ox là đường trung trực của BC
 Có $C(2; 0) \in Ox$. Suy ra $CA = CB = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$, có $AB = 2|y|$

Có $A(x; y) \in (E) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{4}(4 - x^2)$. (1)

$$\triangle ABC \text{ đều} \Leftrightarrow AB = AC = BC$$

$$\Leftrightarrow 4y^2 = (x-2)^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow 3y^2 = (x-2)^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được $\frac{3}{4}(4 - x^2) = (x-2)^2$

$$\Leftrightarrow 7x^2 - 16x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = 0 (\equiv C) \\ x = \frac{2}{7} \Rightarrow y = \pm \frac{4\sqrt{3}}{7} \end{cases}$$

Vậy $A\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$ và $B\left(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$ hay $A\left(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right), B\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$.

Khi đó $AB = \frac{8\sqrt{3}}{7}, S_{ABC} = \frac{AB^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{48\sqrt{3}}{49}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 16. Một hình elip có độ dài các bán trục là a, b , diện tích của hình elip được tính theo công thức πab . Hình elip tại Washington, DC có chiều dài trục lớn và trục nhỏ lần lượt là 1074 m , 386 m. Tính diện tích của elip.

A. $414564\pi \text{ m}^2$.

B. $207282\pi \text{ m}^2$.

C. $414564\pi \text{ m}^2$.

D. $103641\pi \text{ m}^2$.

Lời giải.

Diện tích elip tại Washington, DC là $S = \pi \cdot 537 \cdot 193 = 103641\pi$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 17. Một người xây một bể cá hình elip có độ dài trục lớn 3 m và độ dài trục nhỏ 2 m. Nếu elip có phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) thì chu vi của elip được tính theo công thức $C = \pi \left[3(a+b) - \sqrt{(3a+b)(a+3b)} \right]$. Chu vi của bể cá gần với giá trị nào nhất trong các giá trị sau?

A. 7,91 m .

B. 7,93 m.

C. 7,95 m.

D. 7,97 m.

Lời giải.

Theo bài ra $a = \frac{3}{2}, b = 1$ nên chu vi của elip là $C = 7,93 \text{ m}$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 18. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , một chất điểm có phương trình chuyển động là $x = 5 \sin t$ và $y = 2 \cos t$, trong đó t có đơn vị là s; x, y có đơn vị là m. Quỹ đạo của chất điểm thuộc đường nào sau đây?

A. Một đường tròn.

B. Một đường parabol.

C. Một đường hypebol.

D. Một đường elip.

Lời giải.

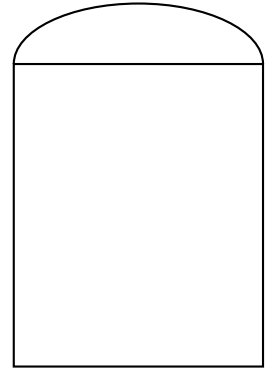
Ta có $\begin{cases} \frac{x}{5} = \sin t \\ \frac{y}{2} = \cos t \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$. Nên quỹ đạo của chất điểm thuộc đường elip.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 19.

Cửa chính của ông Đặng gồm hai phần, phần trên là một nửa cửa elip có độ dài trục lớn, trục nhỏ lần lượt là 1,8 m và 1 m, phần bên dưới là hình chữ nhật cao 2,3 m. Biết diện tích của elip có bán trục a, b là πab , diện tích cửa nhà gần với giá trị nào nhất trong các giá trị sau?



A. 5,554 m².

B. 5,078 m².

C. 5,73 m².

D. 5,78 m².

Lời giải.

Diện tích cửa nhà là $S = 0,9 \cdot 0,5 \cdot \pi + 1,8 \cdot 2,3 \approx 5,554$ m².

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 20. Nhìn từ trên cao xuống phần rìa của sân vận động Maracana (Brazil) có hình dạng một elip với độ dài trục lớn, trục nhỏ lần lượt là 320m, 250m. Chu vi của elip này gần với giá trị nào nhất, biết elip với độ dài các bán trục là a, b có chu vi $C = \pi \left[3(a+b) - \sqrt{(3a+b)(a+3b)} \right]$.

A. 912,81 m.

B. 899,35 m.

C. 898,73 m.

D. 998,52 m.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} 2a = 320 \\ 2b = 250 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 160 \\ b = 125. \end{cases}$

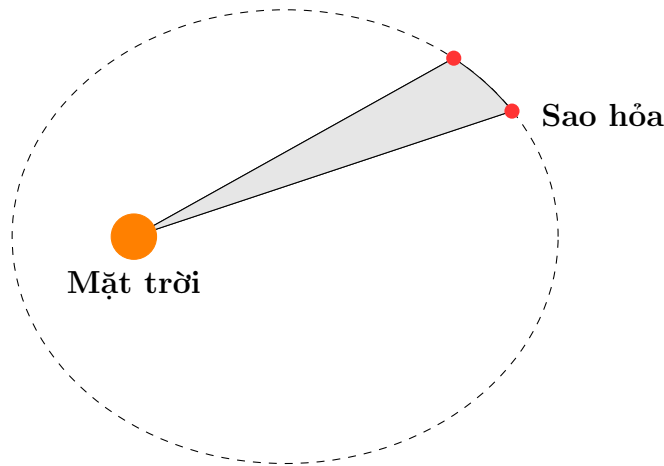
Suy ra chu vi của sân vận động Maracana là

$$C = \pi \left[3(160 + 125) - \sqrt{(3 \cdot 160 + 125)(160 + 3 \cdot 125)} \right] \approx 898,73 \text{ m.}$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 21. Quỹ đạo của sao hỏa là elip có bán trục lớn 227,9 triệu km, tâm sai $e = 0,0934$ và quay quanh mặt trời một vòng hết 687 ngày. Định luật Kepler thứ hai khẳng định rằng: đường nối một hành tinh với mặt trời quét qua những diện tích bằng nhau trong những khoảng thời gian bằng nhau. Biết diện tích của elip có các bán trục a, b bằng πab , tính diện tích mà đường nối sao hỏa và mặt trời quét qua trong 1 giây.



- A. 2631 triệu km². B. 2737 triệu km². C. 2832 triệu km². D. 2884 triệu km².

Lời giải.

Ta có $e = \frac{c}{a} \Rightarrow c = ea = 21,28586, b = \sqrt{a^2 - c^2} \approx 226,9$, diện tích của elip giới hạn bởi quỹ đạo của sao hỏa $S = \pi \cdot 227,9 \cdot 226,9 \cdot 10^{12} \approx 162453,3583 \cdot 10^{12}$.

Diện tích quét trong 1 giây là $\frac{S}{687 \cdot 24 \cdot 3600} \approx 2737$ triệu km².

Chọn đáp án (B)

□

Câu 22. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip (E) có phương trình là $mx^2 + ny^2 = 1$ ($n > m > 0$). Tìm tọa độ các tiêu điểm F_1, F_2 của elip (E) (với F_1 có hoành độ âm).

- A. $F_1(-\sqrt{n-m}; 0), F_2(\sqrt{n-m}; 0)$. B. $F_1\left(-\sqrt{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}}; 0\right), F_2\left(\sqrt{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}}; 0\right)$.
C. $F_1(-\sqrt{n^2 - m^2}; 0), F_2(\sqrt{n^2 - m^2}; 0)$. D. $F_1\left(-\sqrt{\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}}; 0\right), F_2\left(\sqrt{\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}}; 0\right)$.

Lời giải.

$$mx^2 + ny^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{m}} + \frac{y^2}{\frac{1}{n}} = 1.$$

$$\text{Vậy } a = \sqrt{\frac{1}{m}}, b = \sqrt{\frac{1}{n}} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}}.$$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 23. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip (E) có phương trình là $mx^2 + ny^2 = mn$ ($n > m > 0$). Tìm tọa độ các tiêu điểm F_1, F_2 của elip (E) (với F_1 có hoành độ âm).

- A. $F_1(-\sqrt{n-m}; 0), F_2(\sqrt{n-m}; 0)$. B. $F_1(n^2 - m^2; 0), F_2(m^2 - n^2; 0)$.
C. $F_1(-n + m; 0), F_2(n - m; 0)$. D. $F_1(-\sqrt{n^2 - m^2}; 0), F_2(\sqrt{n^2 - m^2}; 0)$.

Lời giải.

$$mx^2 + ny^2 = mn \Rightarrow \frac{x^2}{n} + \frac{y^2}{m} = 1.$$

$$\text{Vậy } a = \sqrt{n}, b = \sqrt{m} \Rightarrow c = \sqrt{n - m}.$$

Chọn đáp án (A)

□

Câu 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip (E) có phương trình là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$). Biết (E) có độ dài trục lớn gấp k lần độ dài trục nhỏ. Tỷ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn bằng

- A. $\frac{\sqrt{k^2 - 1}}{k}$. B. $\frac{\sqrt{k^2 + 1}}{k}$. C. $\frac{k}{\sqrt{k^2 - 1}}$. D. $\frac{k}{\sqrt{k^2 + 1}}$.

Lời giải.

Độ dài trục lớn bằng $2a$, độ dài trục bé bằng $2b$ và tiêu cự bằng $2c$, với $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Ta có $2a = k2b \Leftrightarrow a = kb, k \neq 0$. Mà $c^2 = a^2 - b^2$ nên $c^2 = a^2 - \frac{a^2}{k^2} \Rightarrow \frac{c^2}{a^2} = 1 - \frac{1}{k^2}$.

Khi đó $\frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{k^2 - 1}}{k}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip (E) có phương trình là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$).

Biết (E) đi qua điểm $M\left(1; \frac{2\sqrt{10}}{3}\right)$ và có tiêu cự bằng $\frac{2}{3}$ độ dài trục lớn. Độ dài trục nhỏ của (E)

bằng

A. $\sqrt{3}$.

B. $2\sqrt{3}$.

C. $\sqrt{5}$.

D. $2\sqrt{5}$.

Lời giải.

Ta có $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $c = \frac{2}{3}a$. Vì $M \in (E)$ nên $\frac{1}{a^2} + \frac{40}{9b^2} = 1$.

Mà $b^2 = a^2 - c^2 = \frac{5}{9}a^2$ nên ta có $\frac{1}{a^2} + \frac{8}{a^2} = 1$. Do đó $a^2 = 9$. Suy ra $b = \sqrt{5}$. Độ dài trục nhỏ bằng $2\sqrt{5}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 26. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip (E) có phương trình là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$). Biết

(E) đi qua điểm $M(8; 12)$ và $MF = 20$, với F là một tiêu điểm có hoành độ âm của (E) . Độ dài trục lớn của (E) bằng

A. 8.

B. 16.

C. 32.

D. 36.

Lời giải.

Gọi $F(-c; 0)$, $c > 0$. Ta có $MF = 20 \Leftrightarrow (8 + c)^2 + 12^2 = 20^2 \Rightarrow c = 8$. Vì $M \in (E)$ nên $\frac{64}{a^2} + \frac{144}{b^2} = 1$.

Mà $b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - 64$ nên ta có

$$\frac{64}{a^2} + \frac{144}{a^2 - 64} = 1 \Leftrightarrow a^4 - 272a^2 + 4096 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 16 \\ a^2 = 256. \end{cases}$$

Ta có $b^2 > 0 \Rightarrow a^2 > 64$. Suy ra $a^2 = 256 \Leftrightarrow a = 16$. Khi đó độ dài trục lớn bằng 32.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 27. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip (E) có phương trình là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$). Biết

rằng (E) đi qua điểm $M(2; \sqrt{14})$ và các đỉnh trên trục nhỏ nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông. Độ dài trục nhỏ của (E) bằng

A. 8.

B. 16.

C. 4.

D. 32.

Lời giải.

Đặt $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Gọi B là đỉnh trên trục nhỏ, F_1, F_2 là hai tiêu điểm.

Khi đó tam giác F_1BF_2 vuông cân tại B nên $b = \frac{1}{2}F_1F_2 = c$. Do đó $a^2 = b^2 + c^2 = 2b^2$.

Mặt khác $M \in (E)$ nên $\frac{4}{a^2} + \frac{14}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{4}{2b^2} + \frac{14}{b^2} = 1$. Từ đó suy ra $a^2 = 32, b^2 = 16$. Vậy $2b = 8$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 28. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip (E) có phương trình là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$). Biết rằng (E) đi qua điểm $M(4\sqrt{3}; 2)$ và các tiêu điểm nhìn hai đỉnh trên trục nhỏ dưới một góc 60° . Tiêu cự của (E) bằng

- A. $2\sqrt{3}$. B. $4\sqrt{3}$. C. $6\sqrt{3}$. D. $8\sqrt{3}$.

Lời giải.

Đặt $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Gọi B_1, B_2 là hai đỉnh trên trục nhỏ, F là một tiêu điểm.

Khi đó tam giác FB_1B_2 đều cạnh $2b$ nên có chiều cao $c = \frac{2b\sqrt{3}}{2} = b\sqrt{3}$. Do đó $a^2 = b^2 + c^2 = 4b^2$.

Mặt khác $M \in (E)$ nên $\frac{48}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{48}{4b^2} + \frac{4}{b^2} = 1$. Từ đó suy ra $b^2 = 16$, $a^2 = 64$, $c = 4\sqrt{3}$. Vậy $2c = 8\sqrt{3}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 29. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip (E) có phương trình là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$). Biết rằng (E) đi qua điểm $M\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}; 1\right)$ và khoảng cách từ một đỉnh nằm trên trục lớn đến một đỉnh nằm trên trục nhỏ bằng tiêu cự. Độ dài trục lớn của (E) bằng

- A. $\sqrt{10}$. B. $2\sqrt{10}$. C. $\sqrt{14}$. D. $2\sqrt{10}$.

Lời giải.

Gọi $A(a; 0)$, $B(0; b)$ là hai đỉnh. Khi đó $AB = 2c$, suy ra $a^2 + b^2 = 4c^2$.

Mà $c^2 = a^2 - b^2$ nên $3a^2 = 5b^2$.

Mặt khác $M \in (E)$ nên $\frac{25}{3a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$. Từ đó suy ra $b^2 = 6$, $a^2 = 10$. Vậy $2a = 2\sqrt{10}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 30. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , viết phương trình chính tắc của elip (E) biết (E) có tâm sai $e = \frac{2}{3}$ và đi qua điểm $M\left(2; \frac{5}{3}\right)$.

- A. $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$. B. $(E): \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{\sqrt{5}} = 1$. C. $(E): \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{10} = 1$. D. $(E): \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{1} = 1$.

Lời giải.

Ta có tâm sai $e = \frac{c}{a}$. Lần lượt kiểm tra các đáp án ta có thể loại được 2 đáp án. Tiếp tục thay tọa độ M vào ta tìm được đáp án đúng.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 31. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , viết phương trình chính tắc của elip (E) biết (E) có bán kính qua tiêu tại $M\left(-2; \frac{1}{2}\right)$ là F_2M bằng 5.

- A. $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$. B. $(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$. C. $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. D. $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

Lời giải.

Lần lượt thay tọa độ M vào các đáp án ta nhận thấy có thể loại 2 đáp án. Bên cạnh đó, bán kính qua tiêu $F_2M = a - \frac{c}{a}(-2) = a + \frac{2c}{a} = 5$. Kiểm tra 2 đáp án còn lại ta chọn được đáp án cuối cùng.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 32. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , viết phương trình chính tắc của elip (E) biết (E) có tâm sai $e = \frac{\sqrt{2}}{3}$ và đi qua điểm $N\left(\sqrt{2}; \frac{7}{3}\right)$.

- A. $(E): \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{14} = 1$. B. $(E): \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{28} = 1$. C. $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{7} = 1$. D. $(E): \frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{21} = 1$.

Lời giải.

Ta có thể dễ dàng nhận ra được a, b từ 4 đáp án, từ đó kiểm tra tâm sai và thế tọa độ điểm N vào để thử xem đâu là đáp án.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 33. Trong mặt phẳng tọa độ cho đường tròn (C) tâm I có phương trình $(x+1)^2 + y^2 = 16$, điểm $A(1;0)$ và điểm M nằm trên đường tròn (C) . Trung trực đoạn AM cắt IM tại K . Viết phương trình chính tắc đường cong (E) là quỹ tích của điểm K khi M di chuyển trên đường tròn (C) .

- A. $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$. B. $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. C. $(E): \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1$. D. $(E): \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{\sqrt{3}} = 1$.

Lời giải.

Theo đề bài ta có được 2 tiêu điểm là I và A do $IK + AK = IK + KM = IM = 4$. Ta suy ra $c = 1$ và $a = 2$. Từ đó tính được $b = \sqrt{3}$. Ta tìm được phương trình elip $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 34. Biết quỹ đạo của trái đất quay quanh mặt trời là elip và mặt trời là một trong 2 tiêu điểm, khoảng cách lớn nhất giữa trái đất và mặt trời là 152,00 triệu km, khoảng cách nhỏ nhất giữa trái đất và mặt trời là 147,00 triệu km. Hãy viết phương trình chính tắc của elip (E) là quỹ đạo trái đất quay quanh mặt trời.

- A. $(E): \frac{x^2}{152,00^2} + \frac{y^2}{147,00^2} = 1$. B. $(E): \frac{x^2}{149,50^2} + \frac{y^2}{149,48^2} = 1$.
C. $(E): \frac{x^2}{152,00^2} + \frac{y^2}{149,00} = 1$. D. $(E): \frac{x^2}{149,00} + \frac{y^2}{147,00} = 1$.

Lời giải.

Ta có khoảng cách xa nhất giữa mặt trời và trái đất là $a + c = 152$ triệu km và khoảng cách gần nhất là $a - c = 147$ triệu km. Từ đó, ta dễ dàng tìm được $a = 149,5$ triệu km và $c = 2,5$ triệu km. Từ đó, ta tính được $b = 149,48$ triệu km. Ta có được phương trình $(E): \frac{x^2}{149,50^2} + \frac{y^2}{149,48^2} = 1$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 35. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho elip (E) . Hình chữ nhật cơ sở của (E) có một cạnh nằm trên đường thẳng $d: x - \sqrt{5} = 0$ và có độ dài đường chéo là 6. Viết phương trình chính tắc của (E) .

- A. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$. B. $\frac{x^2}{516} + \frac{y^2}{25} = 1$. C. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$. D. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Lời giải.

Giả sử

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Khi đó các cạnh của hình chữ nhật cơ sở của (E) nằm trên các đường thẳng có phương trình

$$x = \pm a; y = \pm b.$$

Suy ra $a = \sqrt{5}$.

Ta có chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật cơ sở lần lượt là $2a = 2\sqrt{5}$ và $2b$.

Do độ dài đường chéo hình chữ nhật cơ sở bằng 6 nên ta có

$$(2a)^2 + (2b)^2 = 6^2 \Leftrightarrow 20 + 4b^2 = 36 \Leftrightarrow b^2 = 4 \Rightarrow b = 2 \quad (\text{do } b > 0).$$

Vậy $(E): \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 36. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho elip (E) đi qua $M(2;3)$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ nguyên. Biết (E) có một đường chuẩn có phương trình $x + 8 = 0$. Viết phương trình chính tắc của (E) .

A. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

B. $\frac{x^2}{52} + \frac{y^2}{39} = 1$.

C. $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$.

D. Không tồn tại elip (E) .

Lời giải.

Giả sử $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $0 < a < b$.

Ta có $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $e = \frac{c}{a}$ và phương trình đường chuẩn là $x \pm \frac{a}{e} = 0$.

Suy ra $\frac{a}{\frac{c}{a}} = 8 \Leftrightarrow \frac{a^2}{c} = 8 \Rightarrow c = \frac{a^2}{8} \quad (1)$.

Do (E) đi qua $M(2;3)$ nên $\frac{4}{a^2} + \frac{9}{a^2 - c^2} = 1 \quad (2)$.

Thế (1) và (2) ta có $\frac{4}{8c} + \frac{9}{8c - c^2} = 1 \Leftrightarrow 2c^2 - 17c + 26 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ c = \frac{13}{2} \end{cases}$.

Với $c = \frac{13}{2} \Rightarrow a^2 = 52 \Rightarrow a = 2\sqrt{13}$ (loại do a nguyên).

Với $c = 2 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 4 = 12$.

Vậy $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 37. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho elip (E) có tâm sai $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Biết hình chữ nhật cơ sở của (E) có chu vi bằng 20. Viết phương trình chính tắc của (E) .

A. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

B. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

C. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

D. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$.

Lời giải.

Gọi độ dài trục lớn và trục nhỏ của (E) là $2a, 2b$ ($a, b > 0$).

Do chu vi hình chữ nhật cơ sở là 20 nên $2(2a + 2b) = 20 \Leftrightarrow a + b = 5 \quad (1)$.

Do $e = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3} \Leftrightarrow c = \frac{\sqrt{5}}{3}a \quad (2)$.

Mặt khác $a^2 - b^2 = c^2 \quad (3)$.

Từ (2) và (3) suy ra $a^2 - b^2 - \frac{5}{9}a^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{9}a^2 - b^2 = 0 \quad (4)$.

Từ (1) và (4) suy ra

$$\frac{4}{9}a^2 - (5 - a)^2 = 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{9}a^2 + 10a - 25 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = 15. \end{cases}$$

Với $a = 15 \Rightarrow b = -10$ (loại).

Với $a = 3 \Rightarrow b = 2$.

Vậy $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 38. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho elip (E) có độ dài trục lớn bằng 8. Biết giao điểm của elip (E) với đường tròn $(O): x^2 + y^2 = 8$ tạo thành bốn đỉnh của một hình vuông. Viết phương trình chính tắc của (E) .

A. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} = 1$.

B. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

C. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{\frac{3}{16}} = 1$.

D. Không tồn tại elip (E) .

Lời giải.

Do độ dài trục lớn bằng 8 nên $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,
($0 < b < 4$).

Đường tròn $(O): x^2 + y^2 = 8$ có tâm $O(0;0)$, bán kính
 $R = 2\sqrt{2}$.

Gọi 4 giao điểm của (O) và (E) là 4 đỉnh của hình vuông
 $ABCD$.

Suy ra $OB = 2\sqrt{2} \Rightarrow B(2;2) \in (E)$

$$\Rightarrow \frac{4}{16} + \frac{4}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = \frac{16}{3}.$$

Vậy $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{\frac{16}{3}} = 1$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 39. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 2BD$. $(C): x^2 + y^2 = 4$ là đường tròn nội tiếp hình thoi. Biết A thuộc trục hoành. Viết phương trình chính tắc của elip (E) đi qua 4 đỉnh của hình thoi.

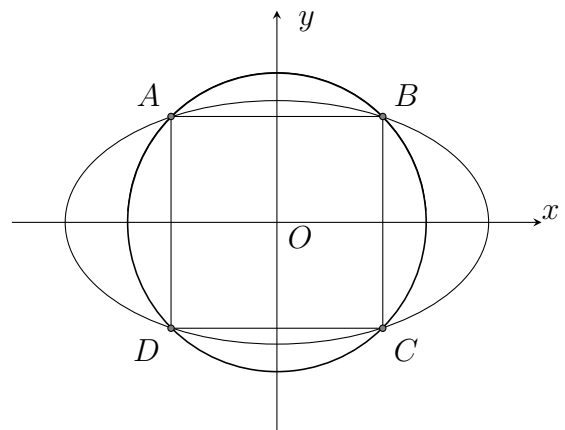
A. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{20} = 1$.

B. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$.

C. $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$.

D. $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$.

Lời giải.



Do $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$.

Vì $AC = 2BD$ nên $OC = 2OB \Rightarrow \tan \widehat{BCO} = \frac{1}{2}$.

(C) có tâm $O(0; 0)$, bán kính $R = 2$.

Dựng $OI \perp BC \Rightarrow OI = 2$.

Ta có:

$$IC = \frac{OI}{\tan \widehat{ICO}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4;$$

$$IB = \frac{OI}{\tan \widehat{OBI}} = \frac{2}{2} = 1.$$

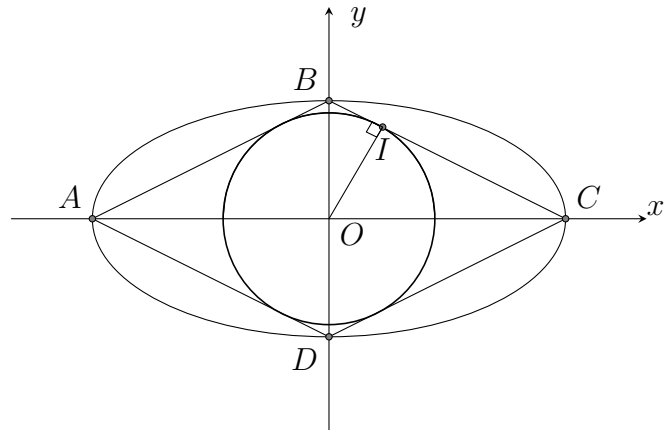
Suy ra $BC = 4 + 1 = 5$.

Từ $OB^2 + OC^2 = BC^2 \Rightarrow OB^2 + 4OB^2 = 25 \Rightarrow OB^2 = 5 \Rightarrow OB = \sqrt{5} \Rightarrow OC = 2\sqrt{5}$.

Suy ra trục lớn và trục nhỏ của (E) lần lượt là $AC = 2OC = 4\sqrt{5}$, $BD = 2OB = 2\sqrt{5}$.

Vậy (E): $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$.

Chọn đáp án **C**



□

Câu 40. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm A chạy trên trục Ox , điểm B chạy trên trục Oy và độ lớn đoạn $AB = 9$. Tập hợp các điểm M của đoạn thẳng AB thỏa mãn $MB = 2MA$ là đường elip có phương trình nào dưới đây?

A. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$.

B. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

C. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

D. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Lời giải.

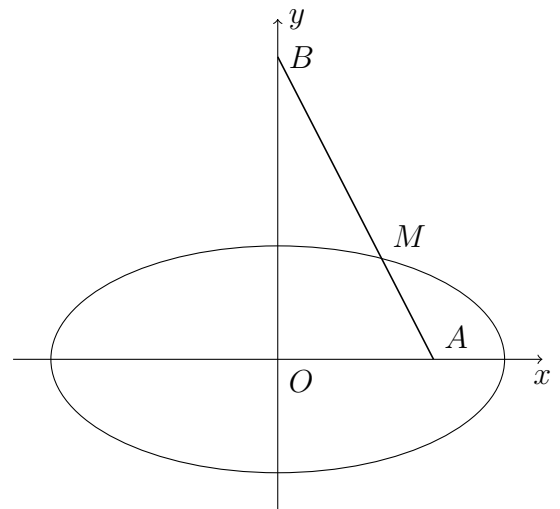
Giả sử $A(b; 0)$, $B(0; c)$. Do $AB = 9$ nên $b^2 + c^2 = 9$ (1).

Gọi $M(x; y)$ là điểm thuộc đoạn AB và thỏa mãn $MB = 2MA \Rightarrow \overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MA}$.

Mà $\overrightarrow{MB} = (-x; c - y)$, $\overrightarrow{MA} = (b - x; -y)$ nên

$$\begin{cases} -x = -2(b - x) \\ c - y = -2(-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{2}x \\ c = 3y \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $\left(\frac{3}{2}x\right)^2 + (3y)^2 = 9^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$.



Chọn đáp án **A**

□

Câu 41. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , viết phương trình chính tắc của e-líp (E) biết rằng (E) có tâm sai bằng $\frac{\sqrt{5}}{3}$ và chu vi hình chữ nhật cơ sở là 20.

A. (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = -1$.

B. (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

C. (E): $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{100} = 1$.

D. (E): $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$.

Lời giải.

Gọi phương trình chính tắc của e-líp có dạng (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

theo đề ta có $c = \frac{\sqrt{5}}{3}a$ và $a + b = 5$.

mặt khác $a^2 = b^2 + c^2$ nên ta có $\begin{cases} a = 3 \\ a = 15 \end{cases}$.

So với điều kiện $a + b = 5$ thì chọn $a = 3$, vậy $b = 2$.

Vậy phương trình chính tắc của e-líp (E) : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 42. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Gọi M, N lần lượt là các điểm di chuyển trên tia Ox, Oy sao cho MN luôn tiếp xúc với (E) . Hãy tìm độ dài nhỏ nhất của MN .

A. 21.

B. 7.

C. 48.

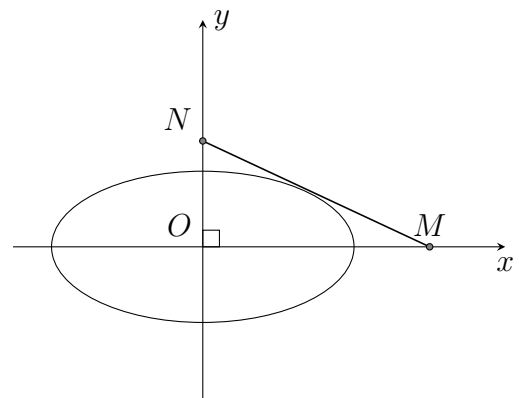
D. 49.

Lời giải.

Gọi $M(m; 0), N(0; n)$ (với $m, n > 0$). Khi đó $OM = m$, $ON = n$, $MN^2 = m^2 + n^2$.

Phương trình đường thẳng MN có dạng $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1 \Rightarrow y = -\frac{n}{m}x + n$. Thay vào phương trình (E) ta có

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{16} + \frac{\left(-\frac{n}{m}x + n\right)^2}{9} &= 1 \\ \Leftrightarrow 9x^2 + 16\left(\frac{n^2}{m^2}x^2 - \frac{2n^2}{m}x + n^2\right) &= 144 \\ \Leftrightarrow \left(9 + \frac{16n^2}{m^2}\right)x^2 - 32\frac{n^2}{m}x + 16n^2 - 144 &= 0. \end{aligned}$$



$$\text{Có } \Delta = \left(32\frac{n^2}{m}\right)^2 - 4\left(9 + \frac{16n^2}{m^2}\right)(16n^2 - 144) = 64\left[\frac{144n^2}{m^2} + 81 - 9n^2\right].$$

Để MN tiếp xúc (E) thì $\Delta = 0 \Rightarrow \frac{81}{n^2} + \frac{144}{m^2} = 9$.

Ta có $9 = \frac{81}{n^2} + \frac{144}{m^2} \geq \frac{(9 + 12)^2}{m^2 + n^2} = \frac{21^2}{MN^2} \Rightarrow MN \geq 49$. Vậy $MN_{\min} = 49$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 43. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , khi cho t thay đổi, điểm $M(5 \sin t; 3 \cos t)$ di động trên đường nào sau đây?

A. Elip.

B. Đường tròn.

C. Đường thẳng.

D. Parabol.

Lời giải.

Ta có $\left(\frac{x_M}{5}\right)^2 + \left(\frac{y_M}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x_M^2}{25} + \frac{y_M^2}{9} = 1$. Vậy khi t thay đổi, điểm M di động trên đường Elip.

Chọn đáp án **A** □

Câu 44. Một elip với bán trục lớn a và bán tiêu cự c , tỉ số $e = \frac{c}{a}$ được gọi là tâm sai của elip. Quỹ đạo của trái đất quanh mặt trời là một elip (E) trong đó mặt trời là một trong các tiêu điểm. Biết khoảng cách nhỏ nhất và lớn nhất giữa mặt trời và trái đất lần lượt là 147 triệu km, 152 triệu km. Tâm sai của elip (E) gần với giá trị nào nhất trong các giá trị sau?

A. 0,0167.

B. 0,0168.

C. 0,0169.

D. 0,017.

Lời giải.

Một elip có phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b > 0$, khoảng cách từ tiêu điểm đến một điểm bất kì M có hoành độ x_M là $d_M = a \pm \frac{c \cdot x_M}{a}$, cho nên khoảng cách lớn nhất và nhỏ nhất từ một tiêu điểm đến một điểm thuộc elip lần lượt là $a + c$ và $a - c$.

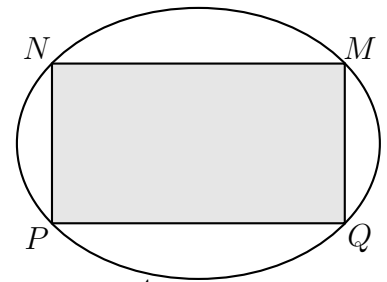
Ta có hệ phương trình $\begin{cases} a + c = 152 \\ a - c = 147 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{299}{2} \\ c = \frac{5}{2} \end{cases}$. Vậy tâm sai của (E) là $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{299} \approx 0,0167$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 45.

Ông Thanh có một mảnh vật liệu hình elip với trục lớn, trục nhỏ có độ dài 80 cm và 60 cm. Ông Thanh muốn cắt một hình chữ nhật có các cạnh song song với các trục của elip và các đỉnh thuộc elip. Tính tỉ số $\frac{MN}{MQ}$ để hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.



A. $\frac{9}{16}$.

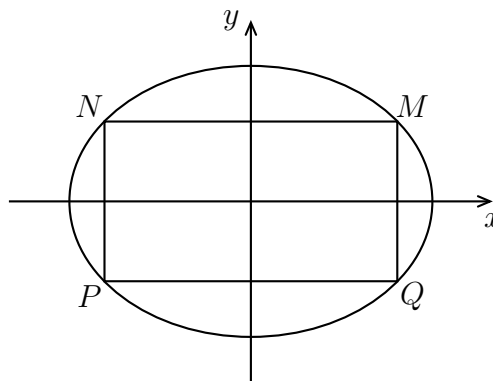
B. $\frac{16}{9}$.

C. $\frac{3}{4}$.

D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



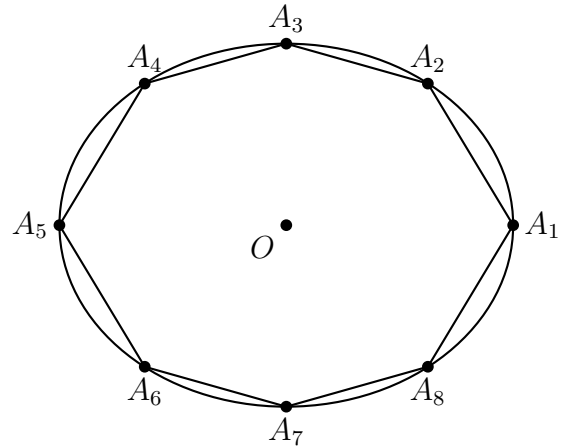
Phương trình của elip là: $\frac{x^2}{40^2} + \frac{y^2}{30^2} = 1$. Giả sử $M(x; y)$, $S_{MNPQ} = 4|xy|$, theo BĐT Cauchy ta có $\frac{x^2}{40^2} + \frac{y^2}{30^2} = 1 \geq 2\sqrt{\frac{x^2 y^2}{40^2 \cdot 30^2}} = \frac{|xy|}{60}$, cho nên $S_{MNPQ} = 4|xy| \leq 240$. Dấu bằng xảy ra khi $\frac{|x|}{40} = \frac{|y|}{30} \Leftrightarrow \frac{|x|}{|y|} = \frac{4}{3}$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 46.

Minh cần mua một mảnh vật liệu hình đa giác $A_1A_2 \dots A_8$ nội tiếp elip tâm O có độ dài trục lớn và trục nhỏ lần lượt là 10 m, 8 m. Đa giác có hai trục đối xứng là các trục đối xứng của elip và góc $\widehat{A_1OA_2} = 45^\circ$. Minh cần bao nhiêu tiền để mua biết giá của vật liệu 100000 đồng/m² (làm tròn đến hàng nghìn).



- A. 11240000 đồng. B. 11242000 đồng. C. 11245000 đồng. D. 11248000 đồng.

Lời giải.

Phương trình của elip là $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, A_2 giao điểm của đường thẳng $y = x$ và elip, suy ra $A_2 \left(\frac{20\sqrt{41}}{41}; \frac{20\sqrt{41}}{41} \right)$.

Gọi S là diện tích của đa giác, ta có $S = 4 \cdot S_{A_1OA_3} = 4 \cdot (S_{A_1OA_2} + S_{A_2OA_3}) = 4 \cdot \frac{20\sqrt{41}}{41} \cdot (5+4) = \frac{720\sqrt{41}}{41}$.

Số tiền cần là $\frac{720\sqrt{41}}{41} \cdot 100000 \approx 11245000$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 47. Quỹ đạo của trái đất quanh mặt trời là một elip, trong đó mặt trời là một trong các tiêu điểm. Khoảng cách nhỏ nhất và lớn nhất giữa mặt trời và trái đất lần lượt là 147,1 triệu km, 152,1 triệu km. Chu vi của một elip với các bán trục là a, b được tính gần đúng theo $C = \pi \left[3(a+b) - \sqrt{(3a+b)(a+3b)} \right]$ (công thức **Ramanujan**). Biết trái đất chuyển động quanh mặt trời một vòng hết 365,25 ngày, vận tốc trung bình của trái đất gần với giá trị nào nhất trong các giá trị sau?

- A. 29 km/s. B. 30 km/s. C. 31 km/s. D. 32 km/s.

Lời giải.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} a+c=152,1 \\ a-c=147,1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=149,6 \\ c=2,5 \end{cases} \Rightarrow b=149,08$.

$C \approx 936,2$ triệu km, $v_{tb} = \frac{936,2 \cdot 10^6}{365,25 \cdot 24 \cdot 3600} \approx 30$ km/s.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 48. Sao chổi Halley có quỹ đạo hình elip với tâm sai $e = 0,967$. Khoảng cách ngắn nhất từ sao chổi đến mặt trời là 0,587 AU (1 AU $\approx 149,6$ triệu km). Tính khoảng cách xa nhất của sao chổi Halley đến mặt trời.

- A. 32 AU. B. 33 AU. C. 34 AU. D. 35 AU.

Lời giải.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} a-c=0,587 \\ \frac{c}{a}=0,967 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \approx 17,8 \\ c \approx 17,2 \end{cases} \Rightarrow a+c \approx 35$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 49. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip $(E): 9x^2 + 25y^2 = 225$. Tìm tọa độ điểm $M \in (E)$ thỏa mãn $\widehat{F_1MF_2} = 90^\circ$ và $x_M > 0, y_M < 0$ (biết F_1, F_2 là các tiêu điểm của (E)).

A. $M\left(\frac{5\sqrt{7}}{4}; -\frac{9}{4}\right)$. B. $M\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}; -\frac{3}{2}\right)$. C. $M\left(\frac{5\sqrt{15}}{4}; -\frac{3}{4}\right)$. D. $M\left(\frac{15\sqrt{7}}{8}; -\frac{3}{8}\right)$.

Lời giải.

Ta có

$$9x^2 + 25y^2 = 225 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Elip có $a = 5, b = 3$ suy ra $c = 4$. Hai tiêu điểm của elip là $F_1(-4; 0), F_2(4; 0)$.

Giả sử $M(x; y), (x > 0, y < 0)$ ta có $\overrightarrow{F_1M}(x+4; y); \overrightarrow{F_2M}(x-4; y)$, khi đó

$$\widehat{F_1MF_2} = 90^\circ \Leftrightarrow MF_1 \perp MF_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{F_1M} \cdot \overrightarrow{F_2M} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 16. \quad (1)$$

$$\text{Vì } M \in (E) \text{ nên } 9x^2 + 25y^2 = 225 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ 9x^2 + 25y^2 = 225 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{175}{16} \\ y^2 = \frac{81}{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5\sqrt{7}}{4} \\ y = -\frac{9}{4} \end{cases}.$$

Vậy $M\left(\frac{5\sqrt{7}}{4}; -\frac{9}{4}\right)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 50. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip $(E): \frac{x^2}{9} + y^2 = 1$. Tìm tọa độ điểm M nằm trên elip (E) sao cho M có tung độ dương thỏa mãn $MF_1 = 2MF_2$ (với F_1 là tiêu điểm có hoành độ âm, F_2 là tiêu điểm có hoành độ dương của elip (E)).

A. $\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}; \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\right)$. B. $\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. C. $\left(-\frac{3}{2\sqrt{2}}; \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\right)$. D. $\left(-\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Lời giải.

Elip có $a = 3, b = 1$ suy ra $c = 2\sqrt{2}$. Ta có hai tiêu điểm $F_1(-2\sqrt{2}; 0), F_2(2\sqrt{2}; 0)$. Giả sử $M(x; y)$ ($x > 0$), khi đó $F_2M = \sqrt{(x-2\sqrt{2})^2 + y^2}$. Ta lại có

$$MF_1 + MF_2 = 6 \Rightarrow 3MF_2 = 6 \Leftrightarrow MF_2 = 2.$$

$$\text{Nên suy ra } (x-2\sqrt{2})^2 + y^2 = 4. \quad (1)$$

$$\text{Do điểm } M \text{ nằm trên elip nên } \frac{x^2}{9} + y^2 = 1. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\begin{cases} (x-2\sqrt{2})^2 + y^2 = 4 \\ \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{8}{9}x^2 - 4\sqrt{2}x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{2}}{4} \\ x = \frac{15\sqrt{2}}{4} \end{cases}.$$

Do M có tung độ dương nên $M\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}; \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\right)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 51. Cho elip (E) có tâm sai $e = \frac{1}{2}$. Gọi B_1 là đỉnh trên trục nhỏ, F_1, F_2 là hai tiêu điểm của (E) . Tính $\widehat{F_1 B_1 F_2}$.

- A. $\widehat{F_1 B_1 F_2} = 60^\circ$. B. $\widehat{F_1 B_1 F_2} = 120^\circ$. C. $\widehat{F_1 B_1 F_2} = 90^\circ$. D. $\widehat{F_1 B_1 F_2} = 45^\circ$.

Lời giải.

Do elip (E) có tâm sai $e = \frac{1}{2}$ nên $a = 2c$, suy ra $b = \sqrt{3}c$.

Trong tam giác $OF_1 B_2$ có $\tan \widehat{OB_2 F_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ suy ra $\widehat{OB_2 F_1} = 30^\circ$, do đó $\widehat{F_1 B_1 F_2} = 60^\circ$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 52. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho elip $(E): 16x^2 + 25y^2 = 100$. Tìm tất cả các giá trị của tham số b để đường thẳng $y = x + b$ có điểm chung với (E) .

- A. $-\frac{\sqrt{41}}{2} \leq b \leq \frac{\sqrt{41}}{2}$. B. $-\frac{\sqrt{41}}{2} < b < \frac{\sqrt{41}}{2}$.
C. $b \leq -\frac{\sqrt{41}}{2}$ hoặc $b \geq \frac{\sqrt{41}}{2}$. D. $b < -\frac{\sqrt{41}}{2}$ hoặc $b > \frac{\sqrt{41}}{2}$.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của đường thẳng và elip là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 16x^2 + 25y^2 = 100 \\ y = x + b \end{cases} \Rightarrow 16x^2 + 25(x + b)^2 = 100 \Leftrightarrow 41x^2 + 50bx + 25b^2 - 100 = 0. \quad (*)$$

Đường thẳng có điểm chung với elip khi và chỉ khi $(*)$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow (25b)^2 - 41(25b^2 - 100) \geq 0 \Leftrightarrow b^2 \leq \frac{41}{4} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{41}}{2} \leq b \leq \frac{\sqrt{41}}{2}.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 53. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho elip $(E): 4x^2 + 9y^2 = 36$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: x - y - 2m = 0$ tiếp xúc với (E) .

- A. $m = \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$. B. $m = \frac{\sqrt{13}}{2}$. C. $m = -\frac{\sqrt{13}}{2}$. D. $m = \pm\sqrt{13}$.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của đường thẳng và elip là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 36 \\ y = x - 2m \end{cases} \Rightarrow 4x^2 + 9(x - 2m)^2 = 36 \Leftrightarrow 13x^2 - 36mx + 36m^2 - 36 = 0. \quad (*)$$

Đường thẳng tiếp xúc với elip khi và chỉ khi $(*)$ có duy nhất 1 nghiệm

$$\Leftrightarrow (18m)^2 - 13(36m^2 - 36) = 0 \Leftrightarrow m^2 = \frac{13}{4} \Leftrightarrow m = \pm \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 54. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho elip $(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ có các tiêu điểm F_1, F_2 với F_2 có hoành độ dương. Đường thẳng d đi qua F_2 và song song với đường phân giác góc phần tư thứ nhất cắt (E) tại A, B . Tính diện tích S của tam giác ABF_1 .

A. $S = \frac{8}{3}$.

B. $S = \frac{16}{3}$.

C. $S = \frac{4}{3}$.

D. $S = 1$.

Lời giải.

Ta có $a^2 = 8, b^2 = 4 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 4 \Rightarrow c = 2$, suy ra $F_1(-2; 0), F_2(2; 0)$.

Phương trình đường thẳng $d: y = x - 2$, thay vào phương trình đường Elip ta có $\frac{x^2}{8} + \frac{(x-2)^2}{4} = 1 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -2 \\ x = \frac{8}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Suy ra $A(0; -2), B\left(\frac{8}{3}; \frac{2}{3}\right) \Rightarrow AF_1 = 2\sqrt{2}, BF_1 = \frac{10\sqrt{2}}{3}, AB = \frac{8\sqrt{2}}{3}$.

Theo công thức Hê rông ta có $S = \frac{16}{3}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 55. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ và hai điểm $A(-3; 0), I(-1; 0)$. Tìm tọa độ các điểm $B, C \in (E)$ sao cho I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , biết rằng tung độ điểm B dương.

A. $B\left(\frac{3}{5}; \frac{4\sqrt{6}}{5}\right), C\left(-\frac{3}{5}; -\frac{4\sqrt{6}}{5}\right)$.

B. $B\left(-\frac{3}{5}; \frac{4\sqrt{6}}{5}\right), C\left(\frac{3}{5}; -\frac{4\sqrt{6}}{5}\right)$.

C. $B\left(-\frac{3}{5}; \frac{4\sqrt{6}}{5}\right), C\left(-\frac{3}{5}; \frac{4\sqrt{6}}{5}\right)$.

D. $B\left(-\frac{3}{5}; \frac{4\sqrt{6}}{5}\right), C\left(-\frac{3}{5}; -\frac{4\sqrt{6}}{5}\right)$.

Lời giải.

Ta có $AI = 2$, nên phương trình đường tròn ngoại tiếp ABC có phương trình $(x+1)^2 + y^2 = 4$.

$$\text{Tọa độ } B, C (x_B, x_C \neq -3) \text{ thỏa mãn hệ } \begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 4 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{5} \\ y = \frac{4\sqrt{6}}{5} \\ x = -\frac{3}{5} \\ y = -\frac{4\sqrt{6}}{5} \end{cases}.$$

Vì B có tung độ dương nên $B\left(-\frac{3}{5}; \frac{4\sqrt{6}}{5}\right), C\left(-\frac{3}{5}; -\frac{4\sqrt{6}}{5}\right)$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 56. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ và điểm $M(2; 1)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua M cắt (E) tại hai điểm A, B sao cho trung điểm của đoạn thẳng AB nằm trên đường thẳng $\Delta: y = 2x$.

A. $y = -\frac{1}{2}x$ hoặc $y = -\frac{9}{50}x + \frac{34}{25}$.

B. $y = -\frac{1}{2}x$ hoặc $y = \frac{9}{50}x + \frac{34}{25}$.

C. $y = \frac{1}{2}x$ hoặc $y = -\frac{9}{50}x + \frac{34}{25}$.

D. $y = \frac{1}{2}x$ hoặc $y = \frac{9}{50}x + \frac{34}{25}$.

Lời giải.

Nếu d qua M và song song với Oy thì AB có trung điểm có tọa độ là $(2; 0)$. Điểm này không thuộc Δ . Suy ra đường thẳng d có hệ số góc k , và d có dạng $y = k(x-2) + 1$.

Hoành độ giao điểm của đường thẳng d và (E) là nghiệm phương trình

$$\frac{x^2}{25} + \frac{(kx - 2k + 1)^2}{9} = 1$$

$$\Leftrightarrow (9 + 25k^2)x^2 + 50k(1 - 2k)x + 25(1 - 2k)^2 - 225 = 0.$$

Điểm M thuộc miền trong của elip (E) nên đường thẳng d luôn cắt (E) tại hai điểm phân biệt.

Gọi A, B là giao điểm của đường thẳng d và (E) , khi đó $A(x_1; k(x_1 - 2) + 1), B(x_2; k(x_2 - 2) + 1)$.

Tọa độ trung điểm của AB là $I\left(\frac{25k(2k - 1)}{9 + 25k^2}; \frac{18 - 36k}{2(9 + 25k^2)}\right)$.

$$\text{Điểm } I \in y = 2x \Rightarrow 100k^2 - 32k - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ k = -\frac{9}{50} \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } y = \frac{1}{2}x \text{ hoặc } y = -\frac{9}{50}x + \frac{34}{25}.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 57. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: 3x + y - 4 = 0$ và elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

1. Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng d và cắt (E) tại hai điểm A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 3.

A. $\Delta: 2x - 6y + 3\sqrt{10} = 0$ hoặc $\Delta: 2x - 6y - 3\sqrt{10} = 0$.

B. $\Delta: 2x + 6y + 3\sqrt{10} = 0$ hoặc $\Delta: 2x + 6y - 3\sqrt{10} = 0$.

C. $\Delta: 6x - 2y + 3\sqrt{10} = 0$ hoặc $\Delta: 6x - 2y - 3\sqrt{10} = 0$.

D. $\Delta: 6x + 2y + 3\sqrt{10} = 0$ hoặc $\Delta: 6x + 2y - 3\sqrt{10} = 0$.

Lời giải.

Đường thẳng $\Delta: x - 3y + c = 0 \Rightarrow y = \frac{x + c}{3}$. Thay vào phương trình elip ta có $\frac{x^2}{9} + \frac{(x + c)^2}{36} = 1 \Leftrightarrow 5x^2 + 2cx + c^2 - 36 = 0$. (1)

(1) có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt khi và chỉ khi $c^2 - 5(c^2 - 36) > 0 \Leftrightarrow c^2 < \frac{90}{2}$.

Gọi $A\left(x_1; \frac{x_1 + c}{3}\right), B\left(x_2; \frac{x_2 + c}{3}\right)$, khi đó x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1).

Theo định lí Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-2c}{5} \\ x_1 x_2 = \frac{c^2 - 36}{5} \end{cases}$.

Ta có $S_{OAB} = \frac{1}{2}AB \cdot d(O, AB) = 3 \Leftrightarrow |c|\sqrt{\frac{144}{5} - \frac{16c^2}{25}} = 18 \Leftrightarrow \frac{16}{25}c^4 - \frac{144}{5}c^2 + 324 = 0 \Leftrightarrow c^2 = \frac{45}{2} \Leftrightarrow$

$c = \pm \frac{3\sqrt{10}}{2}$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $\Delta: 2x - 6y + 3\sqrt{10} = 0$ hoặc $\Delta: 2x - 6y - 3\sqrt{10} = 0$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 58. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho elip $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ và điểm $I(1; 2)$. Lập phương trình đường thẳng đi qua I cắt (E) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB .

A. $d: 9x + 32y + 73 = 0$.

B. $d: 9x + 32y - 73 = 0$.

C. $d: 9x - 32y + 73 = 0$.

D. $d: 9x - 32y - 73 = 0$.

Lời giải.

+ Nhận xét trường hợp đường thẳng đi qua $I(1; 2)$ có phương trình $x = 1$ không thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

+ Đường thẳng d qua I có hệ số góc k có phương trình $y = kx + 2 - k$.

Hoàn chỉnh A, B thỏa mãn phương trình $\frac{x^2}{16} + \frac{(kx + 2 - k)^2}{9} = 1 \Leftrightarrow (9 + 16k^2)x^2 + 32k(2 - k)x + 16(2 - k)^2 - 144 = 0$.

Điểm I thuộc miền trong của elip nên d luôn cắt elip tại hai điểm phân biệt A, B . Gọi $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, theo bài ra ta có

$$\begin{cases} \frac{x_1 + x_2}{2} = 1 \\ \frac{y_1 + y_2}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-16k(2 - k)}{9 + 16k^2} = 1 \Leftrightarrow k = -\frac{9}{32}.$$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm $d: 9x + 32y - 73 = 0$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 59. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho elip $(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng d cắt (E) tại hai điểm phân biệt có tọa độ nguyên?

A. 5.

B. 6.

C. 7.

D. 8.

Lời giải.

Từ phương trình $(E) \Leftrightarrow y^2 = 2 - \frac{x^2}{4}$.

Vì $y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 8, x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

+ Với $x = \pm 2 \Rightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1$.

+ Với $x = \pm 1 \Rightarrow y^2 = \frac{7}{4}$ (loại).

+ Với $x = 0 \Rightarrow y^2 = 2$ (loại).

Vậy có tất cả 4 điểm có tọa độ nguyên trên elip, do đó số đường thẳng cắt elip tại điểm có tọa độ nguyên là 6.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 60. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho elip $(E): \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ và điểm $M\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua M cắt (E) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $MA = 2MB$.

A. $\Delta: x + 2y - 10 = 0$ hoặc $\Delta: x + 14y - 2 = 0$.

B. $\Delta: x - 2y - 2 = 0$ hoặc $\Delta: x - 14y - 10 = 0$.

C. $\Delta: x + 2y - 2 = 0$ hoặc $\Delta: x + 14y - 10 = 0$.

D. $\Delta: x - 2y - 10 = 0$ hoặc $\Delta: x - 14y - 2 = 0$.

Lời giải.

Nhận thấy điểm M thuộc miền trong của elip (E) .

Gọi $A(x; y)$, theo bài ra ta có $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB} \Rightarrow B\left(1 - \frac{x}{2}; 1 - \frac{y}{2}\right)$.

Điểm A, B thuộc (E) nên ta có

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ \frac{\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2}{4} + \left(1 - \frac{y}{2}\right)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{2 - x}{4} \\ \frac{x^2}{4} + \frac{(2 - x)^2}{16} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{-6}{5} \end{cases}.$$

Với $x = 2 \Rightarrow A(2; 0)$, phương trình đường thẳng $\Delta: x + 2y - 2 = 0$.

Với $x = -\frac{6}{5} \Rightarrow A\left(-\frac{6}{5}; \frac{4}{5}\right) \Rightarrow \Delta: x + 14y - 10 = 0$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 61. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho elip $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ và đường thẳng $d: 3x + 4y - 12 = 0$. Gọi các giao điểm của đường thẳng d và elip (E) là A và B . Tìm điểm $C \in (E)$ sao cho tam giác ABC có diện tích là 6.

- A. $C\left(2\sqrt{2}; -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ hoặc $C\left(-2\sqrt{2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$. B. $C\left(-2\sqrt{2}; -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ hoặc $C\left(2\sqrt{2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$.
C. $C\left(\sqrt{2}; -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ hoặc $C\left(-\sqrt{2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$. D. $C\left(-\sqrt{2}; -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ hoặc $C\left(\sqrt{2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của đường thẳng d và (E) là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ 3x + 4y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 3 \\ x = 4 \Rightarrow y = 0 \end{cases}.$$

Khi đó $AB = 5$. Gọi $C(x, y)$ là điểm cần tìm, khi đó diện tích tam giác

$$S_{ABC} = 6 \Leftrightarrow \frac{1}{2}d(C, AB) \cdot AB = 6 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{|3x + 4y - 12|}{5} \cdot 5 = 6 \Leftrightarrow |3x + 4y - 12| = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ 3x + 4y = 24 \end{cases}.$$

- Với $3x + 4y = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x$ thay vào phương trình (E) ta có $x^2 = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \Rightarrow y = -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ x = -2\sqrt{2} \Rightarrow y = \frac{3}{\sqrt{2}} \end{cases}.$
- Với $3x + 4y = 24 \Rightarrow y = \frac{24 - 3x}{4}$ thay vào phương trình (E) ta được phương trình vô nghiệm.

Vậy $C\left(2\sqrt{2}; -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ hoặc $C\left(-2\sqrt{2}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 62. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: 2x + y + 3 = 0$ và elip $(E): \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.
1. Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với d cắt (E) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 1.

- A. $\Delta: x + 2y + 2 = 0$ hoặc $\Delta: x + 2y - 2 = 0$. B. $\Delta: x - 2y + 2 = 0$ hoặc $\Delta: x + 2y - 2 = 0$.
C. $\Delta: x + 2y + 2 = 0$ hoặc $\Delta: x - 2y - 2 = 0$. D. $\Delta: x - 2y + 2 = 0$ hoặc $\Delta: x - 2y - 2 = 0$.

Lời giải.

Δ là đường thẳng vuông góc với d , khi đó phương trình đường thẳng $\Delta: x - 2y + c = 0$.

Tọa độ giao điểm của A, B là nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} x = 2y - c \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - c \\ (2y - c)^2 + 4y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$8y^2 - 4yc + c^2 - 4 = 0. \quad 1$$

(1) có hai nghiệm phân biệt y_1, y_2 khi và chỉ khi $4c^2 - 8(c^2 - 4) > 0 \Leftrightarrow c^2 < 8$.

$$\text{Gọi } A(2y_1 - c; y_1), B(2y_2 - c; y_2) \Rightarrow AB = \sqrt{5((y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2)} = \sqrt{5 \cdot \frac{8 - c^2}{4}}.$$

Theo bài ra $S_{OAB} = 1 \Leftrightarrow d(O, AB) \cdot AB = 2 \Leftrightarrow c^4 - 8c^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow c^2 = 4 \Leftrightarrow c = \pm 2$ (thỏa mãn).

Vậy $\Delta: x - 2y + 2 = 0$ hoặc $\Delta: x - 2y - 2 = 0$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 63. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Hãy tìm giá trị của tham số m để đường thẳng $mx - 8 = 0$ cắt (E) tại một điểm duy nhất.

- A. $m = \pm 2$. B. $m = 2$. C. $m = -2$. D. $m = -\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Giả sử $M(x; y)$ là giao điểm của (E) và đường thẳng đã cho. Ta có

$$\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ mx - 8 = 0. \end{cases}$$

Nhận xét, nếu $m = 0$ thì từ phương trình thứ 2 xảy ra điều vô lí. Do đó $m \neq 0$. Từ phương trình thứ 2 ta được $x = \frac{8}{m}$. Thế vào phương trình thứ nhất, ta được

$$9 \cdot \frac{64}{m^2} + 16y^2 = 16 \cdot 9 \Leftrightarrow 36 + m^2y^2 = 9m^2 \Leftrightarrow y^2 = \frac{9m^2 - 36}{m^2}.$$

Đường thẳng đã cho và (E) có một điểm chung duy nhất khi và chỉ khi $9m^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 64. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip (E) có phương trình $x^2 + 9y^2 = 9$. Trong các khẳng định sau, hãy chọn khẳng định **sai**.

- A. Đường thẳng đi qua đỉnh $A(-3; 0)$ và vuông góc với trục lớn của (E) có phương trình là $x = -3$.
B. Đường thẳng d vuông góc với đường thẳng $x - y = 0$ và cắt (E) tại một điểm có phương trình là $d: x + y \pm \sqrt{10} = 0$.
C. Có duy nhất một đường thẳng đi qua điểm $M(3; -2)$ và cắt (E) tại một điểm duy nhất.
D. Có hai đường thẳng đi qua điểm $M(3; -2)$ và cắt (E) tại một điểm duy nhất.

Lời giải.

Phương trình elip đã cho được viết lại $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$, có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, trong đó $a = 3$, $b = 1$. Elip này có trục lớn nằm trên Ox và $A(-3; 0)$ một đỉnh. Do đó, đường thẳng qua đỉnh $A(-3; 0)$ và vuông góc với trục lớn có phương trình là $x = -3$.

Đường thẳng d vuông góc với đường thẳng $x - y = 0$ có phương trình dạng $x + y + m = 0$. Từ phương trình này ta được $x = -y - m$, thế vào phương trình của elip ta được

$$(y + m)^2 + 9y^2 = 9 \Leftrightarrow 10y^2 + 2my + m^2 - 9 = 0.$$

Elip và d có một điểm chung duy nhất khi và chỉ khi

$$m^2 - 10(m^2 - 9) = 0 \Leftrightarrow -9m^2 + 90 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{10}.$$

Thế tọa độ của $M(3; -2)$ vào vế trái của phương trình $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ ta được vế trái lớn hơn vế phải. Suy ra điểm M nằm ngoài (E) . Suy ra tồn tại 2 đường thẳng qua M cắt (E) tại một điểm duy nhất.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 65. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip $(E): \frac{x^2}{9} + y^2 = 1$. Tìm trên (E) các điểm M sao cho $MF_1 = 3MF_2$.

- A. $M_1 \left(\frac{9\sqrt{2}}{8}; \frac{\sqrt{46}}{8} \right), M_2 \left(\frac{9\sqrt{2}}{8}; -\frac{\sqrt{46}}{8} \right)$.
 B. $M_1 \left(-\frac{9\sqrt{2}}{8}; \frac{\sqrt{46}}{8} \right), M_2 \left(-\frac{9\sqrt{2}}{8}; -\frac{\sqrt{46}}{8} \right)$.
 C. $M_1 \left(\frac{9\sqrt{2}}{8}; \frac{\sqrt{46}}{8} \right), M_2 \left(-\frac{9\sqrt{2}}{8}; -\frac{\sqrt{46}}{8} \right)$.
 D. $M_1 \left(\frac{9\sqrt{2}}{8}; -\frac{\sqrt{46}}{8} \right), M_2 \left(-\frac{9\sqrt{2}}{8}; \frac{\sqrt{46}}{8} \right)$.

Lời giải.

$$\text{Vì } (E): \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1. \end{cases}$$

$$\text{Vì } a^2 = b^2 + c^2 \text{ nên } c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 1 = 8 \Rightarrow c = 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Gọi } M(x; y) \in (E) \Rightarrow \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \quad (1).$$

$$\text{Ta có } MF_1 = a + ex = 3 + \frac{2\sqrt{2}}{3}x \text{ và } MF_2 = a - ex = 3 - \frac{2\sqrt{2}}{3}x.$$

$$\text{Theo giả thiết } MF_1 = 3MF_2 \Leftrightarrow 3 + \frac{2\sqrt{2}}{3}x = 3 \left(3 - \frac{2\sqrt{2}}{3}x \right) \Leftrightarrow x = \frac{9\sqrt{2}}{8}.$$

$$\text{Thay vào (1)} \Rightarrow \frac{\left(\frac{9\sqrt{2}}{8} \right)^2}{9} + y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm \frac{\sqrt{46}}{8}.$$

$$\text{Vậy có hai điểm thỏa mãn bài là } M_1 \left(\frac{9\sqrt{2}}{8}; \frac{\sqrt{46}}{8} \right), M_2 \left(\frac{9\sqrt{2}}{8}; -\frac{\sqrt{46}}{8} \right).$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 66. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Có tất cả bao nhiêu điểm $M \in (E)$ thỏa mãn $MF_1 \cdot MF_2 = \frac{121}{4}$?

- A. 0 điểm. B. 2 điểm. C. 4 điểm. D. Vô số điểm.

Lời giải.

Ta có (E) có $a = 5, b = 3, c = 4$. Gọi $M(x_0; y_0) \in (E)$ là điểm cần tìm. Khi đó $MF_1 = a + \frac{cx_0}{a}, MF_2 = a - \frac{cx_0}{a}$.

$$\text{Vậy } MF_1 \cdot MF_2 = \frac{121}{4} \Rightarrow 25 - \frac{16x_0^2}{25} = \frac{121}{4} \Leftrightarrow -\frac{16x_0^2}{25} = \frac{21}{4} \text{ (vô nghiệm)}.$$

Vậy không có điểm M nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 67. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Gọi Δ là đường thẳng qua tiêu điểm $F_2(4; 0)$ và vuông góc với trục Ox , Δ cắt (E) tại hai điểm M và N . Tính độ dài đoạn MN .

- A. $MN = \frac{18}{5}$. B. $MN = \frac{9}{5}$. C. $MN = \frac{18}{25}$. D. $MN = \frac{9}{25}$.

Lời giải.

Đường thẳng $\Delta: x = 4$. Thay vào phương trình elip ta có

$$\frac{4^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow y = \pm \frac{9}{5}.$$

$$\text{Vậy tọa độ } M, N \text{ lần lượt là } \left(4; \frac{9}{5} \right) \text{ và } \left(4; -\frac{9}{5} \right). \text{ Vậy } MN = \frac{18}{5}.$$

Chọn đáp án **A**

□

ĐÁP ÁN

1. A	2. A	3. A	4. C	5. D	6. D	7. B	8. C	9. B	10. A
11. A	12. B	13. A	14. A	15. C	16. D	17. B	18. D	19. A	20. C
21. B	22. B	23. A	24. A	25. D	26. C	27. A	28. D	29. B	30. A
31. D	32. C	33. B	34. B	35. C	36. A	37. C	38. A	39. C	40. A
41. A	42. D	43. A	44. A	45. D	46. C	47. B	48. D	49. A	50. A
51. A	52. A	53. A	54. B	55. D	56. C	57. A	58. B	59. B	60. C
61. A	62. D	63. A	64. C	65. A	66. A	67. A			

PHẦN



ĐỀ KIỂM HKI

1 ĐỀ HK1, BÌNH PHÚ, HỒ CHÍ MINH

Bài 1. Giải và biện luận phương trình sau theo tham số m : $(m-1)x = m^2 - 1$.

Lời giải.

Biện luận

- Nếu $m \neq 1 \Leftrightarrow m-1 \neq 0$ thì phương trình đã cho có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{m^2 - 1}{m - 1} = \frac{(m-1)(m+1)}{m-1} = m+1.$$

- Nếu $m = 1 \Leftrightarrow m-1 = 0$ thì phương trình đã cho trở thành $0x = 0 \Rightarrow$ phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Kết luận

- Nếu $m \neq 1$ thì phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = m+1$.
- Nếu $m = 1$ thì phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

□

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2 - x + 5} = \sqrt{9 - x}$.

b) $3|x-1| = 2x^2 - 4x$.

c) $\sqrt{4-x} - 1 = \sqrt{x+1}$.

Lời giải.

a) Ta có $\sqrt{x^2 - x + 5} = \sqrt{9 - x} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - x \geq 0 \\ x^2 - x + 5 = 9 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 9 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{-2; 2\}$.

b)

- Với $x \geq 1 \Leftrightarrow x-1 \geq 0$, phương trình đã cho trở thành

$$3(x-1) = 2x^2 - 4x \Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 & (\text{thỏa mãn}) \\ x = \frac{1}{2} & (\text{không thỏa mãn}). \end{cases}$$

- Với $x < 1 \Leftrightarrow x-1 < 0$, phương trình đã cho trở thành

$$-3(x-1) = 2x^2 - 4x \Leftrightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 & (\text{thỏa mãn}) \\ x = \frac{3}{2} & (\text{không thỏa mãn}). \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{-1; 3\}$.

c) Điều kiện xác định của phương trình là $-1 \leq x \leq 4$. Ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{4-x} - 1 &= \sqrt{x+1} \\ \Leftrightarrow \sqrt{4-x} &= \sqrt{x+1} + 1 \\ \Rightarrow 4-x &= x+2+2\sqrt{x+1} \\ \Leftrightarrow \sqrt{x+1} &= 1-x \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x+1 = 1-2x+x^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x^2-3x=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases} \end{cases} \\ \Leftrightarrow x &= 0 \text{ (thỏa mãn).}\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{0\}$.

□

Bài 3. Cho phương trình $mx^2 - 2(m+1)x + m+3 = 0$. Định m để phương trình

- a) Có nghiệm.
- b) Có hai nghiệm thực x_1 và x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 4$.

Lời giải.

a)

- Với $m = 0$, phương trình đã cho trở thành $-2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

Suy ra $m = 0$ thỏa mãn.

- Với $m \neq 0$, phương trình đã cho là một phương trình bậc hai.

Ta có $\Delta' = (m+1)^2 - m(m+3) = -m+1$.

$$\text{Phương trình đã cho có nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -m+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \leq 1. \end{cases}$$

Vậy với $m \leq 1$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

- b) Với $m \leq 1$ và $m \neq 0$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm x_1 và x_2 .

$$\text{Theo định lí Vi-ét, ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m+1)}{m} \\ x_1 x_2 = \frac{m+3}{m}. \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 &= 4 \\ \Leftrightarrow \frac{4(m+1)^2}{m^2} - \frac{2(m+3)}{m} &= 4 \\ \Leftrightarrow 2(m^2 + 2m + 1) - m(m+3) &= 2m^2 \\ \Leftrightarrow m^2 - m - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 & (\text{thỏa mãn}) \\ m = 2 & (\text{không thỏa mãn}). \end{cases}\end{aligned}$$

Vậy $m = -1$ là giá trị cần tìm. □

Bài 4. Cho a, b là hai số thực dương. Chứng minh rằng $a + b + \frac{2}{a} + \frac{2}{b} \geq 4 + \sqrt{ab}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương, ta được

$$a + b + \frac{2}{a} + \frac{2}{b} \geq 2\sqrt{ab} + \frac{4}{\sqrt{ab}} = \sqrt{ab} + \frac{4}{\sqrt{ab}} + \sqrt{ab} \geq 4 + \sqrt{ab}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b > 0 \\ \sqrt{ab} = \frac{4}{\sqrt{ab}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b > 0 \\ ab = 4 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 2. \quad \square$$

Bài 5. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có $A(-2; -1)$, $B(-1; 4)$, $C(3; 0)$.

- Chứng minh tam giác ABC cân. Tính diện tích tam giác ABC .
- Tìm tọa độ điểm K sao cho $\overrightarrow{AK} + 2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{KB}$.
- Tìm tọa độ điểm H là trực tâm tam giác ABC .

Lời giải.

- a) Ta có $AB = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$ và $AC = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$. Suy ra tam giác ABC cân tại A .

Gọi M là trung điểm của BC , ta có $M(1; 2)$ và $AM \perp BC$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \frac{1}{2}AM \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3^2 + 3^2} \cdot \sqrt{4^2 + 4^2} = 12$.

- b) Gọi $K(x; y)$, ta có $\overrightarrow{AK} = (x + 2; y + 1)$, $\overrightarrow{BC} = (4; -4)$, $\overrightarrow{KB} = (-1 - x; 4 - y)$.

$$\overrightarrow{AK} + 2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{KB} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 + 8 = -1 - x \\ y + 1 - 8 = 4 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{11}{2} \\ y = \frac{11}{2} \end{cases}.$$

Vậy $K\left(-\frac{11}{2}; \frac{11}{2}\right)$.

- c) Gọi $H(x; y)$, ta có $\overrightarrow{AH} = (x + 2; y + 1)$, $\overrightarrow{BC} = (4; -4)$, $\overrightarrow{BH} = (x + 1; y - 4)$, $\overrightarrow{AC} = (5; 1)$.

Vì H là trực tâm tam giác ABC nên ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 8 - 4y - 4 = 0 \\ 5x + 5 + y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } H\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

□

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Phương trình $|x - 2| = |3x - 1|$ có tập nghiệm là

- A. $S = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right\}$. B. $S = \left\{\frac{3}{4}\right\}$. C. $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$. D. $S = \mathbb{R}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } |x - 2| = |3x - 1| \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 3x - 1 \\ x - 2 = -(3x - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{3}{4} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } S = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right\}.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 2. Cho phương trình $|x - 3m + 1| = |(m + 1)x - 3|$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. Khi $m = 0$ phương trình vô nghiệm.
 B. Khi $m = -2$ phương trình vô nghiệm.
 C. Khi $m \neq 0$ và $m \neq -2$ phương trình có 2 nghiệm.
 D. Khi $m \neq 0$ phương trình có nghiệm duy nhất.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } |x - 3m + 1| = |(m + 1)x - 3| \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3m + 1 = (m + 1)x - 3 \\ x - 3m + 1 = -(m + 1)x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx = 4 - 3m \\ (m + 2)x = 3m + 2 \end{cases}. \text{ Nếu}$$

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -2 \end{cases} \text{ thì ta có nghiệm } \begin{cases} x = \frac{4 - 3m}{m} \\ x = \frac{3m + 2}{m + 2} \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 3. Cho phương trình $\frac{3m(x - 1)}{x + 1} = 5m + 1$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. Khi $m \neq -\frac{1}{8}$ phương trình có nghiệm bằng 0.
 B. Khi $m \neq -\frac{1}{2}$ phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\frac{8m + 1}{2m + 1}$.
 C. Khi $\begin{cases} m \neq -\frac{1}{2} \\ m \neq 0 \end{cases}$ phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\frac{8m + 1}{2m + 1}$.
 D. Khi $m = -\frac{1}{2}$ phương trình có tập nghiệm $S = \mathbb{R}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \neq -1$.

$$\frac{3m(x - 1)}{x + 1} = 5m + 1 \Leftrightarrow 3m(x - 1) = (5m + 1)(x + 1) \Leftrightarrow (2m + 1)x = -8m - 1 \quad (1)$$

$$\text{Khi } m \neq -\frac{1}{2}, \text{ phương trình (1) có nghiệm } x = -\frac{8m + 1}{2m + 1}.$$

$$\text{Do } x \neq -1 \text{ nên } -\frac{8m + 1}{2m + 1} \neq -1 \Leftrightarrow 8m + 1 \neq 2m + 1 \Leftrightarrow m \neq 0.$$

Vậy khi $\begin{cases} m \neq -\frac{1}{2} \\ m \neq 0 \end{cases}$ phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\frac{8m+1}{2m+1}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 4. Tập nghiệm của phương trình $x^2 + 2|x| - 3 = 0$ là

- A. $S = \{-2; 2\}$. B. $S = \{-1; 1\}$. C. $S = \{-1; 2\}$. D. $S = \{-2; 1\}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} x^2 + 2|x| - 3 = 0 &\Leftrightarrow |x|^2 + 2|x| - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (|x| - 1)(|x| + 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow |x| = 1 \text{ (do } |x| + 3 > 0) \\ &\Leftrightarrow x = \pm 1 \end{aligned}$$

Vậy $S = \{-1; 1\}$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 5. Cho $\triangle ABC$, tập hợp các điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$ là

- A. Đường trung trực BC .
B. Đường tròn tâm I , bán kính $R = \frac{AB}{2}$ với I là đỉnh của hình bình hành $ABIC$.
C. Đường thẳng song song với BC .
D. Đường tròn tâm I , bán kính $R = \frac{AB}{2}$ với I là đỉnh của hình bình hành $ABCI$.

Lời giải.

Gọi I là điểm thỏa: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{BC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{CB}$, suy ra I là đỉnh thứ 4 của hình bình hành $ABCI$ nên I cố định.

Ta có:

$$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MI}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{BA}| \Leftrightarrow MI = \frac{BA}{2}$$

Suy ra tập hợp điểm M là đường tròn tâm I , bán kính $R = \frac{AB}{2}$, với I là đỉnh thứ 4 của hình bình hành $ABCI$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 6. Số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2 + y^2 + 3(x + y) = 28 \end{cases}$ bằng

- A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.

Lời giải.

Đặt $S = x + y, P = xy$ với điều kiện $S^2 \geq 4P$.

Ta có hệ:

$$\begin{cases} S + P = 11 \\ S^2 - 2P + 3S = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 11 - S \\ S^2 - 2(11 - S) + 3S = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 11 - S \\ S^2 + 5S - 50 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 5 \\ P = 6 \end{cases} \text{ (nhận)} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} S = -10 \\ P = 21 \end{cases} \text{ (nhận)}$$

Với $\begin{cases} S = 5 \\ P = 6 \end{cases}$ ta có: $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$.

Với $\begin{cases} S = -10 \\ P = 21 \end{cases}$ ta có: $\begin{cases} x + y = -10 \\ xy = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -7 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -7 \\ y = -3 \end{cases}$.

Vậy nghiệm của hệ là $(2; 3), (3; 2), (-3; -7), (-7; -3)$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 7. Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho $A(1; 1), B(-1; 3)$ và $H(0; 1)$. Tìm tọa độ điểm C sao cho H là trực tâm $\triangle ABC$.

- A. $C(-1; 0)$. B. $C(1; 0)$. C. $C(0; 1)$. D. $C(0; -1)$.

Lời giải.

Gọi $C(a; b)$. Ta có:
$$\begin{cases} \overrightarrow{CH} = (-a; 1 - b) \\ \overrightarrow{AB} = (-2; 2) \\ \overrightarrow{AH} = (-1; 0) \\ \overrightarrow{BC} = (a + 1; b - 3) \end{cases}.$$

H là trực tâm $\triangle ABC \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2(1 - b) = 0 \\ -(a + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}.$

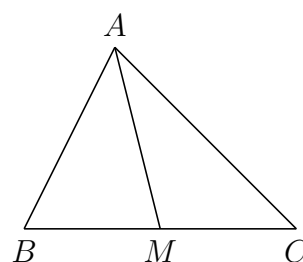
Chọn đáp án **A** □

Câu 8. Cho $\triangle ABC$ có trung tuyến AM , Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. B. $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.
C. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$. D. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BM}$.

Lời giải.

Theo công thức trung tuyến: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$



Chọn đáp án **A** □

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2x^2 - 4mx + 2m^2 + m + 1 = 0$ có nghiệm.

- A. $m > 1$. B. $m \leq -1$. C. $m < -1$. D. $m = 1$.

Lời giải.

Phương trình đã cho có hệ số $a = 2 \neq 0$, nên để phương trình có nghiệm ta chỉ cần xét Δ' là đủ.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (-2m)^2 - 2 \cdot (2m^2 + m + 1) \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -1$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 10. Xác định hàm số $f(x)$ biết đồ thị của nó là đường thẳng đi qua hai điểm $A(1; 5)$ và $B(0; 2)$.

- A. $f(x) = 3x + 2$. B. $f(x) = -3x - 2$. C. $f(x) = -3x + 2$. D. $f(x) = 3x - 2$.

Lời giải.

Giả sử $f(x) = ax + b$ có đồ thị là đường thẳng d .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} A \in d \\ B \in d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 3x + 2.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 11. Cho góc x thỏa mãn $90^\circ < x < 180^\circ$. Đặt $P = \sin x \cdot \cos x$. Ta có mệnh đề đúng là

A. $P = 0$.

B. $P > 0$.

C. $P < 0$.

D. $P > 1$.

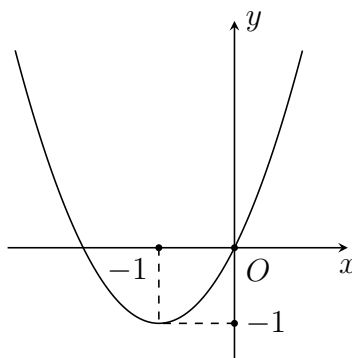
Lời giải.

$$\text{Với } 90^\circ < x < 180^\circ \text{ ta có } \begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x < 0 \end{cases}, \text{ do đó } P = \sin x \cdot \cos x < 0.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 12. Một trong các hàm số cho ở các phương án **A, B, C, D** có đồ thị như trong hình vẽ bên.



Hỏi đó là hàm số nào?

A. $y = x^2 - 2x + 2$.

B. $y = x^2 + 2x$.

C. $y = -x^2 + 2x$.

D. $y = -x^2 - 2x - 2$.

Lời giải.

Gọi $(P) : y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

$$\text{Ta có: } \begin{cases} O \in (P) \\ \text{tọa độ đỉnh } I(-1; -1) \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a - b = -1 \\ -\frac{b}{2a} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow (P) : y = x^2 + 2x.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 13. Cho hàm số $y = (m^2 - 4)x + 2m - 1$. Xác định m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $\begin{cases} m < 2 \\ m > -2 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} m < 2 \\ m > -2 \end{cases}$.

Lời giải.

$$\text{Hàm số đồng biến trên } \mathbb{R} \Leftrightarrow m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 14. Tập giá trị của hàm số $y = |3 + x| - 1$ là

A. $\mathbb{R}$.

B. $[-1; +\infty)$.

C. $\setminus \{1\}$.

D. $(-\infty; 1]$.

Lời giải.

Ta có: $|3+x| \geq 0 \Leftrightarrow |3+x| - 1 \geq -1 \Rightarrow y \geq -1$. Dấu “=” xảy ra khi $x = -3$.

Vậy tập giá trị của hàm số là $[-1; +\infty)$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 15. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.
B. Nếu O là trung điểm của AB thì với mọi M ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MO}$.
C. Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AG}$.
D. Với 3 điểm bất kì I, J, K ta có $\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JK} = \overrightarrow{IK}$.

Lời giải.

Chú ý rằng $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \begin{cases} A, B, C \text{ không thẳng hàng} \\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A, B, C \text{ không thẳng hàng} \\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \end{cases}$.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 16. Số nghiệm nguyên của phương trình $\sqrt{x-3} + 5 = \sqrt{7-x} + x$ là

- A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

Lời giải.

Điều kiện: $3 \leq x \leq 7$.

Ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{x-3} + 5 &= \sqrt{7-x} + x \Leftrightarrow \sqrt{x-3} - \sqrt{7-x} = x - 5 \Leftrightarrow \frac{2(x-5)}{\sqrt{x-3} + \sqrt{7-x}} = x - 5 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ \sqrt{x-3} + \sqrt{7-x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ 2\sqrt{(x-3)(7-x)} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 3 \\ x = 7 \end{cases} \end{aligned}$$

Chọn đáp án (A)

□

Câu 17. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho các điểm $A(4;6)$, $B(1;4)$ và $C\left(7; \frac{3}{2}\right)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) < 90^\circ$. B. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 90^\circ$.
C. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 180^\circ$. D. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0^\circ$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-3; -2)$, $\overrightarrow{AC} = (3; -\frac{9}{2}) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 90^\circ$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 18. Cho hai điểm phân biệt A và B . Điều kiện cần và đủ để điểm I là trung điểm đoạn AB là

- A. $IA = IB$. B. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BI}$. C. $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$. D. $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$.

Lời giải.

Ta có: I là trung điểm $AB \Leftrightarrow \begin{cases} I \in \text{đoạn } AB \\ IA = IB \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 19. Xác định tập nghiệm của phương trình $x^2 - (3m + 1)x + 3m = 0$.

- A. $S = \{1; -3m\}$. B. $S = \{-1; 3m\}$. C. $S = \{1; 3m\}$. D. $S = \{-1; -3m\}$.

Lời giải.

$$\text{Phương trình } x^2 - (3m + 1)x + 3m = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 3m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3m \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 20. Xác định phương trình của Parabol có đỉnh $I(0; -1)$ và đi qua điểm $A(2; 3)$.

- A. $y = x^2 + 1$. B. $y = (x - 1)^2$. C. $y = (x + 1)^2$. D. $y = x^2 - 1$.

Lời giải.

Gọi $(P) : y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

$$\text{Ta có: } \begin{cases} I(0; -1) \in (P) \\ x_1 = 0 = -\frac{b}{2a} \\ A(2; 3) \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1 \\ b = 0 \\ 4a + 2b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1 \\ b = 0 \\ a = 1 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 21. Cho phương trình $(m^2 - 1)x + m + 1 = 0$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Khi $m \neq \pm 1$ phương trình có nghiệm duy nhất.
B. Khi $m = 1$ phương trình có tập nghiệm $S = \emptyset$.
C. Khi $m = -1$ phương trình có tập nghiệm $S = \mathbb{R}$.
D. Khi $m = \pm 1$ phương trình vô nghiệm.

Lời giải.

Ta có:

- Nếu $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$ thì phương trình có nghiệm duy nhất.
- Nếu $m = 1$ thì ta có phương trình: $0x + 2 = 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.
- Nếu $m = -1$ thì ta có phương trình: $0x + 0 = 0 \Rightarrow$ phương trình có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 22. Hàm số $y = 2x^2 + 16x - 25$ đồng biến trên khoảng

- A. $(-4; +\infty)$. B. $(-\infty; 8)$. C. $(-\infty; -4)$. D. $(-6; +\infty)$.

Lời giải.

Tọa độ đỉnh $I(-4; -57)$.

Bảng biến thiên:

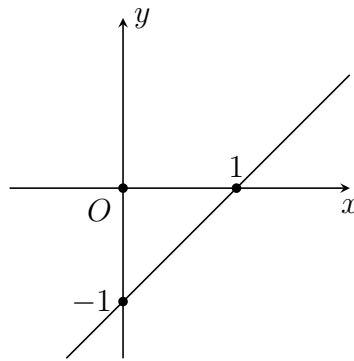
x	$-\infty$	-4	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-57	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(-4; +\infty)$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 23. Một trong các hàm số cho ở các phương án **A, B, C, D** có đồ thị như trong hình vẽ bên.



Hỏi đó là hàm số nào?

- A.** $y = x + 1$. **B.** $y = -x + 1$. **C.** $y = x - 1$. **D.** $y = -x - 1$.

Lời giải.

Đồ thị trong hình là đường thẳng, nên giả sử $d : y = ax + b$ ($a \neq 0$).

Dựa vào đồ thị bên ta có:
$$\begin{cases} (1; 0) \in d \\ (0; -1) \in d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}.$$

Vậy $d : y = x - 1$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 24. Cho tập hợp $A = (-\infty; 3]$, $B = (2; +\infty)$. Khi đó, tập $B \cup A$ là

- A.** $(2; 3]$. **B.** $(-3; 2]$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $\emptyset$.

Lời giải.

Hợp hai tập hợp A và B là lấy các phần tử thuộc A hoặc B.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 25. Cho tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$. Số tập con gồm 2 phần tử của A là

- A.** 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 7.

Lời giải.

Các tập con gồm 2 phần tử của A là: $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 26. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}$. Tập A được viết dưới dạng liệt kê các phần tử là

- A.** $A = \{0; 1; 2; 4; 5\}$. **B.** $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. **C.** $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. **D.** $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

Lời giải.

Ta có $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \geq 0$. Lại có $x \leq 5 \Rightarrow 0 \leq x \leq 5$, từ đó ta có $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 27. Chuẩn bị được nghỉ hè, một lớp có 45 học sinh bàn nhau chọn một trong hai địa điểm để cả lớp cùng đi tham quan du lịch. Do sự lựa chọn của các bạn không được tập trung và thống nhất vào một địa điểm nào, Lớp trưởng đã lấy biểu quyết bằng giơ tay. Kết quả: hai lần số bạn chọn đi Tam Đảo thì ít hơn ba lần số bạn chọn đi Hạ Long là 3 bạn và có 9 bạn chọn đi địa điểm khác. Với nguyên tắc số ít hơn phải theo số đông hơn thì họ sẽ đi tham quan du lịch đến địa điểm là

- A.** Địa điểm khác. **B.** Tam hoãn để bàn lại.

C. Tam Đảo.

D. Hạ Long.

Lời giải.

Gọi m, n lần lượt là số học sinh chọn đi Tam Đảo và Hạ Long.

$$\text{Ta có hệ sau: } \begin{cases} 2m = 3n - 3 \\ m + n + 9 = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 21 \\ n = 15 \end{cases}.$$

Như vậy, có 21 bạn chọn đi Tam Đảo, có 15 bạn chọn đi Hạ Long và 9 bạn chọn đi địa điểm khác.

Từ đó, theo nguyên tắc đã đưa ra thì các bạn học sinh sẽ chọn đi Tam Đảo.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 28. Cho tập hợp $A = [-2; 3], B = (1; 5]$. Khi đó, tập $A \setminus B$ là

A. $[-2; 1)$.

B. $(-2; -1)$.

C. $(-2; 1]$.

D. $[-2; 1]$.

Lời giải.

Ta có: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$, từ đó ta có $A \setminus B = [-2; 1]$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 29. Xác định tập nghiệm của phương trình $\sqrt{4x-1} = x-2$.

A. $S = \{4 + \sqrt{11}\}$.

B. $S = \{4 - \sqrt{11}\}$.

C. $S = \{4 - \sqrt{11}; 4 + \sqrt{11}\}$.

D. $S = \emptyset$.

Lời giải.

Ta có:

$$\sqrt{4x-1} = x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 4x-1 = (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 8x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \begin{cases} x = 4 + \sqrt{11} \\ x = 4 - \sqrt{11} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + \sqrt{11} \\ x = 4 - \sqrt{11} \end{cases}$$

Vậy $S = \{4 + \sqrt{11}\}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 30. Số nghiệm của phương trình $2x + \frac{1}{\sqrt{x+1}} = -x^2 + \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

Điều kiện: $x > -1$.

$$\text{Ta có: } 2x + \frac{1}{\sqrt{x+1}} = -x^2 + \frac{1}{\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow 2x = -x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}.$$

So điều kiện ta nhận $x = 0$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 31. Cho tập hợp $A = [m; m+2], B = [-1; 2]$. Điều kiện của m để $A \subset B$ là

A. $1 \leq m \leq 2$.

B. $-1 \leq m \leq 0$.

C. $m \leq -1$ hoặc $m \geq 0$.

D. $m < -1$ hoặc $m > 2$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } A \subset B \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq m \\ m+2 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 0.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 32. Hệ phương trình

$$\begin{cases} mx + y = m + 1 \\ 2x - (m - 1)y = 3 \end{cases}$$

là hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn khi có

A. $m \in \mathbb{R}$.

B. $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$.

C. $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

D. $m \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$.

Lời giải.

Hệ đã cho là hệ hai phương trình bậc nhất 2 ẩn $\Leftrightarrow D \neq 0$.

$$\text{Ta có: } D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 2 & 1-m \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow m(1-m) - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 33. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB = a, BC = 2a$, khi đó $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$ bằng

A. $a\sqrt{3}$.

B. a .

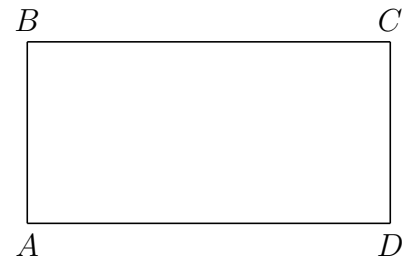
C. $3a$.

D. $a\sqrt{5}$.

Lời giải.

Ta có:

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{5}.$$



Chọn đáp án **D**

□

Câu 34. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{3}x + \sqrt{2}y = -1 \\ 2\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 0 \end{cases}$ ta có nghiệm là

A. $(-\sqrt{3}; -2\sqrt{2})$.

B. $(-\sqrt{3}; 2\sqrt{2})$.

C. $(\sqrt{3}; 2\sqrt{2})$.

D. $(\sqrt{3}; -2\sqrt{2})$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \sqrt{3}x + \sqrt{2}y = -1 \\ 2\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \sqrt{6}y = -\sqrt{3} \\ 4x + \sqrt{6}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ 4x + \sqrt{6}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = -2\sqrt{2} \end{cases}$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 35. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^2 + 4x - 1$ là

A. -2 .

B. -3 .

C. 3 .

D. 2 .

Lời giải.

Ta có: $y = -x^2 + 4x - 1 = -(x - 2)^2 + 3 \leq 3$. Dấu “=” xảy ra khi $x = 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của y là 3, khi $x = 2$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 36. Cho tam giác đều cạnh a . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\overrightarrow{BC}$.

B. $|\overrightarrow{AC}| = \overrightarrow{BC}$.

C. $|\overrightarrow{AB}| = a$.

D. $\overrightarrow{AC} = a$.

Lời giải.

Ta có: $|\overrightarrow{AB}| = AB = a$.

Chọn đáp án **C**

□

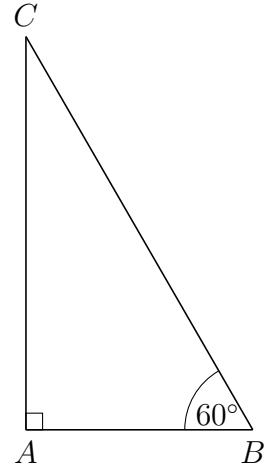
Câu 37. Cho tam giác ABC vuông tại A , có số đo góc B là 60° và $AB = a$. Kết quả nào sau đây là sai?

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.
 B. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 3a^2$.
 C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2$.
 D. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = -3\sqrt{2}a^2$.

Lời giải.

Ta có: $AB = a, BC = 2a, AC = a\sqrt{3}$.

- Do $AB \perp AC$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.
- Ta có: $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CA \cdot CB \cdot \cos 30^\circ = 3a^2$.
- Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -BA \cdot BC \cdot \cos 60^\circ = -a^2$.
- Ta có: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -CA \cdot CB \cdot \cos 30^\circ = -3a^2$.



Chọn đáp án **D**

□

Câu 38. Tọa độ đỉnh của Parabol $y = x^2 - 2x + 4$ là

- A. $I(1; -3)$.
 B. $I(-1; -3)$.
 C. $I(-1; 3)$.
 D. $I(1; 3)$.

Lời giải.

Công thức tọa độ đỉnh là $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$. Từ đó ta có: $I(1; 3)$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 39. Cho $\triangle ABC$, có bao nhiêu điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 3$?

- A. 3.
 B. 2.
 C. 1.
 D. Vô số.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$. Ta có: $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 3 \Leftrightarrow |3\overrightarrow{MG}| = 3 \Leftrightarrow MG = 1$.

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm G , bán kính $R = 1$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 40. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x+2} + \frac{x^3}{4|x|-3}$ là

- A. $\mathcal{D} = [-2; +\infty)$.
 B. $\mathcal{D} = [-2; +\infty) \setminus \left\{-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right\}$.
 C. $\mathcal{D} = \left\{-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right\}$.
 D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right\}$.

Lời giải.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 4|x|-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \neq \pm \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \mathcal{D} = [-2; +\infty) \setminus \left\{-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right\}$.

Chọn đáp án **B**

□

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. (1.0 điểm)

- a) Tìm m để phương trình $x^2 + 2x + m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1^2 + x_2^2 = 6$.
b) Giải phương trình: $\sqrt{x^2 + 2x - 6} = 2x - 3$.

Lời giải.

- a) Tìm m để phương trình $x^2 + 2x + m = 0$ (*) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1^2 + x_2^2 = 6$.
Ta có: $\Delta' = (b')^2 - ac = 1 - m$.

Phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ 1 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 1$.

Khi đó, theo định lí Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -2 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = m \end{cases}$.

Ta có: $x_1^2 + x_2^2 = 6 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 6 \Leftrightarrow 4 - 2m = 6 \Leftrightarrow m = -1$ (nhận).

- b) Giải phương trình: $\sqrt{x^2 + 2x - 6} = 2x - 3$.

$$\sqrt{x^2 + 2x - 6} = 2x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 \geq 0 \\ x^2 + 2x - 6 = (2x - 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ 3x^2 - 14x + 15 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ \begin{bmatrix} x = 3 \text{ (nhận)} \\ x = \frac{5}{3} \text{ (nhận)} \end{bmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 3 \\ x = \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ \frac{5}{3}; 3 \right\}.$$

□

Bài 2. (1.0 điểm)

- a) Cho biết $\sin \alpha = \frac{1}{4}$. Hãy tính $\cot \alpha$?
b) Trong mặt phẳng Oxy cho bốn điểm không thẳng hàng: $A(3; 4), B(4; 1), C(2; -3), D(-1; 6)$.
Chứng minh rằng $ABCD$ là tứ giác nội tiếp được một đường tròn.

Lời giải.

- a) Cho biết $\sin \alpha = \frac{1}{4}$. Hãy tính $\cot \alpha$?

Ta có: $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Leftrightarrow \cot^2 \alpha = 15 \Leftrightarrow \cot \alpha = \pm \sqrt{15}$.

- b) Trong mặt phẳng Oxy cho bốn điểm không thẳng hàng: $A(3; 4), B(4; 1), C(2; -3), D(-1; 6)$.
Chứng minh rằng $ABCD$ là tứ giác nội tiếp được một đường tròn.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1; -3), \overrightarrow{AD} = (-4; 2), \overrightarrow{CB} = (2; 4), \overrightarrow{CD} = (-3; 9)$

Suy ra:

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{-10}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{20}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 135^\circ \Rightarrow \widehat{BAD} = 135^\circ.$$

$$\cos(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CB}| \cdot |\overrightarrow{CD}|} = \frac{30}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{90}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = 45^\circ \Rightarrow \widehat{BCD} = 45^\circ.$$

Tứ giác $ABCD$ có $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ \Rightarrow ABCD$ là tứ giác nội tiếp.

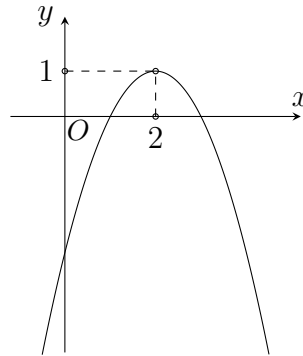
□

ĐÁP ÁN

1. A	2. C	3. C	4. B	5. D
6. A	7. A	8. A	9. B	10. A
11. C	12. B	13. B	14. B	15. A
16. A	17. B	18. D	19. C	20. D
21. D	22. A	23. C	24. C	25. B
26. C	27. C	28. D	29. A	30. B
31. B	32. A	33. D	34. D	35. C
36. C	37. D	38. D	39. D	40. B

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong các hàm số cho ở các phương án A, B, C, D.



Hỏi đó là hàm số nào?

- A. $y = x^2 - 4x - 3$.
- B. $y = -x^2 + 4x$.
- C. $y = x^2 + 4x - 3$.
- D. $y = -x^2 + 4x - 3$.

Lời giải.

Đồ thị đã cho là đồ thị của hàm số bậc hai có hệ số $a < 0$, tọa độ đỉnh $I(2; 1)$. Trong bốn hàm số đã cho chỉ có hàm số $y = -x^2 + 4x - 3$ thỏa mãn tính chất về đồ thị như hình vẽ.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các vectơ $\vec{a} = (1; -3)$, $\vec{b} = (5; 2)$. Tọa độ của vectơ $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ là

- A. $\vec{x} = (-12; 13)$.
- B. $\vec{x} = (12; 13)$.
- C. $\vec{x} = (-12; -13)$.
- D. $\vec{x} = (-13; 12)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} 2\vec{a} = (2; -6) \\ -3\vec{b} = (-15; -6) \end{cases} \Rightarrow \vec{x} = (-12; -13)$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 3. Điều kiện xác định của phương trình: $x - 1 + \frac{1}{x-1} = \frac{x}{\sqrt{x}}$ là

- A. $x \geq 0, x \neq 1$.
- B. $x \geq 0$.
- C. $x > 1$.
- D. $x > 0, x \neq 1$.

Lời giải.

$$\text{Phương trình đã cho xác định khi và chỉ khi: } \begin{cases} x - 1 \neq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x > 0 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 4. Cho hàm số $y = |x - 3|$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau về hàm số:

- A. Hàm số chẵn.
- B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- C. Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $y = 0$.
- D. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Rõ ràng $y = |x - 3| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $y = 0$ khi $x = 3$. Bởi vậy, giá trị nhỏ nhất của hàm số là $y = 0$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 5. Số giao điểm của 2 đồ thị hàm số $(P_1) : y = -x^2 + x$ và $(P_2) : y = x^2 - 2x - 3$ là

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của 2 đồ thị hàm số $(P_1) : y = -x^2 + x$ và $(P_2) : y = x^2 - 2x - 3$ là

$$-x^2 + x = x^2 - 2x - 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 - \sqrt{33}}{4} \\ x = \frac{3 + \sqrt{33}}{4} \end{cases}$$

Do đó, 2 đồ thị của hai hàm số cắt nhau tại 2 điểm.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho 2 điểm $A(2; -5)$, $B(-1; 3)$. Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB}$ là

A. $\overrightarrow{AB} = (1; -2)$.

B. $\overrightarrow{AB} = (-3; 8)$.

C. $\overrightarrow{AB} = (3; -8)$.

D. $\overrightarrow{AB} = (-2; -15)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1 - 2; 3 + 5)$ hay $\overrightarrow{AB} = (-3; 8)$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 7. Số nghiệm của phương trình $\frac{x^2 + 6}{x - 2} = \frac{5x}{x - 2}$ là

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x \neq 2$.

Với điều kiện đó, phương trình đã cho tương đương với: $x^2 + 6 = 5x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$. Đối

chiếu điều kiện, phương trình có một nghiệm là $x = 3$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 8. Số nghiệm của phương trình $x\sqrt{x-2} = \sqrt{2-x}$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải.

Điều kiện xác định $\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$.

Thay $x = 2$ vào phương trình thấy thỏa mãn. Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{m-x}$ xác định trên tập $(1; 3)$.

A. $1 \leq m \leq 3$.

B. $m \geq 3$.

C. $m < 1$.

D. $m > 3$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ m - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq m \end{cases}$.

Do đó, để hàm số xác định trên tập $(1; 3)$ điều kiện cần và đủ là $m \geq 3$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 10. Cho parabol $(P) : y = -3x^2 + 9x + 2$ và các điểm $M(2; 8)$, $N(3; 56)$. Chọn khẳng định đúng

A. $M \in (P)$, $N \in (P)$. B. $M \notin (P)$, $N \notin (P)$. C. $M \notin (P)$, $N \in (P)$. D. $M \in (P)$, $N \notin (P)$.

Lời giải.

Thay tọa độ các điểm M và N vào phương trình parabol, ta có $M \in (P)$, $N \notin (P)$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 11. Trục đối xứng của đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ là đường thẳng

A. $x = -2$. B. $y = 4$. C. $y = 2$. D. $x = 2$.

Lời giải.

Ta có $-\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2$, nên trục đối xứng của đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ là đường thẳng $x = 2$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 12. Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 7$. Chọn khẳng định đúng

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số $y = x^2 - 4x + 7$ có hệ số $a = 1 > 0$ và $-\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 13. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = 2x^2 + x - 5$ với trục hoành là

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là: $2x^2 + x - 5 = 0$.

Phương trình này có $a \cdot c = 2 \cdot (-5) < 0$ nên nó có hai nghiệm phân biệt. Bởi vậy, đồ thị hàm số và trục hoành cắt nhau tại 2 điểm phân biệt.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $A(2; 5)$, $B(1; 3)$, $C(5; -1)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

A. $G(8; 7)$. B. $G\left(\frac{8}{3}; \frac{7}{3}\right)$. C. $G\left(-\frac{8}{3}; -\frac{7}{3}\right)$. D. $G\left(-\frac{8}{3}; \frac{7}{3}\right)$.

Lời giải.

Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là:

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{2 + 1 + 5}{3} = \frac{8}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{5 + 3 + (-1)}{3} = \frac{7}{3} \end{cases}$$

Vậy: $G = \left(\frac{8}{3}; \frac{7}{3}\right)$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 15. Tìm m để 3 đường thẳng $d_1 : y = x + 1$, $d_2 : 3x - 1$, $d_3 : y = 2mx - 4m$ đồng quy (cùng đi qua một điểm).

- A. $m = 1$. B. $m = -1$. C. $m = 0$. D. $m \in \emptyset$.

Lời giải.

Tọa độ giao M điểm của d_1 và d_2 là nghiệm $(x; y)$ của hệ:

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = 3x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Như vậy $M(1; 2)$. Ba đường thẳng đã cho đồng quy khi và chỉ khi d_3 đi qua M , điều này xảy ra khi và chỉ khi:

$$2 = 2m \cdot 1 - 4m \Leftrightarrow m = -1$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn CD gấp đôi đáy nhỏ AB . Biết $A(1; 1)$, $B(-1; 2)$, $C(0; 1)$. Tọa độ điểm D là

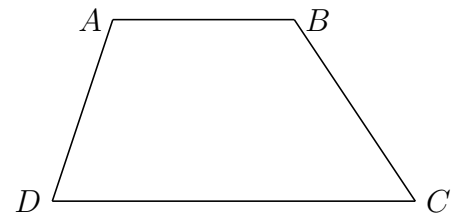
- A. $D(4; -1)$. B. $D(-4; -1)$. C. $D(4; 1)$. D. $D(-4; 1)$.

Lời giải.

Ta có:

$$\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 0 = 2(1 - (-1)) \\ y_D - 1 = 2(1 - 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 4 \\ y_D = -1 \end{cases}$$

Như vậy: $D(4; -1)$.



Chọn đáp án **A**

□

Câu 17. Hàm số nào dưới đây là hàm số lẻ trên tập xác định của nó?

- A. $y = x^3 - x + 1$. B. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.
C. $y = |x + 1| + |x - 1|$. D. $y = 2x - x^3$.

Lời giải.

Hàm số $y = 2x - x^3$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, ta có:

- Với $\forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}$.
- Với $\forall x \in \mathcal{D}$: $y(-x) = 2(-x) - (-x)^3 = -(2x - x^3) = -y(x)$.

Nên hàm số $y = 2x - x^3$ là hàm số lẻ trên $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Chọn đáp án **D**

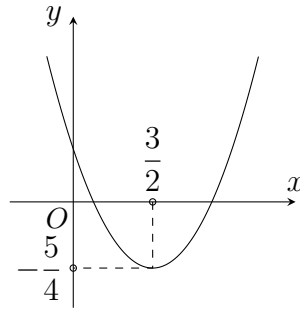
□

Câu 18. Tìm m để đồ thị hàm số $y = |x^2 - 3x + 1|$ cắt đường thẳng $y = m$ tại 4 điểm phân biệt.

- A. $0 \leq m \leq \frac{5}{4}$. B. $0 < m < \frac{5}{4}$. C. $m > 0$. D. $m > \frac{5}{4}$.

Lời giải.

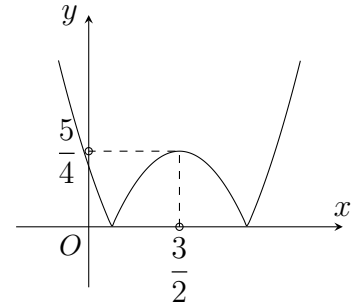
Ta có đồ thị của hàm số $(P) : y = x^2 - 3x + 1$:



Ta có:

$$y = |x^2 - 3x + 1| = \begin{cases} x^2 - 3x + 1 & \text{nếu } x^2 - 3x + 1 \geq 0 \\ -(x^2 - 3x + 1) & \text{nếu } x^2 - 3x + 1 < 0 \end{cases}$$

Do đó, từ đồ thị hàm số $(P) : y = x^2 - 3x + 1$ ta vẽ đồ thị hàm số $(C) : y = |x^2 - 3x + 1|$ như sau:



- Giữ nguyên phần đồ thị (P) nằm phía trên (và thuộc) trục hoành Ox .
- Lấy đối xứng phần đồ thị (P) nằm phía dưới trục hoành qua trục hoành.

Từ đồ thị hàm số đồ thị hàm số $y = |x^2 - 3x + 1|$, suy ra điều kiện để đồ thị hàm số $y = |x^2 - 3x + 1|$ cắt đường thẳng $y = m$ tại 4 điểm phân biệt là: $0 < m < \frac{5}{4}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 19. Tập nghiệm của phương trình $(m^2 - 9)x + 6 - 2m = 0$ trong trường hợp $m^2 - 9 \neq 0$ là

- A. $\left\{\frac{2}{m+3}\right\}$. B. $\left\{\frac{2}{m-3}\right\}$. C. $\emptyset$. D. $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Với $m^2 - 9 \neq 0$ ta có $(m^2 - 9)x + 6 - 2m = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2(m-3)}{m^2-9} \Leftrightarrow x = \frac{2}{m+3}$.

Tập nghiệm của phương trình trong trường hợp $m^2 - 9 \neq 0$ là $S = \left\{\frac{2}{m+3}\right\}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 20. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{2x-1} = x-1$ là

- A. $\{2 + \sqrt{2}\}$. B. $\emptyset$. C. $\{2 + \sqrt{2}; 2 - \sqrt{2}\}$. D. $\{2 - \sqrt{2}\}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\sqrt{2x-1} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 = (x-1)^2 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 2 = 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{2} \text{ hoặc } x = 2 - \sqrt{2} \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{2}$$

Vậy, tập nghiệm của phương trình là: $S = \{2 + \sqrt{2}\}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 21. Tìm m để hàm số $y = (m - \sqrt{5})x - 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m > \sqrt{5}$. B. $m \leq \sqrt{5}$. C. $m \geq \sqrt{5}$. D. $m < \sqrt{5}$.

Lời giải.

Hàm số $y = (m - \sqrt{5})x - 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m - \sqrt{5} < 0 \Leftrightarrow m < \sqrt{5}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 22. Tìm m để hàm số $y = (m - 2)x + 1$ là hàm số bậc nhất.

- A. $m \neq 0$; $m \neq 2$. B. $m \neq 2$. C. $\forall m \in \mathbb{R}$. D. $m \neq 0$.

Lời giải.

Hàm số $y = (m - 2)x + 1$ là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi $m \neq 2$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 23. Tập xác định của hàm số $y = \frac{x - 3}{x + 2}$.

- A. $\mathbb{R}$. B. $(-2; +\infty)$. C. $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. D. $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi $x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$.

Vậy, tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

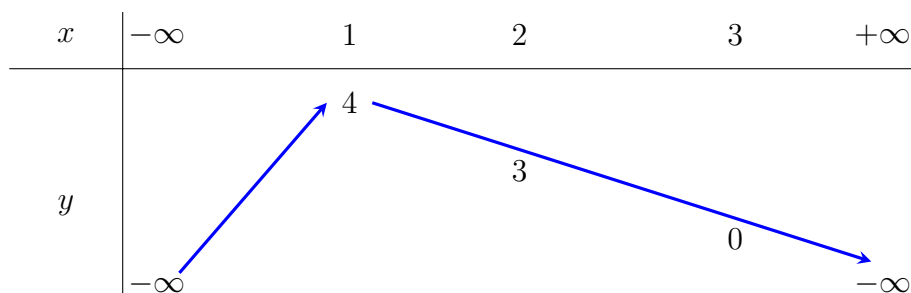
Chọn đáp án **(D)** □

Câu 24. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$ trên đoạn $[2; 3]$ là

- A. 3. B. 4. C. 1. D. 6.

Lời giải.

Hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$ là hàm số bậc hai có hệ số $a = -1 < 0$ và $-\frac{b}{2a} = 1$, nên a có bảng biến thiên sau:



Từ bảng biến thiên suy ra giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$ trên đoạn $[2; 3]$ là bằng 3.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho 4 điểm $A(2; 5)$, $B(1; 7)$, $C(1; 5)$, $D(0; 9)$. Ba điểm nào sau đây thẳng hàng?

- A. Ba điểm A, B, D . B. Ba điểm A, B, C . C. Ba điểm B, C, D . D. Ba điểm A, C, D .

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; 2)$, $\overrightarrow{AD} = (-2; 4)$ nên $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$, do đó ba điểm A, B, D thẳng hàng.

Chọn đáp án **(A)** □

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. (1 điểm) Giải phương trình: $\sqrt{2x^2 - 5x + 2} = x - 2$

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 = (x - 2)^2 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ hoặc } x = 2 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$. □

Bài 2. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x^2 - 3xy + y^2 = 2x - 5 + m^2 \end{cases}$.

a) (1 điểm) Giải hệ phương trình với $m = 0$.

b) (1 điểm) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm.

Lời giải.

$$\text{Xét hệ phương trình: } \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 & (1) \\ x^2 - 3xy + y^2 = 2x - 5 + m^2 & (2) \end{cases}.$$

Từ phương trình (1) ta có $y = 2x + 1$ (3). Thay (3) vào phương trình (2) ta được:

$$x^2 - 3x(2x + 1) + (2x + 1)^2 = 2x - 5 + m^2 \Leftrightarrow x^2 + x + m^2 - 6 = 0 \quad (4)$$

$$\text{a) Khi } m = 0 \text{ phương trình (4) trở thành: } x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Khi $x = -3$ thì $y = -5$.

Khi $x = 2$ thì $y = 5$.

Như vậy, $m = 0$, hệ phương trình có hai nghiệm $(x; y)$ là $(-3; -5)$ và $(2; 5)$.

b) Hệ phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (4) có nghiệm, điều này tương đương với:

$$\Delta = 1 - 4(m^2 - 6) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 \leq \frac{25}{4} \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leq m \leq \frac{5}{2}$$

$$\text{Vậy: } -\frac{5}{2} \leq m \leq \frac{5}{2}.$$

□

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC với $A(-1; 1)$, $B(3; 1)$, $C(2; 4)$.

a) (0,5 điểm) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

b) (0,5 điểm) Chứng minh góc $\widehat{BAC} = 45^\circ$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; 0)$ và $\overrightarrow{AC} = (3; 3)$.

$$\text{a) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \cdot 3 + 0 \cdot 3 = 12.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos \widehat{BAC} &= \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} \\ &= \frac{12}{\sqrt{4^2 + 0^2} \cdot \sqrt{3^2 + 3^2}} = \frac{12}{4 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Do đó: $\widehat{BAC} = 45^\circ$.

□

Bài 4. Cho tam giác ABC . Gọi I là trung điểm cạnh BC , K là điểm thuộc cạnh AC sao cho $KC = 2AK$.

- a) (1 điểm) Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AK}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$. Chứng minh: $\overrightarrow{KI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.
 b) (0,5 điểm) Xác định vị trí điểm M sao cho $2MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

a)

I là trung điểm cạnh BC nên $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

Vì K là điểm thuộc cạnh AC và $KC = 2AK$ nên

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

. Ta có:

$$\overrightarrow{KI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$$

- b) Gọi D là điểm sao cho $2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

Ta có: $2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DI} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DI} = \vec{0}$

Như vậy D là trung điểm của AI .

Khi đó: $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2$

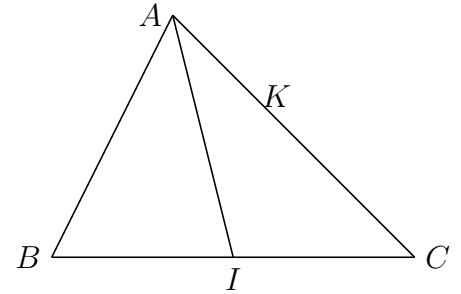
$$= 2(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA})^2 + (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB})^2 + (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC})^2$$

$$= 4MD^2 + DA^2 + DB^2 + DC^2 + \overrightarrow{MD}(2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$$

$$= 4MD^2 + DA^2 + DB^2 + DC^2 \geq DA^2 + DB^2 + DC^2$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $MD = 0$ hay M trùng với điểm D . Như vậy: $2MA^2 + MB^2 + MC^2$ khi M trùng với điểm D là trung điểm của đoạn thẳng AI .

□



ĐÁP ÁN

1. D	2. C	3. D	4. C	5. D
6. B	7. C	8. A	9. B	10. D
11. D	12. C	13. C	14. B	15. B
16. A	17. D	18. B	19. A	20. A
21. D	22. B	23. D	24. A	25. A

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $A(1; -2)$, $B(3; 0)$ và $C(-3; 4)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Tìm tọa độ véc-tơ $\overrightarrow{MN}$.

- A. $\overrightarrow{MN} = (-3; 2)$. B. $\overrightarrow{MN} = (3; -2)$. C. $\overrightarrow{MN} = (-6; 4)$. D. $\overrightarrow{MN} = (1; 0)$.

Câu 2. Mệnh đề phủ định của mệnh đề “2017 là số tự nhiên chẵn” là

- A. 2017 là số chẵn. B. 2017 không là số tự nhiên chẵn.
C. 2017 là số nguyên tố. D. 2017 là số chính phương.

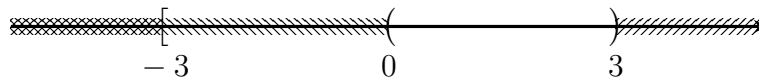
Câu 3. Trục đối xứng của parabol $y = 2x^2 + 2x - 5$ là đường thẳng có phương trình

- A. $x = -\frac{1}{2}$. B. $x = \frac{1}{2}$. C. $x = -1$. D. $x = 1$.

Câu 4. Cho hai tập hợp $A = [-3; 3)$ và $B = (0; +\infty)$. Tìm $A \cup B$.

- A. $A \cup B = (-3; +\infty)$. B. $A \cup B = [-3; +\infty)$.
C. $A \cup B = [-3; 0)$. D. $A \cup B = (0; 3)$.

Lời giải.



Chọn đáp án **B**

□

Câu 5. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ với mọi điểm M . B. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
C. $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GA}$. D. $3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Câu 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(2; 1)$ và $B(6; -1)$. Tìm tọa độ điểm M nằm trên trục hoành sao cho A, B, M là ba điểm thẳng hàng.

- A. $M(4; 0)$. B. $M(3; 0)$. C. $M\left(\frac{1}{2}; 0\right)$. D. $M(-1; 0)$.

Lời giải.

Gọi tọa độ $M(m; 0) \in Ox$. Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; -2)$, $\overrightarrow{AM} = (m - 2; -1)$. Khi đó

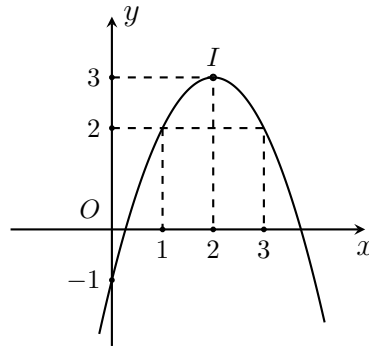
$$\begin{aligned} A, B, M \text{ thẳng hàng} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM} \text{ cùng phương} \\ &\Leftrightarrow \frac{m-2}{4} = \frac{-1}{-2} \Leftrightarrow m = 4. \end{aligned}$$

Vậy $M(4; 0)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 7. Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình bên.

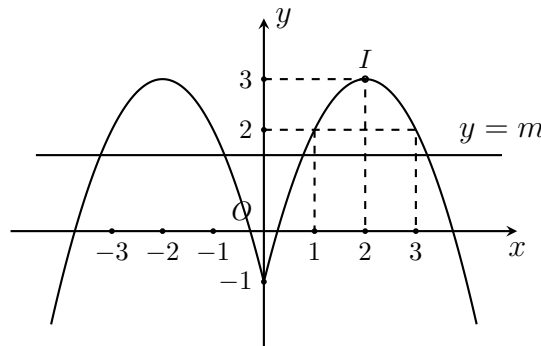


Tìm các giá trị m để phương trình $ax^2 + b|x| + c = m$ có bốn nghiệm phân biệt.

- A. $-1 < m < 3$. B. $0 < m < 3$. C. $0 \leq m \leq 3$. D. $-1 \leq m \leq 3$.

Lời giải.

- Số nghiệm của phương trình $ax^2 + b|x| + c = m$ (1) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = ax^2 + b|x| + c$ và đường thẳng $y = m$.
- Đồ thị hàm số $y = ax^2 + b|x| + c$ có được từ đồ thị $(P): y = ax^2 + bx + c$ thông qua các bước sau
 - ⊕ Bước 1. Xóa phần bên trái trục Oy của (P) .
 - ⊕ Bước 2. Lấy đối xứng phần bên phải trục Oy của (P) qua trục Oy .



- Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình (1) có bốn nghiệm khi $-1 < m < 3$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 8. Tìm điều kiện của tham số m để hàm số $y = (3m - 2)x + 5m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m < \frac{2}{3}$. B. $m > \frac{2}{3}$. C. $m \neq \frac{2}{3}$. D. $m = \frac{2}{3}$.

Lời giải.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow 3m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{2}{3}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 9. Tìm tọa độ đỉnh I của parabol $y = x^2 - 2x + 6$.

- A. $I(-1; -5)$. B. $I(1; -5)$. C. $I(1; 5)$. D. $I(-1; 5)$.

Câu 10. Mệnh đề phủ định của mệnh đề “ $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 + x + 3 = 0$ ” là

- A. “ $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 + x + 3 \neq 0$ ”. B. “ $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 + x + 3 > 0$ ”.
C. “ $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 + x + 3 = 0$ ”. D. “ $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 + x + 3 \neq 0$ ”.

Câu 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $A(1; -1)$, $B(5; -3)$, C thuộc trục Oy và trọng tâm G của tam giác ABC nằm trên trục Ox . Tìm tọa độ điểm C .

- A. $(2; 4)$. B. $(0; 2)$. C. $(0; 4)$. D. $(2; 0)$.

Lời giải.

Gọi tọa độ $C(0; c)$. Vì trọng tâm G thuộc trục Ox nên $y_G = 0$. Ta có

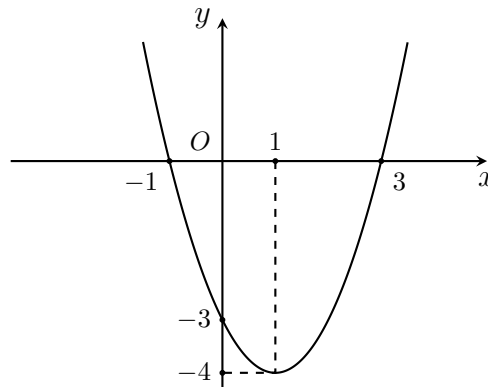
$$y_G = \frac{-1 - 3 + c}{3} = 0 \Rightarrow c = 4.$$

Vậy $C(0; 4)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 12. Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình bên.



Phương trình của parabol này là

- A. $y = 2x^2 - 4x - 2$. B. $y = x^2 + 4x + 3$. C. $y = x^2 - 2x - 3$. D. $y = -x^2 + 2x - 3$.

Lời giải.

- (P) có bề lõm quay lên phía trên nên $a > 0$.
- (P) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -3 nên $c = -3$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 13. Cho hàm số $f(x) = |x + 1| + |x - 1|$ và $g(x) = x^3 - 3x$. Khi đó khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số chẵn. B. $f(x)$ và $g(x)$ đều là hàm số lẻ.
C. $f(x)$ và $g(x)$ đều là hàm số chẵn. D. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ.

Lời giải.

- TXĐ của hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ đều là $\mathbb{R}$.
- Ta có

$$f(-x) = |-x + 1| + |-x - 1| = |x - 1| + |x + 1| = f(x) \Rightarrow f(x) \text{ là hàm số chẵn.}$$

$$g(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -g(x) \Rightarrow g(x) \text{ là hàm số lẻ.}$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 14. Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng $d: y = -x + 4$ và parabol $(P): y = x^2 - 7x + 12$.

- A. $(-2; 6)$ và $(-4; 8)$. B. $(2; 2)$ và $(4; 8)$. C. $(2; -2)$ và $(4; 0)$. D. $(2; 2)$ và $(4; 0)$.

Câu 15. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng $y = mx + 3 - 2m$ cắt parabol $y = x^2 - 3x - 5$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ trái dấu.

- A. $m < -3$. B. $-3 < m < 4$. C. $m < 4$. D. $m \leq 4$.

Lời giải.

- Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$mx + 3 - 2m = x^2 - 3x - 5 \Leftrightarrow x^2 - (m + 3)x + 2m - 8 = 0 \quad (1).$$

- Điều kiện bài toán tương đương với phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt trái dấu.
- Điều đó xảy ra khi

$$1.(2m - 8) < 0 \Leftrightarrow m < 4.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 16. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $3\sqrt{2}$ là số hữu tỉ.
- B. Phương trình $x^2 + 17x - 2 = 0$ có hai nghiệm trái dấu.
- C. 7 là số chẵn.
- D. Phương trình $x^2 + x + 4 = 0$ có nghiệm thực.

Câu 17. Cho hai tập hợp $A = [-2; 3)$ và $B = (1; +\infty)$. Tìm $A \cap B$.

- A. $A \cap B = [-2; +\infty)$.
- B. $A \cap B = (1; 3]$.
- C. $A \cap B = [1; 3]$.
- D. $A \cap B = (1; 3)$.

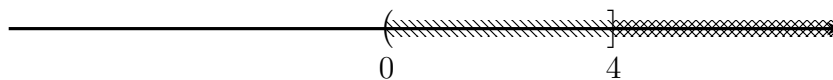
Câu 18. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \sqrt{1 - 2x} + \sqrt{6 + x}$.

- A. $\mathcal{D} = \emptyset$.
- B. $\mathcal{D} = \left[-6; \frac{1}{2}\right]$.
- C. $\mathcal{D} = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$.
- D. $\mathcal{D} = [6; +\infty)$.

Câu 19. Cho hai tập hợp $A = (-\infty; 4]$ và $B = (0; +\infty)$. Tìm $A \setminus B$.

- A. $A \setminus B = (-\infty; 0)$.
- B. $A \setminus B = (4; +\infty)$.
- C. $A \setminus B = (0; 4]$.
- D. $A \setminus B = (-\infty; 0]$.

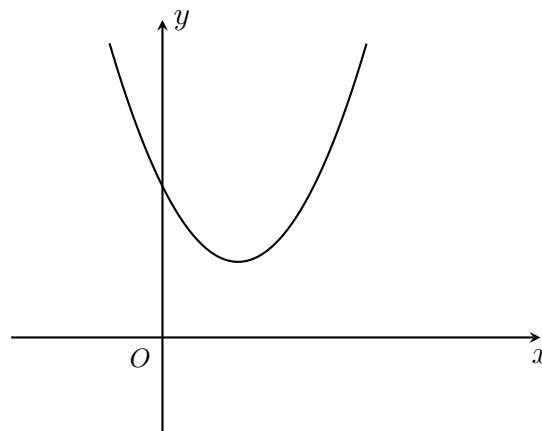
Lời giải.



Chọn đáp án **D**

□

Câu 20. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình bên.



Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $a < 0, b < 0, c > 0$.
- B. $a > 0, b < 0, c > 0$.
- C. $a > 0, b > 0, c > 0$.
- D. $a > 0, b < 0, c < 0$.

Lời giải.

- Bề lõm quay lên phía trên: $a > 0$.

- Cắt trục tung tại điểm có tung độ dương: $c > 0$.
- Trục đối xứng: $-\frac{b}{2a} > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} < 0 \Rightarrow a, b$ trái dấu. Suy ra $b < 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 21. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là

- A. $I\left(\frac{x_1 + y_1}{2}; \frac{x_2 + y_2}{2}\right)$. B. $I\left(\frac{x_1 + x_2}{3}; \frac{y_1 + y_2}{3}\right)$.
 C. $I\left(\frac{x_2 - x_1}{2}; \frac{y_2 - y_1}{2}\right)$. D. $I\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

Câu 22. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(-2; 4)$ và $B(4; -1)$. Tìm tọa độ véc-tơ $\overrightarrow{AB}$.

- A. $\overrightarrow{AB} = (-6; 5)$. B. $\overrightarrow{AB} = (2; 3)$. C. $\overrightarrow{AB} = \left(1; \frac{3}{2}\right)$. D. $\overrightarrow{AB} = (6; -5)$.

Câu 23. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $\vec{a} = (2; -1)$, $\vec{b} = (-3; 4)$ và $\vec{c} = (-4; 7)$. Hai số thực m, n thỏa mãn $m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{c}$. Tính $S = m^2 + n^2$.

- A. $S = 5$. B. $S = 3$. C. $S = 4$. D. $S = 1$.

Lời giải.

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2m - 3n = -4 \\ -m + 4n = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 2. \end{cases}$$

Vậy $S = m^2 + n^2 = 5$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |mx - 3| = mx - 3\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 = 0\}$. Tìm m để $B \setminus A = B$.

- A. $-\frac{3}{2} \leq m \leq \frac{3}{2}$. B. $m < \frac{3}{2}$. C. $-\frac{3}{2} < m < \frac{3}{2}$. D. $m \geq -\frac{3}{2}$.

Lời giải.

- $B = \{-2; 2\}$.
- $B \setminus A = B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \notin B \\ -2 \notin B. \end{cases}$
- $2 \notin B \Leftrightarrow |2m - 3| \neq 2m - 3 \Leftrightarrow 2m - 3 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{3}{2}$.
- $-2 \notin B \Leftrightarrow |-2m - 3| \neq -2m - 3 \Leftrightarrow |2m + 3| \neq -(2m + 3) \Leftrightarrow 2m + 3 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{3}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $M\left(-\frac{5}{2}; -1\right)$, $N\left(-\frac{3}{2}; -\frac{7}{2}\right)$, $P\left(0; \frac{1}{2}\right)$ lần lượt là trung điểm các cạnh BC , CA và AB . Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

- A. $G\left(-\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right)$. B. $G(-4; -4)$. C. $G\left(\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right)$. D. $G(4; -4)$.

Lời giải.

Trọng tâm G của tam giác ABC cũng chính là trọng tâm của tam giác MNP .

Chọn đáp án (A) □

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1.

- a) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$.
b) Giải phương trình $\sqrt{2x^2 + 4x - 1} = x + 1$.

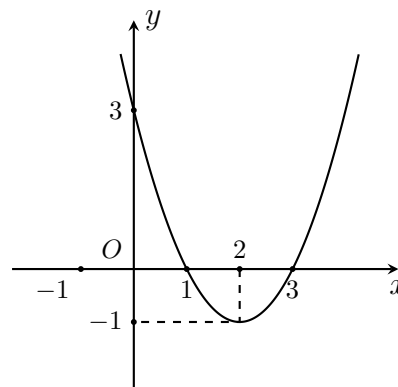
(2,5 điểm)

Lời giải.

- a) Bảng biến thiên

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$+\infty$	-1	$+\infty$

- Tọa độ đỉnh $I(2; -1)$.
- Trục đối xứng là đường thẳng $x = 2$.
- Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0; 3)$, cắt trục hoành tại các điểm $(1; 0)$ và $(3; 0)$.
- Đồ thị



- b) Ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{2x^2 + 4x - 1} = x + 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 2x^2 + 4x - 1 = (x + 1)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + 2x - 2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x = -1 \pm \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = -1 + \sqrt{3}.\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -1 + \sqrt{3}$.

□

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho bốn điểm $A(1; 1)$, $B(2; -1)$, $C(4; 3)$ và $D(16; 3)$. Hãy phân tích véc-tơ $\overrightarrow{AD}$ theo hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

(1,5 điểm)

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AD} = (15; 2)$, $\overrightarrow{AB} = (1; -2)$, $\overrightarrow{AC} = (3; 2)$.

Giả sử $\overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$.

Khi đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \lambda + 3\mu = 15 \\ -2\lambda + 2\mu = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 3 \\ \mu = 4. \end{cases}$$

Vậy $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}$. □

Bài 3. Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $x + y \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1$.

(1,0 điểm)

Lời giải.

Ta thấy

$$P = 3 \left[\frac{3}{4} (x^2 + y^2)^2 + \frac{1}{4} (x^2 - y^2)^2 \right] - 2(x^2 + y^2) + 1 \geq \frac{9}{4} (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1.$$

Đặt $t = x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}(x + y)^2 \geq 2$. Khi đó $P \geq \frac{9}{4}t^2 - 2t + 1$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{9}{4}t^2 - 2t + 1$ với $t \geq 2$.

Lập bảng biến thiên của $f(t)$ với $t \geq 2$

x	2	$+\infty$
$f(t)$	6	$+\infty$

Từ BBT suy ra $\min P = 6$, đạt được khi $t = 2$ hay $x = y = 1$. □

ĐÁP ÁN

1. A	2. B	3. A	4. B	5. C
6. A	7. A	8. B	9. C	10. A
11. C	12. C	13. D	14. D	15. C
16. B	17. D	18. B	19. D	20. B
21. D	22. D	23. A	24. C	25. A

Bài 1. Cho phương trình $(m+2)(2-x) + 3m - 2x + 1 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}(m+2)(2-x) + 3m - 2x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2m + 4 - (m+2)x + 3m - 2x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow -(m+4)x + 5m + 5 &= 0.\end{aligned}$$

Phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $-(m+4) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -4$. □

Bài 2. Giải phương trình $\frac{3x^2 + 2x - 1}{(2-x)(3x-1)} = 1$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \neq 2$ và $x \neq \frac{1}{3}$. Khi đó

$$\begin{aligned}\frac{3x^2 + 2x - 1}{(2-x)(3x-1)} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{(3x^2 + 2x - 1) - (2-x)(3x-1)}{(2-x)(3x-1)} &= 0 \\ \Leftrightarrow (3x^2 + 2x - 1) - (2-x)(3x-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 6x^2 - 5x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}.\end{aligned}$$

Nghiệm $x = \frac{1}{3}$ không thỏa mãn điều kiện nên phương trình có một nghiệm là $x = \frac{1}{2}$. □

Bài 3. Giải phương trình sau.

a) $\sqrt{8x^2 - 6x + 1} - 4x + 1 = 0$.

b) $x^2 - 4x + 2\sqrt{-x^2 + 4x + 5} = 2$.

Lời giải.

a) ĐK: $8x^2 - 6x + 1 \geq 0$

Ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{8x^2 - 6x + 1} - 4x + 1 &= 0 \\ \Rightarrow \sqrt{8x^2 - 6x + 1} &= 4x - 1 \\ \Rightarrow 8x^2 - 6x + 1 &= (4x - 1)^2 \\ \Rightarrow 8x^2 - 6x + 1 &= 16x^2 - 8x + 1 \\ \Rightarrow 8x^2 - 2x &= 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}.\end{aligned}$$

Thử lại ta được phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{4}$.

b) Đặt $t = \sqrt{-x^2 + 4x + 5}$, $t \geq 0$. Khi đó phương trình trở thành

$$-t^2 + 2t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = 3 \text{ (nhận)} \end{cases}.$$

Với $t = 3 \Leftrightarrow -x^2 + 4x + 5 = 9 \Leftrightarrow x = 2$.

□

Bài 4. Giải phương trình sau: $2x^2 - 3x - 5 = |x + 1|$.

Lời giải.

Ta có

$$2x^2 - 3x - 5 = |x + 1| \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x - 5 = x + 1 \\ 2x^2 - 3x - 5 = -x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \\ x = 2. \end{cases}$$

Thử lại ta được nghiệm của phương trình là $x = -1, x = 3$.

□

Bài 5. Cho phương trình $x^2 + 2(m - 1)x + m^2 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 - x_1 - x_2 = 2$.

Lời giải.

Ta có $\Delta' = (m - 1)^2 - m^2 = -2m + 1$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$.

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Theo định lý Vi-et ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2(m - 1) \\ x_1 x_2 = m^2. \end{cases}$$

Khi đó ta được

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 - x_1 - x_2 = 2 &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - (x_1 + x_2) = 2 \\ &\Leftrightarrow 4(m - 1)^2 - 2m^2 + 2(m - 1) = 2 \Leftrightarrow 2m^2 - 6m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

So điều kiện $\Delta' > 0$ ta được $m = 0$ thỏa ycbt.

□

Bài 6. Giải các hệ phương trình sau.

a) $\begin{cases} x^2 - 2x - y = 1 \\ x - 3y = 5. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + 2xy = 2 \\ x^2 + y^2 = 2(x + y) - 2xy. \end{cases}$

Lời giải.

$$a) \begin{cases} x^2 - 2x - y = 1 \\ x - 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3y + 5)^2 - 2(3y + 5) - y = 1 \\ x = 3y + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9y^2 + 23y + 14 = 0 \\ x = 3y + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = -\frac{14}{9} \\ x = 3y + 5. \end{cases}$$

Suy ra hệ phương trình có hai nghiệm là $(2; -1)$ và $\left(\frac{1}{3}; -\frac{14}{9}\right)$.

$$b) \text{ Từ phương trình (2) ta được } (x + y)^2 = 2(x + y) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ x = 2 - y \end{cases}.$$

Thay $x = -y$ vào phương trình (1) ta được $-2y^2 = 2$ (vô nghiệm).

$$\text{Thay } x = 2 - y \text{ vào phương trình (1) ta được } 2(2 - y)y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = 2 \\ y = 2 \Rightarrow x = 0 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(0; 2)$ và $(2; 0)$.

□

Bài 7. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC với $A(1; -1), B(-1; 3), C(6; 4), I\left(\frac{7}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

- Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .
- Tính $\cos \widehat{BCA}$
- Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABI .

Lời giải.

- Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

$$\begin{aligned} &\text{Gọi } G(x_G; y_G) \\ &\Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = 2 \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = 2 \end{cases} \Rightarrow G(2; 2). \end{aligned}$$

- Tính $\cos \widehat{BCA}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CA} &= (5; 5) \Rightarrow CA = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2} \\ \overrightarrow{CB} &= (-7; -1) \Rightarrow CB = \sqrt{(-7)^2 + (-1)^2} = 5\sqrt{2} \\ \cos \widehat{BCA} &= \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{CA \cdot CB} = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

- Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABI .

Gọi $H(a; b)$.

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AH} = (a - 1; b + 1), \overrightarrow{BI} = \left(\frac{9}{2}; -\frac{3}{2}\right); \overrightarrow{BH} = (a + 1; b - 3), \overrightarrow{AI} = \left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right)$$

$H(a; b)$ là trực tâm của tam giác ABI

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BI} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AI} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9(a - 1) - 3(b + 1) = 0 \\ 5(a + 1) + 5(b - 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } H\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

□

Bài 8. Cho tam giác ABC có $AB = 2, AC = 3, BC = \sqrt{7}$.

- Tính số đo góc $\widehat{BAC}$, diện tích tam giác ABC , bán kính đường tròn ngoại tiếp và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

- b) Gọi M là trung điểm của AB , N là điểm thuộc cạnh AC sao cho $AN = 2CN$ và D là điểm trên đoạn thẳng NM sao cho $2DM = DN$. Tính độ dài đoạn AD .

Lời giải.

- a) Tính số đo góc $\widehat{BAC}$, diện tích tam giác ABC , bán kính đường tròn ngoại tiếp và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Ta có

$$c = AB = 2, b = AC = 3, a = BC = \sqrt{7}$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{BAC} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^\circ.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Bán kính đường tròn ngoại tiếp } R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{\sqrt{21}}{3}.$$

$$\text{Nửa chu vi } p = \frac{a + b + c}{2} = \frac{\sqrt{7} + 3 + 2}{2} = \frac{5 + \sqrt{7}}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Bán kính đường tròn nội tiếp } r = \frac{S}{p} = \frac{3\sqrt{3}}{5 + \sqrt{7}}.$$

- b)

Gọi M là trung điểm của AB , N là điểm thuộc cạnh AC sao cho $AN = 2CN$ và D là điểm trên đoạn thẳng NM sao cho $2DM = DN$. Tính độ dài đoạn AD .

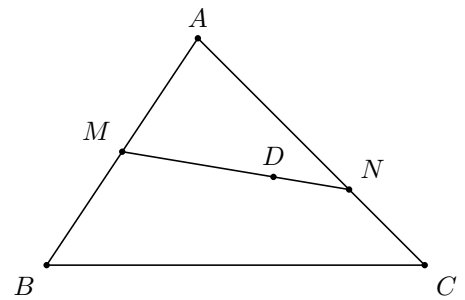
$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{DN} = -2\overrightarrow{DM}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AD} = -2(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{9}\overrightarrow{AC}.$$

$$\Rightarrow AD^2 = \overrightarrow{AD}^2 = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{9}\overrightarrow{AC}\right)^2 = \frac{1}{9}c^2 + \frac{4}{81}b^2 + \frac{4}{27}bc \cdot \cos A = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$



□

Bài 9. Tính số đo góc $\widehat{BAC}$ của tam giác ABC biết $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} = \frac{3}{a+b+c}$ với ($AB = c$, $AC = b$, $BC = a$).

Lời giải.

Ta có

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} = \frac{3}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow (c+a)(c+b+a) + (b+a)(c+b+a) = 3(b+a)(c+a)$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 3ca + 3ba + c^2 + 2cb + b^2 = 3cb + 3ba + 3ca + 3a^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 = bc$$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = 60^\circ.$$

□

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{-x^2 + 4x} + 2 = 2x$ là

- A. $S = \mathbb{R}$. B. $S = \emptyset$. C. $S = \left\{\frac{2}{5}; 2\right\}$. D. $S = \{2\}$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{-x^2 + 4x} = 2x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ -5x^2 + 12x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 2. Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{-2, 0, 3, 5, 9\}$. Tìm $A \cup B$.

- A. $\{-2, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$. B. $\{-2, 0, 9\}$.
C. $\{3, 5\}$. D. $\{1, 2, 4, 6\}$.

Lời giải.

$A \cup B = \{-2, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 3. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau

- A. $\sqrt{2}$ là một số chính phương.
B. 2 là số nguyên.
C. Nếu một tam giác có ba cạnh bằng nhau thì tam giác đó đều.
D. 4 là số chính phương.

Lời giải.

$\sqrt{2}$ là một số vô tỷ nên mệnh đề đã cho là mệnh đề sai.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 4. Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{-2, 0, 3, 5, 9\}$. Tìm $A \cap B$.

- A. $\{3, 5\}$. B. $\{1, 2, 4, 6\}$.
C. $\{-2, 0, 9\}$. D. $\{-2, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$.

Lời giải.

$A \cap B = \{3, 5\}$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 5. Cho hàm số $y = -\frac{2x}{3} + \frac{1}{2}$ có đồ thị là (d) . Mệnh đề nào sau đây là **đúng**.

- A. (d) cắt trục hoành tại $B\left(0; \frac{1}{2}\right)$. B. Điểm $A\left(1; \frac{1}{2}\right)$ thuộc đường thẳng (d) .
C. Hàm số f đồng biến trên $\mathbb{R}$. D. Hàm số f nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Do $a = -\frac{2}{3} < 0$ nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 6. Tổng các bình phương 2 nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 8 = 0$ là

A. 12.

B. 20.

C. -20.

D. 17.

Lời giải.

Phương trình có hai nghiệm là $\begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases}$ nên $x_1^2 + x_2^2 = 4^2 + (-2)^2 = 20$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 7. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} (m+1)x - 4my = 2 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ vô số nghiệm.

A. $m = \frac{1}{2}$.B. $m = 1$.C. $m = -1$.D. $m = \frac{3}{2}$.**Lời giải.**

Ta có: $\frac{m+1}{1} = \frac{-4m}{-2} = \frac{2}{1} \Leftrightarrow m = 1$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 - 6x + m - 2 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

A. $2 \leq m \leq 11$.B. $2 < m < 11$.C. $2 < m < 6$.D. $0 < m < 11$.**Lời giải.**

Để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt thì

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - (m-2) > 0 \\ 6 > 0 \\ m-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m < 11.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị tham số a để cặp số $(x; y) = (2a^2; 4a + 3)$ là một nghiệm của phương trình $3x - 2y = 8$.

A. $a = -1$.B. $a = -1, a = \frac{7}{3}$.C. $a = \frac{7}{3}$.D. $a = -1, a = \frac{1}{3}$.**Lời giải.**

Ta có $6a^2 - 2(4a + 3) = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = \frac{7}{3} \end{cases}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 10. Nếu hai số u và v có tổng bằng -8 và có tích là 15 thì chúng là nghiệm của phương trình

A. $x^2 - 8x - 15 = 0$.B. $x^2 - 8x + 15 = 0$.C. $x^2 + 8x - 15 = 0$.D. $x^2 + 8x + 15 = 0$.**Lời giải.**

Ta có $X^2 - SX + P = 0 \Rightarrow X^2 - 8X + 15 = 0$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 11. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau

A. $\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 - 4 = 0$.B. $\forall x \in \mathbb{Q} : x^2 - 4 \neq 0$.

C. $\exists x \in \mathbb{N} : x = \frac{1}{x}$.

D. $\forall x \in \mathbb{Z} : x^2 - 7 \neq 0$.

Lời giải.

Tồn tại $x = 2 \in \mathbb{Z}$ mà $x^2 - 4 = 0$.

Chọn đáp án **(B)**

Câu 12. Cho hàm số $y = x^2 + 3x + 2$ có đồ thị hàm số là (P) và đường thẳng $(d) : y = 2x + m + 1$ với giá trị nào của m thì (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt nằm bên trái trục tung?

A. $m \in \left[\frac{3}{4}; 1\right]$.

B. $m \in \left(-\infty; \frac{3}{4}\right) \cup (1; +\infty)$.

C. $(-\infty; 1)$.

D. $m \in \left(\frac{3}{4}; 1\right)$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 + 3x + 2 = 2x + m + 1 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 - m = 0$.

Để phương trình có hai nghiệm âm phân biệt $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4(1 - m) > 0 \\ -1 < 0 \\ 1 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{4} < m < 1$.

Chọn đáp án **(D)**

Câu 13. Tìm tọa độ giao điểm của $(d_1) : y = 3x$ và $(d_2) : y = x - 3$.

A. $(2; 6)$.

B. $\left(\frac{3}{2}; -\frac{9}{2}\right)$.

C. $\left(-\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$.

D. $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{9}{2}\right)$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $3x = x - 3 \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \Rightarrow y = -\frac{9}{2}$.

Chọn đáp án **(D)**

Câu 14. Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

A. $f(x) = \sqrt{3x + 1}$.

B. $f(x) = \frac{|x - 1| + |x + 1|}{x^2}$.

C. $f(x) = 2x - 5x^3$.

D. $f(x) = \frac{-x^2 + |x|}{x}$.

Lời giải.

TXĐ: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ta có: $f(-x) = \frac{|-x - 1| + |-x + 1|}{x^2} = f(x)$.

Chọn đáp án **(B)**

Câu 15. Tìm tất cả giá trị của m để phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 + 3m - 2 = 0$ có nghiệm.

A. $m < 3$.

B. $m \geq 3$.

C. $m \leq 3$.

D. $m > 3$.

Lời giải.

$\Delta' = (m + 1)^2 - (m^2 + 3m - 2) = -m + 3$. Để phương trình có nghiệm thì $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 3$.

Chọn đáp án **(C)**

Câu 16. Cho $A = \{n \in \mathbb{Z} | n = 2k, k \in \mathbb{Z}\}; B = \{0; 2; 4; 6; \dots\}$.

Khẳng định nào sau đây là **đúng** ?

- A. $A \setminus B = A$. B. $A = B$. C. $A \cap B = B$. D. $A \cup B = B$.

Lời giải.

Ta có: $A = \{\dots; -6; -4; -2; 0; 2; 4; 6; \dots\}; B = \{0; 2; 4; 6; \dots\}$. Suy ra $A \cap B = B$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 17. Tìm tọa độ đỉnh của hàm số $y = 2x^2 - x - 1$.

- A. $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{9}{4}\right)$. B. $I\left(\frac{1}{4}; -\frac{9}{8}\right)$. C. $I\left(-\frac{1}{4}; \frac{9}{8}\right)$. D. $I\left(-\frac{1}{4}; -\frac{9}{8}\right)$.

Lời giải.

Tọa độ đỉnh của hàm số là

$$\begin{cases} x = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{4} \\ y = -\frac{9}{8} \end{cases}$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 18. Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Đẳng thức nào sau đây là **đúng** ?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}$. C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$. D. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$.

Lời giải.

Áp dụng quy tắc ba điểm $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 19. Cho $\vec{a} = (6; 5), \vec{b} = (3; -2)$. Tìm tọa độ $\vec{c}$ sao cho $2\vec{a} + 3\vec{c} = \vec{b}$.

- A. $\vec{c} = (-3; -4)$. B. $\vec{c} = (3; -4)$. C. $\vec{c} = (-2; -3)$. D. $\vec{c} = (-3; -2)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{c} = \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a} \Rightarrow \vec{c} = (-3; -4)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 20. Cho $A(3; 3), B(5; 5), C(6; 9)$. Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác ABC .

- A. $(14; 17)$. B. $\left(\frac{14}{3}; 5\right)$. C. $\left(\frac{14}{3}; \frac{17}{3}\right)$. D. $(4; 5)$.

Lời giải.

Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là

$$\begin{cases} x_G = \frac{3+5+6}{3} = \frac{14}{3} \\ y_G = \frac{3+5+9}{3} = \frac{17}{3} \end{cases}$$

Chọn đáp án **C**

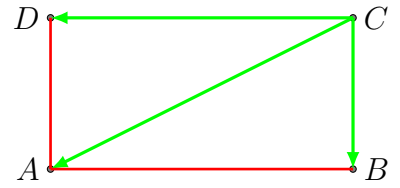
□

Câu 21. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Vectơ nào sau đây bằng vectơ $\overrightarrow{CA}$?

- A. $-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$. B. $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CB}$. C. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$. D. $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$.

Lời giải.

Áp dụng quy tắc hình bình hành $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$.



Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 22. Cho $A(4; 1), B(3; 2)$. Tìm tọa độ M sao cho B là trung điểm đoạn thẳng AM .

- A. $(2; 1)$. B. $(3; 2)$. C. $(2; 3)$. D. $(5; 0)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} x_M = 2x_B - x_A \\ y_M = 2y_B - y_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 2 \\ y_M = 3 \end{cases}$$

Vậy $M(2; 3)$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 23. Cho tam giác OAB . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OA, OB . Khi đó, nếu $\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$ thì

- A. $m + n = -1$. B. $m + n = 4$. C. $m + n = 0$. D. $m + n = 1$.

Lời giải.

Ta có

$$\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB} \Rightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$$

$$\text{Suy ra } m + n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 24. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy . Tính $|\vec{i} + \vec{j}|$.

- A. 0. B. $\sqrt{2}$. C. 2. D. $\sqrt{3}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \vec{i} + \vec{j} = (1; 1) \Rightarrow |\vec{i} + \vec{j}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 25. Cho tam giác ABC , M là điểm nằm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Đẳng thức vectơ nào sau đây là **đúng**?

- A. $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.
C. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{AM} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} \\ &= \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{MC} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{AB} + 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}) \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(C)**

□

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Tìm tập xác định của hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{|x|+1}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ |x|+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -1$.

Vậy, $\mathcal{D} = [-1; +\infty)$. □

Bài 2. Giải phương trình $\sqrt{3x^2 - 9x + 1} = x - 2$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 3x^2 - 9x + 1 = x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 2x^2 - 5x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \begin{cases} x = 3 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

Vậy, $S = \{3\}$. □

Bài 3. Cho phương trình $3x^2 + 2(3m-1)x + 3m^2 - m + 1 = 0$, m là tham số. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = \frac{39}{4}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} \Delta' &= (3m-1)^2 - 3(3m^2 - m + 1) \\ &= -3m - 2 \end{aligned}$$

Giá trị m thỏa yêu cầu bài toán khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = \frac{34}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3m - 2 > 0 \\ m^2 - m - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{2}{3} \\ \begin{cases} m = 2 \\ m = -1 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy, $m = -1$. □

Bài 4. Cho hình chữ nhật $ABCD$ và điểm M tùy ý. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} VT &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} \\ &= (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}) \cdot (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}) \\ &= \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DC} \\ &= \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} \cdot (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{DC}) \\ &= \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{CB} \\ &= \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = VP \end{aligned}$$
□

Bài 5. Cho tam giác ABC với $A(1; 2), B(-3; -3), C(5; -2)$. Tìm tọa độ của $\vec{v} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (-4; -5)$$

$$\overrightarrow{AC} = (4; -4)$$

$$\overrightarrow{BC} = (8; 1)$$

$$\text{Suy ra, } \vec{v} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{BC} = (12; 6).$$

□

ĐÁP ÁN

1. D	2. A	3. A	4. A	5. D
6. B	7. B	8. B	9. B	10. D
11. B	12. D	13. D	14. B	15. C
16. C	17. B	18. C	19. A	20. C
21. D	22. C	23. C	24. B	25. C

7 HK1, CHUYÊN QH HUẾ

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các véc-tơ $\vec{u} = (2; -4)$, $\vec{a} = (-1; -2)$, $\vec{b} = (1; -3)$. Biết $\vec{u} = m\vec{a} + n\vec{b}$. Tính $m - n$ được kết quả là

- A. 5. B. -2. C. -5. D. 2.

Lời giải.

$$\vec{u} = m\vec{a} + n\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} -m + n = 2 \\ -2m - 3n = -4 \end{cases} \Rightarrow m - n = -2.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 2. Tìm m để hàm số $y = (-2m + 1)x + m - 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m < \frac{1}{2}$. B. $m > \frac{1}{2}$. C. $m < 3$. D. $m > 3$.

Lời giải.

Hàm số $y = (-2m + 1)x + m - 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $-2m + 1 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3. Cho $\cot \alpha = -\sqrt{2}$, ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$). Tính $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$.

- A. $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$. B. $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}$.
C. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. D. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải.

$$\text{Có } 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}. \text{ Lại có } \cos \alpha = \cot \alpha \cdot \sin \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 4. Xác định phần bù của tập hợp $(-\infty; -2)$ trong $(-\infty; 4)$.

- A. $(-2; 4)$. B. $(-2; 4]$. C. $[-2; 4)$. D. $[-2; 4]$.

Lời giải.

$$(-\infty; 4) \setminus (-\infty; -2) = [-2; 4).$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 5. Xác định số phần tử của tập hợp $X = \{n \in \mathbb{N} | n:4, n < 2017\}$.

- A. 505. B. 503. C. 504. D. 502.

Lời giải.

$$\text{Có } \left\lfloor \frac{2017}{4} \right\rfloor + 1 = 505.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Cho phương trình $(2 - m)x = m^2 - 4$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình có tập nghiệm là $\mathbb{R}$?

- A. vô số. B. 2. C. 1. D. 0.

Lời giải.

Phương trình có tập nghiệm là $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - m = 0 \\ m^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 7. Cho trục tọa độ $(O, \vec{e})$. Khẳng định nào sau đây luôn đúng?

- A. $AB = \overline{AB}$.
B. $\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cdot \vec{e}$.
C. Điểm M có tọa độ là a với trục tọa độ $(O, \vec{e})$ thì $|\overrightarrow{OM}| = a$.
D. $|\overrightarrow{AB}| = \overline{AB}$.

Lời giải.

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cdot \vec{e}$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 8. Xác định phần bù của tập hợp $(-\infty; -10) \cup [10; +\infty) \cup \{0\}$ trong $\mathbb{R}$.

- A. $[-10; 10)$. B. $[-10; 10] \setminus \{0\}$. C. $[-10; 0) \cup [0; 10)$. D. $[-10; 0) \cup (0; 10)$.

Lời giải.

$$[-10; 10) \setminus \{0\}.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 9. Cho $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$. Tính $P = |\sin x - \cos x|$.

- A. $P = \frac{3}{5}$. B. $P = \frac{4}{5}$. C. $P = \frac{6}{5}$. D. $P = \frac{7}{5}$.

Lời giải.

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{5} \Rightarrow 2 \sin x \cos x = -\frac{24}{25}.$$

$$P^2 = (\sin x - \cos x)^2 = (\sin x + \cos x)^2 - 4 \sin x \cos x = \frac{49}{25} \Rightarrow P = \frac{7}{5}.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 10. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $BC = 2a$. Tính $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$ theo a .

- A. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -a\sqrt{3}$. B. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -3a^2$.
C. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = a\sqrt{3}$. D. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = 3a^2$.

Lời giải.

$$\text{Tam giác } ABC \text{ vuông tại } A \text{ nên } CA^2 = BC^2 - AB^2 = 3a^2.$$

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CA} = -3a^2.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 11. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. $\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$. B. $\sin \alpha = -\sin(180^\circ - \alpha)$.
C. $\tan \alpha = \tan(180^\circ - \alpha)$. D. $\cot \alpha = \cot(180^\circ - \alpha)$.

Lời giải.

$$\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 12. Điểm A có hoành độ $x_A = 1$ và thuộc đồ thị hàm số $y = mx + 2m - 3$. Tìm tất cả các giá trị của m để điểm A nằm trong nửa mặt phẳng tọa độ phía trên của trục hoành (không chứa trục hoành).

A. $m < 0$.

B. $m > 0$.

C. $m \leq 1$.

D. $m > 1$.

Lời giải.

Có $x_A = 1 \Rightarrow y_A = 3m - 2$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y_A > 0 \Leftrightarrow m > 1$.

Chọn đáp án **(D)** □**Câu 13.** Cho hình thang $ABCD$ có đáy $AB = a$, $CD = 2a$, Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC . Tính độ dài của véc-tơ $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA}$.

A. $\frac{5a}{2}$.

B. $\frac{7a}{2}$.

C. $\frac{3a}{2}$.

D. $\frac{a}{2}$.

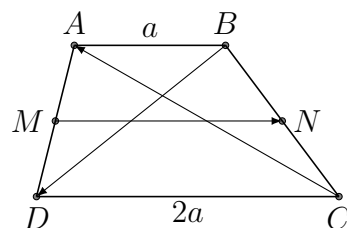
Lời giải.

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{NM}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{MN} + 2\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NM} \Rightarrow |\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA}| = NM = \frac{3a}{2}.$$

Chọn đáp án **(C)** □**Câu 14.** Tìm tập xác định của phương trình $\frac{\sqrt{x+1}}{x} + 3x^5 - 2017 = 0$.

A. $[-1; +\infty)$.

B. $(-1; +\infty) \setminus \{0\}$.

C. $[-1; +\infty) \setminus \{0\}$.

D. $(-1; +\infty)$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq 0 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(C)** □**Câu 15.** Viết phương trình trục đối xứng của đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x + 4$.

A. $x = 1$.

B. $y = 1$.

C. $y = 2$.

D. $x = 2$.

Lời giải.Phương trình trục đối xứng của đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x + 4$ là $x = 1$.Chọn đáp án **(A)** □**Câu 16.** Cho $\triangle ABC$ có G là trọng tâm, I là trung điểm BC . Tìm khẳng định **sai**.

A. $|\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IA}| = IA$.

B. $|\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}| = BC$.

C. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2AI$.

D. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 3GA$.

Lời giải.

$$I \text{ là trung điểm } BC \Leftrightarrow \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow |\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}| = 0 \Rightarrow |\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}| = BC \text{ sai.}$$

Chọn đáp án **(B)** □**Câu 17.** Cho hai tập hợp X, Y thỏa mãn $X \setminus Y = \{7; 15\}$ và $X \cap Y = (-1; 2)$. Xác định số phần tử nguyên của X .

A. 2.

B. 5.

C. 3.

D. 4.

Lời giải.

$$\text{Từ giả thiết } \begin{cases} X \setminus Y = \{7; 15\} \\ X \cap Y = (-1; 2) \end{cases} \Rightarrow \text{các phần tử nguyên thuộc tập } X \text{ là } 7; 15; 0; 1.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 18. Tìm m để Parabol $(P): y = x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1 \cdot x_2 = 1$.

- A. $m = 2$. B. Không tồn tại m . C. $m = -2$. D. $m = \pm 2$.

Lời giải.

$$\Delta' = 2m + 4 > 0 \Leftrightarrow m > -2.$$

$$x_1 \cdot x_2 = m^2 - 3 = 1 \Rightarrow m = \pm 2. \text{ Vậy } m = 2.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 19. Có nhiều nhất bao nhiêu số nguyên m thuộc nửa khoảng $[-2017; 2017)$ để phương trình $\sqrt{2x^2 - x - 2m} = x - 2$ có nghiệm.

- A. 2014. B. 2021. C. 2013. D. 2020.

Lời giải.

$$\sqrt{2x^2 - x - 2m} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 + 3x - 4 = 2m \end{cases}.$$

Đặt $f(x) = x^2 + 3x - 4$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$f(-\frac{3}{2})$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình đã cho có nghiệm khi $2m \geq f(2) \Leftrightarrow 2m \geq 6 \Leftrightarrow m \geq 3$. Số các số nguyên m thuộc nửa khoảng $[-2017; 2017)$ để phương trình $\sqrt{2x^2 - x - 2m} = x - 2$ có nghiệm là $2017 - 3 = 2014$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các điểm $A(-4; 2), B(2; 4)$. Tính độ dài AB .

- A. $AB = 2\sqrt{10}$. B. $AB = 4$. C. $AB = 40$. D. $AB = 2$.

Lời giải.

$$\overrightarrow{AB} = (6; 2) \Rightarrow AB = 2\sqrt{10}.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 21. Tập hợp nào sau đây chỉ gồm các số vô tỷ?

- A. $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}^*$. B. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. C. $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. D. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Lời giải.

Tập hợp nào sau đây chỉ gồm các số vô tỷ là $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 22. Tìm m để phương trình $\frac{2(2 - 2m - x)}{x + 1} = x - 2m$ có 2 nghiệm phân biệt.

- A. $m \neq \frac{5}{2}$ và $m \neq 1$. B. $m \neq \frac{5}{2}$ và $m \neq \frac{3}{2}$. C. $m \neq \frac{5}{2}$ và $m \neq \frac{1}{2}$. D. $m \neq \frac{5}{2}$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -1$.

Biến đổi phương trình ta được $x^2 + (3 - 2m)x + 2m - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = 2m - 4$.

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 4 \neq 1 \\ 2m - 4 \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{5}{2} \\ m \neq \frac{3}{2} \end{cases}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 23. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$. Tìm tọa độ điểm thuộc đồ thị của hàm số có tung độ bằng -2 .

- A. $(0; -2)$. B. $\left(\frac{1}{3}; -2\right)$. C. $(-2; -2)$. D. $(-1; -2)$.

Lời giải.

Thay $y = -2$ vào phương trình hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ ta được $x = \frac{1}{3}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 24. Cho phương trình $m(3m-1)x = 1-3m$, (m là tham số). Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $m = \frac{1}{3}$ thì phương trình có tập nghiệm là $\left\{\frac{-1}{m}\right\}$.
B. $m \neq 0$ và $m \neq \frac{1}{3}$ thì phương trình có tập nghiệm là $\left\{\frac{-1}{m}\right\}$.
C. $m = 0$ thì phương trình có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.
D. $m \neq 0$ và $m \neq \frac{1}{3}$ thì phương trình vô nghiệm.

Lời giải.

- $m = 0$, phương trình vô nghiệm.
- $m = \frac{1}{3}$, phương trình nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.
- $m \neq 0$ và $m \neq \frac{1}{3}$, phương trình có nghiệm $x = -\frac{1}{m}$.

Vậy $m \neq 0$ và $m \neq \frac{1}{3}$ thì phương trình có tập nghiệm là $\left\{\frac{-1}{m}\right\}$.

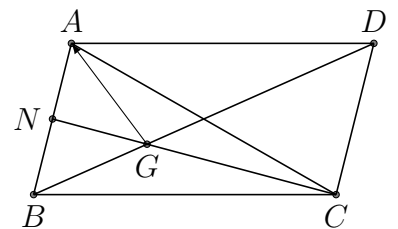
Chọn đáp án **(B)** □

Câu 25. Cho hình bình hành $ABCD$ có N là trung điểm AB và G là trọng tâm $\triangle ABC$. Phân tích $\overrightarrow{GA}$ theo $\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{NC}$.

- A. $\overrightarrow{GA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{NC}$. B. $\overrightarrow{GA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} - \frac{4}{3}\overrightarrow{NC}$.
C. $\overrightarrow{GA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{NC}$. D. $\overrightarrow{GA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{NC}$.

Lời giải.

$$\overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CN}.$$

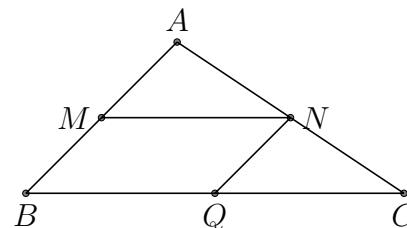


Chọn đáp án **(D)** □

Câu 26. Cho $\triangle ABC$ có M, Q, N lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA . Khi đó véc-tơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{BQ}$ là véc-tơ nào sau đây?

A. $\vec{0}$.B. $\vec{BC}$.C. $\vec{AQ}$.D. $\vec{CB}$.**Lời giải.**

$$\vec{AB} + \vec{BM} + \vec{NA} + \vec{BQ} = \vec{NA} + \vec{AB} + \vec{BM} + \vec{BQ} = \vec{NM} + \vec{BQ} = \vec{0}.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 27. Tìm phương trình tương đương với phương trình $\frac{(x^2 + x - 6)\sqrt{x+1}}{|x| - 2} = 0$ trong các phương trình sau

A. $\frac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x+3}} = 0$.

B. $\sqrt{x} + \sqrt{2+x} = 1$.

C. $x^2 = 1$.

D. $(x-3)^2 = \frac{-x}{\sqrt{x-2}}$.

Lời giải.Điều kiện $x \neq \pm 2; x \geq -1$.

$$\frac{(x^2 + x - 6)\sqrt{x+1}}{|x| - 2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 6 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Đối chiếu điều kiện phương trình có nghiệm $x = -1$. $x = -1$, thỏa mãn các phương trình $\frac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x+3}} = 0$ và $x^2 = 1$.

Phương trình $\frac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x+3}} = 0$ có duy nhất nghiệm $x = -1$. Vậy phương trình đã cho tương đương với trình $\frac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x+3}} = 0$.

Chọn đáp án **A** □**Câu 28.** Giải phương trình $|1 - 3x| - 3x + 1 = 0$, được tập nghiệm là

A. $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

B. $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

C. $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$.

D. $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Lời giải.

$$|1 - 3x| - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow |1 - 3x| = -(1 - 3x) \Leftrightarrow 1 - 3x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}.$$

Chọn đáp án **D** □**Câu 29.** Cho $\triangle ABC$ và I thỏa mãn $\vec{IA} = 3\vec{IB}$. Phân tích $\vec{CI}$ theo $\vec{CA}$ và $\vec{CB}$.

A. $\vec{CI} = \frac{1}{2}\vec{CA} - \frac{3}{2}\vec{CB}$.

B. $\vec{CI} = \vec{CA} - 3\vec{CB}$.

C. $\vec{CI} = \frac{3}{2}\vec{CB} - \frac{1}{2}\vec{CA}$.

D. $\vec{CI} = 3\vec{CB} - \vec{CA}$.

Lời giải.

$$\vec{IA} = 3\vec{IB} \Leftrightarrow \vec{CA} - \vec{CI} = 3(\vec{CB} - \vec{CI}) \Leftrightarrow \vec{CI} = \frac{3}{2}\vec{CB} - \frac{1}{2}\vec{CA}.$$

Chọn đáp án **C** □**Câu 30.** Cho $\triangle ABC$ có $A(5; 3), B(2; -1), C(-1; 5)$. Tìm tọa độ trực tâm H của $\triangle ABC$.

A. $H(-3; 2)$.

B. $H(-3; -2)$.

C. $H(3; 2)$.

D. $H(3; -2)$.

Lời giải.

Gọi $H(a; b) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} = (a - 5; b - 3) \\ \overrightarrow{BH} = (a - 2; b + 1) \end{cases}$.
 $\overrightarrow{BC} = (-3; 6), \overrightarrow{AC} = (-6; 2)$.

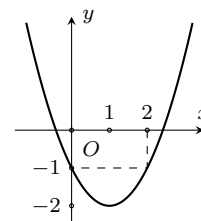
H là trực tâm $\triangle ABC \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2b = 1 \\ -3a + b = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow H(3; 2)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 31. Đồ thị hình bên là của hàm số nào sau đây.

- A. $y = -x^2 - 2x + 3$.
 B. $y = x^2 + 2x - 2$.
 C. $y = 2x^2 - 4x - 2$.
 D. $y = x^2 - 2x - 1$.



Lời giải.

Parabol có bề lõm quay lên trên và cắt trục tung tại điểm $(0; -1) \Rightarrow a > 0, c = -1 \Rightarrow y = x^2 - 2x - 1$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 32. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{x-3} + \sqrt{x-1}$.

- A. $\mathcal{D} = (3; +\infty)$. B. $\mathcal{D} = (1; +\infty) \setminus \{3\}$. C. $\mathcal{D} = [3; +\infty)$. D. $\mathcal{D} = [1; +\infty) \setminus \{3\}$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 3$ và $x \geq 1 \Rightarrow \mathcal{D} = [1; +\infty) \setminus \{3\}$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 33. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $B(1; -3)$ và $C(1; 2)$. Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao kẻ từ đỉnh A của $\triangle ABC$, biết $AB = 3, AC = 4$.

- A. $H\left(1; \frac{24}{5}\right)$. B. $H\left(1; -\frac{6}{5}\right)$. C. $H\left(1; -\frac{24}{5}\right)$. D. $H\left(1; \frac{6}{5}\right)$.

Lời giải.

Có $BC = 5; AH \cdot BC = AB^2 = 9 \Rightarrow AH = \frac{9}{5} \Rightarrow \overrightarrow{AH} = \frac{9}{25} \overrightarrow{BC}$.

Gọi $H(a; b)$, ta có hệ $\begin{cases} a - 1 = \frac{9}{25} \cdot 0 \\ b + 3 = \frac{9}{25} \cdot 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{6}{5} \end{cases}$. Vậy $H\left(1; -\frac{6}{5}\right)$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 34. Cho hai tập hợp $X = \{1; 2; 4; 7; 9\}$ và $Y = \{-1; 0; 7; 10\}$, tập hợp $X \cup Y$ có bao nhiêu phần tử?

- A. 9. B. 7. C. 8. D. 10.

Lời giải.

$X \cup Y = \{-1; 0; 1; 2; 4; 7; 9; 10\} \Rightarrow$ có 8 phần tử.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 35. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các véc-tơ $\vec{u} = (-2; 1)$ và $\vec{v} = 3\vec{i} - m\vec{j}$. Tìm m để hai véc-tơ $\vec{u}, \vec{v}$ cùng phương.

- A. $m = -\frac{2}{3}$. B. $m = \frac{2}{3}$. C. $m = -\frac{3}{2}$. D. $m = \frac{3}{2}$.

Lời giải.

$\vec{v} = (3; -m)$. Hai véc-tơ $\vec{u}, \vec{v}$ cùng phương khi $\frac{3}{-2} = \frac{-m}{1} \Rightarrow m = \frac{3}{2}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 36. Tìm m để hàm số $y = x^2 - 2x + 2m + 3$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[2; 5]$ bằng -3 .

A. $m = -3$.

B. $m = -9$.

C. $m = 1$.

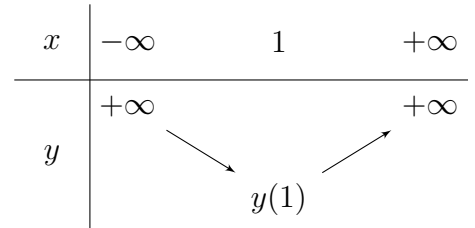
D. $m = 0$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có

$$\min_{x \in [2; 5]} y = y(2) = 2m + 3.$$

$$\text{Vậy } 2m + 3 = -3 \Rightarrow m = -3.$$



Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 37. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 1. Hai điểm M, N thay đổi lần lượt ở trên cạnh AB, AD sao cho $AM = x$ ($0 \leq x \leq 1$), $DN = y$ ($0 \leq y \leq 1$). Tìm mối liên hệ giữa x và y sao cho $CM \perp BN$.

A. $x - y = 0$.

B. $x - y\sqrt{2} = 0$.

C. $x + y = 1$.

D. $x - y\sqrt{3} = 0$.

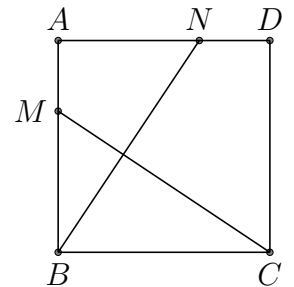
Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AN} = y\overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{AD} - (1 - x)\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = y\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.$$

$$CM \perp BN \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{BN} = 0 \Rightarrow -y + (1 - x) = 0 \Leftrightarrow x + y = 1.$$



Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 38. Xác định các hệ số a và b để Parabol $(P): y = ax^2 + 4x - b$ có đỉnh $I(-1; -5)$.

A. $\begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$

C. $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$

D. $\begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}$

Lời giải.

$$\text{Đỉnh } I(-1; -5) \Rightarrow \begin{cases} -5 = a - 4 - b \\ \frac{2}{a} = -1 \end{cases} \Rightarrow a = 2; b = 3.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 39. Cho P là mệnh đề đúng, Q là mệnh đề sai, chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. $P \Rightarrow \overline{P}$.

B. $P \Leftrightarrow Q$.

C. $\overline{P} \Rightarrow \overline{Q}$.

D. $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

Lời giải.

Do P đúng, Q sai nên $P \Rightarrow Q$ là mệnh đề sai, suy ra $\overline{P} \Rightarrow \overline{Q}$ là mệnh đề đúng.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 40. Tìm m để Parabol $(P): y = mx^2 - 2x + 3$ có trục đối xứng đi qua điểm $A(2; 3)$.

A. $m = 2$.

B. $m = -1$.

C. $m = 1$.

D. $m = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Trục đối xứng $x = \frac{1}{m}$, ($m \neq 0$).

Trục đối xứng đi qua $A(2; 3) \Rightarrow \frac{1}{m} = 2 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **D**

□

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. [0D3B1] Giải phương trình: $x^2 + \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 3x + \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ (1).

(HK1, Chuyên QH Huế, 2017- 2018)

Lời giải.

Điều kiện $x < 1$.

(1) $\Leftrightarrow x^2 = 3x \Leftrightarrow x = 0, x = 3$.

Đối chiếu điều kiện, phương trình có nghiệm $x = 0$.

□

Bài 2. [0H1K4] Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (2 + x; -3)$ và $\vec{b} = (1; 2)$. Đặt $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b}$. Tìm x biết $\vec{v} = (-5; 8)$ là véc-tơ ngược chiều với $\vec{u}$ và $|\vec{v}| = 2|\vec{u}|$.

(HK1, Chuyên QH Huế, 2017- 2018)

Lời giải.

Ta có $\vec{u} = (5 + 2x; -4)$.

$\begin{cases} \vec{u}, \vec{v} \text{ ngược chiều} \\ |\vec{v}| = 2|\vec{u}| \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = -2\vec{u} \Rightarrow \begin{cases} -10 - 4x = -5 \\ 8 = 8 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{5}{4}$.

□

ĐÁP ÁN

1. B	2. A	3. B	4. C	5. A
6. C	7. B	8. D	9. D	10. B
11. A	12. D	13. C	14. C	15. A
16. B	17. D	18. A	19. A	20. A
21. B	22. B	23. B	24. B	25. D
26. A	27. A	28. D	29. C	30. C
31. D	32. D	33. B	34. C	35. D
36. A	37. C	38. C	39. C	40. D

Bài 1.

- 1) Lập mệnh đề phủ định của mệnh đề sau $\exists n \in \mathbb{N} : 2n + 1 < n^2$.
 2) Cho $A = (-\infty; 1]$ và $B = [-7; 100)$. Xác định kết quả các phép toán tập hợp

- a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) $A \setminus B$

Lời giải.

- 1) Mệnh đề phủ định của mệnh đề $\exists n \in \mathbb{N} : 2n + 1 < n^2$ là $\forall n \in \mathbb{N} : 2n + 1 \geq n^2$.
 2) Ta có, kết quả của các phép toán tập hợp là

- a) $A \cap B = [-7; 1]$.
 b) $A \cup B = (-\infty; 100)$.
 c) $A \setminus B = (-\infty; -7)$.

□

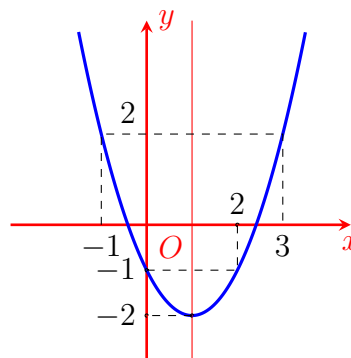
Bài 2.

- a) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x - 1$.

Lời giải.

- Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$
- Tọa độ đỉnh $I(1; -2)$
- Trục đối xứng $x = 1$
- $a = 1 > 0$ nên Parabol quay lên
- Bảng biến thiên
- Đồ thị

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-2	$+\infty$



□

- b) Tìm tọa độ giao điểm của $(P) : y = 2x^2 - 4x + 1$ và $d : y = x - 1$.

Lời giải.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm: $2x^2 - 4x + 1 = x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \\ x = 2 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

Vậy giao điểm của (P) và d là $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ và $(2; 1)$.

□

Bài 3. Giải các phương trình sau:

a) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$.

b) $\sqrt{3x+7} = x+3$.

c) $\frac{3}{2x^2+13x+6} + \frac{5}{2x^2+7x+6} = \frac{10}{21x}$.

Lời giải.

a) Ta có $x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -1 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

b) $\sqrt{3x+7} = x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 3x+7 = (x+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x^2+3x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \end{cases}$.

c) Điều kiện: $\begin{cases} 2x^2+13x+6 \neq 0 \\ 2x^2+7x+6 \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$

Ta có, $\frac{3}{2x^2+13x+6} + \frac{5}{2x^2+7x+6} = \frac{10}{21x} \Leftrightarrow \frac{3}{2x+13+\frac{6}{x}} + \frac{5}{2x+7+\frac{6}{x}} = \frac{10}{21}$.

Đặt $t = 2x + \frac{6}{x} + 7$, ta được $\frac{3}{t+6} + \frac{5}{t} = \frac{10}{21} \Leftrightarrow 5t^2 - 54t - 315 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 15 \\ t = -\frac{21}{5} \end{cases}$

• $t = 15$ thì $2x + \frac{6}{x} + 7 = 15 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$

• $t = -\frac{21}{5}$ thì $2x + \frac{6}{x} + 7 = -\frac{21}{5} \Leftrightarrow 5x^2 + 28x + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{5} \\ x = -\frac{3}{5} \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{-5, -\frac{3}{5}; 1, 3\right\}$.

□

Bài 4.

a) Cho bốn điểm A, B, C, D . Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$.

b) Trong mặt phẳng Oxy , cho $\vec{a} = (-6; 11)$ và $\vec{b} = (4; -3)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{x} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$.

Lời giải.

a) Ta có,
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}) \\ &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC}) \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} + \vec{0} \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} \end{aligned}$$

b) Ta có,
$$\begin{aligned} \vec{x} &= 3\vec{a} - 2\vec{b} \\ &= (3 \cdot (-6) - 2 \cdot 4; 3 \cdot 11 - 2 \cdot (-3)) \\ &= (-26; 39) \end{aligned}$$

□

Bài 5. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho $\triangle ABC$ có $A(-2; 1)$, $B(2; -4)$, $C(5; 7)$.

- a) Tính tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$; Tính độ dài các cạnh AB, BC .
b) Tính cosin góc $\hat{A}$ của $\triangle ABC$.

Lời giải.

- a) Ta có, $\overrightarrow{AB} = (4; -5)$, $\overrightarrow{BC} = (3; 11)$

Ta có $AB = \sqrt{4^2 + (-5)^2} = \sqrt{41}$ và $BC = \sqrt{3^2 + 11^2} = \sqrt{130}$.

- b) Ta có, $\overrightarrow{AB} = (4; -5)$, $\overrightarrow{AC} = (7; 6)$.

$$\cos \hat{A} = \cos (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-2}{\sqrt{3485}}$$

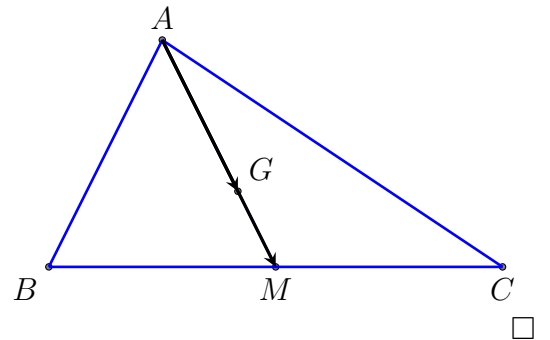
□

Bài 6. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 3, BC = 2, CA = 4$. Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

Ta có,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BC} &= \frac{2}{3} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \frac{1}{3} (AC^2 - AB^2) \\ &= \frac{7}{3}. \end{aligned}$$



□

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Mệnh đề phủ định của mệnh đề: “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 3 > 0$ ” là

- A. “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 3 \leq 0$ ”. B. “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 3 < 0$ ”.
C. “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 3 \leq 0$ ”. D. “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 3 < 0$ ”.

Lời giải.

Ta có P : “ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 3 > 0$ ” thì $\bar{P}$: “ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 3 \leq 0$ ”.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 2. Cho $A = \{1; 2; 3; 5\}$, $B = \{2; 4; 5; 6; 8\}$. Tìm tập hợp $A \cap B$.

- A. $A \cap B = \{2; 5\}$. B. $A \cap B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8\}$.
C. $A \cap B = \{2\}$. D. $A \cap B = \{5\}$.

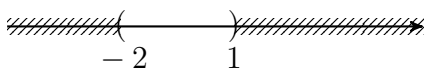
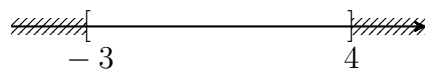
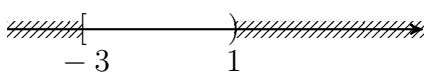
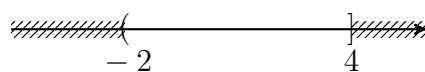
Lời giải.

Ta có: $x \in A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 3. Biểu diễn trên trục số của tập hợp $[-3; 1) \cap (-2; 4]$ là

- A. . B. .
C. . D. .

Lời giải.

Ta có $[-3; 1) \cap (-2; 4] = (-2; 1)$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 4. Cho $A = (-\infty; 7)$, $B = (-\infty; a)$ với a là số thực. Tìm tất cả các giá trị của a để $A \setminus B = \emptyset$.

- A. $a = 7$. B. $a \leq 7$. C. $a \geq 7$. D. $a \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $x \in A \setminus B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases}$. Vậy để $A \setminus B = \emptyset$ thì $A \subset B$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 5. Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình vẽ dưới?

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y	$+\infty$	-5	$+\infty$

- A. $y = -x^2 - 4x - 9$. B. $y = x^2 + 4x - 5$. C. $y = x^2 + 4x - 1$. D. $y = x^2 + 2x - 5$.

Lời giải.

Ta có $-\frac{b}{2a} = -2 \Rightarrow b = 4a$. Mặt khác đồ thị hàm số đi qua điểm $(-2; -5)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 6. Tìm trục đối xứng của $(P) : y = -x^2 - 4x + 3$.

A. $x = 2$.

B. $x = -2$.

C. $y = -2$.

D. $y = 2$.

Lời giải.

Ta có trục đối xứng là $x = -\frac{b}{2a} = -2$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 7. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{2-x} + \sqrt{5+x}$.

A. $\mathcal{D} = (-5; 2)$.

B. $\mathcal{D} = [2; +\infty)$.

C. $\mathcal{D} = [-5; 2]$.

D. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-5; 2\}$.

Lời giải.

Điều kiện của hàm số là $\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ 5+x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq -5 \end{cases}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 8. Tìm m để đồ thị hàm số $(P): y = -x^2 + 2x + 3$ và đường thẳng $d : y = m$ có 2 giao điểm chung.

A. $m \leq 4$.

B. $m > 4$.

C. $m > 1$.

D. $m < 4$.

Lời giải.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$ là

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$+\infty$	4	$+\infty$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 9. Điều kiện xác định của phương trình $\frac{4x}{x-3} - 5 = \frac{3}{x-3}$ là

A. $x > -3$.

B. $x \neq -3$.

C. $x > 3$.

D. $x \neq 3$.

Lời giải.

Điều kiện của phương trình là $x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 10. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 - 5x + 2 = 0$. Tính tổng $x_1^2 + x_2^2$.

A. 3.

B. 10.

C. 21.

D. 8.

Lời giải.

Ta có $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-5)^2 - 2 \cdot 2 = 21$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 11. Tìm tập nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 0$.

A. $S = \{1\}$.

B. $S = \emptyset$.

C. $S = \{1; 2\}$.

D. $S = \{2\}$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 12. Tìm m để phương trình $x^2 - 2x + m - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu.

- A. $m < 3$. B. $m > 3$. C. $m \geq 1$. D. $m < -3$.

Lời giải.

Để phương trình có hai nghiệm trái dấu thì $a \cdot c < 0$, suy ra $m - 3 < 0 \Rightarrow m < 3$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 13. Gọi $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x + 3y - 5 = 0 \\ 3x - 2y + 7 = 0 \end{cases}$. Tính $x_0 + y_0$.

- A. $x_0 + y_0 = -1$. B. $x_0 + y_0 = 3$. C. $x_0 + y_0 = -2$. D. $x_0 + y_0 = 1$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} x + 3y - 5 = 0 \\ 3x - 2y + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = 5 \\ 3x - 2y = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Vậy $(x_0; y_0) = (-1; 2)$, suy ra $x_0 + y_0 = 1$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 14. Tìm giá trị của tham số m để cặp số $(x; y) = (2; m + 1)$ là một nghiệm của phương trình $3x + 2y = 5$.

- A. $m = -\frac{3}{2}$. B. $m = -\frac{2}{3}$. C. $m = \frac{7}{2}$. D. $m = -2$.

Lời giải.

Để $(x; y) = (2; m + 1)$ là một nghiệm của phương trình $3x + 2y = 5$ thì $3 \cdot 2 + 2(m + 1) = 5 \Rightarrow m = -\frac{3}{2}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 15. Cho a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- A. $a < b \Leftrightarrow ac < bc$. B. $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$.
C. $a < b$ và $c < d \Rightarrow a + c < b + d$. D. $a < b$ và $c < d \Rightarrow ac < bd$.

Lời giải.

$a < b \Leftrightarrow ac < bc$ khi $c > 0$.

$a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$ khi $a > 0$.

$a < b$ và $c < d \Rightarrow ac < bd$ khi $a > 0, c > 0$.

$a < b$ và $c < d \Rightarrow a + c < b + d$ luôn đúng.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 16. Hai vectơ có cùng độ dài và ngược hướng được gọi là

- A. hai vectơ bằng nhau. B. hai vectơ đối nhau.
C. hai vectơ cùng hướng. D. hai vectơ cùng phương.

Lời giải.

Hai vectơ đối nhau là hai vectơ có cùng độ dài và ngược hướng.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 17. Cho tam giác ABC . Có thể xác định được bao nhiêu vectơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối là các điểm A, B, C ?

- A. 3. B. 5. C. 6. D. 9.

Lời giải.

Các vectơ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{BA}, \vec{BC}, \vec{CA}, \vec{CB}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 18. Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AD}$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BD}$.

Lời giải.

Theo qui tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$, do đó $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 19. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$.

A. $a\sqrt{3}$.

B. $2a$.

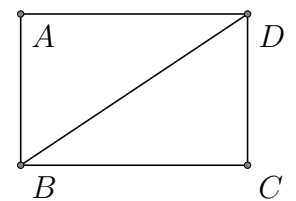
C. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

D. $3a$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DB}$.

Do $ABCD$ là hình chữ nhật nên ta có $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2a$.



Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 20. Trong mặt phẳng Oxy , vectơ $\vec{a} = -9\vec{i} + 4\vec{j}$ có tọa độ là

A. $(4; -9)$.

B. $(-9\vec{i}; 4\vec{j})$.

C. $(-9; 4)$.

D. $(-\vec{i}; \vec{j})$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} \Rightarrow \vec{a} = (x; y)$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 21. Trong mặt phẳng Oxy , cho $\vec{a} = (3; -4)$, $\vec{b} = (1; -2)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{a} + \vec{b}$.

A. $(2; -2)$.

B. $(4; -6)$.

C. $(4; 6)$.

D. $(-4; 6)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a} + \vec{b} = (3 + 1; -4 + (-2)) = (4; -6)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 22. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC với $A(-2; 0)$, $B(5; -4)$, $C(-5; 1)$. Tìm tọa độ điểm D để tứ giác $BCAD$ là hình bình hành.

A. $D(-12; 5)$.

B. $D(8; 5)$.

C. $D(-8; 5)$.

D. $D(8; -5)$.

Lời giải.

$$\text{Để } BCAD \text{ là hình bình hành thì } \begin{cases} x_D = x_B + x_A - x_C \\ y_D = y_B + y_A - y_C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = 5 + (-2) - (-5) = 8 \\ y_D = -4 + 0 - 1 = -5 \end{cases}.$$

Vậy $D(8; -5)$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 23. Trong mặt phẳng Oxy , cho $A(3; 4)$, $B(m; 1)$, $C(2; 0)$. Tìm giá trị m để ba điểm A, B, C thẳng hàng.

A. $m = 2$.

B. $m = \frac{9}{4}$.

C. $m = -\frac{9}{4}$.

D. $m = -2$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (m - 3; -3)$, $\overrightarrow{AC} = (-1; -4)$.

Để A, B, C thẳng hàng thì $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ phải cùng phương, suy ra $\frac{m-3}{-1} = \frac{-3}{-4}$, do đó $m = \frac{9}{4}$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 24. Cho tam giác ABC vuông tại A và có $\widehat{B} = 60^\circ$. Góc giữa $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$ bằng

A. 60° .

B. 30° .

C. 90° .

D. 45° .

Lời giải.

Ta có $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = \widehat{CAB}$.

Do $\triangle ABC$ vuông tại A và có $\widehat{B} = 60^\circ$ nên $\widehat{C} = 30^\circ$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 25. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào đúng?

A. $\sin(180^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$.

B. $\cos(180^\circ - \alpha) = \cos \alpha$.

C. $\tan(180^\circ - \alpha) = \tan \alpha$.

D. $\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$.

Lời giải.

Ta có $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$.

$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$.

$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$.

$\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 26. Cho $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (-2; -1)$. Giá trị của $\vec{a} \cdot \vec{b}$ là

A. -4 .

B. $(-1, 1)$.

C. 4 .

D. $(-3, 3)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.

Do đó ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) = -4$.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 27. Giá trị của $\cot 30^\circ$ là

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

D. $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Sử dụng MTCT, ta được $\cot 30^\circ = \sqrt{3}$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 28. Cho tam giác ABC có $A(-1; 3)$, $B(2; 3)$, $C(5; -3)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

A. $(2; 1)$.

B. $(2; 3)$.

C. $(\frac{1}{2}; 0)$.

D. $(-\frac{8}{3}; 1)$.

Lời giải.

Ta có
$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_G = 2 \\ y_G = 1 \end{cases}$$

Chọn đáp án (A)

□

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Giải phương trình $\sqrt{3x^2 - x + 1} = x + 1$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \sqrt{3x^2 - x + 1} = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 3x^2 - x + 1 = (x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 2x^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases} \quad \square$$

Bài 2. Ba bạn An, Bình, Cường cùng đi chợ mua trái cây. Bạn An mua 2 kg cam và 3 kg quýt hết 105 nghìn đồng, bạn Bình mua 4 kg nho và 1 kg cam hết 215 nghìn đồng, bạn Cường mua 2 kg nho, 3 kg cam và 1 kg quýt hết 170 nghìn đồng. Hỏi mỗi loại cam, quýt, nho có giá bao nhiêu tiền cho mỗi kg?

Lời giải.

Gọi x, y, z (đơn vị: nghìn đồng) lần lượt là giá tiền cho mỗi kg cam, quýt và nho ($x, y, z > 0$).

$$\text{Theo đề bài ta có hệ phương trình } \begin{cases} 2x + 3y = 105 \\ x + 4z = 215 \\ 3x + y + 2z = 170 \end{cases}.$$

Giải hệ phương trình trên ta được $x = 15, y = 25, z = 50$.

Vậy cam có giá 15 nghìn đồng cho mỗi kg, quýt có giá 25 nghìn đồng cho mỗi kg và nho có giá 50 nghìn đồng cho mỗi kg. $\square$

Bài 3. Trong mặt phẳng Oxy , cho các điểm $A(1; 1), B(3; -2), C(5; 8)$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; -3), \overrightarrow{AC} = (4; 7)$. Do đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -13$. $\square$

ĐÁP ÁN

1. A	2. A	3. A	4. C	5. C
6. B	7. C	8. D	9. D	10. C
11. D	12. A	13. D	14. A	15. C
16. B	17. C	18. B	19. B	20. C
21. B	22. D	23. B	24. B	25. D
26. A	27. D	28. A		

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tập hợp nào sau đây là tập hợp rỗng?

A. $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - x = 0\}.$

B. $B = \{x \in \mathbb{Q} | x^2 = 2\}.$

C. $C = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 1 = 0\}.$

D. $D = \{x \in \mathbb{Z} | 0 < x < 4\}.$

Lời giải.

$$x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}. \text{ Cho nên } A = \{0; 1\}.$$

$$\begin{cases} x \in \mathbb{Q} \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Q} \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases} \text{ (vô nghiệm)}. \text{ Cho nên } B = \emptyset.$$

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1. \text{ Cho nên } C = \{-1; 1\}.$$

$$\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ 0 < x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{1; 2; 3\}. \text{ Cho nên } D = \{1; 2; 3\}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 2. Cho tam giác ABC vuông tại A và có góc $\widehat{B} = 50^\circ$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}$ bằng 140° .

B. Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ bằng 50° .

C. Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}$ bằng 90° .

D. Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}$ bằng 130° .

Lời giải.

Gọi D, E lần lượt là các điểm thuộc đường thẳng AB, AC sao cho $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CE}$.

Vì tam giác ABC vuông tại A và có $\widehat{ABC} = 50^\circ$ nên $\widehat{ACB} = 40^\circ$.

Khi đó:

$$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CB}) = \widehat{BCE} = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ.$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}) = \widehat{CBD} = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ.$$

$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{ACB} = 40^\circ.$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = \widehat{ABC} = 50^\circ.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 3. Tìm nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 13 \\ \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 12. \end{cases}$$

A. $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{3}.$

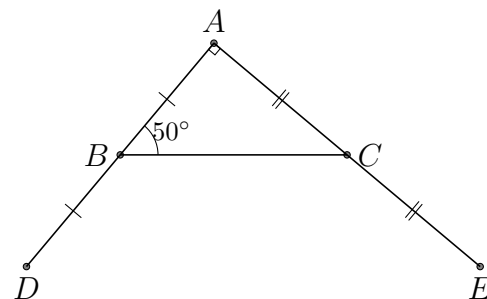
B. $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}.$

C. $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}.$

D. $x = 2, y = 3.$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện xác định: } \begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}.$$



$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 13 \\ \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = 2 \\ \frac{1}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ (thỏa ĐKXD).}$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 4. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

- A. $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq 2n$. B. $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 = n$. C. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$. D. $\exists x \in \mathbb{R} : x > x^2$.

Lời giải.

Mệnh đề “ $\forall n \in \mathbb{N} : n \leq 2n$ ” đúng vì mọi số tự nhiên đều bé hơn hoặc bằng gấp đôi của nó.

Mệnh đề “ $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 = n$ ” đúng vì tồn tại $n = 1$ mà $1^2 = 1$ (đúng).

Mệnh đề “ $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$ ” sai vì tồn tại $x = 0$ mà $0^2 > 0$ (sai).

Mệnh đề “ $\exists x \in \mathbb{R} : x > x^2$ ” đúng vì tồn tại $x = \frac{1}{2}$ mà $\frac{1}{2} > \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$ (đúng).

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 5. Hàm số $y = x^2 + 2017$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(0; +\infty)$. B. $(-\infty; 0)$. C. $(-\infty; +\infty)$. D. $(-1; +\infty)$.

Lời giải.

Tọa độ đỉnh của của parabol $y = x^2 + 2017$ là $I(0; 2017)$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y	$+\infty$	2017	$+\infty$

Vậy hàm số $y = x^2 + 2017$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 6. Số tập con của tập hợp $A = \{x; y; z\}$ là bao nhiêu?

- A. 3. B. 5. C. 8. D. 9.

Lời giải.

Cách 1. Vì tập hợp A có 3 phần tử phân biệt nên số tập con của A là $2^3 = 8$.

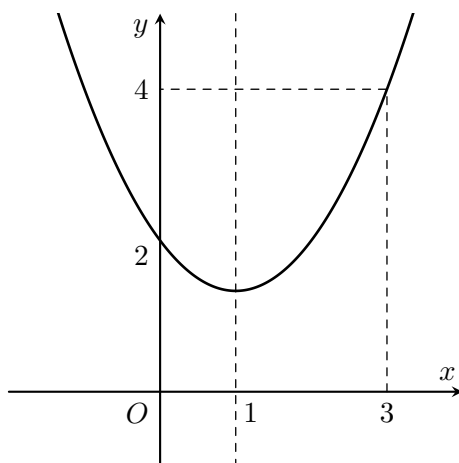
Cách 2. Liệt kê tất cả các tập con của A .

Các tập con của A là: $\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x; y\}, \{x; z\}, \{y; z\}, \{x; y; z\}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 7. Cho parabol (P) có đồ thị như hình vẽ bên.



Phương trình của (P) là phương trình nào sau đây?

A. $y = x^2 - 2x + 2$.

B. $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 2$.

C. $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x$.

D. $y = -\frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 2$.

Lời giải.

Giả sử (P) có phương trình là $y = ax^2 + bx + c$ (với $a \neq 0$). Vì (P) đi qua các điểm $(0; 2)$, $(3; 4)$ và có trục đối xứng $x = 1$ nên:

$$\begin{cases} c = 2 \\ 9a + 3b + c = 4 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = -\frac{4}{3} \\ c = 2 \end{cases}.$$

Vậy phương trình của (P) là $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 2$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 8. Xác định kết quả của $(-2; 4) \setminus [2; 5]$.

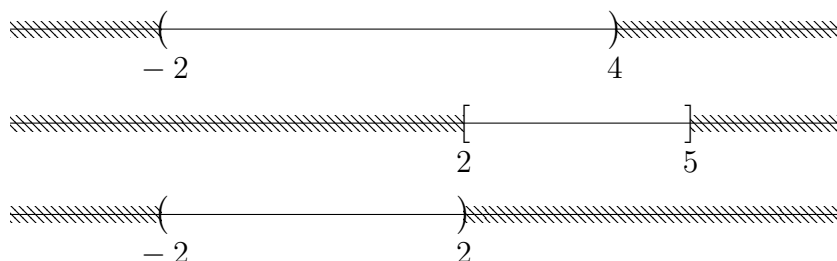
A. $(-2; 2]$.

B. $(-2; 2)$.

C. $(-2; 5]$.

D. $(2; 4]$.

Lời giải.



Do đó $(-2; 4) \setminus [2; 5] = (-2; 2)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 9. Điểm nào sau đây thuộc đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x + 1$?

A. $M(-2; -12)$.

B. $N(1; 3)$.

C. $P(-1; -5)$.

D. $Q(2; 5)$.

Lời giải.

Bảng giá trị:

x	-2	-1	1	2
y	-11	-4	4	5

Vậy điểm $Q(2; 5)$ thuộc đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x + 1$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 10. Mệnh đề phủ định của mệnh đề “ $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 8x + 16 \leq 0$ ” là mệnh đề nào?

A. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 8x + 16 \geq 0$.

B. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 8x + 16 \leq 0$.

C. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 8x + 16 > 0$.

D. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 8x + 16 < 0$.

Lời giải.

Mệnh đề phủ định của mệnh đề “ $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 8x + 16 \leq 0$ ” là mệnh đề “ $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 8x + 16 > 0$ ”.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 11. Phương trình $(x^2 - 16)\sqrt{3 - x} = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

A. Một nghiệm.

B. Ba nghiệm.

C. Vô nghiệm.

D. Hai nghiệm.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $3 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$.

Với điều kiện xác định trên, ta có:

$$(x^2 - 16)\sqrt{3 - x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 16 = 0 \\ \sqrt{3 - x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 16 = 0 \\ 3 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 4 \\ x = 3 \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện xác định, phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 3, x = 4$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 12. Cho hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Đồ thị của hàm số có đỉnh $I(1; 4)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

D. Đồ thị của hàm số đi qua điểm $M(2; 2)$.

Lời giải.

Hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Đỉnh $I(1; 4)$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	4	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Bảng giá trị:

x	0	1	2
y	3	4	3

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 13. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào **không** là hàm số lẻ?

- A. $y = x^3 - x$. B. $y = x^3 + 1$. C. $y = \frac{x^3 + x}{x^2 + 1}$. D. $y = \frac{1 + x^2}{x}$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = f(x) = x^3 + 1$.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Với mọi $x \in \mathcal{D}$ thì $-x \in \mathcal{D}$.

Ta có:

$$f(-x) = -x^3 + 1 \text{ và } -f(x) = -x^3 - 1.$$

Vì $f(-x) \neq f(x)$ và $f(-x) \neq -f(x)$ nên hàm số đã cho không là hàm số chẵn cũng không là hàm số lẻ.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 14. Biết rằng đồ thị hàm số $y = mx + n$ đi qua đỉnh của parabol $y = x^2 - 2x + 3$. Hãy tính $m + n$.

- A. 0. B. 1. C. 2. D. -2.

Lời giải.

Đỉnh của parabol $y = x^2 - 2x + 3$ là $I(1; 2)$.

Vì đường thẳng $y = mx + n$ đi qua đỉnh $I(1; 2)$ nên $m + n = 2$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 15. Parabol $y = ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $A(8; 0)$ và có đỉnh $I(6; -12)$. Khi đó $a + b + c$ bằng bao nhiêu?

- A. -135. B. 57. C. 63. D. 135.

Lời giải.

Vì parabol $y = ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $A(8; 0)$ và có đỉnh $I(6; -12)$ nên

$$\begin{cases} 64a + 8b + c = 0 \\ 36a + 6b + c = -12 \\ 12a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -36 \\ c = 96 \end{cases}.$$

Vậy $a + b + c = 3 - 36 + 96 = 63$.

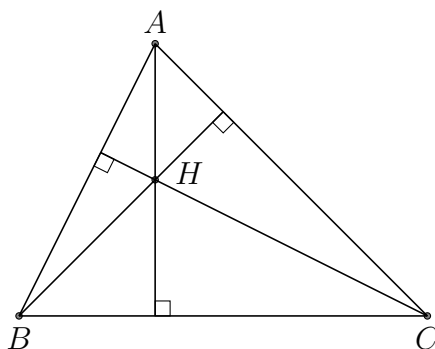
Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC với $A(4; 3)$, $B(-5; 6)$ và $C(-4; -1)$. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC .

- A. $H(3; -2)$. B. $H(-3; -2)$. C. $H(3; 2)$. D. $H(-3; 2)$.

Lời giải.



Gọi $H(x; y)$ là trực tâm của tam giác ABC .

Ta có:

$$\overrightarrow{AH} = (x - 4; y - 3); \overrightarrow{BC} = (1; -7).$$

$$\overrightarrow{BH} = (x + 5; y - 6); \overrightarrow{AC} = (-8; -4).$$

Vì H là trực tâm của tam giác ABC nên:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 - 7(y - 3) = 0 \\ -8(x + 5) - 4(y - 6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 7y = -17 \\ 2x + y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 2. \end{cases}$$

Vậy $H(-3; 2)$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 17. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a . Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$.

A. $2a$.

B. a .

C. $a\sqrt{3}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

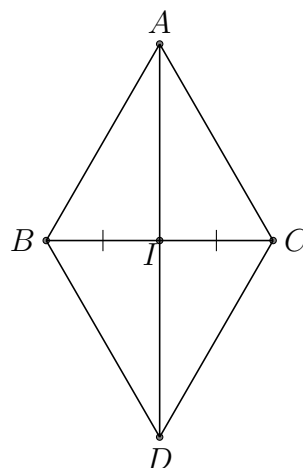
Gọi I là trung điểm của BC . Dựng điểm D sao cho $ABDC$ là hình bình hành. Khi đó:

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = AD = 2AI.$$

Vì ABC là tam giác đều nên AI là đường cao của tam giác đều. Do đó

$$AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$



Chọn đáp án **C**

□

Câu 18. Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2 - 3x + 1} = \sqrt{4 - x}$ bằng bao nhiêu?

A. 8.

B. 9.

C. 10.

D. 11.

Lời giải.

$$\sqrt{x^2 - 3x + 1} = \sqrt{4 - x} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x \geq 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3. \end{cases}$$

Vậy tổng bình phương các nghiệm của phương trình đã cho là $(-1)^2 + 3^2 = 10$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 19. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và M là trung điểm của AB . Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.

B. $\vec{GA} + \vec{GB} = 2\vec{GM}$.

C. $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$.

D. $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$.

Lời giải.

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên:

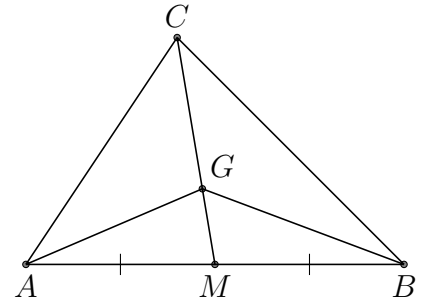
$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$$

$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG} \text{ (chú ý: } M \text{ không nhất thiết là trung điểm của } AB).$$

Vì M là trung điểm của AB nên:

$$\vec{GA} + \vec{GB} = 2\vec{GM} \text{ (chú ý: } G \text{ không nhất thiết là trọng tâm của tam giác } ABC).$$

$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0} + \vec{MC} = \vec{MC}.$$



Chọn đáp án **C**

□

Câu 20. Một thửa ruộng hình chữ nhật có chu vi 250 mét. Biết rằng nếu ta giảm chiều dài 3 lần và chiều rộng tăng 2 lần thì chu vi thửa ruộng không đổi. Tính chiều dài và chiều rộng của thửa ruộng hình chữ nhật đó.

A. 100 m và 25 m.

B. 75 m và 50 m.

C. 70 m và 55 m.

D. 65 m và 60 m.

Lời giải.

Gọi x (m) và y (m) lần lượt là chiều dài và chiều rộng của thửa ruộng hình chữ nhật.

Điều kiện: $x > 0$ và $y > 0$.

Theo đề bài ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 125 \\ \frac{x}{3} + 2y = 125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 75 \\ y = 50. \end{cases}$$

Vậy chiều dài thửa đất là 75 m và chiều rộng thửa đất là 50 m.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 21. Biết rằng phương trình $|x^2 - 4x - 5| = 4x - 17$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính giá trị của $x_1 + x_2$.

A. $6 - \sqrt{22}$.

B. 0.

C. 8.

D. $6 + \sqrt{22}$.

Lời giải.

$$|x^2 - 4x - 5| = 4x - 17 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 17 \geq 0 \\ \begin{cases} x^2 - 4x - 5 = 4x - 17 \\ x^2 - 4x - 5 = -4x + 17 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 17 \geq 0 \\ \begin{cases} x^2 - 8x + 12 = 0 \\ x^2 - 22 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{17}{4} \\ \begin{cases} x = 2 \\ x = 6 \\ x = \pm\sqrt{22} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = \sqrt{22}. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x_1 + x_2 = 6 + \sqrt{22}.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 22. Gọi $(x_0; y_0; z_0)$ là nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - 2y + z = 8 \\ 2x + z = 4 \end{cases}$$
. Tính $x_0 + y_0 + z_0$.

A. 3. B. 1. C. -2. D. 2.

Lời giải.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - 2y + z = 8 \\ 2x + z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 0. \end{cases}$$

Vậy $x_0 + y_0 + z_0 = 2 - 1 + 0 = 1$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 23. Trong hệ tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (3; 2)$ và $\vec{b} = (5; -1)$. Góc giữa hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ bằng bao nhiêu độ?

A. 30° . B. 90° . C. 45° . D. 150° .

Lời giải.

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3 \cdot 5 + 2 \cdot (-1)}{\sqrt{3^2 + 2^2} \cdot \sqrt{5^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Suy ra $(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 24. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{2x-1}{3x-6} - 3\sqrt{x-2}$.

A. $\mathcal{D} = (2; +\infty)$. B. $\mathcal{D} = [2; +\infty)$. C. $\mathcal{D} = (-\infty; 2]$. D. $\mathcal{D} = (-\infty; 2)$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện xác định: } \begin{cases} 3x - 6 \neq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = (2; +\infty)$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 25. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC với $A(3; 1)$, $B(4; 2)$ và $C(4; -3)$. Tìm tọa độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

A. $D(-3; 4)$. B. $D(-3; -4)$. C. $D(3; -4)$. D. $D(3; 4)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AD} = (x_D - 3; y_D - 1)$ và $\overrightarrow{BC} = (0; -5)$.

$$ABCD \text{ là hình bình hành khi: } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 3 = 0 \\ y_D - 1 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 3 \\ y_D = -4 \end{cases}. \text{ Vậy } D(3; -4).$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 26. Trong hệ tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (4; 3)$ và $\vec{c} = (2; 3)$. Giá trị của biểu thức $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$ bằng bao nhiêu?

A. 18. B. 0. C. 28. D. 2.

Lời giải.

Ta có:

$$\vec{a} = (1; 2).$$

$$\vec{b} + \vec{c} = (6; 6).$$

$$\text{Vậy } \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 6 = 18.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 27. Kết quả nào sau đây sai?

A. $(-5; 7) \cap (2; 9) = (2; 7).$

B. $[-3; 2) \cup \{1; 2\} = [-3; 2].$

C. $\{1; 2\} \setminus (1; 2) = \{1; 2\}.$

D. $\{-2; -1; 0\} \cap (-3; 1) = (-2; 0).$

Lời giải.

Vì $\{-2; -1; 0\} \subset (-3; 1)$ nên $\{-2; -1; 0\} \cap (-3; 1) = \{-2; -1; 0\}.$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 28. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(4; 6)$, $B(1; 4)$, $C\left(7; \frac{3}{2}\right)$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\vec{AC} = \left(3; -\frac{9}{2}\right).$

B. $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0.$

C. $|\vec{AB}| = \sqrt{13}.$

D. $BC = \frac{\sqrt{13}}{2}.$

Lời giải.

Ta có:

$$\vec{AB} = (-3; -2).$$

$$\vec{AC} = \left(3; -\frac{9}{2}\right).$$

$$\vec{BC} = \left(6; -\frac{5}{2}\right).$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -3 \cdot 3 + (-2) \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = 0.$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}.$$

$$BC = \sqrt{6^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{13}{2}.$$

Chọn đáp án **D**

□

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1.

a) Vẽ đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x - 3.$

b) Xác định hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx - 1.$ Biết rằng đồ thị của nó có trục đối xứng $x = \frac{2}{3}$ và đi qua điểm $M(-1; 3).$

Lời giải.

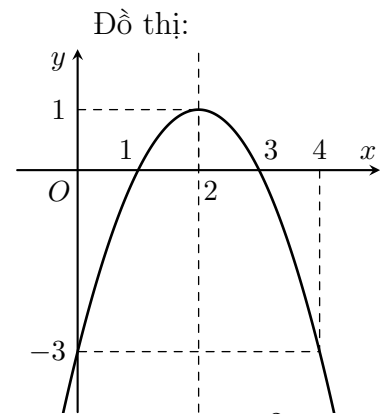
a) Hàm số $y = -x^2 + 4x - 3.$

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Đỉnh $I(2; 1)$.

Bảng giá trị:

x	0	1	2	3	4
y	-3	0	1	0	-3



- b) Vì đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx - 1$ đi qua điểm $M(-1; 3)$ và có trục đối xứng $x = \frac{2}{3}$ nên:

$$\begin{cases} a - b = 4 \\ 4a + 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{12}{7} \\ b = -\frac{16}{7} \end{cases}.$$

Vậy hàm số cần tìm là $y = \frac{12}{7}x^2 - \frac{16}{7}x - 1$.

□

Bài 2.

- a) Giải phương trình $\sqrt{-x^2 + 3x + 2} = 3x - 4$.
- b) Tìm giá trị của tham số m để phương trình $-x^2 - 4x + 2m - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 = 2017$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \sqrt{-x^2 + 3x + 2} = 3x - 4 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 3x - 4 \geq 0 \\ -x^2 + 3x + 2 = (3x - 4)^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 3x - 4 \geq 0 \\ 10x^2 - 27x + 14 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x \geq \frac{4}{3} \\ \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{7}{10} \end{cases} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & x = 2. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

- b) Phương trình $-x^2 - 4x + 2m - 3 = 0$.

Ta có: $\Delta' = 4 + 2m - 3 = 2m + 1$.

Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi:

$$\begin{cases} 2m + 1 > 0 \\ (-4)^2 + 2(2m - 3) = 2017 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 1 > 0 \\ 4m = 2007 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{2} \\ m = \frac{2007}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{2007}{4}.$$

□

Bài 3. Trong hệ tọa độ Oxy , cho tam giác ABC với $A(2; -1)$, $B(3; 4)$ và $C(-2; 5)$.

- a) Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại B . Tính diện tích tam giác ABC .

b) Tìm tọa độ tâm và tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Lời giải.

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1; 5)$ và $\overrightarrow{BC} = (-5; 1)$.

Vì $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 1 \cdot (-5) + 5 \cdot 1 = 0$ nên $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$.

Vậy tam giác ABC vuông tại B .

Ta lại có: $AB = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$ và $BC = \sqrt{(-5)^2 + 1^2} = \sqrt{26}$.

Do đó diện tích của tam giác ABC là $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{26} \cdot \sqrt{26} = 13$.

b) Gọi I tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Vì ABC là tam giác vuông tại B (chứng minh trên) nên I là trung điểm AC .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x_I = \frac{2 + (-2)}{2} \\ y_I = \frac{-1 + 5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = 0 \\ y_I = 2. \end{cases}$$

Vậy $I(0; 2)$.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là: $R = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + BC^2}}{2} = \sqrt{13}$.

□

ĐÁP ÁN

1. B	2. A	3. B	4. C	5. A
6. C	7. B	8. B	9. D	10. C
11. D	12. D	13. B	14. C	15. C
16. D	17. C	18. C	19. C	20. B
21. D	22. B	23. C	24. A	25. C
26. A	27. D	28. D		



ĐỀ KIỂM HKII

Câu 1. Tiền thưởng (triệu đồng) của cán bộ và nhân viên trong một công ty được cho ở bảng sau:

Tiền lương	1	2	3	4	5	Cộng
Tần số	10	12	11	15	2	50

Tính một M_O .

A. $M_O = 4$.

B. $M_O = 5$.

C. $M_O = 15$.

D. $M_O = 11$.

Lời giải.

Trong bảng phân bố giá trị tiền lương thì 4 triệu có tần số lớn nhất là 15 nên một là: $M_O = 4$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 2. Tiền thưởng (triệu đồng) của cán bộ và nhân viên trong một công ty được cho ở bảng sau:

Tiền lương	2	3	4	5	6	Cộng
Tần số	5	15	10	6	4	40

Tính tiền thưởng trung bình.

A. 3725000 đồng.

B. 3745000 đồng.

C. 3715000 đồng.

D. 3625000 đồng.

Lời giải.

Số trung bình tiền thưởng trong bảng phân bố trên là: $\bar{x} = \frac{1}{40}(2 \cdot 5 + 3 \cdot 15 + 4 \cdot 10 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 4) = 3,725$ triệu đồng.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 3. Tìm phương sai của dãy số liệu thống kê: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải.

Ta có: $\bar{n} = \frac{1+2+3+4+5+6+7}{7} = 4$.

$$s^2 = \frac{1}{7}[(1-4)^2 + (2-4)^2 + (3-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2 + (6-4)^2 + (7-4)^2] = 4.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 4. Mệnh đề nào dưới đây là **sai**?

A. $\begin{cases} a \geq x \\ b \geq y \end{cases} \Rightarrow a + b \geq x + y$.

B. $a + \frac{1}{a} \geq 2; \forall a > 0$.

C. $a + b \geq 2\sqrt{ab}; (\forall a, b \geq 0)$.

D. $a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}; \forall a, b \neq 0$.

Lời giải.

Cho $a = -2; b = -4$ thì $a > b$ nhưng $\frac{1}{a} = -\frac{1}{2}; \frac{1}{b} = -\frac{1}{4}$ khi đó $-\frac{1}{4} < -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 5. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$.

A. 2.

B. $\sqrt{2}$.

C. $2 - \sqrt{2}$.

D. 0.

Lời giải.

Điều kiện : $2 \leq x \leq 4$.

$$A^2 = (\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x})^2 = 2 + 2\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{4-x} \geq 2 \Rightarrow A \geq \sqrt{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $A = \sqrt{2}$ khi $x = 2$ hoặc $x = 4$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 6. Người ta dùng 100 mét rào để rào một mảnh đất hình chữ nhật để thả gia súc. Biết một cạnh của hình chữ nhật là bức tường (không phải rào). Tính diện tích lớn nhất của mảnh đất có thể rào được ?

A. 1350 (m²).

B. 1250 (m²).

C. 625 (m²).

D. 1150 (m²).

Lời giải.

Gọi x, y là kích thước của mảnh đất.

Theo giả thiết $2x + y = 100$. Diện tích mảnh đất $S = xy$.

Theo BDT Cauchy

$$2x + y \geq 2\sqrt{2xy} \Leftrightarrow xy \leq \frac{(2x + y)^2}{8} = \frac{10000}{8} = 1250.$$

Suy ra diện tích của mảnh đất có thể rào được là 1250 (m²). Khi đó

$$2x = y \Rightarrow x = 25 \text{ (m)}, y = 50 \text{ (m)}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 7. Số nào dưới đây là nghiệm của bất phương trình $2x + 1 < 3$?

A. $x = 0$.

B. $x = 1$.

C. $x = 2$.

D. $x = 3$.

Lời giải.

Ta có $2x + 1 < 3 \Leftrightarrow 2x < 2 \Leftrightarrow x < 1$. Dó đó trong bốn giá trị trên chỉ có $x = 0$ thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 8. Tìm nghiệm của nhị thức bậc nhất $f(x) = 3x + 6$.

A. $x = 2$.

B. $x = -2$.

C. $x = 3$.

D. $x = -3$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } 3x + 6 = 0 \Leftrightarrow 3x = -6 \Leftrightarrow x = -2.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 9. Tìm nghiệm của tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + 4x - 5$.

A. $x = 5, x = -1$.

B. $x = -5, x = -1$.

C. $x = 5, x = 1$.

D. $x = -5, x = 1$.

Lời giải.

$$\text{Nghiệm của tam thức là nghiệm của phương trình } x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 10. Cho tam thức bậc hai $f(x) = -x^2 - 4x + 5$. Tìm x sao cho $f(x) \geq 0$.

A. $x \in (-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$.

B. $x \in [-1; 5]$.

C. $x \in [-5; 1]$.

D. $x \in (-5; 1)$.

Lời giải.

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 - 4x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-5; 1].$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 11. Giải bất phương trình $|2x + 5| > |7 - 4x|$.

A. $x \in \left[\frac{1}{3}; 6\right]$.

B. $x \in \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

C. $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (6; +\infty)$.

D. $x \in \left(\frac{1}{3}; 6\right)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } |2x + 5| > |7 - 4x| \Leftrightarrow (6x - 2)(-2x + 12) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{3}; 6\right).$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 12. Tìm tất cả giá trị của m để bất phương trình $-x^2 + 2x - m - 1 > 0$ vô nghiệm.

A. $m > 0$.

B. $m < 0$.

C. $m \leq 0$.

D. $m \geq 0$.

Lời giải.

Để bất phương trình vô nghiệm thì

$$-x^2 + 2x - m - 1 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow 1 - (m + 1) \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 0$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 13. Giải bất phương trình $2(x + 1) < 3(x - 2)$.

A. $x > 8$.

B. $x < -8$.

C. $x > -8$.

D. $x < 8$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } 2(x + 1) < 3(x - 2) \Leftrightarrow 2x + 2 < 3x - 6 \Leftrightarrow x > 8.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 14. Giải bất phương trình $\frac{2x^2 - 10x + 8}{3 - x} \leq 0$.

A. $x \in [1; 3)$.

B. $x \in (-\infty; 1] \cup (3; 4]$.

C. $x \in [1; 3) \cup [4; +\infty)$.

D. $x \in (1; 3) \cup (4; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có:

$$2x^2 - 10x + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}.$$

$$3 - x = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	1	3	4	$+\infty$
$2x^2 - 10x + 8$	+	0	-	0	+
$3 - x$	+	+	0	-	-
$f(x)$	+	0	-	0	-

Dựa vào bảng xét dấu ta có $x \in [1; 3) \cup [4; +\infty)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 15. Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $m^2x > mx - m$ vô nghiệm.

A. $m \in \{0; 1\}$.

B. $m \in (0; 1)$.

C. $m = 0$.

D. $m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $m^2x > mx - m \Leftrightarrow (m^2 - m)x > -m$.

Với $m = 0$ ta được $0 > 0$ nên bất phương trình vô nghiệm.

Với $m = 1$ ta được $0 > -1$ nên bất phương trình nghiệm đúng với mọi x .

Với $m^2 - m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 1 \end{cases}$ ta được $(m^2 - m)x > -m \Leftrightarrow x > \frac{-m}{m^2 - m} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{-m}{m^2 - m}; +\infty\right)$.

Với $m^2 - m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 1$ ta được $(m^2 - m)x > -m \Leftrightarrow x < \frac{-m}{m^2 - m} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{-m}{m^2 - m}\right)$.

Vậy để bất phương trình vô nghiệm thì $m = 0$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 16. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\sqrt{x^2 - 2x - 15} > 2x + 5$.

A. $S = (-\infty; -3]$.

B. $S = (-\infty; -3)$.

C. $S = (-\infty; 3]$.

D. $S = (-\infty; 3)$.

Lời giải.

$$\sqrt{x^2 - 2x - 15} > 2x + 5 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2x + 5 < 0 \\ x^2 - 2x - 15 \geq 0 \end{cases} \quad (*) \\ \begin{cases} 2x + 5 \geq 0 \\ x^2 - 2x - 15 > (2x + 5)^2 \end{cases} \quad (**) \end{cases}.$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{5}{2} \\ x \in (-\infty; -3) \cup (5; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -3).$$

$$(**) \begin{cases} x \geq -\frac{5}{2} \\ -3x^2 - 22x - 40 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{5}{2} \\ x \in \left(-4; -\frac{10}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $x \in (-\infty; -3)$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 17. Giải hệ bất phương trình $\begin{cases} (x + 5)(6 - x) > 0 \\ 2x + 1 < 3 \end{cases}$.

A. $-5 < x < 1$.

B. $x < 1$.

C. $x > -5$.

D. $x < -5$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} (x + 5)(6 - x) > 0 \\ 2x + 1 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 < x < 6 \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -5 < x < 1.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 18. Bất phương trình $\frac{2x + 7}{x - 1} < 1$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

A. 14.

B. 3.

C. 0.

D. 4.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \frac{2x+7}{x-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{x+8}{x-1} < 0.$$

$$x+8=0 \Leftrightarrow x=-8$$

$$x-1=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-8	1	$+\infty$
$x+8$	$-$	0	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	$+$

Dựa vào bảng xét dấu ta có $x \in (-8; 1)$. Vậy bất phương trình không có nghiệm nguyên dương.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 19. Tìm giá trị lớn nhất của m để bất phương trình $3(x-m) \geq m^2(5-x)$ thỏa mãn $\forall x \geq 5$.

A. $m = -5$.B. $m = \frac{1}{5}$.C. $m = 5$.D. $m = -\frac{1}{5}$.**Lời giải.**

$$3(x-m) \geq m^2(5-x) \Leftrightarrow (m^2+3)x \geq 5m^2+3m \Leftrightarrow x \geq \frac{5m^2+3m}{m^2+3}.$$

Để bất phương trình thỏa mãn $\forall x \geq 5$ thì

$$\frac{5m^2+3m}{m^2+3} \leq 5 \Leftrightarrow \frac{3m-15}{m^2+3} \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 5.$$

Vậy giá trị m lớn nhất là $m = 5$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 20. Cặp số $(x_0; y_0)$ nào là nghiệm của bất phương trình $2x - 3y \geq 4$?

A. $(x_0; y_0) = (-2; 2)$.B. $(x_0; y_0) = (5; 1)$.C. $(x_0; y_0) = (-4; 0)$.D. $(x_0; y_0) = (2; 1)$.**Lời giải.**

Nhận xét: Các phương án đưa ra đều có $y \geq 0$ nên ta biến đổi bất phương trình trên như sau:

$$2x - 3y \geq 4 \Leftrightarrow x \geq \frac{3y+4}{2} \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}y + 2 \Leftrightarrow x \geq 2, \forall y \geq 0.$$

Vậy cặp $(x_0; y_0) = (5; 1)$ thỏa mãn.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 21. Trong các bất phương trình sau, bất phương trình nào là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

A. $2x - 5y + 3z \leq 0$.B. $3x^2 + 2x - 4 > 0$.C. $2x^2 + 5y > 3$.D. $2x + 3y < 5$.**Lời giải.**

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng tổng quát

$$ax + by + c > 0 \text{ (} ax + by + c < 0, ax + by + c \leq 0, ax + by + c \geq 0 \text{)}.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 22. Trong mặt phẳng Oxy , cặp điểm nào sau đây nằm cùng phía so với đường thẳng $x - 2y + 3 = 0$.

A. $M(0; 1)$ và $P(0; 2)$.

B. $P(0; 2)$ và $N(1; 1)$.

C. $M(0; 1)$ và $Q(2; -1)$.

D. $M(0; 1)$ và $N(1; 5)$.

Lời giải.

Trong mặt phẳng Oxy những điểm nằm cùng phía với đường thẳng $ax + by + c = 0$ thì thế tọa độ điểm vào phương trình đó sẽ có giá trị cùng dấu.

Thay các cặp điểm vào đường thẳng trên ta được:

- Với $M(0; 1)$ và $P(0; 2)$ ta có $M : 0 - 2 + 3 = 1 > 0$; $P : 0 - 4 + 3 = -1 < 0$ loại.
- Với $P(0; 2)$ và $N(1; 1)$ ta có $P : 0 - 4 + 3 = -1 < 0$; $N : 1 - 2 + 3 = 2 > 0$ loại.
- Với $M(0; 1)$ và $Q(2; -1)$ ta có $M : 0 - 2 + 3 = 1 > 0$; $Q : 2 + 2 + 3 = 7 > 0$ nhận.
- $M(0; 1)$ và $N(1; 5)$ ta có $M : 0 - 2 + 3 = 1 > 0$; $N : 1 - 10 + 3 = -6 < 0$ loại.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 23. Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid trong trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kg thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipid. Mỗi kg thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid. Biết rằng gia đình này chỉ mua nhiều nhất là 1,6kg thịt bò và 1,1kg thịt lợn. Giá tiền 1kg thịt bò là 160 nghìn đồng, 1kg thịt lợn là 110 nghìn đồng. Gọi x, y lần lượt là số kg thịt bò và thịt lợn mà gia đình đó cần mua. Tìm x, y để tổng số tiền mà gia đình đó phải trả là ít nhất mà vẫn đảm bảo lượng protein và lipid trong thức ăn.

A. $x = 0,3; y = 1,1$.

B. $x = 0,3; y = 0,7$.

C. $x = 0,6; y = 0,7$.

D. $x = 1,6; y = 0,2$.

Lời giải.

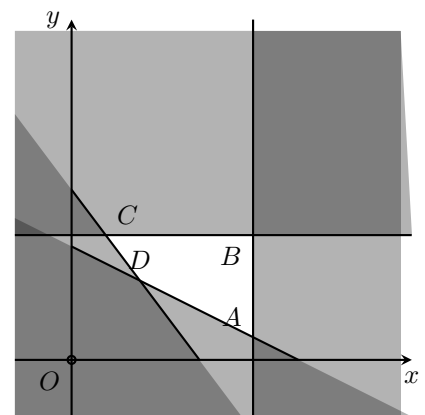
Đơn vị protein và đơn vị lipid có trong x kg thịt bò lần lượt là $800x$ và $200x$.

Đơn vị protein và đơn vị lipid có trong y kg thịt lợn lần lượt là $600y$ và $400y$.

Gia đình chỉ mua nhiều nhất là 1,6kg thịt bò nên $0 < x \leq 1,6$.

Gia đình chỉ mua nhiều nhất là 1,1kg thịt lợn nên $0 < y \leq 1,1$.

$$\text{Từ giả thiết ta có } \begin{cases} 0 < x \leq 1,6 \\ 0 < y \leq 1,1 \\ 800x + 600y \geq 900 \\ 200x + 400y \geq 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 1,6 \\ 0 < y \leq 1,1 \\ 8x + 6y \geq 9 \\ x + 2y \geq 2 \end{cases} (*)$$



Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x, y) = 160x + 110y$ thỏa mãn điều kiện của hệ (*).

Như vậy miền nghiệm là đa giác $ABCD$ (kể cả biên).

Tọa độ của A là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x = 1,6 \\ x + 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1,6 \\ y = 0,2 \end{cases} \Leftrightarrow A(1,6; 0,2)$.

Tọa độ của B là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x = 1,6 \\ y = 1,1 \end{cases} \Leftrightarrow B(1,6; 1,1)$.

Tọa độ của C là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 8x + 6y = 9 \\ y = 1,1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,3 \\ y = 1,1 \end{cases} \Leftrightarrow C(0,3; 1,1)$.

Tọa độ của D là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 8x + 6y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = \frac{7}{10} \end{cases} \Leftrightarrow D\left(\frac{3}{5}; \frac{7}{10}\right)$.

Ta sẽ tính giá trị của $f(x, y)$ với (x, y) là tọa độ các đỉnh A, B, C, D .

Hàm số $f(x, y)$ sẽ đạt giá trị lớn nhất - nhỏ nhất trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) khi (x, y) là tọa độ của các đỉnh $A(1,6; 0,2), B(1,6; 1,1), C(0,3; 1,1), D\left(\frac{3}{5}; \frac{7}{10}\right)$.

Mà ta có: $f(1,6; 0,2) = 278, f(1,6; 1,1) = 377, f(0,3; 1,1) = 169, f\left(\frac{3}{5}; \frac{7}{10}\right) = 173$.

Vậy min $f(x, y) = 169$ tại $x = 0,3; y = 1,1$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 24. Khi biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác, khẳng định nào dưới đây **sai**?

- A. Điểm biểu diễn cung α và cung $\pi - \alpha$ đối xứng nhau qua trục tung.
- B. Điểm biểu diễn cung α và cung $-\alpha$ đối xứng nhau qua gốc tọa độ.
- C. Mỗi cung lượng giác được biểu diễn bởi một điểm duy nhất.
- D. Điểm biểu diễn cung α và cung $\alpha + k2\pi$ có cùng điểm biểu diễn.

Lời giải.

Điểm biểu diễn cung α và cung $-\alpha$ đối xứng nhau qua trục Ox .

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 25. Trên đường tròn bán kính $R = 6$. Tính độ dài cung 60° .

- A. $l = \frac{\pi}{2}$.
- B. $l = 4\pi$.
- C. $l = 2\pi$.
- D. $l = \pi$.

Lời giải.

Theo công thức tính độ dài dây cung ta có $l = R \cdot \alpha \Rightarrow l = 6 \cdot \frac{\pi}{3} \Rightarrow l = 2\pi$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 26. Giả thiết các biểu thức đều có nghĩa. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

- A. $\tan(-a) = \tan a$.
- B. $\cos(-a) = \cos a$.
- C. $\cot(-a) = -\cot a$.
- D. $\sin(-a) = -\sin a$.

Lời giải.

Ta có $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 27. Cho góc α thỏa mãn $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\tan \alpha < 0$.
- B. $\cot \alpha > 0$.
- C. $\sin \alpha > 0$.
- D. $\cos \alpha > 0$.

Lời giải.

Ta có góc α thỏa mãn $2 < \pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$ suy ra α nằm ở góc phần tư thứ nhất. Do đó $\tan \alpha > 0$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 28. Cho góc lượng giác a và $k \in \mathbb{Z}$. Với điều kiện các biểu thức dưới đây có nghĩa, hỏi khẳng định nào **sai**?

- A. $\cos(a + k4\pi) = \cos a$.
- B. $\cot(a + k2\pi) = \cot a$.
- C. $\sin(a + (2k + 1)\pi) = -\sin a$.
- D. $\tan[a + (2k - 1)\pi] = -\tan a$.

Lời giải.

Ta có $\tan[a + (2k - 1)\pi] = \tan[a - \pi + k2\pi] = \tan(a - \pi) = -\tan(\pi - a) = \tan a$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 29. Tính $\sin a$, biết $\cos a = \frac{\sqrt{5}}{3}$ và $\frac{3\pi}{2} < a < 2\pi$.

A. $\frac{1}{3}$.

B. $-\frac{1}{3}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $-\frac{2}{3}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \sin^2 a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \sin^2 a = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \begin{cases} \sin a = \frac{2}{3} \\ \sin a = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{Do } \frac{3\pi}{2} < a < 2\pi \text{ suy ra } \sin a < 0 \Rightarrow \sin a = -\frac{2}{3}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 30. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

A. $\cos 2a = 2 \cos a - 1$.

B. $2 \sin^2 a = 1 - \cos 2a$.

C. $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.

D. $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \cos 2a = 2 \cos^2 a - 1.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 31. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\sin^4 a - \cos^4 a = \cos 2a$.

B. $2(\cos^4 a + \sin^4 a) = 2 - \sin^2 2a$.

C. $(\sin a - \cos a)^2 = 1 - 2 \sin 2a$.

D. $(\sin^2 a + \cos^2 a)^3 = 1 + 2 \sin^4 a \cos^4 a$.

Lời giải.

Ta có

- $\sin^4 a - \cos^4 a = (\sin^2 a - \cos^2 a)(\sin^2 a + \cos^2 a) = -(\cos^2 a - \sin^2 a) = -\cos 2a$.
- $2(\cos^4 a + \sin^4 a) = 2((\cos^2 a + \sin^2 a)^2 - 2 \sin^2 a \cos^2 a) = 2(1 - 2 \sin^2 a \cos^2 a) = 2 - 4 \sin^2 a \cos^2 a = 2 - \sin^2 2a$.
- $(\sin a - \cos a)^2 = \sin^2 a - 2 \sin a \cos a + \cos^2 a = 1 - \sin 2a$.
- $(\sin^2 a + \cos^2 a)^3 = 1$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 32. Tính $P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(3\pi - 2\alpha) + \cot(\pi - \alpha)$, biết $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$ và $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$.

A. $\frac{3\sqrt{3}-1}{2}$.

B. $\frac{3\sqrt{3}-3}{2}$.

C. $\frac{3\sqrt{3}+3}{2}$.

D. $\frac{3\sqrt{3}+1}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Do } -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\sqrt{3}, \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}.$$

Ta có

$$\bullet \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- $\cos(3\pi - 2\alpha) = \cos(\pi - 2\alpha) = -\cos 2\alpha = -\frac{1}{2}$.
- $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha = -\sqrt{3}$.

Khi đó

$$\begin{aligned} P &= \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(3\pi - 2\alpha) + \cot(\pi - \alpha) \\ &= \cos \alpha - \cos 2\alpha - \cot \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + \sqrt{3} = \frac{-1 + 3\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 33. Cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.
 C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a} \cdot \vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$. D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$.

Lời giải.

Áp dụng công thức tích vô hướng của hai véc-tơ.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 34. Cho hai vectơ $\vec{a} = (4; 3)$, $\vec{b} = (-1; -7)$. Tính góc giữa hai vectơ đó.

- A. 135° . B. 45° . C. 30° . D. 60° .

Lời giải.

$$\text{Ta có } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{4 \cdot (-1) + 3 \cdot (-7)}{\sqrt{4^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 35. Cho tam giác ABC vuông tại A . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} < \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} < \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$.
 C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} < \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$. D. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} < \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

Ta có

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC} = BA \cdot BC \cdot \frac{AB}{BC} = AB^2$. Do đó $0 < AB^2$ hay $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} < \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ (đúng).
- $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -AC \cdot BC \cos \widehat{ACB} = -AC \cdot BC \cdot \frac{AC}{BC} = -AC^2$ mà $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = AC^2$. Do đó $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} < \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$ (đúng).
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -AB^2$ mà $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = AC^2$. Do đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} < \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ (đúng).
- $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = AC^2$ mà $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BA} = -AB^2$. Do đó $AC^2 < -AB^2$ vô lí (sai).

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 36. Cho tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A$. B. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \sin A$.
 C. $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \sin A$. D. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

Lời giải.

Áp dụng định lý hàm cos trong tam giác ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 37. Cho tam giác ABC có $BC = 10$, $\hat{A} = 30^\circ$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- A. 10. B. $\frac{10}{\sqrt{3}}$. C. $10\sqrt{3}$. D. 5.

Lời giải.

Ta có $\frac{BC}{\sin \hat{A}} = 2R \Rightarrow R = 10$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 38. Cho hình thang cân $ABCD$ có đáy nhỏ AB , đáy lớn CD . Biết $AB = AD$ và $\tan \widehat{BDC} = \frac{3}{4}$. Tính $\cos \widehat{BAD}$.

- A. $\frac{17}{25}$. B. $-\frac{7}{25}$. C. $\frac{7}{25}$. D. $-\frac{17}{25}$.

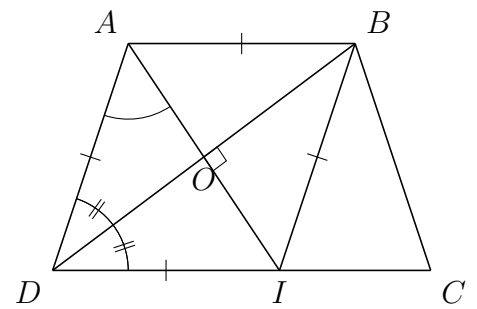
Lời giải.

Qua B kẻ đường thẳng song song với AD cắt DC tại I , ta có $BI \parallel AD$.

Ta có tứ giác $ABID$ là hình bình hành mà $AB = AD$ suy ra $ABID$ là hình thoi. Gọi O là tâm hình thoi $ABID$.

Xét tam giác OID có $\tan \widehat{BDC} = \frac{IO}{OD} \Rightarrow \frac{IO}{OD} = \frac{3}{4}$.

$$\Rightarrow IO = \frac{3}{4}OD.$$



$$\text{Tam giác } AOD \text{ vuông tại } O, AD = \sqrt{AO^2 + DO^2} = \sqrt{IO^2 + OD^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}OD\right)^2 + OD^2} = \frac{5}{4}OD.$$

$$\text{Đặt } \alpha = \widehat{ODA}. \text{ Ta có } \cos \alpha = \frac{AO}{AD} = \frac{OI}{AD} = \frac{\frac{3}{4}OD}{\frac{5}{4}OD} = \frac{3}{5}.$$

$$\text{Ta có } \widehat{BAD} = 2\widehat{ODA} = 2\alpha \text{ suy ra } \cos \widehat{BAD} = \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{25}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 39. Cho tam giác ABC có $AB = 9$, $AC = 12$, $BC = 15$. Khi đó đường trung tuyến AM của tam giác có độ dài bằng bao nhiêu?

- A. 9. B. 10. C. 7,5. D. 8.

Lời giải.

$$\text{Ta có } AM^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4} = \frac{2(9^2 + 12^2) - 15^2}{4} = \frac{225}{4} \Rightarrow AM = \frac{15}{2} = 7,5.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 40. Cho tam giác ABC có diện tích bằng S . Gọi M , N là hai điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CN} = -2\overrightarrow{AC}$. Tính diện tích tam giác AMN theo S .

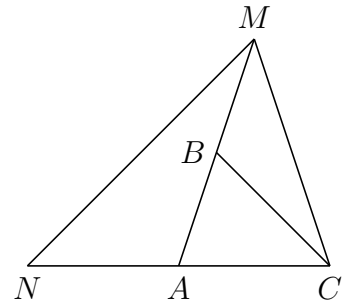
- A. $2S$. B. $8S$. C. $4S$. D. $6S$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{CN} = -2\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AC}$.

Diện tích tam giác AMN là

$$S_{AMN} = \frac{1}{2} AM \cdot AN \cdot \sin \widehat{A} = \frac{1}{2} \cdot 2AB \cdot AC \sin \widehat{A} = 2S.$$



Chọn đáp án **(A)** □

Câu 41. Tìm một vec-tơ pháp tuyến của đường thẳng (d) có phương trình tổng quát $2x+3y+4=0$.

- A. $\vec{n} = (2; -3)$. B. $\vec{n} = (3; -2)$. C. $\vec{n} = (3; 2)$. D. $\vec{n} = (2; 3)$.

Lời giải.

Ta có $(d) : 2x + 3y + 4 = 0 \Rightarrow$ một vec-tơ pháp tuyến của (d) là $\vec{n} = (2; 3)$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 42. Lập phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(2; 1)$ và song song với đường thẳng $2x+3y-2=0$.

- A. $3x + 2y - 8 = 0$. B. $2x + 3y - 7 = 0$. C. $3x - 2y - 4 = 0$. D. $2x + 3y + 7 = 0$.

Lời giải.

Gọi d là đường thẳng cần tìm.

Ta có d song song với $2x + 3y - 2 = 0 \Rightarrow d : 2x + 3y + c = 0$ ($c \neq -2$).

$A(2; 1) \in d \Rightarrow 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + c = 0 \Rightarrow c = -7$.

Vậy $d : 2x + 3y - 7 = 0$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 43. Cho hai đường thẳng $d_1 : 2x + y + 15 = 0$ và $d_2 : x - 2y - 3 = 0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. d_1 và d_2 vuông góc với nhau.
B. d_1 và d_2 song song với nhau.
C. d_1 và d_2 trùng với nhau.
D. d_1 và d_2 cắt nhau và không vuông góc với nhau.

Lời giải.

Ta có d_1 có một vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (2; 1)$.

d_2 có một vec-tơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = (1; -2)$.

Ta có $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Rightarrow d_1 \perp d_2$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 44. Điểm $A(a; b)$ thuộc đường thẳng $d : \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 - t \end{cases}$ và cách đường thẳng $\Delta : 2x - y - 3 = 0$ một

khoảng bằng $2\sqrt{5}$ và $a > 0$. Tính $P = a.b$.

- A. $P = 72$. B. $P = -132$. C. $P = 132$. D. $P = -72$.

Lời giải.

Ta có $A \in d \Rightarrow \begin{cases} a = 3 - t \\ b = 2 - t \end{cases} \Rightarrow A(3 - t; 2 - t).$

Mà

$$\begin{aligned} d(A, \Delta) &= 2\sqrt{5} \\ \Leftrightarrow \frac{|2(3 - t) - (2 - t) - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} &= 2\sqrt{5} \\ \Leftrightarrow |-t + 1| &= 10 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -t + 1 = 10 \\ -t + 1 = -10 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t = -9 \\ t = 11 \end{cases} \end{aligned}$$

Với $t = -9 \Rightarrow a = 3 - (-9) = 12 > 0 \Rightarrow b = 2 - (-9) = 11 \Rightarrow P = 11 \cdot 12 = 132.$

Với $t = 11 \Rightarrow a = 3 - 11 = -8 < 0$ loại.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 45. Xác định m để hai đường thẳng $d : 2x - 3y + 4 = 0$ và $d' : \begin{cases} x = 2 - 3t \\ t = 1 - 4mt \end{cases}$ vuông góc.

A. $m = \frac{9}{8}.$ B. $m = \frac{1}{2}.$ C. $m = -\frac{9}{8}.$ D. $m = -\frac{1}{2}.$

Lời giải.

Ta có đường thẳng d có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_d = (2; -3).$

Đường thẳng d' có một véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_{d'} = (-3; -4m)$ hay d' có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_{d'} = (4m; -3).$

Hai đường thẳng vuông góc với nhau khi và chỉ khi $\vec{n}_d \cdot \vec{n}_{d'} = 0 \Leftrightarrow 2(4m) - 3(-3) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-9}{8}.$

Chọn đáp án **C**

□

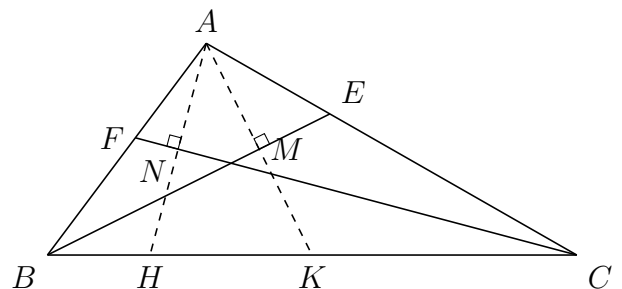
Câu 46. Cho tam giác ABC có $A\left(\frac{4}{5}; \frac{7}{5}\right)$ và hai trong ba đường phân giác trong có phương trình lần lượt là $x - 2y - 1 = 0$, $x + 3y - 1 = 0$. Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh BC .

A. $y + 1 = 0.$ B. $y - 1 = 0.$ C. $4x - 3y + 1 = 0.$ D. $3x - 4y + 8 = 0.$

Lời giải.

Ta có A không thuộc hai đường phân giác trong. Gọi BE , CF lần lượt là hai đường phân giác trong của tam giác ABC như sau: $BE : x - 2y - 1 = 0$, $CF : x + 3y - 1 = 0$.

Gọi K là điểm đối xứng với A qua BE . Ta có $AK \perp BE : x - 2y - 1 = 0 \Rightarrow AK : 2x + y + c = 0$.



Mà AK qua A suy ra $2\left(\frac{4}{5}\right) + \left(\frac{7}{5}\right) + c = 0 \Rightarrow c = -3 \Rightarrow AK : 2x + y - 3 = 0.$

Gọi M là giao điểm của AK và BE , ta có $\begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{5} \\ y = \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{7}{5}; \frac{1}{5}\right)$.

Suy ra $K(2; -1)$.

Gọi H là điểm đối xứng với A qua CF . Ta có $AH \perp CF : x + 3y - 1 = 0 \Rightarrow AH : 3x - y + c = 0$.

Mà AH qua A suy ra $3\left(\frac{4}{5}\right) - \left(\frac{7}{5}\right) + c = 0 \Rightarrow c = -1 \Rightarrow AH : 3x - y - 1 = 0$.

Gọi N là giao điểm của AH và CF , ta có $\begin{cases} x + 3y - 1 = 0 \\ 3x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow N\left(\frac{2}{5}; \frac{1}{5}\right)$.

Suy ra $H(0; -1)$.

Do H, K là các điểm đối xứng của A qua các đường phân giác trong BE, CF của tam giác nên H, K thuộc đường thẳng BC .

Ta có $\overrightarrow{HK} = (2; 0)$ là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng BC suy ra đường thẳng BC nhận một véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{BC}} = (0; 2)$.

Phương trình tổng quát đường thẳng $BC : 0(x - 2) + 2(y + 1) = 0 \Leftrightarrow y + 1 = 0$

Chọn đáp án **A** □

Câu 47. Trong các phương trình được liệt kê dưới đây, phương trình nào là phương trình đường tròn?

A. $(x - 1)^2 + (2y + 1)^2 = 4$.

B. $(x - 1)^2 - (y + 1)^2 + 4 = 0$.

C. $(2x - 2)^2 + (2y + 2)^2 = 4$.

D. $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + 4 = 0$.

Lời giải.

Phương trình đường tròn tâm $I(a; b)$, bán kính R có dạng $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

Ta có phương trình $(2x - 2)^2 + (2y + 2)^2 = 4 \Leftrightarrow 4(x - 1)^2 + 4(y + 1)^2 = 4 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$ là phương trình đường tròn.

Chọn đáp án **C** □

Câu 48. Viết phương trình đường tròn tâm $I(3; -2)$ và đi qua điểm $M(-1; 1)$.

A. $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 5$.

B. $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$.

C. $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 5$.

D. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$.

Lời giải.

Phương trình đường tròn tâm $I(3; -2)$ và bán kính $R = IM = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (1 - (-2))^2} = 5$.

Phương trình đường tròn là: $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 49. Đường tròn $(C) : (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ cắt đường thẳng $x + 2y - a - 2b = 0$ theo dây cung có độ dài bằng bao nhiêu? (Ở đây $R > 0$).

A. $R\sqrt{2}$.

B. $\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

C. R .

D. $2R$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(a; b)$, bán kính R .

Nhận xét, tâm $I(a; b)$ thuộc đường thẳng $x + 2y - a - 2b = 0$.

Suy ra dây cung tạo bởi đường thẳng và đường tròn chính là đường kính của đường tròn. Do đó độ dài

bằng $2R$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 50. Cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$ và đường thẳng $d : x + y + 1 = 0$. Tìm tất cả các đường thẳng song song với đường thẳng d và cắt đường tròn (C) theo dây cung có độ dài bằng 2.

A. $x + y + 4 = 0$ và $x + y - 4 = 0$.

B. $x + y + 2 = 0$.

C. $x + y + 4 = 0$.

D. $x + y + 2 = 0$ và $x + y - 2 = 0$.

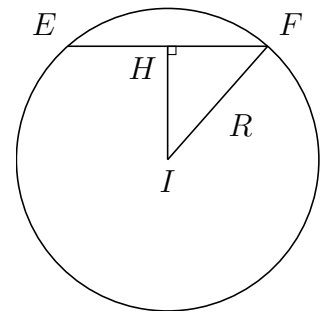
Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1; -1)$ và bán kính

$$R = \sqrt{1^2 + (-1)^2 - (-7)} = 3.$$

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm.

Ta có $\Delta \parallel d$ mà $d : x + y + 1 = 0 \Rightarrow \Delta : x + y + c = 0, (c \neq 1)$. Đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) theo dây cung EF .



Gọi H là hình chiếu của I lên dây cung, ta có

$$IH = \sqrt{IF^2 - HF^2} = \sqrt{IF^2 - \left(\frac{EF}{2}\right)^2} = \sqrt{(3)^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} d(I, \Delta) &= IH \\ \Leftrightarrow \frac{|1 - 1 + c|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} &= 2\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow |c| &= 4 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 \text{ (nhận)} \\ c = -4 \text{ (nhận)} \end{cases} \end{aligned}$$

Với $c = 4 \Rightarrow \Delta : x + y + 4 = 0$. Với $c = -4 \Rightarrow \Delta : x + y - 4 = 0$.

Chọn đáp án **A**

□

ĐÁP ÁN

1. A	2. A	3. D	4. D	5. B	6. B	7. A	8. B	9. D	10. C
11. D	12. D	13. A	14. C	15. C	16. B	17. A	18. C	19. C	20. B
21. D	22. C	23. A	24. B	25. C	26. A	27. A	28. D	29. D	30. A
31. B	32. A	33. B	34. A	35. D	36. D	37. A	38. B	39. C	40. A
41. D	42. B	43. A	44. C	45. C	46. A	47. C	48. B	49. D	50. A

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Biểu thức nào sau đây là tam thức bậc hai ẩn x ?

A. $f(x) = 3x^2 + x - \frac{1}{x}$.

B. $f(x) = x(2x - 1)$.

C. $g(t) = 2t^2 - 1$.

D. $f(m) = 2m^2 - m + 1$.

Lời giải.

- $f(x) = 3x^2 + x - \frac{1}{x}$ có chứa x ở mẫu số nên loại.
- $g(t)$ và $f(m)$ không phải là biểu thức ẩn x nên loại.
- $f(x) = x(2x - 1) = 2x^2 - x$ là tam thức bậc hai theo ẩn x .

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 2. Giải hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ 4 - 3x \geq 0 \end{cases}$.

A. $x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$.

B. $x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{4}{3}\right]$.

C. $x \in \left(\frac{1}{2}; \frac{4}{3}\right)$.

D. $x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$.

Lời giải.

$$\begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ 4 - 3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x \leq \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{4}{3}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 3. Cho biểu thức $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

B. $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > -1$.

C. $f(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

D. $f(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 1 \end{cases}$.

Lời giải.

- $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
- $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Ta có bảng xét dấu là

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x - 1$	$-$	$-$	0	$+$
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu ta thấy $f(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.Chọn đáp án **(C)**

□

- Câu 4.** Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{10x^2}{x^2 - 100} < 10$ là
- A. $S = [-10; 10]$. B. $S = (-\infty; -10) \cup (10; +\infty)$.
 C. $S = (-10; 10)$. D. $S = (-\infty; -10] \cup [10; +\infty)$.

Lời giải.

$$\text{Bất phương trình} \Leftrightarrow \frac{10x^2}{x^2 - 100} - 10 < 0 \Leftrightarrow \frac{1000}{x^2 - 100} < 0 \Leftrightarrow x^2 - 100 < 0.$$

x	$-\infty$	-10	10	$+\infty$	
$x^2 - 100$	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $S = (-10; 10)$.

Chọn đáp án **(C)**

□

- Câu 5.** Xác định m sao cho với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có $(m - 1)x^2 + 2(m - 2)x + m + 3 > 0$.
- A. $m < \frac{7}{6}$. B. $m \geq \frac{7}{6}$. C. $m \leq \frac{7}{6}$. D. $m > \frac{7}{6}$.

Lời giải.

- Với $m = 1$, bất phương trình trở thành $-2x + 4 > 0 \Leftrightarrow x < 2$ (không thỏa)
 $\Rightarrow$ loại $m = 1$.

- Với $m \neq 1$, đặt $f(x) = (m - 1)x^2 + 2(m - 2)x + m + 3$.

$$f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' < 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m - 2)^2 - (m - 1)(m + 3) < 0 \\ m - 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6m + 7 < 0 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{7}{6} \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{7}{6}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 6. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , vec-tơ nào sau đây là vec-tơ pháp tuyến của đường thẳng $3x - y + 2 = 0$?

- A. $\vec{n} = (3; -1)$. B. $\vec{n} = (-3; -1)$. C. $\vec{n} = (1; 3)$. D. $\vec{n} = (3; 1)$.

Lời giải.

Đường thẳng $d: ax + by + c = 0$ nhận vec-tơ $\vec{n} = (a; b)$ làm vec-tơ pháp tuyến.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 7. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của elip?

- A. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 0$. B. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. C. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$. D. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 0$.

Lời giải.

Phương trình chính tắc của Elip là phương trình có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, với $a > b > 0$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 8. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho elip (E) có độ dài trục lớn bằng 12 và độ dài trục bé bằng 6. Phương trình nào sau đây là phương trình của elip (E) ?

A. $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{36} = 1$. B. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$. C. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$. D. $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{36} = 0$.

Lời giải.

Gọi phương trình chính tắc của Elip là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, với $a > b > 0$.

Độ dài trục lớn bằng 12 nên $2a = 12 \Leftrightarrow a = 6$.

Độ dài trục bé bằng 6 nên $2b = 6 \Leftrightarrow b = 3$.

Vậy phương trình của Elip là $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 9. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho đường thẳng $D : 3x + 2y - 8 = 0$. Phương trình tham số của đường thẳng D là

A. $D : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

B. $D : \begin{cases} x = 2t \\ y = -3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

C. $D : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

D. $D : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Đường thẳng $D : 3x + 2y - 8 = 0$ có vec-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3; 2)$ nên nhận $\vec{u} = (2; -3)$ làm vec-tơ chỉ phương.

Cho $x = 2$, thay vào D ta có $y = 1$ nên đường thẳng D đi qua điểm $M(2; 1)$.

Vậy phương trình tham số của đường thẳng D là $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 10. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d_1 : x - y + 1 = 0$, đường thẳng $d_2 : 2x - 3y - 9 = 0$ và điểm $M(5; 3)$. Phương trình nào sau đây là phương trình đường thẳng đi qua điểm M và cắt hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt tại H và K sao cho M là trung điểm của HK .

A. $d : \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

B. $d : \begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 3 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

C. $d : \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 3 + 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

D. $d : \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 3 - 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Gọi $H(x_H; y_H)$ là giao điểm của d và d_1 , suy ra $H \in d_1 \Rightarrow y_H = x_H + 1$.

Có M là trung điểm của HK nên $\begin{cases} x_H + x_K = 2x_M \\ y_H + y_K = 2y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K = 2x_M - x_H = 10 - x_H \\ y_K = 2y_M - y_H = 5 - x_H \end{cases}$.

Mà $K \in d_2$ nên $2x_K - 3y_K - 9 = 0 \Leftrightarrow 2(10 - x_H) - 3(5 - x_H) - 9 = 0 \Leftrightarrow x_H = 4 \Rightarrow y_H = 5$.

Vậy $H(4; 5)$, ta có $d : \begin{cases} \text{đi qua } M(5; 3) \\ \text{VTCP là } \overrightarrow{HM} = (1; -2) \end{cases} \Rightarrow d : \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 3 - 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn $(C) : (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$.

A. $I(2; -3), R = 2$.

B. $I(-2; 3), R = 2$.

C. $I(2; -3), R = 4$.

D. $I(-2; 3), R = 4$.

Lời giải.

Đường tròn tâm $I(a; b)$ và bán kính R có phương trình là $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. Vậy $I(2; -3), R = 2$.
Chọn đáp án **(A)** □

Câu 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , viết phương trình đường tròn có tâm $I(2; 3)$ và đi qua $A(1; 1)$.

A. $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$.

B. $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$.

C. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$.

D. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$.

Lời giải.

Bán kính $R = IA = \sqrt{5}$ và tâm $I(2; 3)$. Vậy $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$.

A. $I(-1; 2), R = 1$.

B. $I(1; -2), R = 2$.

C. $I(2; -4), R = 2$.

D. $I(1; -2), R = 1$.

Lời giải.

Đường tròn $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ có tâm $I(-a; -b)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$. Vậy $I(1; -2), R = 2$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , viết phương trình đường tròn có đường kính PQ với $P(1; 3), Q(-3; 1)$.

A. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$.

B. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 20$.

C. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$.

D. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 20$.

Lời giải.

Ta có $R = \frac{PQ}{2} = \sqrt{5}$ và tâm $I(-1; 2)$ là trung điểm của PQ . Vậy $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 15. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , biết đường thẳng $\Delta : 3x + 4y + 8 = 0$ cắt đường tròn $(C) : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$ theo một dây cung có độ dài l . Tìm l .

A. $l = 6$.

B. $l = 3\sqrt{2}$.

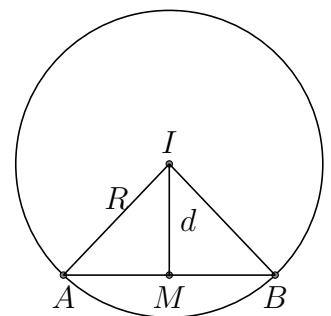
C. $l = 8$.

D. $l = 4$.

Lời giải.

Khoảng cách từ tâm $I(1; 1)$ của (C) đến Δ là $d = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 8|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3$. Ta

có $R = 5$. Vậy $l = 2MA = 2\sqrt{R^2 - d^2} = 8$.



Chọn đáp án **(C)** □

Câu 16. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$.

B. $\tan x \cdot \sin x = \cos x$ ($\cos x \neq 0$).

C. $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ ($\sin x, \cos x \neq 0$).

D. $\sin^2 x + \cos^2 y = 1$.

Lời giải.

Ta có $\tan x \cdot \sin x = \frac{\sin^2 x}{\cos x}$.

$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

$\sin^2 x + \cos^2 y \neq 1$ vì $x \neq y$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 17. Cho tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\sin(A + B) = \cos C$.

B. $\cos A \cos B - \sin A \sin B = -\cos C$.

C. $\cos(B + C) = \cos A$.

D. $\sin(B + C) = -\sin A$.

Lời giải.

Ta có $\cos A \cos B - \sin A \sin B = \cos(A + B) = \cos(\pi - C) = -\cos C$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 18. Cho $\sin a = \frac{1}{3}$, $\cos b = \frac{2}{3}$. Tính $M = \cos(a - b) \cos(a + b)$.

A. $M = -\frac{5}{9}$.

B. $M = \frac{10}{9}$.

C. $M = \frac{1}{3}$.

D. $M = \frac{1}{9}$.

Lời giải.

$M = \cos(a - b) \cos(a + b) = \frac{1}{2} (\cos 2a + \cos(-2b)) = \frac{1}{2} (1 - 2\sin^2 a + 2\cos^2 b - 1) = \frac{1}{3}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 19. Hãy rút gọn biểu thức $C = 8\sin^2 x \cos^2 x \cot 2x$.

A. $C = 2\sin 4x$.

B. $C = \sin 4x$.

C. $C = \cos 4x$.

D. $C = 2\sin 2x$.

Lời giải.

$C = 8\sin^2 x \cos^2 x \cot 2x = 2\sin^2 2x \cot 2x = 2\sin 2x \cos 2x = \sin 4x$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 20. Hãy rút gọn biểu thức $A = 4\cos \frac{2x}{3} \cos \frac{\pi + 2x}{3} \cos \frac{\pi - 2x}{3}$.

A. $A = 2\cos x$.

B. $A = -2\cos x$.

C. $A = -\cos 2x$.

D. $A = \cos 2x$.

Lời giải.

$A = 4\cos \frac{2x}{3} \cos \frac{\pi + 2x}{3} \cos \frac{\pi - 2x}{3} = 4\cos \frac{2x}{3} \cdot \frac{1}{2} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{4x}{3} \right) = 2\cos \frac{2x}{3} \left(2\cos^2 \frac{2x}{3} - \frac{3}{2} \right) =$

$4\cos^3 \frac{2x}{3} - 3\cos \frac{2x}{3} = \cos 2x$.

Chọn đáp án **(D)**

□

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Giải bất phương trình: $(x - 4)(x^2 - 6x + 9)(x^2 - 3x + 2) > 0$

Lời giải.

Ta có:

• $x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$.

• $x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

$$\bullet x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Đặt $f(x) = (x - 4)(x^2 - 6x + 9)(x^2 - 3x + 2)$, ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$	
$x - 4$	—	—	—	—	0	+	
$x^2 - 6x + 9$	+	+	+	0	+	+	
$x^2 - 3x + 2$	+	0	—	0	+	+	
$f(x)$	—	0	+	0	—	0	+

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $f(x) > 0$ là $S = (1; 2) \cup (4; +\infty)$. □

Bài 2. Giải phương trình sau $\sqrt{3x^2 + 24x + 22} = 2x + 1$.

Lời giải.

$$\sqrt{3x^2 + 24x + 22} = 2x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \\ 3x^2 + 24x + 22 = (2x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x^2 - 20x - 21 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x = -1 \\ x = 21 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 21$. □

Bài 3. Cho các số liệu thống kê về sản lượng chè thu được trong một năm (kg/sào) của 20 hộ gia đình

111	112	112	113	114	114	115	114	115	116
112	113	113	114	115	114	116	117	113	115

a) Hãy lập bảng phân bố tần số - tần suất.

b) Tìm số trung bình, số trung vị, phương sai và độ lệch chuẩn. (Kết quả làm tròn sau dấu phẩy hai chữ số)

Lời giải.

a) Bảng phân bố tần số - tần suất của bảng số liệu trên

Lớp	111	112	113	114	115	116	117	Cộng
Tần số	1	3	4	5	4	2	1	$n = 20$
Tần suất (%)	5	15	20	25	20	10	5	100(%)

b)

• Số trung bình của bảng số liệu là

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 111 + 3 \cdot 112 + 4 \cdot 113 + 5 \cdot 114 + 4 \cdot 115 + 2 \cdot 116 + 1 \cdot 117}{20} = 113,9 \text{kg/sào.}$$

• Do có 20 giá trị biến lượng nên số trung vị của bảng số liệu là

$$M_e = \frac{1}{2}(x_{10} + x_{11}) = \frac{1}{2}(114 + 114) = 114 \text{kg/sào.}$$

- Phương sai của bảng số liệu là

$$s^2 = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^7 n_i (x_i - \bar{x})^2 = 2,29.$$

Độ lệch chuẩn của bảng số liệu là

$$s = \sqrt{s^2} \approx 1,51.$$

□

Bài 4. Cho $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ và $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Tính giá trị $\sin \alpha$, $\cos \alpha$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{4}{7} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

$$\text{Vì } \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ nên } \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

$$\text{Ta có } \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \frac{3}{7}. \text{ Vì } \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ nên } \sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

□

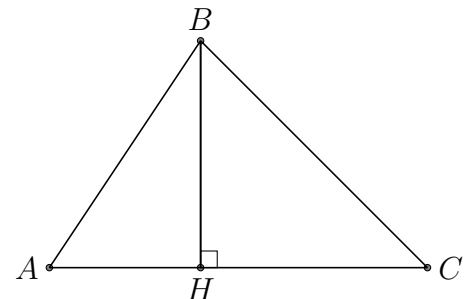
Bài 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC biết phương trình của các cạnh $AB : 2x - y + 2 = 0$, $BC : x + y + 4 = 0$, $AC : 4x + y - 2 = 0$. Viết phương trình tổng quát của đường cao BH của tam giác ABC .

Lời giải.

$$\text{Tọa độ của } B \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} 2x - y + 2 = 0 \\ x + y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}. \text{ Do đó } B(-2; -2).$$

BH đi qua B và vuông góc với AC nên có phương trình là $(x + 2) - 4(y + 2) = 0 \Leftrightarrow x - 4y - 6 = 0$.



□

ĐÁP ÁN

1. B	2. B	3. C	4. C	5. D	6. A	7. B	8. C	9. A	10. D
11. A	12. A	13. B	14. C	15. C	16. A	17. B	18. C	19. B	20. D

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho Elip (E) : $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$. Trục lớn của (E) có độ dài bằng

A. 12.

B. 13.

C. 26.

D. 24.

Lời giải.

Độ dài trục lớn của (E) là $2\sqrt{169} = 26$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 2. Trong mặt phẳng Oxy , Elip (E) đi qua điểm $M\left(2\sqrt{6}; \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ và $N(\sqrt{5}; 2)$ có phương trình chính tắc là

A. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.B. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.C. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{5} = 0$.D. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{5} = 1$.

Lời giải.

Gọi phương trình chính tắc của (E) là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{24}{a^2} + \frac{1}{5b^2} = 1 \\ \frac{5}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 5. \end{cases}$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 3. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường tròn (C) có tâm $I(2; 1)$, bán kính $R = 2$ và điểm $M(1; 0)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M sao cho Δ cắt (C) tại hai điểm A và B , đồng thời $S_{IAB} = 2$.

A. $x + 2y - 1 = 0$.B. $x - 2y - 1 = 0$.C. $x - y - 1 = 0$.D. $x + y - 1 = 0$.

Lời giải.

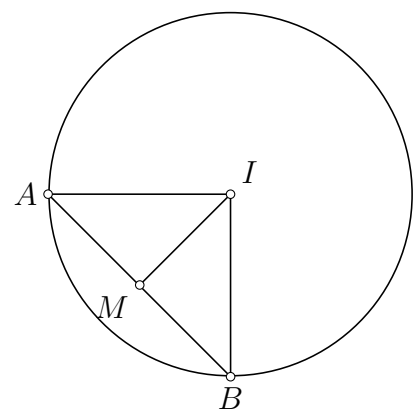
Ta có $S_{IAB} = \frac{1}{2} \cdot IA \cdot IB \cdot \sin \widehat{AIB} = 2$. Mà $IA = IB = R = 2$ nên

$\sin \widehat{AIB} = 1 \Leftrightarrow \widehat{AIB} = 90^\circ$.

$\Rightarrow AB = 2\sqrt{2} \Rightarrow d(I, AB) = \sqrt{2}$.

Mà $\vec{MI} = (1; 1)$ nên $IM = \sqrt{2}$ do đó $IM \perp AB$.

$\Rightarrow$ Đường thẳng Δ qua M và vuông góc với IM . Do đó phương trình Δ là $x + y - 1 = 0$.



Chọn đáp án **D**

□

Câu 4. Trong các phép biến đổi sau, phép biến đổi nào đúng?

A. $\cos x + \cos 3x = 2 \cos 4x \cdot \cos 2x$.B. $\cos x - \cos 3x = 2 \cos 4x \cdot \cos 2x$.C. $\sin x + \sin 3x = 2 \sin 4x \cdot \cos 2x$.D. $\sin x - \sin 3x = -2 \sin x \cdot \cos 2x$.

Lời giải.

Ta có $\sin x - \sin 3x = 2 \cos \frac{x+3x}{2} \cdot \sin \frac{x-3x}{2} = 2 \cos 2x \cdot \sin(-x) = -2 \sin x \cos 2x$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 5. Biết $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, $\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Tính giá trị của $\sin x$.

- A. $\sin x = -\frac{1}{5}$. B. $\sin x = \frac{1}{5}$. C. $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$. D. $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x + \frac{4}{5} = 1 \Leftrightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Mà $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ nên $\sin x < 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 6. Số nghiệm của phương trình $|x-2| + 4x = x^2 + 4$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải.

Đặt $|x-2| = t$, $t \geq 0$ ta được phương trình $t = t^2 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \\ x=1. \end{cases}$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 7. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 - x - 2 < 0$ là

- A. $(-1; 2)$. B. $\emptyset$.
C. $\mathbb{R}$. D. $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

Lời giải.

Tam thức $f(x) = x^2 - x - 2$ có hai nghiệm phân biệt $x = -1$, $x = 2$ hệ số của x^2 là $1 > 0$ nên $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 2)$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2x^2 - (2m-1)x + 2m-3 = 0$ có hai nghiệm x phân biệt.

- A. $m = \frac{5}{2}$. B. $m > \frac{5}{2}$. C. $m \neq \frac{5}{2}$. D. $m < \frac{5}{2}$.

Lời giải.

$\Delta = (2m-1)^2 - 8(2m-3) = 4m^2 - 20m + 25 = (2m-5)^2$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta > 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{5}{2}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 9. Biết rằng phương trình $x + \sqrt{2x+11} = 0$ có nghiệm là $x = a + b\sqrt{3}$. Tìm tích ab .

- A. -1. B. 1. C. -2. D. 2.

Lời giải.

Phương trình tương đương với

$$\sqrt{2x+11} = -x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 2x+11 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 - 2\sqrt{3}.$$

$\Rightarrow a = 1, b = -2$ và $ab = -2$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 10. Tập nghiệm của bất phương trình $(2x - 4)(-x^2 - 3) \leq 0$ là

- A. $[2; +\infty)$. B. $(-\infty; 2]$. C. $[3; +\infty)$. D. $(-\infty; 3]$.

Lời giải.

Ta có $-x^2 - 3 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên bất phương trình tương đương với $2x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $mx^2 - 6x + m > 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

- A. $m > 3$. B. $m < -3$. C. $-3 < m < 3$. D. $m \neq \pm 3$.

Lời giải.

- Với $m = 0$ bất phương trình trở thành $-6x > 0 \Leftrightarrow x < 0$ (không thỏa mãn).
- Với $m \neq 0, \Delta' = 9 - m^2$. Để thỏa mãn đề bài thì $\begin{cases} m > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , đường tròn (C) đi qua 3 điểm $M(2; -2), N(3; -1), P(-1; -3)$ có tâm là

- A. $I(1; -2)$. B. $I(-2; 1)$. C. $I(2; -1)$. D. $I(-1; 2)$.

Lời giải.

Giả sử phương trình đường tròn $(C) : x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, M(2; -2), N(3; -1), P(-1; -3)$ thuộc (C) suy ra

$$\begin{cases} 2a - 2b + c = -8 \\ 3a - b + c = -10 \\ -a - 3b + c = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = -20 \end{cases}$$

Vậy tọa độ tâm $I(-1; 2)$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 13. Biết $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$.

- A. $P = 4$. B. $P = 3$. C. $P = 2$. D. $P = 1$.

Lời giải.

$$\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \frac{\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow P = \left(\frac{\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}\right)^2 = 2$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 14. Tam giác ABC có các góc A, B, C thỏa mãn $5 - \cos 2A - \cos 2B - \cos 2C = 4(\sin A \cdot \sin B + \sin C)$ là

- A. Tam giác đều. B. Tam giác vuông nhưng không cân.
C. Tam giác vuông cân. D. Tam giác cân nhưng không vuông.

Lời giải.

$5 - \cos 2A - \cos 2B - \cos 2C = 2 + 2 \sin^2 A + 2 \sin^2 B + 2 \sin^2 C \geq 4 \sin A \cdot \sin B + 4 \sin C$, dấu = xảy ra khi $A = B$ và $C = 90^\circ$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 15. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , đường thẳng $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -3 + 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ có một véc-tơ chỉ phương là

- A. $\vec{u} = (2; -3)$. B. $\vec{u} = (6; 4)$. C. $\vec{u} = (6; -4)$. D. $\vec{u} = (2; 3)$.

Lời giải.

Theo đề bài một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -3 + 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ là $\vec{u} = (6; -4)$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 8y - 9 = 0$ có

- A. Tâm $I(0; 4)$, bán kính $R = 25$. B. Tâm $I(0; -4)$, bán kính $R = 3$.
C. Tâm $I(-4; 0)$, bán kính $R = 25$. D. Tâm $I(0; -4)$, bán kính $R = 5$.

Lời giải.

$x^2 + y^2 + 8y - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y + 4)^2 = 25$ suy ra tâm $I(0; -4)$, bán kính $R = 5$.

Chọn đáp án **D** □

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Giải bất phương trình sau: $\frac{2x^2 - 3x - 2}{2x + 3} \geq 0$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 2}{2x + 3}$, ta có bảng xét dấu của $f(x)$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2	$+\infty$		
$2x^2 - 3x - 2$	+	+	0	-	0	+	
$2x + 3$	-	0	+	+	+	+	
$f(x)$	-		+	0	-	0	+

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$. □

Bài 2. Giải bất phương trình sau: $\sqrt{x^2 - x - 6} \leq x - 1$.

Lời giải.

$$\sqrt{x^2 - x - 6} \leq x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 6 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \\ x^2 - x - 6 \leq (x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq -2 \\ x \geq 1 \\ x \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 7.$$

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = [3; 7]$. □

Bài 3. Chứng minh rằng: $4 \sin x \cdot \sin \left(\frac{\pi}{3} + x \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = \sin 3x, \forall x \in \mathbb{R}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} 4 \sin x \cdot \sin \left(\frac{\pi}{3} + x \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right) &= \sin x \cdot (\sqrt{3} \cos x - \sin x) \cdot (\sqrt{3} \cos x + \sin x) \\ &= \sin x \cdot (3 \cos^2 x - \sin^2 x) \\ &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x \\ &= \sin 3x. \end{aligned}$$

□

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $M(-1; 2)$. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua điểm M đồng thời tiếp xúc với hai trục tọa độ Ox và Oy .

Lời giải.

(C) tiếp xúc với Ox, Oy suy ra tâm I thuộc đường thẳng $y = x$ hoặc $y = -x$.

Trường hợp I thuộc đường thẳng $y = x$:

Ta có $I(a; a)$, ta có $d^2(I, Ox) = IM^2 \Leftrightarrow a^2 = (a + 1)^2 + (a - 2)^2$ (vô nghiệm).

Trường hợp I thuộc đường thẳng $y = -x$:

$$\text{Ta có } I(a; -a), d^2(I, Ox) = IM^2 \Leftrightarrow a^2 = (a + 1)^2 + (a + 2)^2 \Leftrightarrow a^2 + 6a + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = -5 \end{cases}$$

Với $a = -1$, phương trình đường tròn là $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$.

Với $a = -5$, phương trình đường tròn là $(x + 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$.

□

Bài 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , đường tròn $(C) : x^2 + y^2 + 4x - 2y - 1 = 0$ và đường thẳng $(\Delta) : 3x - 4y + 2017 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) , biết rằng tiếp tuyến đó song song với đường thẳng Δ .

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(-2; 1)$, bán kính $R = \sqrt{6}$.

Tiếp tuyến song song với Δ cho nên có dạng $d : 3x - 4y + c = 0, (c \neq 2017)$.

$$d(I, d) = R \Leftrightarrow \frac{|c - 10|}{5} = \sqrt{6} \Leftrightarrow c = 10 \pm 5\sqrt{6}.$$

Vậy phương trình tiếp tuyến là $3x - 4y + 10 \pm 5\sqrt{6} = 0$

□

ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. D	4. D	5. C	6. D	7. A	8. C	9. C	10. A
11. A	12. D	13. C	14. C	15. C	16. D				

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. $x = 1$ là nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

- A. $\sqrt{x+3} < x$. B. $|x| < 2$. C. $(x-1)(x+2) > 0$. D. $\frac{x}{1-x} + \frac{1-x}{x} < 0$.

Lời giải.

Ta có $|1| = 1 < 2$. Vậy $x = 1$ là nghiệm của bất phương trình $|x| < 2$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 2. Tìm giá trị lớn nhất M của biểu thức $f(x) = (2x+6)(5-x)$ với $-3 < x < 5$.

- A. $M = 0$. B. $M = 64$. C. $M = 32$. D. $M = 1$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \frac{1}{2}(2x+6)(10-2x)$. Với $-3 < x < 5$, ta có $2x+6 > 0, 10-2x > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương $2x+6, 10-2x$ ta được $(2x+6)(10-2x) \leq \left(\frac{2x+6+10-2x}{2}\right)^2 = 64$.

Dấu bằng khi $2x+6 = 10-2x \Leftrightarrow x = 1$. Vậy $M = 32$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 3. Cho tam giác ABC với các đỉnh là $A(-1; 3), B(4; 7), C(-6; 5)$, G là trọng tâm của tam giác ABC . Phương trình tham số của đường thẳng AG là

- A. $\begin{cases} x = -1 \\ y = 5 - 2t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 5 + t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 + t \end{cases}$.

Lời giải.

Tọa độ $G\left(\frac{-1+4-6}{3}; \frac{3+7+5}{3}\right) = (-1; 5) \Rightarrow \overrightarrow{AG} = (0; 2)$.

$\Rightarrow$ một véc-tơ chỉ phương của AG là $\vec{u}_{AG} = (2; 0)$.

Vậy phương trình tham số của AG là $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 \end{cases}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 4. Tìm góc α giữa hai đường thẳng $\Delta_1: x - \sqrt{3}y + 6 = 0$ và $\Delta_2: x + 10 = 0$.

- A. $\alpha = 30^\circ$. B. $\alpha = 45^\circ$. C. $\alpha = 125^\circ$. D. $\alpha = 60^\circ$.

Lời giải.

Ta có $\cos \alpha = \frac{|1 \cdot 1 - \sqrt{3} \cdot 0|}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 5. Diện tích của tam giác có số đo độ dài ba cạnh lần lượt 7, 9 và 12 là

- A. $14\sqrt{5}$. B. 20. C. 15. D. $16\sqrt{2}$.

Lời giải.

Nửa chu vi tam giác $p = \frac{7+9+12}{2} = 14 \Rightarrow S = \sqrt{p(p-7)(p-9)(p-12)} = 14\sqrt{5}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 6. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $x + \sqrt{x-2} \leq 2 + \sqrt{x-2}$.

A. $S = [2; +\infty)$.

B. $S = \{2\}$.

C. $S = \emptyset$.

D. $S = (-\infty; 2)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$. BPT $\Leftrightarrow x \leq 2$. Kết hợp điều kiện ta được $x = 2$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 7. Tam giác ABC có $\cos B$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\sqrt{1 - \sin^2 B}$.

B. $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

C. $\cos(A + C)$.

D. $\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$.

Lời giải.

Từ định lý cô-sin ta có $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 8. Tính $B = \cos 4455^\circ - \cos 945^\circ + \tan 1035^\circ - \cot(-1500^\circ)$.

A. $B = \frac{\sqrt{3}}{3} - 1$.

B. $B = \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 + \sqrt{2}$.

C. $B = \frac{\sqrt{3}}{3} - 1 - \sqrt{2}$.

D. $B = \frac{\sqrt{3}}{3} + 1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
 B &= \cos(135^\circ + 12 \cdot 360^\circ) + \cos(-135^\circ + 3 \cdot 360^\circ) + \tan(-45^\circ + 3 \cdot 360^\circ) - \cot(-60^\circ - 4 \cdot 360^\circ) \\
 &= \cos(135^\circ) - \cos(-135^\circ) + \tan(-45^\circ) - \cot(-60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3} - 1.
 \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 9. Đường thẳng $d: \begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = 113 + 4t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ có một véc-tơ chỉ phương là

A. $(4; -3)$.

B. $(-3; -4)$.

C. $(-3; 4)$.

D. $(4; 3)$.

Lời giải.

Từ phương trình đường thẳng ta có một véc-tơ chỉ phương là $(-3; 4)$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 10. Điều kiện xác định của bất phương trình $\sqrt{1 - 2x} < 1 + 4x$ là

A. $x \leq \frac{1}{2}$.

B. $x > -\frac{1}{4}$.

C. $x > \frac{1}{2}$.

D. $x \leq -\frac{1}{4}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định là $1 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 11. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \sqrt{x^2 + 4x - 5}$.

A. $\mathcal{D} = [-5; 1)$.

B. $\mathcal{D} = (-5; 1)$.

C. $\mathcal{D} = (-\infty; -5] \cup [1; +\infty)$.

D. $\mathcal{D} = (-5; 1]$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D}$ là tập nghiệm của bất phương trình $x^2 + 4x - 5 \geq 0$.

Ta có $x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -5 \end{cases}$ và 1 cùng dấu với $x^2 + 4x - 5$, nên theo định lý về dấu của tam

thức bậc hai ta có $x \in (-\infty; -5] \cup [1; +\infty)$.

Vậy $\mathcal{D} = (-\infty; -5] \cup [1; +\infty)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 12. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $x^2 - 4\sqrt{2}x + 8 \leq 0$.

A. $S = \mathbb{R}$.

B. $S = \emptyset$.

C. $S = \mathbb{R} \setminus \{2\sqrt{2}\}$.

D. $S = \{2\sqrt{2}\}$.

Lời giải.

BPT $\Leftrightarrow (x - 2\sqrt{2})^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}$. Vậy $S = \{2\sqrt{2}\}$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 13. Cho x, y thỏa mãn $x, y > 0$ và $x + y = 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x} + \frac{4}{y}$ là

A. 10.

B. 7.

C. 9.

D. 8.

Lời giải.

Ta có $x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$.

Suy ra $P = \frac{1}{x} + \frac{4}{1-x} = \frac{1-x}{x} + \frac{4x}{1-x} + 5 \geq 2\sqrt{\frac{1-x}{x} \cdot \frac{4x}{1-x}} + 5 = 9$.

Dấu bằng khi và chỉ khi $\frac{1-x}{x} = \frac{4x}{1-x} \Leftrightarrow 4x^2 = (1-x)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \text{ (loại)} \\ x = \frac{1}{5} \Rightarrow y = \frac{4}{5} \end{cases}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 9.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 14. Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng

$$\Delta_1 : x - 2y + 2017 = 0 \text{ và } \Delta_2 : -3x + 6y - 10 = 0.$$

A. Trùng nhau.

B. Vuông góc với nhau.

C. Song song.

D. Cắt nhau nhưng không vuông góc.

Lời giải.

Ta có $\frac{1}{-3} = \frac{-2}{6} \neq \frac{2017}{-10} \Rightarrow$ hai đường thẳng đã cho song song với nhau.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 15. Góc có số đo $\frac{5\pi}{6}$ ra-đi-an bằng

A. 150° .

B. -150° .

C. $112^\circ 50'$.

D. 120° .

Lời giải.

Áp dụng công thức đổi ra-đi-an sang độ ta được $\frac{5\pi}{6} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 150^\circ$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 16. Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua hai điểm $A(3; -1)$ và $B(-6; 2)$.

A. $d : \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2t \end{cases}$. B. $d : \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -6 - t \end{cases}$. C. $d : \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -1 - t \end{cases}$. D. $d : \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -1 + t \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-9; 3) \Rightarrow$ véc-tơ chỉ phương của d là $\vec{u}_d = (3; -1)$.

Vậy phương trình tham số của d là $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -1 - t \end{cases}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 17. Để tính $\cos 120^\circ$, một học sinh làm như sau

(I) $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. (II) $\cos^2 120^\circ = 1 - \sin^2 120^\circ$. (III) $\cos^2 120^\circ = \frac{1}{4}$. (IV) $\cos 120^\circ = \frac{1}{2}$.

Lập luận trên sai bắt đầu từ bước nào?

- A. (III). B. (II). C. (I). D. (IV).

Lời giải.

$$\text{Ta có } \cos^2 120^\circ = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 120^\circ = \frac{1}{2} \text{ (loại vì } \cos 120^\circ < 0) \\ \cos 120^\circ = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 18. Tìm cô-sin của góc α giữa hai đường thẳng $\Delta_1 : 2x + 3y - 10 = 0$ và $\Delta_2 : 2x - 3y + 4 = 0$.

- A. $\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{13}}$. B. $\cos \alpha = \sqrt{13}$. C. $\cos \alpha = \frac{5}{13}$. D. $\cos \alpha = \frac{6}{13}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \cos \alpha = \frac{|2 \cdot 2 + 3(-3)|}{\sqrt{2^2 + 3^2} \sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{5}{13}.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 19. Cho $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Ta có

- A. $\cos \alpha = \frac{12}{13}$. B. $\cos \alpha = \pm \frac{12}{13}$. C. $\tan \alpha = \frac{-5}{12}$. D. $\cot \alpha = \frac{12}{5}$.

Lời giải.

Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, nên $\cos \alpha < 0$, $\cot \alpha < 0$ và $\tan \alpha < 0$. Do đó $\tan \alpha = \frac{-5}{12}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 20. Bất phương trình $25x - 5 > 2x + 15$ có nghiệm là

- A. $x < \frac{20}{23}$. B. $x > \frac{10}{23}$. C. $x \in \mathbb{R}$. D. $x > \frac{20}{23}$.

Lời giải.

$$\text{BPT} \Leftrightarrow 23x > 20 \Leftrightarrow x > \frac{20}{23}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(1; 2)$, hai đường cao $BH : x + y = 0$ và $CK : 2x - y + 1 = 0$. Tính diện tích tam giác ABC .

Lời giải.

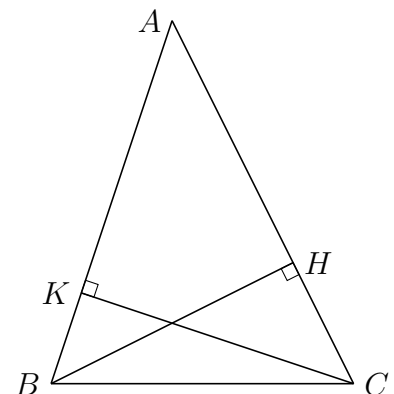
Ta có $AB \perp CK \Rightarrow$ véc-tơ pháp tuyến của AB là $\vec{n}_{AB} = (1; 2) \Rightarrow$ phương trình cạnh AB là $1(x - 1) + 2(y - 2) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 5 = 0$.

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = \frac{11}{5} \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{3}{5}; \frac{11}{5}\right).$$

Ta có $AC \perp BH \Rightarrow$ véc-tơ pháp tuyến của AC là $\vec{n}_{AC} = (1; -1) \Rightarrow$ phương trình cạnh AC là $1(x - 1) - 1(y - 2) = 0 \Leftrightarrow x - y + 1 = 0$.

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ



$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow C\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

Ta có $AC = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ và $BH = \frac{\left|\frac{3}{5} - \frac{11}{5} + 1\right|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{5\sqrt{2}}.$

Diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2}BH \cdot AC = \frac{9}{20}.$ □

Bài 2. Giải bất phương trình $\frac{5}{x-2} \geq -2.$

Lời giải.

$$\text{BPT} \Leftrightarrow \frac{5}{x-2} + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup (2; +\infty).$$
 □

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $\Delta: 3x + 2y - 1 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d qua $M(0; -2)$ và song song với đường thẳng Δ .

Lời giải.

Vì $d \parallel \Delta$, nên véc-tơ pháp tuyến của d là $\vec{n}_d = (3; 2).$

Vậy phương trình đường thẳng d là $3(x - 0) + 2(y + 2) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y + 4 = 0.$ □

Bài 4. Rút gọn biểu thức sau $A = \cos^2 x + \sin^2(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(2\pi - x) + \cos(3\pi + x).$

Lời giải.

$$A = \cos^2 x + \sin^2 x + \cos x + \cos(-x) - \cos x = 1 + \cos x.$$
 □

Bài 5. Giải bất phương trình $\sqrt{2x^2 - 3x + 1} \geq x + 3.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{BPT} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 \geq 0 \\ x + 3 < 0 \\ x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 - 3x + 1 \geq (x + 3)^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty) \\ x < -3 \\ x + 3 \geq 0 \\ x^2 - 9x - 8 \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -3) \\ x \geq -3 \\ x \in \left(-\infty; \frac{9 - \sqrt{113}}{2}\right] \cup \left[\frac{9 + \sqrt{113}}{2}; +\infty\right) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{9 - \sqrt{113}}{2}\right] \cup \left[\frac{9 + \sqrt{113}}{2}; +\infty\right). \end{aligned}$$

□

ĐÁP ÁN

1. B	2. C	3. C	4. D	5. A	6. B	7. D	8. A	9. C	10. A
11. C	12. D	13. C	14. C	15. A	16. C	17. D	18. C	19. C	20. D

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $2x - 3 > 6 - x$.

- A. $S = (-\infty; 3)$. B. $S = [3; +\infty)$. C. $S = (-\infty; 3]$. D. $S = (3; +\infty)$.

Lời giải.

$$2x - 3 > 6 - x \Leftrightarrow 3x > 9 \Leftrightarrow x > 3.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (3; +\infty)$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 2. Tìm tập nghiệm T của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} 2x + 1 > 3x - 2 \\ -x - 3 < 0. \end{cases}$$

- A. $T = (-3; 3)$. B. $T = (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.
C. $T = (-3; +\infty)$. D. $T = (-\infty; 3)$.

Lời giải.

$$\begin{cases} 2x + 1 > 3x - 2 \\ -x - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x > -3 \\ -x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < x < 3.$$

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là $T = (-3; 3)$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 3. Nhị thức bậc nhất nào sau đây nhận giá trị âm với mọi x nhỏ hơn 2?

- A. $f(x) = 6 - 3x$. B. $g(x) = -2x - 4$. C. $p(x) = 4 - 2x$. D. $q(x) = 3x - 6$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } q(x) < 0 \Leftrightarrow 3x - 6 < 0 \Leftrightarrow x < 2.$$

Vậy $q(x)$ nhận giá trị âm với mọi x nhỏ hơn 2.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 4. Cho $\tan x = a$ (với $a \neq \pm 1$). Tính $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ theo a .

- A. $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2a}{1 - a^2}$. B. $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + a}{1 - a}$.
C. $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + a}{1 - a^2}$. D. $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 - a}{1 + a}$.

Lời giải.

$$\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan x + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan x \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{a + 1}{1 - a \cdot 1} = \frac{1 + a}{1 - a}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

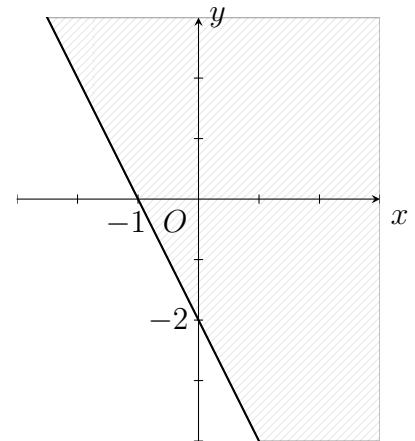
Câu 5. Miền nghiệm của bất phương trình nào sau đây được biểu diễn bởi nửa mặt phẳng **không** bị gạch (kể cả biên) trong hình vẽ bên?

A. $2x + y - 2 \geq 0$.

B. $2x + y + 2 \geq 0$.

C. $2x + y + 2 \leq 0$.

D. $2x + y - 2 \leq 0$.



Lời giải.

Bờ của nửa mặt phẳng là đường thẳng (Δ) đi qua hai điểm $(-1; 0)$ và $(0; -2)$. Phương trình của đường thẳng (Δ) là $y = -2x - 2$ hay $2x + y + 2 = 0$.

Lại có điểm $(-2; 0)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình nên ta có điều luôn đúng $2 \cdot (-2) + 0 + 2 = -2 < 0$.

Vậy bất phương trình có miền nghiệm được biểu diễn bởi nửa mặt phẳng **không** bị gạch (kể cả biên) trong hình vẽ trên là bất phương trình $2x + y + 2 \leq 0$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 6. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\frac{1}{x} \leq x$.

A. $S = [-1; 1]$.

B. $S = (-\infty; -1] \cup (0; 1]$.

C. $S = [-1; 0) \cup [1; +\infty)$.

D. $S = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$.

Lời giải.

$$\frac{1}{x} \leq x \Leftrightarrow \frac{1 - x^2}{x} \leq 0.$$

• $1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

• $x = 0$.

• Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$1-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$
VT	$+$	0	$-$	$+$	0

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = [-1; 0) \cup [1; +\infty)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 7. Điểm $O(0; 0)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

A. $x + 3y + 2 \leq 0$.

B. $x + y + 2 \leq 0$.

C. $2x + 3y - 5 \geq 0$.

D. $2x + y + 2 \geq 0$.

Lời giải.

Xét bất phương trình $2x + y + 2 \geq 0$, ta có $2 \cdot 0 + 0 + 2 \geq 0$ (luôn đúng)

Vậy điểm $O(0; 0)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình $2x + y + 2 \geq 0$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $x = 1$ là nghiệm của bất phương trình $2m -$

$$3mx^2 \geq 1.$$

A. $m \leq -1$.

B. $m \geq -1$.

C. $-1 \leq m \leq 1$.

D. $m > -1$.

Lời giải.

Vì $x = 1$ là nghiệm của bất phương trình $2m - 3mx^2 \geq 1$ nên

$$2m - 3m \cdot 1^2 \geq 1 \Leftrightarrow -m \geq 1 \Leftrightarrow m \leq -1.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 9. Tìm tập nghiệm T của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x - 5 \geq 0 \\ 8 - 3x \geq 0. \end{cases}$

A. $T = \left[\frac{8}{3}; +\infty\right)$.

B. $T = \left[\frac{8}{3}; \frac{5}{2}\right]$.

C. $T = \left[\frac{3}{8}; \frac{5}{2}\right]$.

D. $T = \left[\frac{5}{2}; \frac{8}{3}\right]$.

Lời giải.

$$\begin{cases} 2x - 5 \geq 0 \\ 8 - 3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 5 \\ 3x \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ x \leq \frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{2} \leq x \leq \frac{8}{3}.$$

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là $T = \left[\frac{5}{2}; \frac{8}{3}\right]$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 10. Cho $\sin a = \frac{1}{3}$, $\cos b = \frac{2}{5}$ với a, b thuộc $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Tính $\sin(a + b)$.

A. $\sin(a + b) = \frac{-4\sqrt{2} + \sqrt{21}}{15}$.

B. $\sin(a + b) = \frac{2 - 2\sqrt{42}}{15}$.

C. $\sin(a + b) = \frac{2 + 2\sqrt{42}}{15}$.

D. $\sin(a + b) = \frac{4\sqrt{2} + \sqrt{21}}{15}$.

Lời giải.

Vì $a, b \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên $\cos a > 0$ và $\sin b > 0$.

Khi đó

$$\cos a = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\sin a = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$\text{Do đó } \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{21}}{5} = \frac{2 + 2\sqrt{42}}{15}.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 11. Cho a, b, c, d là các số thực khác 0. Nghiệm của nhị thức $ax + b$ nhỏ hơn nghiệm của nhị thức $cx + d$ khi và chỉ khi điều kiện nào sau đây xảy ra?

A. $\frac{b}{d} > \frac{a}{c}$.

B. $\frac{b}{a} > \frac{d}{c}$.

C. $\frac{c}{d} < \frac{b}{a}$.

D. $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

Lời giải.

Nghiệm của nhị thức $ax + b$ là $x = -\frac{b}{a}$.

Nghiệm của nhị thức $cx + d$ là $x = -\frac{d}{c}$.

Nghiệm của nhị thức $ax + b$ nhỏ hơn nghiệm của nhị thức $cx + d$ khi và chỉ khi

$$-\frac{b}{a} < -\frac{d}{c} \Leftrightarrow \frac{b}{a} > \frac{d}{c}.$$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 12. Tam thức bậc hai $y = x^2 - 3x + 2$ nhận giá trị dương với các giá trị nào của x ?

- A. $x < 1$ hoặc $x > 2$. B. $-2 < x < 1$. C. $x < -2$ hoặc $x > 1$. D. $1 < x < 2$.

Lời giải.

$$y > 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > 2. \end{cases}$$

Chọn đáp án (A)

□

Câu 13. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $x^2 + 1 > 0$.

- A. $S = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. B. $S = (-1; 1)$.
C. $S = \emptyset$. D. $S = \mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $x^2 \geq 0$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$ nên $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $x^2 + 1 > 0$ là $S = \mathbb{R}$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 14. Biết $\tan \alpha = 2$ với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính giá trị của $\sin 2\alpha$.

- A. $\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$. B. $\sin 2\alpha = -\frac{4}{3}$. C. $\sin 2\alpha = -\frac{3}{5}$. D. $\sin 2\alpha = \frac{4}{3}$.

Lời giải.

Đặt $t = \tan \alpha = 2$ với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

$$\text{Ta có } \sin 2\alpha = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2 \cdot 2}{1+2^2} = \frac{4}{5}.$$

Chọn đáp án (A)

□

Câu 15. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\frac{1}{x} \geq 1$.

- A. $S = (-\infty; 1)$. B. $S = (0; 1)$. C. $S = (-\infty; 1]$. D. $S = (0; 1]$.

Lời giải.

$$\frac{1}{x} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = (0; 1]$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 16. Tính góc φ giữa hai đường thẳng $(\Delta_1): x + 2y + 4 = 0$ và $(\Delta_2): x - 3y + 6 = 0$.

- A. $\varphi = 30^\circ$. B. $\varphi = 90^\circ$. C. $\varphi = 45^\circ$. D. $\varphi = 60^\circ$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \cos \varphi = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot (-3)|}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Suy ra $\varphi = 45^\circ$.

Chọn đáp án (C)

□

Câu 17. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $(m^2 + 2m)x \leq 5$ nghiệm đúng với mọi x .

- A. $m \in (-2; 0)$. B. $m \in \{0\}$. C. $m \in \{-2; 0\}$. D. $m \in [-2; 0]$.

Lời giải.

- Nếu $m^2 + 2m > 0$ thì bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left(-\infty; \frac{5}{m^2 + 2m}\right]$ (không thỏa mãn).
- Nếu $m^2 + 2m < 0$ thì bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left[\frac{5}{m^2 + 2m}; +\infty\right)$ (không thỏa mãn).
- Nếu $m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -2 \end{cases}$ thì bất phương trình đã cho trở thành $0 \leq 5$ (luôn đúng với mọi x). Do đó bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \mathbb{R}$.

Vậy $m \in \{-2; 0\}$ thì bất phương trình $(m^2 + 2m)x \leq 5$ nghiệm đúng với mọi x .

Chọn đáp án **C** □

Câu 18. Tính giá trị của $\sin \frac{\pi}{6}$.

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. 1. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 19. Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{2-3x}}$.

- A. $\mathcal{D} = \left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$. B. $\mathcal{D} = \left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$. C. $\mathcal{D} = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$. D. $\mathcal{D} = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định khi $2 - 3x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{2}{3}$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathcal{D} = \left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 20. Biết tập nghiệm của bất phương trình $x^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} \leq 0$ là đoạn $[a; b]$. Tính $b^2 - a^2$.

- A. $b^2 - a^2 = 1$. B. $b^2 - a^2 = -5$. C. $b^2 - a^2 = 5$. D. $b^2 - a^2 = -1$.

Lời giải.

$x^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} \leq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq x \leq -\sqrt{2}$.

Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là đoạn $[a; b] = [-\sqrt{3}; -\sqrt{2}]$.

Do đó $b^2 - a^2 = (-\sqrt{2})^2 - (-\sqrt{3})^2 = -1$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 21. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

- A. $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$. B. $\cos 2x = \sin^2 x - \cos^2 x$.
C. $\sin(x + y) = \sin y \cos x + \sin x \cos y$. D. $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$.

Lời giải.

Ta có $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 22. Cho ba số a, b, c là các số bất kỳ và $a > b$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a^2 > b^2$.

B. $a + c > b + c$.

C. $c - a > c - b$.

D. $ac > bc$.

Lời giải.

$$a > b \Leftrightarrow a + c > b + c.$$

$$a > b \Leftrightarrow -a < -b \Leftrightarrow c - a < c - b.$$

Nếu $a > b$ và $c > 0$ thì $ac > bc$.Nếu $a > b > 0$ thì $a^2 > b^2$.

Chọn đáp án (B)

□

Câu 23. Cho $\tan \alpha + \cot \alpha = 7$, với $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$. Tính giá trị của biểu thức $\mathcal{P} = \tan \alpha - \cot \alpha$.

A. $\mathcal{P} = \sqrt{53}$.

B. $\mathcal{P} = -3\sqrt{5}$.

C. $\mathcal{P} = 3\sqrt{5}$.

D. $\mathcal{P} = -\sqrt{53}$.

Lời giải.

Ta có

$$\tan \alpha + \cot \alpha = 7 \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 7 \Leftrightarrow \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = 7 \Leftrightarrow \frac{2}{\sin 2\alpha} = 7 \Leftrightarrow \sin 2\alpha = \frac{2}{7}.$$

Lại có $\cos 2\alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} = \pm \frac{3\sqrt{5}}{7}$. Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ hay $0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos 2\alpha > 0$. Do đó

$$\cos 2\alpha = \frac{3\sqrt{5}}{7}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = \tan \alpha - \cot \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{-2 \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \\ &= \frac{-2 \cdot \frac{3\sqrt{5}}{7}}{\frac{2}{7}} = -3\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 24. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

A. $\cot 2a \tan 2a = 1$.

B. $\sin 4a = 2 \cos 2a \sin 2a$.

C. $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin \left(a + \frac{\pi}{4} \right)$.

D. $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 + \tan^2 a}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}.$$

Chọn đáp án (D)

□

Câu 25. Một cung nằm trên đường tròn có bán kính 6 cm, tính số đo radian của cung đó biết độ dài cung bằng 12 cm.

A. 2 rad.

B. 2π rad.

C. 1 rad.

D. π rad.

Lời giải.Gọi R là bán kính đường tròn; ℓ , α lần lượt là chiều dài và số đo (radian) của cung tròn.

$$\text{Ta có } \ell = R\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\ell}{R} = \frac{12}{6} = 2 \text{ radian.}$$

Chọn đáp án (A)

□

Câu 26. Tính cạnh BC của tam giác ABC biết $\hat{A} = 120^\circ$, $AC = 3$, $AB = 4$.

A. $BC = \sqrt{37}$.

B. $BC = 37$.

C. $BC = 13$.

D. $BC = \sqrt{13}$.

Lời giải.

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A} = \sqrt{4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{37}.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 27. Trong hệ tọa độ Oxy , tìm phương trình đường tròn (C) đi qua ba điểm $A(0; 3)$, $B(-3; 0)$ và $C(3; 0)$.

A. $x^2 + y^2 - 9 = 0$.

B. $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$.

C. $x^2 + y^2 - 3 = 0$.

D. $x^2 + y^2 - 6x - 6y = 0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{OA} = (0; 3)$, $\overrightarrow{OB} = (-3; 0)$, $\overrightarrow{OC} = (3; 0)$.

Vì $OA = OB = OC = 3$ nên O là tâm của đường tròn đi qua ba điểm A, B, C và bán kính của đường tròn này bằng 3.

Vậy phương trình đường tròn (ABC) là $x^2 + y^2 = 3^2$ hay $x^2 + y^2 - 9 = 0$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 28. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$.

A. $I(1; -1)$ và $R = 2$. B. $I(-1; 1)$ và $R = 2$. C. $I(1; -1)$ và $R = 1$. D. $I(-1; 1)$ và $R = 1$.

Lời giải.

Đồng nhất hệ số phương trình của đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$ với phương trình $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ ta được $a = 1$, $b = -1$, $c = -2$.

Vậy đường tròn (C) có tâm $I(1; -1)$ và bán kính $R = \sqrt{1^2 + (-1)^2 - (-2)} = 2$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 29. Trong hệ tọa độ Oxy , với giá nào của tham số m thì đường thẳng (Δ) : $\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 2m = 0$ tiếp xúc với đường tròn $x^2 + y^2 = 1$?

A. $m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $m = \pm 1$.

C. $m = \pm \sqrt{2}$.

D. $m = 0$.

Lời giải.

Đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ có tâm là điểm $O(0; 0)$ và bán kính $R = 1$.

Đường thẳng (Δ) : $\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 2m = 0$ tiếp xúc với đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ khi và chỉ khi

$$d(O, \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|2m|}{2} = 1 \Leftrightarrow |m| = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 30. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , điểm nào sau đây thuộc đường thẳng (d) :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}?$$

A. $(-1; 1)$.

B. $(1; 1)$.

C. $(1; -1)$.

D. $(0; -2)$.

Lời giải.

Với $t = 1$ ta được $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \end{cases}$

Với $t = 0$ ta được $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2. \end{cases}$

Với $t = -1$ ta được $\begin{cases} x = -1 \\ y = 3. \end{cases}$

Vậy điểm $(1; 1)$, $(0; 2)$, $(-1; 3)$ thuộc đường thẳng (d) .

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 31. Trong hệ tọa độ Oxy , tìm phương trình tham số của đường thẳng (Δ) đi qua hai điểm $A(-3; 0)$, $B(0; -5)$.

A. $\begin{cases} x = -3 - 3t \\ y = 5 + 5t, \end{cases} t \in \mathbb{R}.$

B. $\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = -5 + 5t, \end{cases} t \in \mathbb{R}.$

C. $\begin{cases} x = -6 + 3t \\ y = 5 - 5t, \end{cases} t \in \mathbb{R}.$

D. $\begin{cases} x = 3 - 5t \\ y = -5 + 3t, \end{cases} t \in \mathbb{R}.$

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; -5)$ là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng (Δ) .

Phương trình tham số của đường thẳng (Δ) là

$$\begin{cases} x = -3 + 3s \\ y = -5s, \end{cases} s \in \mathbb{R}.$$

Khi đó với $s = -1$ thì đường thẳng Δ đi qua điểm $M(-6; 5)$. Do đó phương trình tham số của Δ cũng được viết lại là

$$\begin{cases} x = -6 + 3t \\ y = 5 - 5t, \end{cases} t \in \mathbb{R}.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 32. Phương trình nào sau đây **không phải** là phương trình đường tròn?

A. $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0.$

B. $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 6 = 0.$

C. $x^2 + y^2 - 4 = 0.$

D. $x^2 + y^2 + x + y = 0.$

Lời giải.

- $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ là phương trình đường tròn.
- $x^2 + y^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$ là phương trình đường tròn.
- $x^2 + y^2 + x + y = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ là phương trình đường tròn.
- $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 6 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y + 2)^2 = -1$ không phải là phương trình đường tròn.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 33. Cho tam giác ABC vuông có $AB = AC = a$. Tính theo a độ dài đường trung tuyến BM .

A. $BM = a\sqrt{2}.$

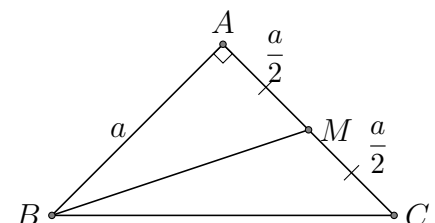
B. $BM = a\sqrt{3}.$

C. $BM = 1,5a.$

D. $BM = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$

Lời giải.

Ta có $BM = \sqrt{AB^2 + AM^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$



Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 34. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , viết phương trình đường thẳng (d) đi qua hai điểm $M(1;1)$ và $N(2;2)$.

- A. $(d) : x + y - 2 = 0$. B. $(d) : x + y - 4 = 0$. C. $(d) : x - y + 1 = 0$. D. $(d) : x - y = 0$.

Lời giải.

Ta thấy mỗi điểm M và N đều có hoành độ và tung độ bằng nhau nên M và N nằm trên đường thẳng $y = x$ hay $x - y = 0$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 35. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d) : 3x + 5y + 2017 = 0$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. (d) có hệ số góc $k = \frac{5}{3}$.
B. (d) có véc-tơ chỉ phương $\vec{a} = (5; -3)$.
C. (d) vuông góc với đường thẳng $(d') : 5x - 3y = 0$.
D. (d) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (3; 5)$.

Lời giải.

Đường thẳng $(d) : 3x + 5y + 2017 = 0$ có

- véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (3; 5)$;
- véc-tơ chỉ phương $\vec{a} = (5; -3)$;
- hệ số góc $k = -\frac{3}{5}$;
- vuông góc với đường thẳng $(d') : 5x - 3y = 0$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 36. Trong mặt phẳng Oxy viết phương trình đường thẳng trung trực của đoạn thẳng AB biết $A(3; -5)$ và $B(-1; 1)$.

- A. $3x - 2y - 7 = 0$. B. $2x - 3y - 8 = 0$. C. $2x - 3y - 21 = 0$. D. $3x + 2y + 1 = 0$.

Lời giải.

Gọi (d) là đường trung trực của đoạn thẳng AB . Đường thẳng (d) đi qua trung điểm $M(1; -2)$ của đoạn thẳng AB và nhận véc-tơ $\overrightarrow{AB} = (-4; 6)$ là véc-tơ pháp tuyến.

Phương trình tổng quát của đường thẳng (d) là:

$$-4(x - 1) + 6(y + 2) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y - 8 = 0.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 37. Trong hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng (d) có phương trình tham số $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ và điểm $A(2; 2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng (d) sao cho AM ngắn nhất.

- A. $M(1; 2)$. B. $M(2; 1)$. C. $M(1; 1)$. D. $M(2; 0)$.

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng (d) .

Ta có $AM \geq AH$ với mọi điểm M thuộc đường thẳng (d) .

Dấu “=” xảy ra khi $M \equiv H$.

Vậy AM ngắn nhất khi M là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng (d) .

Gọi $M(2-t; t)$. Ta có $\overrightarrow{AM} = (-t; t-2)$.

Vì $\overrightarrow{AM}$ vuông góc với $\vec{u} = (-1; 1)$ nên

$$t + t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Vậy $M(1; 1)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 38. Tìm bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết $AB = 2$, $AC = 3$, $\widehat{ABC} = 45^\circ$.

- A. $R = 2\sqrt{2}$. B. $R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. C. $R = 3\sqrt{2}$. D. $R = \sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $\frac{AC}{\sin \widehat{ABC}} = 2R \Rightarrow R = \frac{AC}{2 \sin \widehat{ABC}} = \frac{3}{2 \sin 45^\circ} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 39. Trên mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , viết phương trình đường tròn tiếp xúc với hai trục tọa độ đồng thời đi qua điểm $K(2; 1)$.

- A. $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 25$; $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$.
B. $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 25$; $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$.
C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$; $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$.
D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$; $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 25$.

Lời giải.

Vì đường tròn tiếp xúc với hai trục tọa độ đồng thời đi qua điểm $K(2; 1)$ (nằm trong góc phần tư thứ nhất) nên tâm I của đường tròn nằm trên đường thẳng $y = x$. Do đó $I(a; a)$ với $a > 0$. Bán kính đường tròn $R = a$.

Phương trình đường tròn cần tìm có dạng $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$.

Vì đường tròn đi qua điểm $K(2; 1)$ nên

$$(2-a)^2 + (1-a)^2 = a^2 \Leftrightarrow a^2 - 6a + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 5. \end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$; $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$.

Chọn đáp án **C**

□

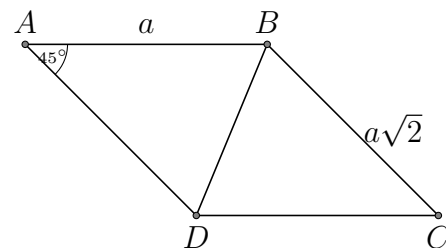
Câu 40. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$, $\widehat{BAD} = 45^\circ$. Tính diện tích S của hình bình hành $ABCD$ theo a .

- A. $S = 2a^2$. B. $S = a^2\sqrt{3}$. C. $S = a^2\sqrt{2}$. D. $S = a^2$.

Lời giải.

Diện tích hình bình hành $ABCD$ là

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= 2S_{ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD} \\ &= a \cdot a\sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ = a^2. \end{aligned}$$



Chọn đáp án **D**

□

II. PHẦN TỰ LUẬN

Bài 1. Xét dấu của biểu thức: $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 1}$.

Lời giải.

- $x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3. \end{cases}$
- $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$
- Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
$x^2 - 2x - 3$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	
y	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$

- $y > 0$ với mọi $x \in (-1; 1) \cup (3; +\infty)$.
- $y < 0$ với mọi $x \in (-\infty; -1) \cup (1; 3)$.
- $y = 0$ khi $x = -1$ hoặc $x = 3$.
- y không xác định khi $x = 1$.

□

Bài 2. Trong hệ tọa độ Oxy , viết phương trình tham số của đường thẳng (d) đi qua điểm $M(3; 4)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (-2; 5)$.

Lời giải.

Vì đường thẳng (d) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (-2; 5)$ nên (d) có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (5; 2)$.

Phương trình tham số của đường thẳng (d) là

$$\begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = 4 + 2t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

□

ĐÁP ÁN

1. D	2. A	3. D	4. B	5. C	6. C	7. D	8. A	9. D	10. C
11. B	12. A	13. D	14. A	15. D	16. C	17. C	18. C	19. A	20. D
21. B	22. B	23. B	24. D	25. A	26. A	27. A	28. A	29. B	30. B
31. C	32. B	33. D	34. D	35. A	36. B	37. C	38. B	39. C	40. D

Câu 1. Bất phương trình $\frac{2x-5}{\sqrt{4-x}} > \sqrt{4-x}$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

- A. 1. B. Vô số. C. 0. D. 2.

Lời giải.

Điều kiện xác định : $x < 4$.

Bất phương trình đã cho tương đương với: $2x - 5 > 4 - x \Leftrightarrow x > 3$.

Kết hợp với điều kiện xác định suy ra phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 2. Bất phương trình $2x - 1 > x$ tương đương với bất phương trình nào sau đây?

- A. $\frac{1}{2x-1} < \frac{1}{x}$. B. $\frac{2x-1}{x^2+2} > \frac{x}{x^2+2}$.
C. $(2x-1)^2 > x^2$. D. $(2x-1)(x-3) > x(x-3)$.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương với $x > 1$.

Ta thấy:

$$\frac{1}{2x-1} < \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{-x+1}{(2x-1)x} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2} \\ x > 1 \end{cases}$$

$$\frac{2x-1}{x^2+2} > \frac{x}{x^2+2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2+2} > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

$$(2x-1)^2 > x^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$(2x-1)(x-3) > x(x-3) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < 1 \end{cases}$$

Suy ra bất phương trình đã cho tương đương với $\frac{2x-1}{x^2+2} > \frac{x}{x^2+2}$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 3. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-1} \geq 0$ là

- A. $S = \left(-2; -\frac{1}{2}\right] \cup (1; +\infty)$. B. $S = \left(-2; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.
C. $S = \left[-2; -\frac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty)$. D. $S = \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương với: $\frac{2x+1}{(x+2)(x-1)} \geq 0$.

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$x + 2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2x + 1$	$-$	$+$	0	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
Vế trái	$-$	$+$	0	$-$	$+$

Từ bảng xét dấu suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-2; -\frac{1}{2}\right] \cup (1; +\infty)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 4. Cho $\triangle ABC$, $\widehat{B} \neq 45^\circ$, chọn đẳng thức sai.

A. $S = pr$.

B. $\frac{b}{\cos B} = 2R$.

C. $h_c = \frac{2S}{c}$.

D. $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos C$.

Lời giải.

Theo định lí sin ta có $\frac{b}{\sin B} = 2R$.

Theo bài $\widehat{B} \neq 45^\circ \Rightarrow \sin B \neq \cos B \quad (0^\circ < \widehat{B} < 90^\circ)$.

Khi đó $\frac{b}{\cos B} \neq 2R$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 5. Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{x+5} > 5$ là

A. $S = (20; +\infty)$.

B. $S = [0; 5)$.

C. $S = (-\infty; 20)$.

D. $S = \mathbb{R}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x \geq -5$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $x + 5 > 25 \Leftrightarrow x > 20$.

Kết hợp với điều kiện xác định ta được nghiệm của bất phương trình là: $S = (20; +\infty)$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 6. Cho đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 - t \end{cases}$. Phương trình nào sau đây là phương trình tổng quát của d ?

A. $x - 2 = 0$.

B. $y - 2 = 0$.

C. $x - y + 1 = 0$.

D. $2x - 3y - 3 = 0$.

Lời giải.

Có $\vec{u} = (0; -1)$ là véc-tơ chỉ phương của d . Suy ra $\vec{n} = (1; 0)$ là véc-tơ pháp tuyến của d .

Mặt khác, d đi qua $A(2; 3)$ suy ra phương trình tổng quát của d là $x - 2 = 0$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 7. Số nghiệm của bất phương trình $9x^2 - 12x + 4 \leq 0$ là

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. vô số.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương với: $(3x - 2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$.

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 8. Cho biểu thức $f(x) = \frac{2x(3x-1)}{x^2-2x}$ có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{3}$	2	$+\infty$
$f(x)$	?	?	0	?	?

Dấu trong các dấu chấm hỏi theo thứ tự từ trái sang phải là

A. +, -, -, +.

B. +, -, +, -.

C. -, +, -, +.

D. +, +, -, +.

Lời giải.

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x$	-	0	+		+
$3x-1$	-		-	0	+
x^2-2x	+	0	-		-
$f(x)$	+	+	0	-	+

Chọn đáp án **D**

□

Câu 9. Để bất phương trình $mx > 2m + 1$ vô nghiệm thì m thỏa mãn điều kiện nào?

A. $m > 0$.

B. $m < 0$.

C. $m = 0$.

D. $m \leq 0$.

Lời giải.

Với $m = 0$ bất phương trình đã cho trở thành $0 > 1$ (vô lí).

Với $m \neq 0$ bất phương trình đã cho tương đương với $x > \frac{2m+1}{m}$.

Vậy $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $A(-3; 2)$ và điểm B thuộc đường thẳng $y = 2x - 1$.

Để $AB > \sqrt{17}$. Điều kiện hoành độ x của B là

A. $\begin{cases} x > 1 \\ 0 < x < \frac{1}{5} \end{cases}$

B. $\begin{cases} x > 1 \\ x < \frac{1}{5} \end{cases}$

C. $x > 0$.

D. $x > 1$.

Lời giải.

Giả sử $B(x; 2x - 1)$.

$$AB > \sqrt{17} \Rightarrow (x+3)^2 + (2x-3)^2 > 17 \Leftrightarrow 5x^2 - 6x + 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < \frac{1}{5} \end{cases}$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 11. Cho $\triangle ABC$ có $BC = 5$, $CA = 6$, $AB = 7$. Bình phương độ dài đường trung tuyến ứng với cạnh BC là

A. $\frac{73}{4}$. B. $\frac{145}{4}$. C. $\frac{110}{4}$. D. 19.

Lời giải.

Gọi m_a là độ dài đường trung tuyến ứng với cạnh BC .

$$\text{Ta có } m_a^2 = \frac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{4} = \frac{145}{4}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 12. Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $|x| < m - 7$ vô nghiệm.

- A. $m = 7$. B. $m > 7$. C. $m < 7$. D. $m \leq 7$.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho vô nghiệm $\Leftrightarrow m - 7 < 0 \Leftrightarrow m < 7$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 13. Biểu thức $f(x) = 2x + 4$ thỏa mãn khẳng định nào dưới đây?

- A. Luôn nhận giá trị dương với mọi số thực x .
 B. Nhận giá trị dương khi x thuộc khoảng $(-2; +\infty)$.
 C. Luôn nhận giá trị âm với mọi số thực x .
 D. Nhận giá trị âm khi thuộc nửa khoảng $(-\infty; -2]$.

Lời giải.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

Chọn đáp án **(B)**

□

Suy ra $f(x)$ nhận giá trị dương khi x thuộc khoảng $(-2; +\infty)$.

Câu 14. Cho hai đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - t \end{cases}$ và $d_2 : x + 3y - 7 = 0$. Chọn khẳng định đúng:

- A. d_1 song song với d_2 . B. d_1 vuông góc với d_2 .
 C. d_1 trùng với d_2 . D. d_1 cắt và không vuông góc với d_2 .

Lời giải.

Ta có $\vec{n} = (1; 3)$ là véc-tơ pháp tuyến của cả d_1 và d_2 .

Mặt khác, lấy $A(1; 2) \in d_1 \Rightarrow A \in d_2$.

Suy ra d_1 trùng với d_2 .

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 15. Số nghiệm của bất phương trình $\frac{2x - 4}{x + 1} < 0$ là

- A. 2. B. 1. C. 0. D. Vô số.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho tương đương với $-1 < x < 2$. Suy ra bất phương trình có vô số nghiệm.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 16. Tìm tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 8x - 9 \geq 0 \\ 3x - 4 > 0 \end{cases}$.

- A. $\left[-1; \frac{4}{3}\right)$. B. $\left(\frac{4}{3}; 9\right]$. C. $[9; +\infty)$. D. $(-\infty; -1]$.

Lời giải.

$$\text{Có } \begin{cases} x^2 - 8x - 9 \geq 0 \\ 3x - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 9 \\ x \leq -1 \Leftrightarrow x \geq 9. \\ x > \frac{4}{3} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $[9; +\infty)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 17. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 + mx + 9 = 0$ có nghiệm.

- A. $m \leq -6$. B. $\begin{cases} m \geq 6 \\ m \leq -6 \end{cases}$. C. $m > 6$. D. $\begin{cases} m > 6 \\ m < -6 \end{cases}$.

Lời giải.

$$\text{Phương trình đã cho có nghiệm} \Leftrightarrow \Delta = m^2 - 36 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 6 \\ m \leq -6 \end{cases}$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 18. Bất phương trình $\sqrt{x-1}(x-2)(x-4) \leq 0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

- A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Có } \sqrt{x-1}(x-2)(x-4) \leq 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ \begin{cases} x-1 > 0 \\ (x-2)(x-4) \leq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \begin{cases} x > 1 \\ 2 \leq x \leq 4 \end{cases} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ \begin{cases} x-1 > 0 \\ (x-2)(x-4) \leq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 2 \leq x \leq 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra bất phương trình đã cho có 4 nghiệm nguyên.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 19. Cho $f(x) = -2x^2 + 3x - 17$. Chọn khẳng định đúng.

- A. $f(x)$ nhận giá trị âm với mọi số thực x .
B. $f(x)$ nhận giá trị dương với mọi x dương.
C. $f(x)$ có thể nhận cả giá trị dương và giá trị âm.
D. $f(x)$ nhận giá trị dương với mọi số thực x .

Lời giải.

Nhận xét: $f(x)$ là một tam thức bậc hai có $\Delta < 0$; $a = -2 < 0$. Khi đó $f(x)$ nhận giá trị âm với mọi số thực x .

Chọn đáp án **C**

□

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị m để bất phương trình $x^2 - 2mx + m^2 + 3m - 1 > 0$ nghiệm đúng với mọi số thực x .

A. Không có giá trị nào của m thỏa mãn.

B. $m \geq \frac{1}{3}$.

C. $m < \frac{1}{3}$.

D. $m > \frac{1}{3}$.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi số thực $x \Leftrightarrow \Delta' = -3m + 1 < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{3}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 21. Cho $\triangle ABC$ thỏa mãn $bc = a^2$. Khi đó, đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $\sin B \sin C = \sin^2 A$.

B. $\cos B \cos C = \cos^2 A$.

C. $\sin B \sin C = 2 \sin A$.

D. $h_b h_c = 2h_a$.

Lời giải.

Theo định lý sin ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{a^2}{\sin^2 A} = \frac{bc}{\sin B \sin C} \Rightarrow \sin B \sin C = \sin^2 A. \quad (\text{do } bc = a^2)$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 22. Tìm tất cả các giá trị m để hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x + m - 5}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $m > 9$.

B. $m \geq 9$.

C. $m \geq 5$.

D. $m \leq 5$.

Lời giải.

Hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x + m - 5}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + m - 5 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \Delta' = 9 - m < 0$$

$$\Leftrightarrow m > 9.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 23. Cho $\triangle ABC$. Chọn mệnh đề đúng.

A. $a < b \cos C + c \cos B$.

B. $a = b \cos C + c \cos B$.

C. $a \neq b \cos C + c \cos B$.

D. $a > b \cos C + c \cos B$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } b \cos C + c \cos B = b \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + c \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = a.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 24. Biểu thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) nhận giá trị không âm với mọi số thực x khi nào?

A. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$.

Lời giải.

$$\text{Có: } f(x) = ax^2 + bx + c \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 25. Tìm m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x - 4 < 0 \\ x + 2 > m \end{cases}$ vô nghiệm.

A. $m < 4$.

B. $m > 4$.

C. $m = 4$.

D. $m \geq 4$.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} 2x - 4 < 0 \\ x + 2 > m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > m - 2 \end{cases}.$

Để hệ bất phương trình vô nghiệm thì $m - 2 \geq 2 \Leftrightarrow m \geq 4.$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 26. Biểu thức $f(x)$ có bảng xét dấu như sau

x	$-\infty$	-2	1	2	3	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$+$	0	$+$

Khi đó $f(x)$ là biểu thức nào trong các biểu thức sau?

A. $\frac{(x+2)(x-3)^2}{(x-1)(x-2)}.$

B. $\frac{(x+2)(x-3)^2}{(x-1)^2(x-2)}.$

C. $\frac{(x+2)(x-3)}{(x-1)^2(x-2)}.$

D. $\frac{(x+2)(x-3)^2(x-2)}{(x-1)^2}.$

Lời giải.

$f(x)$ không xác định tại $x = 1$ và $x = 2$ do đó nhân tử $x - 1$ và $x - 2$ tồn tại ở mẫu thức.

$f(x)$ không đổi dấu khi đi qua $x = 1$ và $x = 3$ nên $x = 1$ và $x = 3$ là nghiệm bội chẵn.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 27. Tìm tập nghiệm của hệ bất phương trình $1 < \frac{3x^2 - 7x + 8}{x^2 + 1} \leq 2.$

A. $(1; 6).$

B. $\mathbb{R}.$

C. $\emptyset.$

D. $[1; 6].$

Lời giải.

Hệ bất phương trình tương đương với

$$\begin{cases} x^2 + 1 < 3x^2 - 7x + 8 \\ 3x^2 - 7x + 8 \leq 2x^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 7x + 7 > 0 & (1) \\ x^2 - 7x + 6 \leq 0 & (2) \end{cases}.$$

Xét (1) ta có vì $\begin{cases} a = 2 > 0 \\ \Delta = -7 < 0 \end{cases} \Rightarrow$ bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}.$

Xét (2) ta có $x^2 - 7x + 6 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 6.$

Vậy nghiệm của hệ bất phương trình là $[1; 6]$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 28. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai véc-tơ $\vec{a} = (x; x - 1), \vec{b} = (x + 2; x + 1).$ Điều kiện của x để $\vec{a} \cdot \vec{b} < 3$ là

A. $-2 < x < 3.$

B. $-2 < x < 1.$

C. $0 < x < 1.$

D. $-2 < x.$

Lời giải.

Ta có: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x(x + 2) + (x - 1)(x + 1) < 3$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + x^2 - 1 - 3 < 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 1.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 29. Gọi S_1, S_2 lần lượt là tập nghiệm của hai bất phương trình $x^2 - 3x + 2 > 0$ và $\frac{4x - 2}{x + 1} < x.$

Hãy chọn khẳng định đúng.

A. $S_1 = S_2.$

B. $S_1 \cap S_2 = \emptyset.$

C. $S_1 \subset S_2.$

D. $S_2 \subset S_1.$

Lời giải.

$$x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow S_1 = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty).$$

$$\frac{4x-2}{x+1} < x \Leftrightarrow \frac{x^2-3x+2}{x+1} > 0. \text{ Ta có bảng xét dấu}$$

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$		
$x^2 - 3x + 2$	+	$\vdots$	+	0	-	0	+
$x + 1$	-	0	+	$\vdots$	+	$\vdots$	+
Vẽ trái	-	$\parallel$	+	0	-	0	+

$$\Rightarrow S_2 = (-1; 1) \cup (2; +\infty).$$

$$\Rightarrow S_2 \subset S_1.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 30. Số -2 thuộc tập nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

A. $\frac{1}{1-x} + 2 \leq 0.$

B. $\sqrt{2x-5} \geq 1+x.$

C. $(2x+1)(1-x) < x^2.$

D. $2x+1 > 1-x.$

Lời giải.

$$\text{Xét bất phương trình } (2x+1)(1-x) < x^2 \Leftrightarrow 3x^2 - x - 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1+\sqrt{13}}{6} \\ x < \frac{1-\sqrt{13}}{6} \end{cases}.$$

$$\text{Vì } -2 < \frac{1-\sqrt{13}}{6} \text{ nên } -2 \text{ thuộc tập nghiệm của bất phương trình đã cho.}$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 31. Tam giác có độ dài ba cạnh là 3, 8, 9. Góc lớn nhất của tam giác có cosin bằng bao nhiêu?

A. $\frac{1}{6}.$

B. $-\frac{1}{6}.$

C. $\frac{\sqrt{17}}{4}.$

D. $-\frac{4}{25}.$

Lời giải.

Góc lớn nhất α của tam giác là góc đối diện với cạnh lớn nhất của tam giác.

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{3^2 + 8^2 - 9^2}{2 \cdot 3 \cdot 8} = -\frac{1}{6}$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 32. Để phương trình $mx^2 + 2(m-3)x + m^2 - 4 = 0$ có hai nghiệm trái dấu thì m thỏa mãn

A. $\begin{cases} m < -2 \\ 0 < m < 1 \end{cases}.$

B. $-2 < m < 0.$

C. $\begin{cases} m < -1 \\ 0 < m < 1 \end{cases}.$

D. $\begin{cases} m < -2 \\ 0 < m < 2 \end{cases}.$

Lời giải.

Để phương trình có hai nghiệm trái dấu điều kiện cần và đủ là

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ m(m^2 - 4) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m(m^2 - 4) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ 0 < m < 2 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 33. Tính diện tích S của tam giác có độ dài ba cạnh là 21, 17, 10.

A. $S = 105$.

B. $S = 48$.

C. $S = 84$.

D. $S = 85$.

Lời giải.

Áp dụng công thức hê-rông với $p = \frac{21 + 17 + 10}{2} = 24$.

$$\text{Ta có } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{24 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 14} = 84.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 34. Cho tam giác ABC có $b = 5, c = 7, \tan A = \frac{3}{4}$. Diện tích tam giác ABC là

A. 24.

B. 28.

C. $\frac{21}{2}$.

D. 21.

Lời giải.

$$\text{Do } \tan A = \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow \hat{A} < 90^\circ \Rightarrow \sin A > 0.$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{\sin^2 A} = \cot^2 A + 1 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 1 = \frac{25}{9} \Rightarrow \sin A = \frac{3}{5}.$$

$$\text{Diện tích tam giác } S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 7 \cdot \frac{3}{5} = \frac{21}{2}.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 35. Điều kiện xác định của bất phương trình $\frac{\sqrt{3x+21}}{x-4} \leq |7-2x|$ là

A. $x \geq -7$.

B. $-7 \leq x \leq \frac{7}{2}$.

C. $x > 4$.

D. $\begin{cases} x \geq -7 \\ x \neq 4 \end{cases}$.

Lời giải.

Bất phương trình xác định khi

$$\begin{cases} 3x + 21 \geq 0 \\ x - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -7 \\ x \neq 4 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 36. Tam giác ABC có độ dài ba đường trung tuyến thỏa mãn $5m_a^2 = m_b^2 + m_c^2$. Khi đó ABC là tam giác

A. Vuông.

B. Cân.

C. Đều.

D. Vuông cân.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính độ dài đường trung tuyến, ta có

$$5 \cdot \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4} + \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow 10(b^2 + c^2) - 5a^2 = 4a^2 + c^2 + b^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2.$$

Do đó tam giác ABC vuông tại A .

Chọn đáp án **A** □

Câu 37. Cho hai điểm $A(-1; 2)$ và $B(5; 4)$. Phương trình tổng quát của đường thẳng trung trực của đoạn AB là

A. $x - 3y + 7 = 0$.

B. $3x - y - 3 = 0$.

C. $3x + y - 9 = 0$.

D. $3x + y + 9 = 0$.

Lời giải.

Đường trung trực của đoạn thẳng AB thỏa mãn $\begin{cases} \text{đi qua } I(2; 3) \text{ là trung điểm } AB \\ \text{nhận } \overrightarrow{AB} = (6; 2) \text{ là véc-tơ pháp tuyến} \end{cases}$.

$$\text{Phương trình đường thẳng cần tìm } 6x + 2y - 18 = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 9 = 0.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

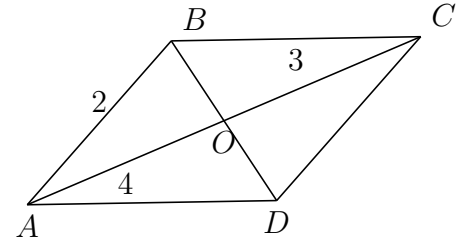
Câu 38. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 2, BC = 3, AC = 4$. Tính độ dài BD .

- A. $BD = 10$. B. $BD = 20$. C. $BD = \sqrt{10}$. D. $BD = 2\sqrt{10}$.

Lời giải.

Gọi O là giao điểm của AC và BD .

$$BD = 2BO \text{ và } BO^2 = \frac{2(AB^2 + BC^2) - AC^2}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \Rightarrow BO = \frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow BD = \sqrt{10}.$$



Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 39. Cho đường thẳng Δ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (-1; 4)$. Véc-tơ nào trong các véc-tơ sau là véc-tơ pháp tuyến của Δ ?

- A. $\vec{n} = (4; 1)$. B. $\vec{n} = (-2; 8)$. C. $\vec{n} = (1; 4)$. D. $\vec{n} = (4; -1)$.

Lời giải.

Véc-tơ $\vec{n}$ là véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng Δ nếu $\vec{n} \neq \vec{0}$ và có giá vuông góc với đường thẳng Δ .
 $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{n} = (4; 1)$ là 1 véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng Δ .

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 40. Tìm phương trình tham số của đường thẳng $x - y + 3 = 0$.

- A. $\begin{cases} x = t \\ y = 3 + t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 3 \\ y = t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \end{cases}$.

Lời giải.

Đặt $x = t \Rightarrow y = x + 3 = t + 3$.

Vậy phương trình tham số của đường thẳng $x - y + 3 = 0$ là $\begin{cases} x = t \\ y = 3 + t \end{cases}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 41. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{(2 - \sqrt{5})x^2 + (15 - 7\sqrt{5})x + 25 - 10\sqrt{5}}$ là

- A. $\mathbb{R}$. B. $[-5; \sqrt{5}]$. C. $[-5; 1]$. D. $(-\infty; 1)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $(2 - \sqrt{5})x^2 + (15 - 7\sqrt{5})x + 25 - 10\sqrt{5} \geq 0$.

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{15 - 7\sqrt{5}}{2 - \sqrt{5}}x + \frac{25 - 10\sqrt{5}}{2 - \sqrt{5}} \leq 0$$

$$x^2 + (5 - \sqrt{5})x - 5\sqrt{5} \leq 0 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq \sqrt{5}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 42. Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = -1 + 3t \end{cases}$. Tìm tọa độ giao điểm A của d và trục tung.

- A. $A(0; 5)$. B. $A(5; 0)$. C. $A\left(\frac{10}{3}; 0\right)$. D. $A(0; -1)$.

Lời giải.

Giao điểm $A(x, y)$ của d với trục tung là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = -1 + 3t \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ x = 0 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow A(0; 5).$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 43. Tìm m để hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \leq 0 \\ 2x - m - 1 \geq 0 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

- A. $m > 7$. B. $m = -3$. C. $m = 7$. D. $m < 7$.

Lời giải.

Hệ bất phương trình tương đương với

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 4 \\ x \geq \frac{m+1}{2} \end{cases}. \text{ Để hệ có nghiệm duy nhất } \Rightarrow \frac{m+1}{2} = 4 \Leftrightarrow m = 7.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 44. Tìm tham số m để hai đường thẳng $d_1 : 4x - my + 4 - m = 0$; $d_2 : (2m + 6)x + y - 2m - 1 = 0$ trùng nhau.

- A. Không tồn tại m . B. $m \neq -1$. C. $m = -1$. D. $m = -2$.

Lời giải.

Để d_1, d_2 trùng nhau thì điều kiện cần và đủ là

$$\frac{4}{2m+6} = \frac{-m}{1} = \frac{4-m}{-2m-1} \Rightarrow \text{Phương trình vô nghiệm.}$$

Vậy không tồn tại giá trị của m để hai đường thẳng d_1, d_2 trùng nhau.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 45. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $M(2; 0)$ và $N(0; 3)$.

- A. $3x + 2y = 0$. B. $3x - 2y = 0$. C. $3x + 2y - 6 = 0$. D. $3x - 2y - 6 = 0$.

Lời giải.

Áp dụng phương trình mặt phẳng đoạn chắn, phương trình đường thẳng MN là $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \Leftrightarrow 3x + 2y - 6 = 0$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 46. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

- A. Véc-tơ chỉ phương và véc-tơ pháp tuyến của một đường thẳng thì vuông góc với nhau.
B. Đường thẳng hoàn toàn xác định khi biết một điểm và một véc-tơ chỉ phương của nó.
C. Các véc-tơ pháp tuyến của một đường thẳng luôn cùng hướng với nhau.
D. Đường thẳng hoàn toàn xác định khi biết hai điểm phân biệt nó đi qua.

Lời giải.

Các véc-tơ pháp tuyến của một đường thẳng cùng phương với nhau, không nhất thiết cùng hướng.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 47. Cho hai điểm $A(-1; 2), B(3; 1)$ và đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \end{cases}$. Tìm tọa độ điểm M thuộc

Δ sao cho tam giác ABM cân tại M .

A. $M(4; 5)$.

B. $M\left(\frac{7}{6}; \frac{13}{6}\right)$.

C. $M(0; -1)$.

D. $M(1; 0)$.

Lời giải.Tam giác ABM cân tại $M \Leftrightarrow M$ nằm trên đường trung trực d của đoạn thẳng AB .Phương trình đường thẳng d đi qua $I\left(1; \frac{3}{2}\right)$ là trung điểm của AB và nhận $\overrightarrow{AB} = (4; -1)$ là véc-tơ

pháp tuyến $\Rightarrow d: 4x - y - \frac{5}{2} = 0$.

Xét phương trình $4(1+t) - (2+t) - \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{6}$.

Vậy $M\left(\frac{7}{6}; \frac{13}{6}\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.Chọn đáp án **(B)** □**Câu 48.** Tìm tham số m để biểu thức $x^2 - (m+2)x + 8m + 1$ nhận giá trị dương với mọi số thực x .

A. $0 < m < 28$.

B. $\begin{cases} m < 0 \\ m > 28 \end{cases}$.

C. $m < 28$.

D. $0 \leq m \leq 28$.

Lời giải.Để biểu thức nhận giá trị dương với mọi số thực x điều kiện cần và đủ là

$$\Delta = (m+2)^2 - 4(8m+1) < 0 \Leftrightarrow m^2 - 28m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 28.$$

Chọn đáp án **(A)** □**Câu 49.** Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 + (x^2 - x - 3)^2 + \frac{4}{(x+1)^2} > x^2$ là

A. $\mathbb{R}$.

B. $(1; +\infty)$.

C. $(-\infty; -1)$.

D. $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Lời giải.Điều kiện: $x \neq -1$.

$$x^2 + (x^2 - x - 3)^2 + \frac{4}{(x+1)^2} > x^2 \Leftrightarrow (x^2 - x - 3)^2 + \frac{4}{(x+1)^2} > 0.$$

Vì $(x^2 - x - 3)^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ và $\frac{4}{(x+1)^2} > 0 \forall x \neq -1$.

Do đó: $(x^2 - x - 3)^2 + \frac{4}{(x+1)^2} > 0$ nghiệm đúng với mọi $x \neq -1$.

Chọn đáp án **(D)** □**Câu 50.** Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 60^\circ$, $AC = 10$, $AB = 6$. Tính độ dài cạnh BC .

A. $BC = 76$.

B. $BC = 6\sqrt{2}$.

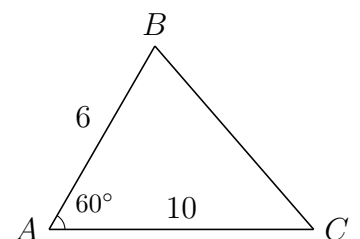
C. $BC = 14$.

D. $BC = 2\sqrt{19}$.

Lời giải.

Áp dụng định lí cosin ta có $BC^2 = a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} = AC^2 + AB^2 - 2AB \cdot AC \cos 60^\circ = 100 + 36 - 2 \cdot 60 \cdot \frac{1}{2} = 76$.

$$\Leftrightarrow BC = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

ĐÁP ÁN

1. C	2. B	3. A	4. B	5. A	6. A	7. A	8. D	9. C	10. B
11. B	12. C	13. B	14. C	15. D	16. C	17. B	18. A	19. C	20. D
21. A	22. A	23. B	24. D	25. D	26. B	27. D	28. B	29. D	30. C
31. B	32. D	33. C	34. C	35. D	36. A	37. C	38. C	39. A	40. A
41. B	42. A	43. C	44. A	45. C	46. C	47. B	48. A	49. D	50. D

Câu 1. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{\frac{x^2 - 4x + 4}{1 - 2x}}$.

A. $D = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$.

B. $D = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \{2\}$.

C. $D = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \{2\}$.

D. $D = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$.

Lời giải.

Nhận xét: $x^2 - 4x + 4 \geq 0$. Do đó hàm số xác định khi và chỉ khi $x^2 - 4x + 4 = 0$ hoặc $1 - 2x > 0$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 2. Tập nghiệm của bất phương trình $(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2x + 4) \leq 15$ có dạng $S = [a; b]$ với a, b là các số thực. Tính $P = a + b$.

A. $P = -2$.

B. $P = -1$.

C. $P = 1$.

D. $P = 2$.

Lời giải.

Đặt $t = x^2 + 2x + 2$ thì được bất phương trình $t^2 + 2t - 15 \leq 0 \Leftrightarrow -5 \leq t \leq 3$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $(2m - 7)x + 2 \leq 2mx - 4m$ có tập nghiệm là tập con của $[-2; +\infty)$.

A. $m \geq -4$.

B. $m \geq 4$.

C. $m \leq 4$.

D. $m \leq -4$.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow x \geq \frac{4m + 2}{7}$.

Do đó yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow \frac{4m + 2}{7} \geq -2 \Leftrightarrow m \geq -4$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 4. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. Bất phương trình bậc nhất một ẩn luôn có nghiệm.

B. Bất phương trình $ax + b < 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi $a = 0$ và $b < 0$.

C. Bất phương trình $ax + b > 0$ vô nghiệm khi $a = 0$ và $b \leq 0$.

D. Bất phương trình $ax + b \leq 0$ vô nghiệm khi $a = 0$ và $b \geq 0$.

Lời giải.

Trong trường hợp $a = b = 0$ thì bất phương trình $ax + b \geq 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 5. Với $m > -4$ thì tập nghiệm của bất phương trình $(x + 2m)(8 - x) > 0$ là

A. $(-\infty; 8) \cup (-2m; +\infty)$.

B. $(-2m; 8)$.

C. $(-\infty; -2m) \cup (8; +\infty)$.

D. $(8; -2m)$.

Lời giải.

Với $m > -4$ thì $-2m < 8$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 + 5x + 4 \leq 0 \\ (m-5)x - 4 \geq 0 \end{cases}$ có nghiệm.

A. $m < 4$. B. $m < 5$. C. $m \leq 4$. D. $m \geq 4$.

Lời giải.

BPT (1) $\Leftrightarrow -4 \leq m \leq -1$.

- Với $m > 5$ thì BPT (2) $\Leftrightarrow x \geq \frac{4}{m-5}$. Lúc đó hệ có nghiệm $\Leftrightarrow \frac{4}{m-5} \leq -1 \Leftrightarrow m \leq 1$ (loại).

- Với $m = 5$ thì BPT (2) vô nghiệm nên hệ vô nghiệm (loại).

- Với $m < 5$ thì BPT (2) $\Leftrightarrow x \leq \frac{4}{m-5}$. Lúc đó hệ có nghiệm $\Leftrightarrow \frac{4}{m-5} \geq -4 \Leftrightarrow m \leq 4$ (thỏa).

Chọn đáp án **C** □

Câu 7. Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $|x-1| + |2x-4| = 6$.

A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{10}{3}$. C. $\frac{37}{3}$. D. $\frac{28}{3}$.

Lời giải.

Chia khoảng, tìm được tập nghiệm $S = \left\{-\frac{1}{3}; \frac{11}{3}\right\}$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - x - 12 \leq 0 \\ x + 1 > 2x + m \end{cases}$ vô nghiệm.

A. $m \neq 4$. B. $m \geq 4$. C. $m > 4$. D. $m \geq -3$.

Lời giải.

Hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 4 \\ x < 1 - m \end{cases}$. Hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow 1 - m \leq -3 \Leftrightarrow m \geq 4$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 9. Xác định m để bất phương trình $\frac{x^2 + mx - 1}{2x^2 - 2x + 3} < 1$ đúng với mọi số thực x .

A. $m \in (-2; 2)$. B. $m \in (-\infty; -6) \cup (2; +\infty)$.
C. $m \in (-6; 2)$. D. $m \in (-4; 0)$.

Lời giải.

Bất phương trình $\Leftrightarrow \frac{-x^2 + (m+2)x - 4}{2x^2 - 2x + 3} < 0 \Leftrightarrow -x^2 + (m+2)x - 4 < 0$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 + 4m - 12 < 0$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 10. Giá trị của m để bất phương trình $(m-1)x^2 - 2(m+1)x + 3(m-2) > 0$ vô nghiệm là

A. $m \geq 5$. B. $m \leq \frac{1}{2}$. C. $m < \frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{2} \leq m < 1$.

Lời giải.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(x) = (m-1)x^2 - 2(m+1)x + 3(m-2) \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

- Xét $m = 1$ thì $f(x) = -4x - 3 \leq 0$ không đúng với mọi x (loại).

- Xét $m \neq 1$ thì $f(x) \leq 0$ với mọi $x \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ -2m^2 + 11m - 5 \leq 0 \end{cases}$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 11. Với những giá trị nào của m thì đa thức $f(x) = mx^2 - 12mx - 5$ luôn âm với mọi $x \in \mathbb{R}$?

- A. $m \in \left(-\frac{5}{36}; 0\right)$.
B. $m \in \left[-\frac{5}{36}; 0\right]$.
C. $m \in \left(-\infty; -\frac{5}{36}\right) \cup (0; +\infty)$.
D. $m \in \left(-\frac{5}{36}; 0\right]$.

Lời giải.

- Xét $m = 0$ thấy thỏa mãn.

- Xét $m \neq 0$, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 36m^2 + 5m < 0 \end{cases}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 12. Xác định m để phương trình $x^3 + (2m + 5)x^2 + (2m + 6)x - 4m - 12 = 0$ có ba nghiệm phân biệt lớn hơn -1 .

- A. $m \in \left(-\frac{7}{2}; -2\right) \setminus \left\{-\frac{19}{6}\right\}$.
B. $m \in (-3; 1) \setminus \left\{-\frac{16}{9}\right\}$.
C. $m \in (-\infty; -3) \setminus \left\{-\frac{19}{6}\right\}$.
D. $m \in \left(-\frac{7}{2}; -3\right) \setminus \left\{-\frac{19}{6}\right\}$.

Lời giải.

- Phương trình (1) $\Leftrightarrow (x - 1)[x^2 + 2(m + 3)x + 4m + 12] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 + 2(m + 3)x + 4m + 12 = 0 \end{cases} \quad (2)$.

- Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt lớn hơn -1 khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 1 và lớn hơn -1 . Do đó ta có các điều kiện:

$$\begin{cases} f(1) \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ (x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0 \\ (x_1 + 1) + (x_2 + 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6m + 19 \neq 0 \\ m^2 + 2m - 3 > 0 \\ 4m + 12 - 2(m + 3) + 1 > 0 \\ -2(m + 3) + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6m + 19 \neq 0 \\ m^2 + 2m - 3 > 0 \\ 2m + 7 > 0 \\ -2m - 4 > 0 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 13. Tập nghiệm của phương trình $|x^2 - 7x + 12| = 7x - x^2 - 12$ là

- A. $(3; 4)$.
B. $\{3; 4\}$.
C. $[3; 4]$.
D. $(-\infty; 3] \cup [4; +\infty)$.

Lời giải.

Bất phương trình dạng $|A| = -A$ tương đương với $A \leq 0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $x^2 - 7x + 12 \leq 0 \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 4$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 14. Tập nghiệm của bất phương trình $(3 - 2\sqrt{2})x^2 - 2(3\sqrt{2} - 4)x + 6(2\sqrt{2} - 3) \leq 0$ là

- A. $[-\sqrt{3}; 2\sqrt{3}]$.
B. $(-\infty; -\sqrt{2}] \cup [3\sqrt{2}; +\infty)$.
C. $(-\infty; -\sqrt{3}] \cup [2\sqrt{3}; +\infty)$.
D. $[-\sqrt{2}; 3\sqrt{2}]$.

Lời giải.

- Câu này nên bấm máy tính (một số máy để được kết quả dạng căn).

- Cũng có thể đoán rằng nghiệm của bất phương trình dạng $a \leq x \leq b$ kết hợp với Vi-ét để thử xem cặp nào thỏa mãn.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 15. Hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 7x + 6 > 0 \\ |x^2 + 2x - 1| \leq 2 \end{cases}$ có tập nghiệm là

- A. $[-3; 1)$. B. $[-3; 1) \cup (6; +\infty)$. C. $[-3; 1]$. D. $[-3; 1) \setminus \{-1\}$.

Lời giải.

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 6 \vee x < 1 \\ -3 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x < 1.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 16. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 2(m-1)x^2 + 2m - 1 = 0$ vô nghiệm.

- A. $\frac{1}{2} < m < 2 + \sqrt{2}$. B. $2 - \sqrt{2} < m < 2 + \sqrt{2}$.
C. $-1 + \sqrt{2} < m < 2 + \sqrt{2}$. D. $2 - \sqrt{2} \leq m < 2 + \sqrt{2}$.

Lời giải.

- Đặt $t = x^2 \geq 0$ ta được phương trình $f(t) = t^2 - 2(m-1)t + 2m - 1 = 0$.

- Phương trình ban đầu vô nghiệm khi và chỉ khi phương trình $f(t) = 0$ vô nghiệm hoặc có hai nghiệm cùng âm (kể cả trường hợp nghiệm kép âm).

$$\text{- Vậy ta có các điều kiện: } \begin{cases} \Delta' < 0 \\ \Delta' \geq 0 \\ S > 0 \\ P \geq 0 \end{cases}.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 17. Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{2x^2 - 14x + 20} > x - 3$ là

- A. $(-\infty; 1]$. B. $(-\infty; 2] \cup [6; +\infty)$.
C. $(4 + \sqrt{5}; +\infty)$. D. $(-\infty; 2] \cup (4 + \sqrt{5}; +\infty)$.

Lời giải.

$$\text{- Sử dụng biến đổi tương đương } \sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases}.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 18. Tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - 12x - 13$ nhận giá trị không âm khi và chỉ khi

- A. $x \in \mathbb{R} \setminus [-1; 13]$. B. $x \in [-1; 13]$.
C. $x \in (-\infty; -1] \cup [13; +\infty)$. D. $x \in (-1; 13)$.

Lời giải.

- Sử dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 19. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{1-7x}{2x-7} \leq -2$ là

- A. $\left[-\frac{13}{3}; +\infty\right) \setminus \left\{\frac{7}{2}\right\}$. B. $\left(-\infty; -\frac{13}{3}\right]$.

C. $\mathbb{R} \setminus \left(-\frac{13}{3}; \frac{7}{2}\right]$.

D. $\left(-\infty; -\frac{13}{3}\right] \cup \left[\frac{7}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải.

- Chuyển vế và xét dấu vế trái.

Chọn đáp án **C** □

Câu 20. Xác định m để bất phương trình $m^2x + m < 5mx + 4$ có nghiệm.

A. $m \neq 5$.

B. $m \neq 0$.

C. $m \notin \{0; 5\}$.

D. $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

- Bất phương trình $\Leftrightarrow (m^2 - 5m)x < 4 - m$.

- Bất phương trình dạng $ax < b$ vô nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} a = 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$, tức là $\begin{cases} m^2 - 5m = 0 \\ 4 - m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 5$.

- Vậy bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m \neq 5$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 21. Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 < 4x + 6 + \sqrt{2x^2 - 8x + 12}$ là

A. $(-\infty; -2) \cup (6; +\infty)$.

B. $(-\sqrt{5}; 6)$.

C. $(-\infty; -\sqrt{5}) \cup (6; +\infty)$.

D. $(-2; 6)$.

Lời giải.

- Bất phương trình $\Leftrightarrow 2x^2 - 8x - 12 - 2\sqrt{2x^2 - 8x + 12} < 0$.

- Đặt $t = \sqrt{2x^2 - 8x + 12} \geq 0$ thì được bất phương trình $t^2 - 2t - 24 \leq 0$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 22. Cho $f(x) = 4 - 2x$. Khẳng định nào sau đây đúng với mọi m khác 0?

A. $f(2 + m^3) > 0$.

B. $f(2 - m^2) > 0$.

C. $f(2 + m^2) > 0$.

D. $f(2 - m^3) > 0$.

Lời giải.

- Thử từng mệnh đề.

Chọn đáp án **B** □

Câu 23. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x^2 + 2x - 8}{|x + 1|} < 0$ là

A. $(-4; -1) \cup (-1; 2)$.

B. $(-4; 2)$.

C. $\mathbb{R} \setminus (-4; 2)$.

D. $(-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$.

Lời giải.

- Bất phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} |x + 1| \neq 0 \\ x^2 + 2x - 8 < 0 \end{cases}$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 24. Cho $f(x) = \frac{(x + 1)(2 - x)}{2x - 6}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [2; 3]$.

B. $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 2) \cup (3; +\infty)$.

C. $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1)$.

D. $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (3; +\infty)$.

Lời giải.

- Lập bảng xét dấu $f(x)$ rồi xét từng mệnh đề.

Chọn đáp án **B** □

Câu 25. Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{x^2 + 2x + 2} \leq 2x + 3$ là

A. $\left(-\infty; -\frac{7}{3}\right] \cup [-1; +\infty)$.

B. $\left[-\frac{7}{3}; -1\right]$.

C. $[-1; +\infty)$.

D. $\left(-\infty; -\frac{7}{3}\right] \cup \left[-\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải.

- Sử dụng biến đổi tương đương $\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$.

Chọn đáp án 

□

ĐÁP ÁN

1. C	2. A	3. A	4. D	5. B	6. C	7. B	8. B	9. C	10. B
11. D	12. D	13. C	14. D	15. A	16. A	17. D	18. C	19. C	20. A
21. D	22. B	23. A	24. B	25. C					

Câu 1. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$.

B. $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cot \beta$.

C. $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$.

D. $\tan(\pi + \alpha) = -\tan \alpha$.

Lời giải.

Ta có $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 2. Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x-1}{(x-2)(x^2-5x+4)} \geq 0$ là

A. $(-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$.

B. $(-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$.

C. $(-\infty; 2) \cup (4; +\infty) \setminus \{1\}$.

D. $[2; 4]$.

Lời giải.

Đặt $VT = \frac{x-1}{(x-2)(x^2-5x+4)}$

• $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

• $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$.

• $x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow x=1$ và $x=4$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	1	2	4	$+\infty$	
$x - 1$	-	0	+	+	+	
$x - 2$	-	-	0	+	+	
$x^2 - 5x + 4$	+	0	-	-	0	+
VT	+	+	-	+		

Suy ra, tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup (4; +\infty)$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 3. Trong các công thức sau, công thức nào **đúng**?

A. $\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$.

B. $\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$.

C. $\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$.

D. $\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$.

Lời giải.

Ta có, $\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 4. Tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $A(1; 1)$ lên đường thẳng $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2 + t \end{cases}$ là

A. $(3; -1)$.

B. $(2; -2)$.

C. $(4; 0)$.

D. $(1; -3)$.

Lời giải.

Gọi d là đường thẳng qua $A(1; 1)$ và vuông góc với đường thẳng đã cho thì $d : x + y - 2 = 0$.
 Khi đó, tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng đã cho thỏa mãn

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x = 2 + t \\ y = -2 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 5. Cho $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Khi đó, giá trị của $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\sqrt{6} - \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ thì $\cos \alpha > 0$ nên $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Ta có $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \alpha \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \cos \alpha \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 6. Cho đường tròn $(C) : (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$ và điểm $A(1; 3)$. Phương trình các tiếp tuyến kẻ từ A của đường tròn (C) đã cho là

A. $x - 1 = 0$ và $3x + 4y - 15 = 0$. B. $x - y + 2 = 0$ và $3x + 4y - 15 = 0$.
 C. $x - 1 = 0$ và $3x - 4y + 9 = 0$. D. $x - 2y + 5 = 0$ và $3x + 4y - 15 = 0$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(3; -1)$ và bán kính $R = 2$.

Gọi d là đường thẳng qua $A(1; 3)$ thì $d : ax + by - a - 3b = 0$ ($a^2 + b^2 > 0$).

Đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (C) khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} d(I; d) = R &\Leftrightarrow \frac{|2a - 4b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2 \\ &\Leftrightarrow |a - 2b| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ &\Leftrightarrow 3b^2 - 4ab = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 3b - 4a = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

- Trường hợp 1: $b = 0$ thì $a \neq 0$ nên $d : x - 1 = 0$.
- Trường hợp 2: $3b - 4a = 0$ thì chọn $a = 3, b = 4$ nên $d : 3x + 4y - 15 = 0$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 7. Bất phương trình $x^2 - 2(m - 1)x + 4m + 8 \leq 0$ có tập nghiệm $T = \mathbb{R}$ khi và chỉ khi

A. $m \in (-1; 7)$. B. $m \in [-1; 7]$. C. $m \in (-2; 7)$. D. $m \in (-1; +\infty)$.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$\Delta' = (m-1)^2 - 4m - 8 \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m - 7 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 7.$$

Chọn đáp án (B)

□

Câu 8. Tất cả các nghiệm của bất phương trình $|2x-1| \leq x+2$ là

- A. $-\frac{1}{3} \leq x \leq 3$. B. $-\frac{1}{3} \leq x \leq 2$. C. $-\frac{1}{3} \leq x < 3$. D. $\frac{1}{3} \leq x \leq 3$.

Lời giải.

Xét (*): $|2x-1| \leq x+2$

- Với $x \leq \frac{1}{2}$ thì (*) trở thành $-2x+1 \leq x+2 \Leftrightarrow 3x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$.

Trường hợp này ta nhận $-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}$.

- Với $x > \frac{1}{2}$ thì (*) trở thành $2x-1 \leq x+2 \Leftrightarrow x \leq 3$.

Trường hợp này ta nhận $\frac{1}{2} < x \leq 3$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình (*) là $-\frac{1}{3} \leq x \leq 3$.

Chọn đáp án (A)

□

Câu 9. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau đây

- A. $\sin(-\alpha) = \sin \alpha$. B. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha$.
C. $\cos(\pi - \alpha) = \cos \alpha$. D. $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$.

Lời giải.

Ta có, $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$.

Chọn đáp án (D)

□

Câu 10. Đường thẳng d đi qua điểm $A(1;1)$ và nhận $\vec{n} = (2; -3)$ làm véc-tơ pháp tuyến có phương trình tổng quát là

- A. $2x - 3y + 1 = 0$. B. $3x + 2y + 5 = 0$. C. $3x + 2y - 5 = 0$. D. $2x - 3y - 1 = 0$.

Lời giải.

Ta có, $d: 2(x-1) - 3(y-1) = 0 \Leftrightarrow d: 2x - 3y + 1 = 0$.

Chọn đáp án (A)

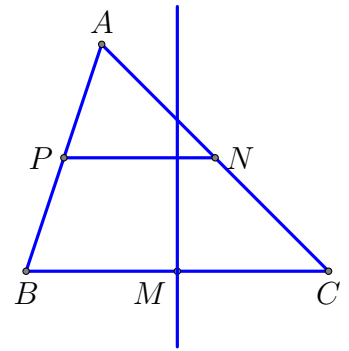
□

Câu 11. Cho tam giác ABC , biết $M(2;2)$, $N(1;3)$ và $P(3;0)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh BC , AC , AB . Đường trung trực của đoạn thẳng BC có phương trình

- A. $x - 2y + 5 = 0$. B. $3x + 2y - 10 = 0$. C. $x - y - 3 = 0$. D. $2x - 3y + 2 = 0$.

Lời giải.

Đường trung trực của BC đi qua điểm $M(2; 2)$ và vuông góc với NP nên có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{PN} = (-2; 3)$ nên có dạng $-2(x - 2) + 3(y - 2) = 0 \Leftrightarrow -2x + 3y - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y + 2 = 0$.



Chọn đáp án **(D)** □

Câu 12. Cho $\sin \alpha = \frac{3}{4}$. Khi đó, $\cos 2\alpha$ bằng

- A. $\frac{1}{8}$. B. $\frac{\sqrt{7}}{4}$. C. $-\frac{\sqrt{7}}{4}$. D. $-\frac{1}{8}$.

Lời giải.

Ta có, $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{1}{8}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 13. Bất phương trình $(x^2 - x - 6)\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0$ có tập nghiệm là

- A. $(-\infty; -2] \cup [3; +\infty) \cup \{-1; 2\}$. B. $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$.
C. $[-2; 3]$. D. $(-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} (x^2 - x - 6)\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ x^2 - x - 6 \geq 0 \\ x^2 - x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ hoặc } x = 2 \\ x \leq -2 \text{ hoặc } x \geq 3 \\ x \leq -1 \text{ hoặc } x \geq 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ hoặc } x = 2 \\ x \leq -2 \text{ hoặc } x \geq 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 14. Cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 = 25$. Đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (C) tại điểm $A(3; 4)$ có phương trình là

- A. $4x + 3y - 24 = 0$. B. $3x + 4y + 25 = 0$. C. $4x - 3y = 0$. D. $3x + 4y - 25 = 0$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(0; 0)$ và bán kính $R = 5$.

Ta có đường thẳng d đi qua $A(3; 4)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{IA} = (3; 4)$ nên có dạng $d : 3(x - 3) + 4(y - 4) = 0 \Leftrightarrow d : 3x + 4y - 25 = 0$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 15. Phương trình $x^2 + 2(m + 1)x + 9m - 5 = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

- A. $m \in (1; 6)$. B. $m \in (-\infty; 1)$.
C. $m \in (-\infty; 1) \cup (6; +\infty)$. D. $m \in (6; \infty)$.

Lời giải.

Phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta' = (m+1)^2 - (9m-5) < 0 \Leftrightarrow m^2 - 7m + 6 < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 6.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 16. Cho $\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ($-\frac{\pi}{2} < x < 0$) thì $\sin x$ có giá trị bằng

- A. $\frac{3}{\sqrt{5}}$. B. $-\frac{3}{\sqrt{5}}$. C. $-\frac{1}{\sqrt{5}}$. D. $\frac{\pi}{4}$.

Lời giải.

Với $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ thì $\sin x < 0$ do đó $\sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{4}{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 17. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau

- A. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha < 0 \\ \cos \alpha > 0 \end{cases}$. B. $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha < 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases}$.
C. $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases}$. D. $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 18. Cho $A = \frac{\sin 2a + \sin 5a - \sin 3a}{1 + \cos a - 2\sin^2 2a}$. Đơn giản biểu thức A ta được

- A. $A = 2 \cot a$. B. $A = 2 \tan a$. C. $A = 2 \sin a$. D. $A = 2 \cos a$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có, } A &= \frac{\sin 2a + (\sin 5a - \sin 3a)}{1 - 2\sin^2 2a + \cos a} = \frac{\sin 2a + 2\cos 4a \cdot \sin a}{\cos 4a + \cos a} \\ &= \frac{2\sin a \cdot \cos a + 2\cos 4a \cdot \sin a}{\cos 4a + \cos a} = \frac{2\sin a(\cos a + \cos 4a)}{\cos 4a + \cos a} = 2\sin a. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 19. Tập nghiệm của bất phương trình $(x+1)(x+4) < \sqrt{x^2+5x+28}$ là

- A. $[-2; 4)$. B. $(-\infty; 5)$. C. $(-9; 4)$. D. $(-\infty; 4]$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} (x+1)(x+4) < \sqrt{x^2+5x+28} &\Leftrightarrow x^2+5x+4 < 5\sqrt{x^2+5x+28} \\ &\Leftrightarrow (x^2+5x+28) - 5\sqrt{x^2+5x+28} - 24 < 0 \\ &\Leftrightarrow -3 < \sqrt{x^2+5x+28} < 8 \\ &\Leftrightarrow x^2+5x-36 < 0 \\ &\Leftrightarrow -9 < x < 4. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 20. Cho $\sin x = \frac{1}{2}$ và $90^\circ < x < 180^\circ$. Tính $\cot x$.

A. $\cot x = \sqrt{3}$.

B. $\cot x = -\sqrt{3}$.

C. $\cot x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

D. $\cot x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải.

Với $90^\circ < x < 180^\circ$ thì $\cos x < 0$ do đó $\cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra, $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = -\sqrt{3}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 21. Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy , cho $\triangle ABC$ cân tại A nội tiếp đường tròn (C) , đường kính AD . Điểm $E(2; 5)$ là điểm thuộc cạnh AB ; đường thẳng DE cắt đường tròn tại điểm thứ 2 là K . Biết phương trình đường thẳng BC và CK lần lượt là $x - y = 0$ và $3x - y + 4 = 0$. Khi đó, tọa độ các đỉnh A, B, C là

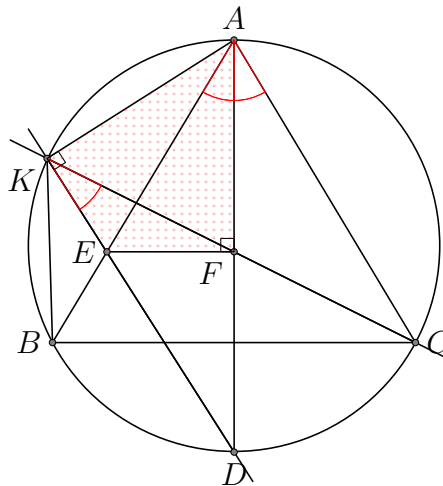
A. $A(-8; 10), B(4; 4), C(-2; -2)$.

B. $A(-8; 10), B(4; -4), C(-2; -2)$.

C. $A(-8; 10), B(4; 4), C(2; -2)$.

D. $A(-8; 10), B(4; 4), C(-2; 2)$.

Lời giải.



Ta có $C = CK \cap BC$ nên tọa độ điểm C thỏa hệ
$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 3x - y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow C(-2; -2).$$

Gọi $F = KC \cap AD$ thì ta có $\widehat{FKD} = \widehat{CAD} = \widehat{FAE}$

Suy ra tứ giác $AKEF$ nội tiếp được đường tròn.

Suy ra, $\widehat{AKE} + \widehat{AFE} = 180^\circ$ mà $\widehat{AKE} = 90^\circ$ nên $\widehat{AFE} = 90^\circ$.

Từ đó, ta có $EF \perp AD \Rightarrow EF \parallel BC$ nên $EF : x - y + 3 = 0$.

Ta có: $F = KC \cap EF$ nên $F\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

Đường thẳng AD đi qua điểm F và có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{EF} = \left(-\frac{5}{2}; -\frac{5}{2}\right)$ nên có phương trình $AD : x + y - 2 = 0$.

Gọi $I = AD \cap BC$ thì tọa độ điểm I thỏa hệ
$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow I(1; 1).$$

Ta có, I là trung điểm của BC nên $B(4; 4)$.

Đường thẳng AB đi qua hai điểm B và E nên có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 2)$.

Suy ra phương trình đường thẳng $AB : x + 2y - 12 = 0$.

Do $A = AB \cap AD$ nên tọa độ điểm A thỏa
$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x + 2y - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 \\ y = 10 \end{cases} \Rightarrow A(-8; 10).$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 22. Rút gọn biểu thức $A = (\tan x + \cot x)^2 - (\tan x - \cot x)^2$.

A. $A = 4$.

B. $A = 1$.

C. $A = 2$.

D. $A = 3$.

Lời giải.

Ta có $A = (\tan^2 x + \cot^2 x + 2 \tan x \cot x) - (\tan^2 x - 2 \tan x \cot x + \cot^2 x) = 4 \tan x \cot x = 4$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 23. Cho hai điểm $A(-3; 2)$ và $B(4; 3)$. Điểm M nằm trên trục Ox sao cho tam giác MAB vuông tại M . Tìm tọa độ của điểm M .

A. $M(-2; 0)$.

B. $M(-3; 0)$.

C. $M(-3; 0)$ hoặc $M(-2; 0)$.

D. $M(3; 0)$ hoặc $M(-2; 0)$.

Lời giải.

Điểm M nằm trên trục Ox nên tọa độ của M có dạng $M(m; 0)$, $m \in \mathbb{R}$.

Ta có $\overrightarrow{AM} = (m + 3; -2)$ và $\overrightarrow{BM} = (m - 4; -3)$. Hai véc-tơ này đều khác $\vec{0}$ nên $\triangle MAB$ vuông tại M khi và chỉ khi $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.

Điều này tương đương với $(m + 3) \cdot (m - 4) + 2 \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -2 \end{cases}$.

Vậy có hai điểm M thỏa đề bài là $M_1(3; 0)$ và $M_2(-2; 0)$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 24. Tập nghiệm của bất phương trình $(4 - x^2)\sqrt{2 - x} < 0$ là

A. $(-2; 2)$.

B. $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

C. $(-\infty; -2)$.

D. $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $(4 - x^2)\sqrt{2 - x} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x > 0 \\ 4 - x^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x < -2 \text{ hoặc } x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x < -2$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 25. Đơn giản biểu thức $G = (1 - \sin^2 x) \cdot \cot^2 x + 1 - \cot^2 x$ ta được

A. $G = \sin^2 x$.

B. $G = \cos^2 x$.

C. $G = \frac{1}{\cos x}$.

D. $G = \cos x$.

Lời giải.

Ta có $G = \cot^2 x - \sin^2 x \cdot \cot^2 x + 1 - \cot^2 x = -\cos^2 x + 1 = \sin^2 x$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 26. Phương trình $x^2 + 2(m + 1)x + 9m - 5 = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi

A. $m \in (-2; 6)$.

B. $m \in (-2; 1)$.

C. $m \in \left(\frac{5}{9}; 1\right) \cup (6; +\infty)$.

D. $m \in (6; +\infty)$.

Lời giải.

Phương trình $x^2 + 2(m+1)x + 9m - 5 = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 7m + 6 > 0 \\ -2(m+1) < 0 \\ 9m - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \vee m > 6 \\ m > -1 \\ m > \frac{5}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{9} < m < 1 \\ m > 6. \end{cases}$$

Chọn đáp án **C**

Câu 27. Đơn giản biểu thức $E = \cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ ($\sin x \neq 0$) ta được

A. $E = \sin x$. B. $E = \frac{1}{\cos x}$. C. $E = \frac{1}{\sin x}$. D. $E = \cos x$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } E &= \cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} \\ &= \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} = \frac{\cos x + 1}{\sin x(1 + \cos x)} = \frac{1}{\sin x}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **C**

Câu 28. Rút gọn biểu thức $A = \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cos x}{\cot x}$ ($\sin x \neq 0, \cos x \neq 0$).

A. $A = 1$. B. $A = 2$. C. $A = 3$. D. $A = 4$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cos x}{\cot x} = \frac{\tan^2 x(\cot^2 x - \cos^2 x)}{\tan^2 x \cot^2 x} + \frac{\sin x \cos x \tan x}{\cot x \tan x} \\ &= \frac{1 - \sin^2 x}{1} + \frac{\sin x \sin x}{1} = 1 - \sin^2 x + \sin^2 x = 1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **A**

Câu 29. Cho biết $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $\cot \alpha$.

A. $\cot \alpha = 2$. B. $\cot \alpha = \sqrt{2}$. C. $\cot \alpha = \frac{1}{4}$. D. $\cot \alpha = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \tan \alpha \cot \alpha = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cot \alpha = 1 \Rightarrow \cot \alpha = 2.$$

Chọn đáp án **A**

Câu 30. Tập nghiệm S của bất phương trình $\frac{4x^2 + 3}{2x + 3} - 2x \leq 0$ là

A. $S = \left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$. B. $S = \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.
C. $S = \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$. D. $S = \left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \frac{4x^2 + 3}{2x + 3} - 2x \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2 + 3 - 2x(2x + 3)}{2x + 3} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-6x + 3}{2x + 3} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (-6x + 3)(2x + 3) \leq 0 \\ 2x + 3 \neq 0 \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$(-6x+3)(2x+3)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu ta được $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 31. Cho tam giác ABC có điểm $A(1; 1)$. Đường trung trực của cạnh BC là $3x + y - 1 = 0$. Khi đó phương trình đường cao qua A là

- A. $3x + y + 4 = 0$. B. $3x + y - 4 = 0$. C. $x - 3y - 2 = 0$. D. $x - 3y + 2 = 0$.

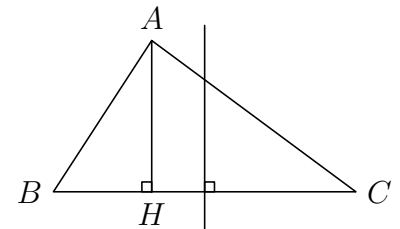
Lời giải.

Đường cao h_a và đường trung trực của cạnh BC cùng vuông góc với BC nên song song nhau hoặc trùng nhau. Suy ra phương trình của $h_a : 3x + y + c = 0$.

Do h_a đi qua $A(1; 1)$ nên $3 + 1 + c = 0 \Leftrightarrow c = -4$.

Vậy $h_a : 3x + y - 4 = 0$.

Chọn đáp án **(B)** □



Câu 32. Trong các mệnh đề sau đây mệnh đề nào **sai**?

- A. $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2 \sin x \cos x$. B. $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$.
C. $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$. D. $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \sin^2 x \cos^2 x$.

Lời giải.

Ta có $\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3$
 $= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 33. Đường thẳng đi qua $M(1; 2)$ tạo với hai tia Ox, Oy một tam giác cân có phương trình

- A. $x + y + 3 = 0$. B. $x + y - 3 = 0$. C. $x - y - 1 = 0$. D. $x - y + 1 = 0$.

Lời giải.

Đường thẳng tạo với 2 tia Ox, Oy một tam giác cân có phương trình $d : \frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$ ($a > 0$)

Do d đi qua $M(1; 2)$ nên $\frac{1}{a} + \frac{2}{a} = 1 \Leftrightarrow a = 3$

Vậy $d : \frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1 \Leftrightarrow x + y - 3 = 0$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 34. Cho hai đường thẳng $d_1 : 2x - 4y - 3 = 0, d_2 : 3x - y + 17 = 0$. Số đo góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 là

- A. $\frac{\pi}{2}$. B. $\frac{\pi}{4}$. C. $\frac{3\pi}{4}$. D. $-\frac{\pi}{4}$.

Lời giải.

$d_1 : 2x - 4y - 3 = 0, d_2 : 3x - y + 17 = 0$ có véc-tơ pháp tuyến lần lượt là

$$\vec{u}_1 = (2; -4), \vec{u}_2 = (3; -1)$$

Suy ra $\cos(\widehat{d_1, d_2}) = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{|2 \cdot 3 + (-4) \cdot (-1)|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{200}} \Rightarrow \widehat{d_1, d_2} = \frac{\pi}{4}$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 35. Tập nghiệm S của bất phương trình $\sqrt{(3-x)^2(3+x)} \geq 0$ là

A. $S = (-\infty; -3]$.

B. $S = [-3; +\infty)$.

C. $S = [-3; 3]$.

D. $S = \mathbb{R}$.

Lời giải.

$$\sqrt{(3-x)^2(3+x)} \geq 0 \Leftrightarrow (3-x)^2(3+x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (3-x)^2 = 0 \\ (3-x)^2 \neq 0 \\ 3+x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x \neq 3 \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -3.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 36. Cho tam giác ABC . Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác biết cạnh $BC : x + y - 2 = 0$, hai đường cao $BB' : x - 3 = 0, CC' : 2x - 3y + 6 = 0$.

A. $A(1; 2), B(3; -1), C(0; 2)$.

B. $A(1; 2), B(-3; 1), C(0; -2)$.

C. $A(1; -2), B(3; -1), C(0; 2)$.

D. $A(2; 1), B(3; -1), C(0; 2)$.

Lời giải.

Do $B = BC \cap BB'$ nên tọa độ của B thỏa mãn $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow B(3; -1).$

Do $C = BC \cap CC'$ nên tọa độ của C thỏa mãn

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x - 3y + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow C(0; 2).$$

Cạnh $AB \perp CC'$ và qua $B(3; -1)$ nên có phương trình $3x + 2y + c = 0$ thỏa mãn $3 \cdot 3 + 2(-1) + c = 0 \Leftrightarrow c = -7$, tức là $3x + 2y - 7 = 0$.

Cạnh $AC \perp BB'$ và qua $C(0; 2)$ nên có phương trình $y + c' = 0$ thỏa mãn $2 + c' = 0 \Leftrightarrow c' = -2$, tức là $y - 2 = 0$

Do $A = AB \cap AC$ nên tọa độ của A thỏa mãn $\begin{cases} 3x + 2y - 7 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow A(1; 2).$

Vậy $A(1; 2), B(3; -1), C(0; 2)$.Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 37. Cho elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ với hai tiêu điểm F_1, F_2 . Gọi M là một điểm thuộc (E) sao cho $MF_1 = MF_2$. Khi đó tọa độ của điểm M là

A. $M(0; 1)$ hoặc $M(0; -1)$.

B. $M(0; 2)$ hoặc $M(0; -2)$.

C. $M(4; 0)$ hoặc $M(-4; 0)$.

D. $M(0; 4)$ hoặc $M(0; -4)$.

Lời giải.

Với $M \in (E)$, ta có $MF_1 = MF_2 \Leftrightarrow M \in Oy \Leftrightarrow x_M = 0 \Leftrightarrow \frac{y_M^2}{4} = 1 \Leftrightarrow y_M = \pm 2$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 38. Đường thẳng nào sau đây song song và cách đường thẳng $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{1}$ một khoảng bằng $\sqrt{10}$?

A. $3x + y + 6 = 0$.

B. $x + 3y + 6 = 0$.

C. $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + t \end{cases}$.

D. $x - 3y + 6 = 0$.

Lời giải.

Đường thẳng $d : \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{1}$ đi qua $M(1; -1)$ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_d = (3; 1)$.

Đường thẳng Δ song song với d cần có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_\Delta = (3; 1)$ hoặc véc-tơ pháp tuyến

$\vec{n}_\Delta = (1; -3)$, tức là $\Delta : x - 3y + c = 0$.

Ta có $d(d, \Delta) = d(M, \Delta) = \frac{|1 - 3(-1) + c|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow |c + 4| = 10 \Leftrightarrow c = 6 \vee c = -14$

Vậy có 2 đường thẳng $\Delta \parallel d$ thỏa mãn $d(d, \Delta) = \sqrt{10}$ là $x - 3y + 6 = 0$ và $x - 3y - 14 = 0$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 39. Đường tròn tâm $I(2; 2)$ tiếp xúc với đường thẳng $4x + 3y - 4 = 0$ có phương trình

A. $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 2$.

B. $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2$.

C. $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

D. $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$.

Lời giải.

Đường tròn tâm $I(2; 2)$ tiếp xúc với đường thẳng $\Delta : 4x + 3y - 4 = 0$ có bán kính

$$R = d(I, \Delta) = \frac{|4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 - 4|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2$$

Nên đường tròn đó có phương trình $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 40. Cho ba đường thẳng $d_1 : x + y + 3 = 0$, $d_2 : x - y - 4 = 0$, $d_3 : x - 2y = 0$. Biết điểm M nằm trên đường thẳng d_3 sao cho khoảng cách từ điểm M đến d_1 bằng 2 lần khoảng cách từ điểm M đến d_2 . Khi đó tọa độ điểm M là

A. $M(-2; -1)$ hoặc $M(22; 11)$.

B. $M(-22; -11)$.

C. $M(-2; -1)$.

D. $M(2; 1)$ hoặc $M(-22; -11)$.

Lời giải.

Do $d_3 : x - 2y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t \\ y = t \end{cases}$ và $M \in d_3$ nên $M(2t; t)$.

$$\text{Ta có } d(M, d_1) = 2d(M, d_2) \Leftrightarrow \frac{|2t + t + 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2 \cdot \frac{|2t - t - 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} \Leftrightarrow |3t + 3| = 2|t - 4| \Leftrightarrow \begin{cases} t = -11 \\ t = 1 \end{cases}.$$

Vậy $M(2; 1)$ hoặc $M(-22; -11)$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 41. Bất phương trình $x^2 - 4x - m - 5 < 0$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $m \geq -9$.

B. $m > -9$.

C. $m < -9$.

D. $m \leq -9$.

Lời giải.

Xét $f(x) = x^2 - 4x - m - 5$ có biệt thức $\Delta' = (-2)^2 - (-m - 5) = m + 9$.

Nếu $\Delta' \leq 0$ thì $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên bất phương trình $f(x) < 0$ vô nghiệm.

Nếu $\Delta' > 0$ ta có $f(x) < 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$, trong đó x_1, x_2 là 2 nghiệm của $f(x) = 0$.

Như vậy yêu cầu của bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi $\Delta' = m + 9 > 0 \Leftrightarrow m > -9$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 42. Cho đường thẳng $d : 2x - y + 1 = 0$ và hai điểm $A(2; 4), B(0; 2)$. Đường tròn (C) đi qua hai điểm A, B và có tâm nằm trên đường thẳng d có phương trình

A. $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 34$.

B. $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 2$.

C. $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 34$.

D. $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 2$.

Lời giải.

Ta có $I \in d : 2x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow I(t; 1 + 2t)$.

$$IA = IB \Leftrightarrow (t-2)^2 + (2t-3)^2 = t^2 + (2t-1)^2 \Leftrightarrow -16t + 13 = -4t + 1 \Leftrightarrow t = 1.$$

Vậy đường tròn cần tìm có tâm $I(1; 3)$, bán kính $R = IA = \sqrt{2}$ nên có phương trình $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 2$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 43. Rút gọn biểu thức $P = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin 2x}$ ($\sin 2x \neq 0$) ta được

- A. $P = \frac{1}{2} \tan x$. B. $P = \frac{1}{2} \cot x$. C. $P = 2 \cot x$. D. $P = 2 \tan x$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } P = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin 2x} = \frac{\cos^2 x}{2 \sin x \cos x} = \frac{\cos x}{2 \sin x} = \frac{\cot x}{2}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 44. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho elip $(E) : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{5} = 1$ và hai điểm $A(-5; -1)$, $B(-1; 1)$. Điểm M bất kỳ thuộc (E) . Diện tích lớn nhất của tam giác MAB là

- A. 12. B. 9. C. $\frac{9\sqrt{2}}{2}$. D. $4\sqrt{2}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; 2) \Rightarrow \vec{n} = (1; -2)$ là một véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng AB .

Phương trình đường thẳng $AB : x - 2y + 3 = 0$.

Với điểm $M(a; b) \in (E) : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{5} = 1$ ta có $\frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{5} = 1$ và $d(M, AB) = \frac{|a - 2b + 3|}{\sqrt{5}}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovski ta có

$$|a - 2b| = \left| 4 \cdot \frac{a}{4} - 2\sqrt{5} \cdot \frac{b}{\sqrt{5}} \right| \leq \sqrt{4^2 + (-2\sqrt{5})^2} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{5}} = 6 \Rightarrow |a - 2b + 3| \leq |a - 2b| + 3 \leq 9$$

$$\text{Ta có } |a - 2b + 3| = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{5} = 1 \\ a - 2b \geq 0 \\ \frac{a}{16} = -\frac{b}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{64b^2}{25 \cdot 16} + \frac{b^2}{5} = 1 \\ -\frac{8b}{5} - 2b \geq 0 \\ a = -\frac{8b}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = \frac{25}{9} \\ b \leq 0 \\ a = -\frac{8b}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{8}{3} \\ b = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \max S_{\triangle MAB} = \frac{1}{2} AB \cdot \max d(M, AB) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{9}{\sqrt{5}} = 9.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 45. Cho đường tròn $(C) : (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$ và đường thẳng $d : 4x + 3y + 3 = 0$. Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B . Khi đó độ dài đoạn thẳng AB là

- A. $AB = 2$. B. $AB = \frac{2}{\sqrt{3}}$. C. $AB = \sqrt{3}$. D. $AB = 2\sqrt{3}$.

Lời giải.

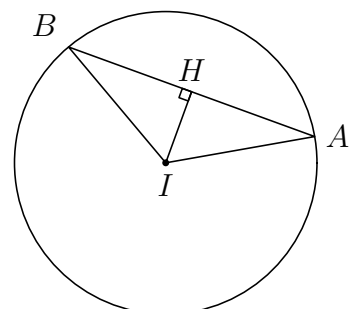
Đường tròn $(C) : (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$ có

tâm $I(-1; 2)$, bán kính $R = 2$.

Gọi H là trung điểm của dây cung AB thì $IH \perp AB$.

$$\text{Ta có } IH = d(I, d) = \frac{|4(-1) + 3 \cdot 2 + 3|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 1.$$

$$\text{Độ dài đoạn thẳng } AB \text{ là } AB = 2\sqrt{IA^2 - IH^2} = 2\sqrt{3}.$$



Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 46. Cho tam giác ABC có đường phân giác trong góc A nằm trên đường thẳng $x + y = 0$, đường tròn ngoại tiếp tam giác có phương trình $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$, điểm $M(3; -4)$ thuộc đường thẳng BC , điểm A có hoành độ âm, điểm B có tung độ nguyên âm. Khi đó tọa độ của điểm B là

- A. $B(7; -1)$. B. $B(6; -4)$.
C. $B(5; -5)$. D. $B(7; -1)$ hoặc $B(5; -5)$.

Lời giải.

Đặt $p_a : x + y = 0$ và $(C) : x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$ là đường tròn có tâm $I(2; -1)$.

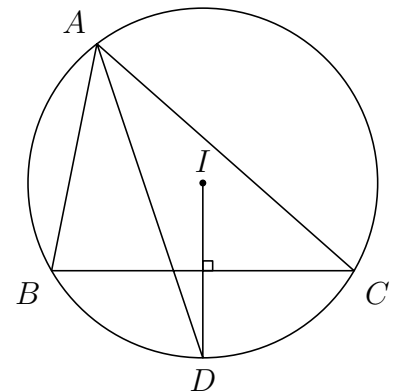
Gọi D là giao điểm thứ hai của phân giác p_a với đường tròn (C)

Do $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$ nên $\widehat{BD} = \widehat{CD} \Rightarrow BD = CD$.

Ngoài ra do $IB = IC$ nên $ID \perp BC$.

Do $A \in p_a$ và $A \in (C)$ nên tọa độ của điểm A là một nghiệm của

$$\text{hệ phương trình } \begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0 \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x^2 + x^2 - 4x - 2x - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -5 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Do $x_A < 0$ nên $A(-2; 2)$. Đặt $D(5; -5) \Rightarrow \overrightarrow{ID} = (3; -4)$.

Cạnh BC đi qua $M(3; -4)$ và vuông góc với ID nên có phương trình $3x - 4y - 25 = 0$.

Do $B \in BC$ và $B \in (C)$ nên tọa độ của B là một nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x - 4y - 25 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = 3x - 25 \\ 16x^2 + (3x - 25)^2 - 64x + 8(3x - 25) - 320 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4y = 3x - 25 \\ 25x^2 - 190x - 105 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = -\frac{29}{5} \end{cases} \Leftrightarrow B(7; -1) \vee B\left(\frac{3}{5}; -\frac{29}{5}\right)$$

Do $y_B \in \mathbb{Z}^-$ nên $B(7; -1)$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 47. Cho elip (E) có độ dài trục lớn bằng 8, độ dài trục bé bằng tiêu cự. Phương trình chính tắc của (E) là

- A. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$. B. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$. C. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{\frac{16}{5}} = 1$. D. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Lời giải.

Trục lớn bằng 8 $\Leftrightarrow 2a = 8 \Leftrightarrow a = 4$. Suy ra $b^2 + c^2 = a^2 = 16$

Trục bé bằng tiêu cự nên $b = c$. Từ đó $b^2 = \frac{a^2}{2} = 8$.

Vậy $(E) : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 48. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

A. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

B. $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (\sin \alpha \neq 0)$.

C. $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = -1 \quad (\sin \alpha \neq 0, \cos \alpha \neq 0)$.

D. $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (\cos \alpha \neq 0)$.

Lời giải.

Công thức $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = -1$ sai, sửa lại thành $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$ mới đúng.

Chọn đáp án **C** □

Câu 49. Bất phương trình $(m-1)x^2 - 2(m-1)x + m + 3 > 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi

A. $m \in (-2; 7)$.

B. $m \in (2; +\infty)$.

C. $m \in [1; +\infty)$.

D. $m \in (1; +\infty)$.

Lời giải.

Xét bất phương trình $(m-1)x^2 - 2(m-1)x + m + 3 > 0$ (*)

Khi $m = 1$ thì (*) trở thành $0x + 4 > 0$: bất phương trình này nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Xét $m \neq 1$. Khi đó (*) nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta' = [-(m-1)]^2 - (m-1)(m+3) < 0 \\ a = m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4m+4 < 0 \\ m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$$

Vậy $m \geq 1$ là tất cả các giá trị của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án **C** □

Câu 50. Cho tam giác ABC có $A(1; -1)$, $B(2; 0)$, $C(2; 4)$. Phương trình đường trung tuyến AM của tam giác ABC là

A. $3x - y - 4 = 0$.

B. $3x - y + 4 = 0$.

C. $x + 3y - 2 = 0$.

D. $x + 3y + 2 = 0$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm cạnh BC thì $M(2; 2) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (1; 3)$ là một véc-tơ chỉ phương của AM

Suy ra AM có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3; -1)$

Vậy phương trình $AM : 3(x-2) - (y-2) = 0 \Leftrightarrow 3x - y - 4 = 0$.

Chọn đáp án **A** □

ĐÁP ÁN

1. D	2. C	3. B	4. A	5. C	6. A	7. B	8. A	9. D	10. A
11. D	12. D	13. A	14. D	15. A	16. C	17. C	18. C	19. C	20. B
21. A	22. A	23. D	24. C	25. A	26. C	27. C	28. A	29. A	30. B
31. B	32. D	33. B	34. B	35. B	36. A	37. B	38. D	39. C	40. D
41. B	42. D	43. B	44. B	45. D	46. A	47. A	48. C	49. C	50. A

Câu 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(1; 2017)$, $B(2017; 1)$ Gọi (Δ) là đường trung trực của đoạn thẳng AB . Khi đó phương trình nào dưới đây là phương trình tổng quát của đường thẳng (Δ) ?

- A. $x - y = 0$. B. $x + y = 0$. C. $x - y + 1008 = 0$. D. $x + y + 1009 = 0$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2016; -2016) = 2016(1; -1)$ và tọa độ trung điểm I của AB là $I = (1009; 1009)$, nên phương trình đường thẳng (Δ) là đường trung trực của đoạn thẳng AB là:

$$1 \cdot (x - 1009) - 1 \cdot (y - 1009) = 0 \text{ hay } (\Delta) : x - y = 0.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 2. Bất phương trình $2x - 4 \geq 0$ có tập nghiệm là

- A. $(-\infty; 2)$. B. $(-\infty; 2]$. C. $\mathbb{R}$. D. $[2; +\infty)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } 2x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 3. Cho bất phương trình $x^2 - 2mx + 8m - 7 > 0$ (m là tham số thực). Điều kiện cần và đủ để bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in (-\infty; 0)$ là

- A. $1 < m < 7$. B. $1 \leq m \leq 7$. C. $m \geq \frac{7}{8}$. D. $m \leq \frac{7}{8}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \Delta' = m^2 - 8m + 7.$$

- Nếu $\Delta' = m^2 - 8m + 7 < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 7$ thì $x^2 - 2mx + 8m - 7 > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$, nên $x^2 - 2mx + 8m - 7 > 0$ với $\forall x \in (-\infty; 0)$.
- Nếu $\Delta' = m^2 - 8m + 7 \geq 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; 1] \cup [7; +\infty)$ thì $x^2 - 2mx + 8m - 7 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 .

Khi đó $x^2 - 2mx + 8m - 7 > 0$ đúng với $\forall x \in (-\infty; 0)$ điều kiện là

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ x_1 + x_2 \geq 0 \\ x_1 \cdot x_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty; 1] \cup [7; +\infty) \\ 2m \geq 0 \\ 8m - 7 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty; 1] \cup [7; +\infty) \\ m \geq 0 \\ m \geq \frac{7}{8} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left[\frac{7}{8}; 1\right] \cup [7; +\infty).$$

Như vậy, điều kiện cần và đủ để bất phương trình $x^2 - 2mx + 8m - 7 > 0$ nghiệm đúng với $\forall x \in (-\infty; 0)$ là $m \geq \frac{7}{8}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 4. Bất phương trình $x^2 + 4x + 3 < 0$ có tập nghiệm là

- A. $(-3; -1)$. B. $\mathbb{R}$.
C. $(-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)$. D. $[-3; -1]$.

Lời giải.

Ta có $x^2 + 4x + 3 < 0 \Leftrightarrow x \in (-3; -1)$.

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-3; -1)$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 5. Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm $A(1; -2017)$, $B(-2017; 1)$. Khi đó phương trình nào dưới đây là phương trình tham số của đường thẳng AB ?

- A. $\begin{cases} x = 1 + 2017t \\ y = 1 + 2017t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 1 + 2016t \\ y = 1 - 2016t \end{cases}$.
C. $\begin{cases} x = 1 + 2017t \\ y = -2017 + 2017t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2017 - t \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2018; 2018) = -2018(1; -1)$, nên phương trình đường thẳng AB là $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2017 - t \end{cases}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 6. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $A(1; 2)$ và đường thẳng $\Delta : 3x + 4y - 6 = 0$. Khi đó phương trình của đường tròn (C) có tâm A và tiếp xúc với đường thẳng Δ là

- A. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = \sqrt{3}$. B. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 3$.
C. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$. D. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$.

Lời giải.

Bán kính đường tròn (C) là: $R = d(A; \Delta) = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 1$.

Do đó, phương trình của đường tròn (C) có tâm A và tiếp xúc với đường thẳng Δ là:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 7. Trong mặt phẳng Oxy cho Elip $(E) : \frac{x^2}{25} + y^2 = 1$ và Parabol $(P) : y = -2017x^2 + 2$. Khi đó phương trình đường tròn (C) đi qua các giao điểm của (E) và (P) là

- A. $x^2 + \left(y + \frac{12}{50425}\right)^2 = \frac{2545101169}{2542680625}$. B. $x^2 + \left(y + \frac{11}{50425}\right)^2 = \frac{2545101169}{2542680625}$.
C. $x^2 + \left(y + \frac{13}{50425}\right)^2 = \frac{2545101169}{2542680625}$. D. Kết quả khác.

Lời giải.

Tọa độ các giao điểm của Elip (E) và Parabol (P) là các nghiệm $(x; y)$ của hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + y^2 = 1 \\ y = -2017x^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 25y^2 - 25 = 0 \\ 2017x^2 + y - 2 = 0 \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}& \frac{2017}{24} (x^2 + 25y^2 - 25) + (2017x^2 + y - 2) = 0 \\& \Leftrightarrow \frac{50425}{24} (x^2 + y^2) + y - \frac{50473}{24} = 0 \\& \Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{24}{50425}y - \frac{50473}{50425} = 0 \\& \Leftrightarrow x^2 + \left(y + \frac{12}{50425}\right)^2 = \frac{2545101169}{2542680625}.\end{aligned}$$

Vậy phương trình đường tròn (C) đi qua các giao điểm của (E) và (P) là

$$x^2 + \left(y + \frac{12}{50425}\right)^2 = \frac{2545101169}{2542680625}.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 8. Cho $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, khi đó giá trị của $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ là

A. $\frac{\sqrt{2}}{34}$. B. $-\frac{\sqrt{2}}{26}$. C. $\frac{17\sqrt{2}}{26}$. D. $-\frac{7\sqrt{2}}{26}$.

Lời giải.

Do $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos \alpha > 0$. Bởi vậy:

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$$

Do đó:

$$\begin{aligned}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) &= \cos \alpha \cos \frac{\pi}{4} + \sin \alpha \sin \frac{\pi}{4} \\&= \frac{12}{13} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{5}{13} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{17\sqrt{2}}{26}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 9. Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$, khi đó giá trị của $\cos \alpha$ là

A. $-\frac{4}{5}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{5}$. C. $-\frac{\sqrt{3}}{5}$. D. $\frac{4}{5}$.

Lời giải.

Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$ nên $\cos \alpha < 0$. Do đó:

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 10. Bất phương trình $x^2 - 2x - 4 > 0$ có tập nghiệm là

- A. $\mathbb{R}$. B. $(1 - \sqrt{5}; 1 + \sqrt{5})$.
C. $(-\infty; 1 - \sqrt{5}) \cup (1 + \sqrt{5}; +\infty)$. D. Kết quả khác.

Lời giải.

Ta có $x^2 - 2x - 4 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1 - \sqrt{5}) \cup (1 + \sqrt{5}; +\infty)$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 11. Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm $A(-1; -2)$, $B(-4; -6)$. Khi đó phương trình của đường tròn (C) có tâm A và đi qua B là

- A. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$. B. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$.
C. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = \sqrt{5}$. D. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$.

Lời giải.

Bán kính đường tròn (C) có tâm A và đi qua B là $R = AB = \sqrt{(-4 + 1)^2 + (-6 + 2)^2} = 5$.

Phương trình của đường tròn (C) có tâm A và đi qua B là:

$$(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 25.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 12. Giá trị của biểu thức $A = \cos^2 2^\circ + \cos^2 4^\circ + \cos^2 6^\circ + \cos^2 8^\circ + \dots + \cos^2 86^\circ + \cos^2 88^\circ + \cos^2 90^\circ$ là

- A. 21. B. 22. C. 23. D. Kết quả khác.

Lời giải.

Ta luôn có $\cos a = \sin(90^\circ - a)$, nên:

$$\begin{aligned} 2A &= (\cos^2 2^\circ + \cos^2 4^\circ + \cos^2 6^\circ + \cos^2 8^\circ + \dots + \cos^2 86^\circ + \cos^2 88^\circ + \cos^2 90^\circ) \\ &\quad + (\cos^2 2^\circ + \cos^2 4^\circ + \cos^2 6^\circ + \cos^2 8^\circ + \dots + \cos^2 86^\circ + \cos^2 88^\circ + \cos^2 90^\circ) \\ &= (\cos^2 2^\circ + \cos^2 4^\circ + \cos^2 6^\circ + \cos^2 8^\circ + \dots + \cos^2 86^\circ + \cos^2 88^\circ + \cos^2 90^\circ) \\ &\quad + (\sin^2 88^\circ + \sin^2 86^\circ + \sin^2 84^\circ + \sin^2 82^\circ + \dots + \sin^2 4^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 0^\circ) \\ &= (\cos^2 2^\circ + \sin^2 2^\circ) + (\cos^2 4^\circ + \sin^2 4^\circ) + \dots + (\cos^2 86^\circ + \sin^2 86^\circ) \\ &\quad + (\cos^2 88^\circ + \sin^2 88^\circ) + (\cos^2 90^\circ + \sin^2 0^\circ) \\ &= 44 \cdot 1 + 0 + 0 = 44. \end{aligned}$$

Do đó: $A = 22$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 13. Cho bất phương trình $-1 \leq \frac{x^2 - 2x - m}{x^2 + 2x + 2017} < 2$ (m là tham số thực). Điều kiện cần và đủ để bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$ là

- A. $m > 4025$. B. $-4025 \leq m < 2017$.
C. $m > 2017$. D. $-4025 < m \leq 2017$.

Lời giải.

$$\forall x^2 + 2x + 2017 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} -1 \leq \frac{x^2 - 2x - m}{x^2 + 2x + 2017} < 2 &\Leftrightarrow \begin{cases} -(x^2 + 2x + 2017) \leq x^2 - 2x - m \\ x^2 - 2x - m < 2(x^2 + 2x + 2017) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - m + 2017 \geq 0 & (1) \\ x^2 + 6x + m + 4034 > 0 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Bất phương trình đã cho đúng với $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ hệ (1), (2) đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$. Điều này tương đương với

$$\begin{cases} -m + 2017 \geq 0 \\ \Delta' = 3^2 - (m + 4034) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2017 \\ m > -4025 \end{cases} \Leftrightarrow -4025 < m \leq 2017.$$

Chọn đáp án **D**

Câu 14. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng cho mọi tam giác ABC vuông tại B ?

- A.** $\tan(A + B) = -\cot A$. **B.** $\tan(A + B) = -\cot B$.
C. $\cot(A + B) = \cos A$. **D.** $\cos(A + B) = \cos C$.

Lời giải.

Vì tam giác ABC vuông tại B nên $A + C = B = 90^\circ$. Bởi vậy

$$\tan(A + B) = \tan(A + 90^\circ) = -\cot A$$

Chọn đáp án **A**

Câu 15. Cho $\cos \alpha = \frac{3}{5}$. Khi đó giá trị của $\cos(2\alpha)$ là

- A. $\frac{18}{25}$. B. $\frac{7}{25}$. C. $-\frac{18}{25}$. D. $-\frac{7}{25}$.

Lời giải.

Ta có $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 = 2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{25}$.

Chọn đáp án **D**

Câu 16. Bất phương trình $|x + 2| > 3$ có tập nghiệm là

- A.** $[-5; 1]$. **B.** $\mathbb{R}$.
C. $(-\infty; -5) \cup (1; +\infty)$. **D.** $(-5; 1)$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } |x+2| > 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 < -3 \\ x+2 > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -5 \\ x > 1 \end{cases}.$$

Tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty; -5) \cup (1; +\infty)$.

Chọn đáp án **C**

Câu 17. Bất phương trình $4x^2 + 4x + 1 > 0$ có tập nghiệm là

- A. $\emptyset$. B. $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$. C. $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$. D. $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $4x^2 + 4x + 1 > 0 \Leftrightarrow (2x + 1)^2 > 0 \Leftrightarrow 2x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{2}$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 18. Cho bất phương trình $mx^2 - 4x - m - 6 \geq 0$ (m là tham số thực). Điều kiện cần và đủ để bất phương trình vô nghiệm là

A. $m < 0$.

B. $-3 - \sqrt{5} < m < -3 + \sqrt{5}$.

C. $-3 - \sqrt{5} \leq m \leq -3 + \sqrt{5}$.

D. $\begin{cases} m > -3 + \sqrt{5} \\ m < -3 - \sqrt{5} \end{cases}$.

Lời giải.

Bất phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi bất phương trình $mx^2 - 4x - m - 6 < 0$ (1) nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ta thấy $m = 0$ thì bất phương trình (1) có dạng $-4x - 6 < 0$ không nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$. Do đó, bất phương trình (1) nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & \begin{cases} m < 0 \\ \Delta' = 4 - m(-m - 6) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m^2 + 6m + 4 < 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -3 - \sqrt{5} < m < -3 + \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow -3 - \sqrt{5} < m < -3 + \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 19. Cho bất phương trình $x^2 + 2mx + 2018m + 2019 > 0$ (m là tham số thực). Điều kiện cần và đủ để bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$ là

A. $-1 < m < 2019$. B. $\begin{cases} m > 2019 \\ m < -1 \end{cases}$. C. $\begin{cases} m \geq 2019 \\ m \leq -1 \end{cases}$. D. $-1 \leq m \leq 2019$.

Lời giải.

Điều kiện cần và đủ để bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$ là

$$\begin{aligned} \Delta' = m^2 - (2018m + 2019) < 0 & \Leftrightarrow m^2 - 2018m - 2019 < 0 \\ & \Leftrightarrow -1 < m < 2019. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 20. Cho $\cot \alpha = \frac{12}{5}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Khi đó giá trị của $\sin \alpha$ là

A. $-\frac{\sqrt{13}}{13}$.

B. $-\frac{12}{13}$.

C. $\frac{12}{13}$.

D. $\frac{5}{13}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha = 1 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{169}{25} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{25}{169}.$$

$$\text{Vì } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ nên } \sin \alpha > 0, \text{ do đó } \sin \alpha = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 21. Cho $\triangle ABC$, $AB = 4$ cm, $BC = 6$ cm, $CA = 8$ cm. Khi đó trung tuyến ngắn nhất có độ dài là

A. $3\sqrt{5}$ cm.

B. $\sqrt{46}$ cm.

C. $4\sqrt{3}$ cm.

D. $\sqrt{10}$ cm.

Lời giải.

Trung tuyến ngắn nhất là trung tuyến m_b ứng với cạnh CA . Ta có

$$m_b^2 = \frac{AB^2 + BC^2}{2} - \frac{CA^2}{4} = \frac{4^2 + 6^2}{2} - \frac{8^2}{4} = 10$$

Nên $m_b = \sqrt{10}$ cm.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 22. Cho $\triangle ABC$, $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm, $CA = 10$ cm. Khi đó tam giác này có diện tích là

A. 18 cm^2 .

B. 24 cm^2 .

C. 12 cm^2 .

D. $6\sqrt{2} \text{ cm}^2$.

Lời giải.

Vì $CA^2 = 100 = 36 + 64 = AB^2 + BC^2$ nên tam giác ABC vuông tại B . Bởi vậy, diện tích $\triangle ABC$ là

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24 \text{ cm}^2.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 23. Trong mặt phẳng Oxy phương trình chính tắc của Elip có độ dài trục lớn bằng 10 và độ dài trục bé bằng 8 là

A. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$.

B. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

C. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{81} = 1$.

D. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Lời giải.

Trục lớn $2a = 10 \Rightarrow a = 5$, trục bé $2b = 8 \Rightarrow b = 4$. Nên phương trình chính tắc của Elip có độ dài trục lớn bằng 10 và độ dài trục bé bằng 8 là $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 24. Cho $\tan \alpha = 3$. Khi đó giá trị của $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$ là

A. $\frac{7}{17}$.

B. -4 .

C. -2 .

D. $\frac{17}{7}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{3 + 1}{1 - 3 \cdot 1} = -2.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 25. Cho $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ và $0 < \alpha < \pi$. Khi đó giá trị của $\cos \frac{\alpha}{2}$ là

A. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

B. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

D. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} = \frac{1 + \left(-\frac{3}{5}\right)}{2} = \frac{1}{5}.$$

Do $0 < \alpha < \pi$ nên $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$, suy ra $\cos \frac{\alpha}{2} > 0$. Bởi vậy $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

ĐÁP ÁN

1. A	2. D	3. C	4. A	5. D	6. D	7. A	8. C	9. A	10. C
11. A	12. B	13. D	14. A	15. D	16. C	17. C	18. B	19. A	20. D
21. D	22. B	23. B	24. C	25. C					

Câu 1. Cho đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ và điểm $M(-1; 6)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua M và vuông góc với Δ .

- A. $3x - y + 9 = 0$. B. $x + 3y - 17 = 0$. C. $3x + y - 3 = 0$. D. $x - 3y + 19 = 0$.

Lời giải.

Gọi d là đường thẳng cần tìm. Ta có

- Δ có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (3; 1)$.
- $d \perp \Delta$ nên d có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{u} = (3; 1)$.

Do đó, d có phương trình là $3x + y - 3 = 0$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 2. Tìm đẳng thức **sai** trong các đẳng thức sau (giả sử rằng tất cả các biểu thức lượng giác đều có nghĩa).

- A. $\tan(a - \pi) = \tan a$. B. $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$.
C. $\sin a = \tan a \cos a$. D. $\cos(a - b) = \sin a \sin b + \cos a \cos b$.

Lời giải.

- $\tan(a - \pi) = \tan a$ là đẳng thức đúng.
- $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$ là đẳng thức sai, lẽ ra phải là $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$.
- $\sin a = \tan a \cos a$ là đẳng thức đúng, suy ra từ công thức $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$.
- $\cos(a - b) = \sin a \sin b + \cos a \cos b$ là đẳng thức đúng.

Chọn đáp án **B** □

Câu 3. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường tròn?

- A. $x^2 + y^2 + x + y + 4 = 0$. B. $x^2 - y^2 + 4x - 6y - 2 = 0$.
C. $x^2 + 2y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$. D. $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$.

Lời giải.

Phương trình đường tròn có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, trong đó $a^2 + b^2 - c > 0$.

- Phương trình $x^2 + y^2 + x + y + 4 = 0$ có $a = -\frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = 4$ không thỏa $a^2 + b^2 - c > 0$.
- Phương trình $x^2 - y^2 + 4x - 6y - 2 = 0$ không là phương trình đường tròn vì hệ số của x^2 và y^2 trái dấu.
- Phương trình $x^2 + 2y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$ không là phương trình đường tròn vì hệ số của x^2 và y^2 không bằng nhau.
- Phương trình $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ có dạng phương trình đường tròn và có $a = 2$; $b = 0$, $c = -1$ thỏa điều kiện $a^2 + b^2 - c > 0$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 4. Có bao nhiêu đẳng thức **đúng** trong các đẳng thức sau đây (giả sử rằng tất cả các biểu thức lượng giác đều có nghĩa)?

a) $\cos^2 \alpha = \frac{1}{\tan^2 \alpha + 1}$.

b) $\sqrt{2} \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = \cos \alpha + \sin \alpha.$

c) $\sin \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = -\cos \alpha.$

d) $\cot 2\alpha = 2 \cot^2 \alpha - 1.$

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Lời giải.

- Đẳng thức $\cos^2 \alpha = \frac{1}{\tan^2 \alpha + 1}$ đúng, suy ra từ $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.
- Đẳng thức $\sqrt{2} \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = \cos \alpha + \sin \alpha$ sai, lẽ ra phải là $\sqrt{2} \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = \cos \alpha - \sin \alpha.$
- Đẳng thức $\sin \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = -\cos \alpha$ đúng vì $\sin \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = -\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = -\cos \alpha.$
- Đẳng thức $\cot 2\alpha = 2 \cot^2 \alpha - 1$ sai vì nhầm với công thức $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1.$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 5. Cho đường tròn $(C) : (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 10$ và đường thẳng $\Delta : x + y + 1 = 0$. Biết đường thẳng Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B . Tính độ dài đoạn thẳng AB .

A. $\frac{19}{2}.$

B. $\sqrt{38}.$

C. $\frac{\sqrt{19}}{2}.$

D. $\frac{\sqrt{38}}{2}.$

Lời giải.

- Đường tròn (C) có tâm $I(1; -3)$ và bán kính $R = \sqrt{10}.$
- Khoảng cách từ I đến Δ là

$$d = d(I, \Delta) = \frac{|1 + (-3) + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vì $d < R$ nên Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B và

$$\frac{AB}{2} = \sqrt{R^2 - d^2} = \frac{\sqrt{38}}{2}.$$

Do đó, $AB = \sqrt{38}.$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 6. Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh là $AB = 2, BC = 3, CA = 4$. Tính góc $\widehat{ABC}$ (chọn kết quả gần đúng nhất).

A. $60^\circ.$

B. $104^\circ 29'.$

C. $75^\circ 31'.$

D. $120^\circ.$

Lời giải.

Ta có $\cos \widehat{ABC} = \frac{BC^2 + AB^2 - AC^2}{2 \cdot BC \cdot AB} = \frac{2^2 + 3^2 - 4^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \widehat{ABC} \approx 104^\circ 29'.$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 7. Một elip (E) có phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, trong đó $a > b > 0$. Biết (E) đi qua $A(2; \sqrt{2})$ và $B(2\sqrt{2}; 0)$. Tính độ dài trục bé của (E) .

A. 4.

B. $2\sqrt{2}.$

C. 2.

D. 6.

Lời giải.

- Vì (E) đi qua $B(2\sqrt{2}; 0)$ nên có $\frac{8}{a^2} = 1 \Leftrightarrow a = 2\sqrt{2}.$

- Vì (E) đi qua $A(2; \sqrt{2})$ nên có $\frac{4}{8} + \frac{2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b = 2$.

Vậy độ dài trục bé của (E) là $2b = 4$.

Chọn đáp án **(A)**

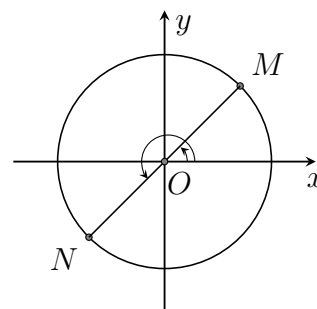
□

Câu 8. Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho M và N là hai điểm thuộc đường tròn lượng giác. Hai góc lượng giác (Ox, OM) và (Ox, ON) lệch nhau 180° . Chọn nhận xét **đúng**.

- A. M, N có tung độ và hoành độ đều bằng nhau.
- B. M, N có tung độ và hoành độ đều đối nhau.
- C. M, N có tung độ bằng nhau và hoành độ đối nhau.
- D. M, N có hoành độ bằng nhau và tung độ đối nhau.

Lời giải.

Dựa vào hình bên, rõ ràng “ M, N có tung độ và hoành độ đều đối nhau”.



Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 9. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $\sin^4 a + \cos^7 a$.

- A. 2.
- B. $\sqrt{2}$.
- C. $\frac{1}{2}$.
- D. 1.

Lời giải.

Vì $\sin a, \cos a \in [-1; 1]$ nên ta có $\sin^4 a + \cos^7 a \leq \sin^4 a + \cos^4 a$ (dấu “=” xảy ra khi $\cos a = 0$ hoặc $\cos a = 1$).

Mà $\sin^4 a + \cos^4 a = (\sin^2 a + \cos^2 a)^2 - 2\sin^2 a \cos^2 a = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2a \leq 1$ (dấu “=” xảy ra khi $\sin^2 2a = 0$ hay $a = 0^\circ$ hoặc $a = 90^\circ$ hoặc $a = 180^\circ$).

Suy ra: giá trị lớn nhất của biểu thức bằng 1 (dấu “=” xảy ra khi chỉ khi $a = 0^\circ$ hoặc $a = 90^\circ$).

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 10. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{x-1} + \sqrt{5-x} + \frac{1}{x-3} > \frac{1}{x-3}$.

- A. $S = [1; 5]$.
- B. $S = (1; 5) \setminus \{3\}$.
- C. $S = (3; 5]$.
- D. $S = [1; 5] \setminus \{3\}$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện của bất phương trình } \begin{cases} x-3 \neq 0 \\ 5-x \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

Ta có $\sqrt{x-1} + \sqrt{5-x} + \frac{1}{x-3} > \frac{1}{x-3} \Leftrightarrow \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x} > 0$ (điều này luôn đúng).

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [1; 5] \setminus \{3\}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 11. Rút gọn biểu thức

$$A = \sin\left(x + \frac{85\pi}{2}\right) + \cos(2017\pi + x) + \sin^2(33\pi + x) + \sin^2\left(x - \frac{5\pi}{2}\right).$$

A. $A = \sin x$.

B. $A = 1$.

C. $A = 2$.

D. $A = 0$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + 42\pi\right) + \cos(2016\pi + \pi + x) + \sin^2(32\pi + \pi + x) + \sin^2\left(x - \frac{\pi}{2} - 2\pi\right) \\ &= \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(\pi + x) + \sin^2(\pi + x) + \sin^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos x - \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x = 1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 12. Trong hệ trục tọa độ Oxy , đường tròn có phương trình nào dưới đây tiếp xúc với hai trục tọa độ?

A. $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$.

B. $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 2$.

C. $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$.

D. $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$.

Lời giải.

- Đường tròn $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$ có tâm là $I(2; 2)$ và bán kính $R = 1$ nên không tiếp xúc với hai trục tọa độ (khoảng cách từ tâm lần lượt đến hai trục tọa độ đều bằng 2, bé hơn bán kính đường tròn).
- Đường tròn $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 1$ có tâm là $I(2; -2)$ và bán kính $R = \sqrt{2}$ nên không tiếp xúc với hai trục tọa độ (khoảng cách từ tâm lần lượt đến hai trục tọa độ đều bằng 2, bé hơn bán kính đường tròn).
- Đường tròn $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$ có tâm là $I(-2; -2)$ và bán kính $R = 2$ nên tiếp xúc với hai trục tọa độ (khoảng cách từ tâm lần lượt đến hai trục tọa độ đều bằng 2, bằng với bán kính đường tròn).
- Đường tròn $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$ có tâm là $I(-2; 2)$ và bán kính $R = 2\sqrt{2}$ nên không tiếp xúc với hai trục tọa độ (khoảng cách từ tâm lần lượt đến hai trục tọa độ đều bằng 2, lớn hơn bán kính đường tròn).

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 13. Cho đường tròn $(C) : (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 10$ và đường thẳng $\Delta : x + 3y + m + 1 = 0$. Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng Δ tiếp xúc với đường tròn (C) .

A. $m = 1$ hoặc $m = -19$.

B. $m = -3$ hoặc $m = 17$.

C. $m = -1$ hoặc $m = 19$.

D. $m = 3$ hoặc $m = -17$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1; -3)$ và bán kính $R = \sqrt{10}$.

Khoảng cách từ I đến Δ là $d(I, \Delta) = \frac{|1 + 3(-3) + m + 1|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|m - 7|}{\sqrt{10}}$.

Đường tròn (C) tiếp xúc Δ khi chỉ khi $\frac{|m - 7|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 7 = 10 \\ m - 7 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 17 \\ m = -3 \end{cases}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 14. Cho phương trình $x^2 + y^2 + ax + by + 2c = 0$. Điều kiện nào của a, b, c để phương trình trên là phương trình của đường tròn?

A. $a^2 + b^2 - 8c > 0$. B. $a^2 + b^2 + 2c > 0$. C. $a^2 + b^2 + 8c > 0$. D. $a^2 + b^2 - 2c > 0$.

Lời giải.

Phương trình $x^2 + y^2 + ax + by + 2c = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)x + 2 \cdot \left(\frac{b}{2}\right)y + 2c = 0$

là phương trình đường tròn khi và chỉ khi $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2c > 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 8c > 0$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 15. Trong hệ trục tọa độ Oxy , một elip có độ dài trục lớn là 8, độ dài trục bé là 6 thì có phương trình chính tắc là phương trình nào dưới đây?

A. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$. B. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$. C. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. D. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$.

Lời giải.

Độ dài trục lớn $2a = 8 \Rightarrow a = 4$; độ dài trục bé $2b = 6 \Rightarrow b = 3$.

Vậy phương trình elip cần tìm là $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 16. Tìm m để bất phương trình $(m - 3)x^2 + 2(m + 1)x > 2$ có một nghiệm là 1.

A. $m > 1$. B. $m \geq 1$. C. $m = 1$. D. $m < 1$.

Lời giải.

Do bất phương trình có nghiệm $x = 1$ nên $m - 3 + 2(m + 1) > 2 \Leftrightarrow m > 1$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 17. Biết $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $\sin 2\alpha$.

A. $-\frac{3}{4}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{3}{8}$. D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 18. Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho M là điểm nằm trên đường tròn lượng giác. Điểm M có hoành độ và tung độ đều âm. Số đo của góc (Ox, OM) có thể là các góc nào sau đây?

A. -90° . B. 200° . C. -60° . D. -180° .

Lời giải.

- Góc -90° khi đó điểm M có hoành độ bằng 0 nên bị loại.
- Góc -180° khi đó điểm M có tung độ bằng 0 nên bị loại.
- Góc -60° khi đó điểm M có hoành độ dương nên bị loại.
- Góc 200° khi đó điểm M có hoành độ và tung độ đều âm thỏa mãn đề bài.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 19. Tìm số đo theo đơn vị Radian của góc 250° .

A. $\frac{25\pi}{12}$. B. $\frac{25\pi}{18}$. C. $\frac{25\pi}{9}$. D. $\frac{35\pi}{18}$.

Lời giải.

Ta có $250^\circ = 250 \times \frac{\pi}{180} = \frac{25\pi}{18}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 20. Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(1; 3)$, $B(-1; -1)$, $C(1; 1)$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tâm $I(a; b)$. Tính $a + b$.

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm $AB \Rightarrow M(0; 1)$;

N là trung điểm $BC \Rightarrow N(0; 0)$.

Đường trung trực d_1 của cạnh AB đi qua M và nhận véc-tơ $\overrightarrow{BA} = (2; 4)$ làm véc-tơ pháp tuyến. d_1 có phương trình $x + 2y - 2 = 0$.

Đường trung trực d_2 của cạnh BC đi qua N và nhận véc-tơ $\overrightarrow{BC} = (2; 2)$ làm véc-tơ pháp tuyến. d_2 có phương trình $x + y = 0$.

Tâm I là nghiệm của hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 2y - 2 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Vậy $I(-2; 2)$. Suy ra $a + b = 0$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 21. Gọi M là điểm cuối khi biểu diễn cung lượng giác có số đo α trên đường tròn lượng giác. Trong các phát biểu sau đây, phát biểu nào **đúng**?

A. Nếu M nằm bên phải trục tung thì $\cos \alpha$ âm.

B. Nếu M thuộc góc phần tư thứ tư thì $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$ đều âm.

C. Nếu M thuộc góc phần tư thứ hai thì $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$ đều dương.

D. Nếu M nằm phía trên trục hoành thì $\sin \alpha$ dương.

Lời giải.

- M bên phải trục tung thì $\cos \alpha$ dương.
- M thuộc góc phần tư thứ tư thì $\sin \alpha$ âm và $\cos \alpha$ dương.
- M thuộc góc phần tư thứ hai thì $\sin \alpha$ dương và $\cos \alpha$ âm.
- M nằm phía trên trục hoành thì $\sin \alpha$ dương.

Vậy phương án đúng là “Nếu M nằm phía trên trục hoành thì $\sin \alpha$ dương”.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 22. Với mọi góc α và số nguyên k , chọn khẳng định **sai**.

A. $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha$.

B. $\cos(\alpha + k\pi) = \cos \alpha$.

C. $\tan(\alpha + k\pi) = \tan \alpha$.

D. $\cot(\alpha - k\pi) = \cot \alpha$.

Lời giải.

Ta có $\cos(\alpha + k\pi) = -\cos \alpha$ nếu k lẻ nên $\cos(\alpha + k\pi) = \cos \alpha$ **sai**.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 23. Cho tam giác ABC có $A(1; 2)$, $B(2; 3)$, $C(-3; -4)$. Tính diện tích tam giác ABC .

A. 1.

B. $\sqrt{2}$.

C. $1 + \sqrt{2}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

• **Cách 1:**

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 1) \Rightarrow AB = \sqrt{2}$.

Phương trình đường thẳng $AB: x - y + 1 = 0$.

Gọi d là khoảng cách từ C đến AB .

Suy ra $d = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Vậy $S_{ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times d = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 1$.

• **Cách 2:** Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 1), \overrightarrow{AC} = (-4; -6)$.

Suy ra

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -6 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \times 2 = 1.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 24. Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1}$ và điểm $N(1; -4)$. Tính khoảng cách từ điểm N đến đường thẳng Δ .

A. $\frac{2}{5}$.

B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

C. 2.

D. $\frac{2}{\sqrt{17}}$.

Lời giải.

Phương trình tổng quát của $\Delta: x + 2y + 5 = 0$.

Khoảng cách cần tìm là $d(N, \Delta) = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 25. Cho $\cos \alpha = \frac{5}{13}$, với $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $\tan \alpha$.

A. $-\frac{12}{13}$.

B. $\frac{5}{12}$.

C. $-\frac{12}{5}$.

D. $\frac{12}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \frac{144}{169}$, do đó $\sin \alpha = \pm \frac{12}{13}$.

Vì $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ nên $\sin \alpha < 0$. Vậy $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$.

Từ đó $\tan \alpha = -\frac{12}{5}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 26. Trên đường tròn lượng giác, điểm M thỏa mãn $(Ox, OM) = 500^\circ$ thì nằm ở góc phần tư thứ

A. I.

B. II.

C. III.

D. IV.

Lời giải.

Ta có $(Ox, OM) = 140^\circ + 360^\circ$ nên M nằm trong góc phần tư thứ II.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 27. Cho hai đường thẳng $d_1 : x - y - 2 = 0$ và $d_2 : 2x + 3y + 3 = 0$. Góc tạo bởi đường thẳng d_1 và d_2 là (chọn kết quả gần đúng nhất)

- A. $11^\circ 19'$. B. $78^\circ 41'$. C. $101^\circ 19'$. D. $78^\circ 31'$.

Lời giải.

Ta có

$$\cos(d_1, d_2) = \frac{|1 \cdot 2 - 1 \cdot 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{26}} \Rightarrow (d_1, d_2) \approx 78^\circ 41'.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 28. Cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 4x + 2y - 7 = 0$ có tâm I và bán kính R . Khẳng định nào dưới đây là đúng?

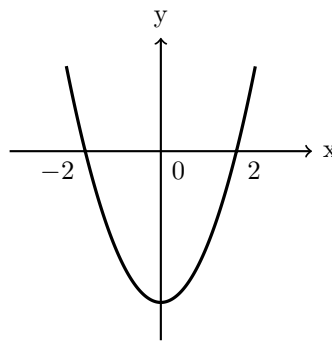
- A. $I(-2; 1), R = 2\sqrt{3}$. B. $I(2; -1), R = 12$. C. $I(2; -1), R = 2\sqrt{3}$. D. $I(4; -2), R = 3\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta viết lại phương trình $(C) : (x-2)^2 + (y+1)^2 = 12$. Suy ra (C) có tâm $I(2; -1)$ và bán kính $R = 2\sqrt{3}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 29. Cho parabol (P) có phương trình $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). (P) có đồ thị như hình vẽ



Biết đồ thị của (P) cắt trục Ox tại các điểm có hoành độ lần lượt là $-2, 2$. Tập nghiệm của bất phương trình $y < 0$ là

- A. $S = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. B. $S = (-2; 2)$.
C. $S = [-2; 2]$. D. $S = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Lời giải.

Dựa vào đồ thị ta thấy $y < 0$ ứng với phần đồ thị nằm dưới trục Ox . Do đó ta có tập nghiệm là $S = (-2; 2)$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 30. Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh là $AB = 2, BC = 5, CA = 6$. Tính độ dài đường trung tuyến MA , với M là trung điểm của BC .

- A. $\frac{\sqrt{15}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{55}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{110}}{2}$. D. $\sqrt{55}$.

Lời giải.

Ta có

$$AM^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4} = \frac{55}{4} \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{55}}{2}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 31. Cho đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 4x + 2y - 7 = 0$ và hai điểm $A(1; 1)$ và $B(-1; 2)$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. A nằm trong và B nằm ngoài (C) .

B. A và B cùng nằm ngoài (C) .

C. A nằm ngoài và B nằm trong (C) .

D. A và B cùng nằm trong (C) .

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(2; -1)$, bán kính $R = 2\sqrt{3}$. Ta có $IA = \sqrt{5} < R < 3\sqrt{2} = IB$ nên ta có A nằm trong và B nằm ngoài (C) .

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 32. Cho $\cot a = 4 \tan a$ và $a \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Khi đó $\sin a$ bằng

A. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$\cot^2 a = 4 \tan a \cdot \cot a = 4 \Rightarrow \sin^2 a = \frac{1}{1 + \cot^2 a} = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin a = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 33. Tính $S = \sin^2 5^\circ + \sin^2 10^\circ + \sin^2 15^\circ + \dots + \sin^2 80^\circ + \sin^2 85^\circ$.

A. $\frac{19}{2}$.

B. 8.

C. $\frac{17}{2}$.

D. 9.

Lời giải.

Ta có

$$5^\circ + 85^\circ = 10^\circ + 80^\circ = \dots = 40^\circ + 50^\circ = 90^\circ,$$

nên

$$\sin^2 5^\circ + \sin^2 85^\circ = \sin^2 10^\circ + \sin^2 80^\circ = \dots = \sin^2 40^\circ + \sin^2 50^\circ = 1, \quad \sin^2 45^\circ = \frac{1}{2}.$$

Do đó

$$S = \underbrace{1 + \dots + 1}_{8 \text{ số } 1} + \frac{1}{2} = \frac{17}{2}.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 34. Tính $K = \cos 14^\circ + \cos 134^\circ + \cos 106^\circ$.

A. $\frac{1}{2}$.

B. 0.

C. -1.

D. 1.

Lời giải.

Ta có

$$K = 2 \cos 74^\circ \cos 60^\circ + \cos(180^\circ - 74^\circ) = \cos 74^\circ - \cos 74^\circ = 0.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 35. Điều kiện cần và đủ của m để phương trình $mx^2 + 2(m+1)x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt là

A. $m \neq 0, m > -\frac{1}{2}$.

B. $m > \frac{1}{2}$.

C. $m > -\frac{1}{2}$.

D. $m > 0$.

Lời giải.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = (m+1)^2 - m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 36. Trong tam giác ABC , đẳng thức nào dưới đây luôn đúng?

A. $\sin(A+B) = \cos C$.

B. $\cos A = \sin B$.

C. $\tan A = \cot\left(B + \frac{\pi}{2}\right)$.

D. $\cos \frac{A+B}{2} = \sin \frac{C}{2}$.

Lời giải.

Ta có $A+B+C = \pi$ nên $\frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$. Do đó

$$\cos \frac{A+B}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) = \sin \frac{C}{2}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 37. Cho $x = \tan a$. Tính $\sin 2a$ theo x .

A. $2x\sqrt{1+x^2}$.

B. $\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

C. $\frac{2x}{1-x^2}$.

D. $\frac{2x}{1+x^2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\sin 2a = \frac{2 \sin a \cos a}{\sin^2 a + \cos^2 a} = \frac{2 \tan a}{1 + \tan^2 a} = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 38. Tính $\sin \frac{\pi}{8} \sin \frac{3\pi}{8}$

A. $\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right)$.

B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

C. $\frac{35}{99}$.

D. $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$.

Lời giải.

Ta có

$$\sin \frac{\pi}{8} \sin \frac{3\pi}{8} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 39. Với mọi α thì $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$ bằng

A. $-\sin \alpha$.

B. $-\cos \alpha$.

C. $\cos \alpha$.

D. $\sin \alpha$.

Lời giải.

Ta có

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 40. Biểu thức $2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + a\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right)$ đồng nhất với biểu thức nào dưới đây?

A. $\sin 2a$.

B. $\cos 2a$.

C. $\sin a$.

D. $\cos a$.

Lời giải.

Ta có

$$2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + a \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} - a \right) = (\sin a + \cos a) (\cos a - \sin a) = \cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 41. Với mọi góc a , biểu thức $P = \cos a + \cos \left(a + \frac{\pi}{5} \right) + \cos \left(a + \frac{2\pi}{5} \right) + \dots + \cos \left(a + \frac{9\pi}{5} \right)$ nhận giá trị bằng

- A. 10. B. -10. C. 1. D. 0.

Lời giải.

Với $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ta có

$$\cos \left(a + \frac{(k+5)\pi}{5} \right) = \cos \left(\pi + a + \frac{k\pi}{5} \right) = -\cos \left(a + \frac{k\pi}{5} \right).$$

Suy ra $\cos \left(a + \frac{(k+5)\pi}{5} \right) + \cos \left(a + \frac{k\pi}{5} \right) = 0$. Do đó ta có $P = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 42. Đường thẳng đi qua hai điểm $A(1; 1)$ và $B(-3; 5)$ nhận vectơ nào sau đây làm vectơ chỉ phương?

- A. $\vec{d} = (3; 1)$. B. $\vec{a} = (1; -1)$. C. $\vec{b} = (1; 1)$. D. $\vec{c} = (-2; 6)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-4; 4)$ nên ta chọn $\vec{a} = (1; -1)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 43. Cho một hình bình hành $ABCD$ có $AB = a, BC = b$. Công thức nào dưới đây là công thức tính diện tích của hình bình hành đó?

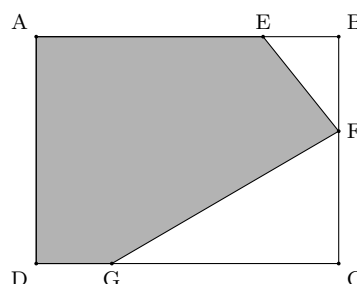
- A. $a^2 + b^2$. B. $ab \sin \widehat{ABC}$. C. ab . D. $2(a + b)$.

Lời giải.

Ta có $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin \widehat{ABC} = ab \sin \widehat{ABC}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 44. Một hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 8$ và $AD = 6$. Trên đoạn AB lấy điểm E thỏa $BE = 2$ và trên CD lấy điểm G thỏa $CG = 6$. Người ta cần tìm một điểm F trên đoạn BC sao cho $ABCD$ được chia làm hai phần màu trắng và màu xám như hình vẽ. Và diện tích phần màu xám bé hơn ba lần diện tích phần màu trắng. Điều kiện cần và đủ của điểm F là



- A. F cách C một đoạn bé hơn 3.
C. F cách B một đoạn bé hơn 3.

- B. F cách C một đoạn không quá 3.
D. F cách B một đoạn không quá 3.

Lời giải.

Đặt $BF = x$, $0 < x < 6$, ta có $CF = 6 - x$ và diện tích phần trắng là

$$S_1 = S_{BEF} + S_{CFG} = x + 3(6 - x) = 18 - 2x.$$

Diện tích phần xám là

$$S_2 = S_{ABCD} - S_1 = 48 - (18 - 2x) = 30 + 2x.$$

Do đó

$$S_2 < 3S_1 \Leftrightarrow 30 + 2x < 3(18 - 2x) \Leftrightarrow x < 3.$$

Do đó F cách B một đoạn bé hơn 3.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 45. Diện tích của tứ giác tạo nên bởi các đỉnh của elip $(E) : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ là

- A. 8. B. 4. C. 2. D. 6.

Lời giải.

Ta có $a = 2$, $b = 1$. Vì các đỉnh của (E) tạo thành một hình thoi có độ dài hai đường chéo là $2a$, $2b$ nên diện tích cần tính là $S = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2b = 4$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 46. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\sin a + \sqrt{3} \cos a$.

- A. 2. B. $-1 - \sqrt{3}$. C. -2. D. 0.

Lời giải.

Ta có

$$\sin a + \sqrt{3} \cos a = 2 \sin \left(a + \frac{\pi}{3} \right) \geq -2.$$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của $\sin a + \sqrt{3} \cos a$ bằng -2.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 47. Đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng AB , với $A(-2; 1)$ và $B(4; 3)$. Đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương là

- A. $\vec{c} = (1; -3)$. B. $\vec{a} = (3; 1)$. C. $\vec{d} = (1; 3)$. D. $\vec{b} = (3; -1)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (6; 2)$ là VTPT của Δ , nên $\vec{c} = (1; -3)$ là một VTCP của Δ .

Chọn đáp án **A**

□

Câu 48. Phương trình đường tròn (C) có tâm $I(1; -2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $2x + y + 5 = 0$

- A. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$. B. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$.
C. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$. D. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$.

Lời giải.

Ta có bán kính $R = d(I, \Delta) = \sqrt{5}$. Do đó phương trình (C) là

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 49. Trên đường tròn bán kính bằng 4, cung có số đo $\frac{\pi}{8}$ thì có độ dài là

A. $\frac{\pi}{4}$.

B. $\frac{\pi}{3}$.

C. $\frac{\pi}{16}$.

D. $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$l = \alpha \cdot R = \frac{\pi}{2}.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 50. Cho đường thẳng $\Delta : 2x - y + 1 = 0$. Điểm nào sau đây nằm trên đường thẳng Δ ?

A. $A(1; 1)$.

B. $B\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

C. $C\left(\frac{1}{2}; -2\right)$.

D. $D(0; -1)$.

Lời giải.

Thay tọa độ các điểm vào phương trình ta thấy $B \in \Delta$.

Chọn đáp án **B**

□

ĐÁP ÁN

1. C	2. B	3. D	4. B	5. B	6. B	7. A	8. B	9. D	10. D
11. B	12. C	13. B	14. A	15. C	16. A	17. A	18. B	19. B	20. B
21. D	22. B	23. A	24. B	25. C	26. B	27. B	28. C	29. B	30. B
31. A	32. D	33. C	34. B	35. A	36. D	37. D	38. B	39. B	40. B
41. D	42. B	43. B	44. C	45. B	46. C	47. A	48. B	49. D	50. B