

Câu 1: (5 điểm). Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x^2y) + 2f(y^2) = (x^2 + f(y)) \cdot f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 2: (5 điểm). Cho dãy số (x_n) được xác định bởi:

$$x_1 = a \in \mathbb{R}, x_{n+1} = \frac{(2x_n + 3)^{2024}}{2024} + x_n, \forall n \geq 1.$$

a) Cho $a \geq -\frac{3}{2}$, đặt $u_n = \sum_{i=1}^n \frac{(2x_i + 3)^{2023}}{2x_{i+1} + 3}, \forall n \geq 1$. Tính giới hạn của dãy số (u_n) .

b) Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số thực a để (x_n) là dãy số khác hằng và hội tụ.

Câu 3: (5 điểm). Cho tam giác ABC không cân, nội tiếp đường tròn (O) . Hai đường cao BE, CF cắt nhau tại trực tâm H . Đường thẳng EF cắt BC tại K . Qua K kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt CH, BH lần lượt tại P, Q . Đường thẳng AH cắt (O) tại T khác A . Đường thẳng qua H vuông góc với EF cắt BC tại L .

a) Chứng minh LT tiếp xúc với đường tròn (HPQ) .

b) Dựng đường kính AA' của (O) . Đường thẳng qua L vuông góc với BC cắt $A'B, A'C$ lần lượt tại Y, Z . Chứng minh rằng đường tròn $(A'YZ)$ tiếp xúc với đường tròn (HPQ) .

Câu 4: (5 điểm).

Cho $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ là 6 số tự nhiên không vượt quá 20. Gọi m là trung bình cộng của 6 số đã cho. Hai số được gọi là một “cặp số đẹp” nếu như trung bình cộng chúng lớn hơn m .

a) Chứng minh rằng không thể chia 6 số đã cho thành 3 cặp đều là các “cặp số đẹp”.

b) Trong 6 số đã cho, có thể có nhiều nhất bao nhiêu “cặp số đẹp”?

-----HẾT-----

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

**KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI
DỰ THI CẤP QUỐC GIA (Vòng 2)**

Năm học: 2024-2025

Môn thi: TOÁN

Ngày thi: 20/9/2024

Thời gian làm bài: 180 phút (Không kể thời gian phát đề)

Ngày thi thứ hai

Bài 5. (6,0 điểm) Tồn tại hay không hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bị chặn thỏa mãn các điều kiện:

$$f(1) = 1 \text{ và } f\left(x + \frac{1}{x^2}\right) = f(x) + \left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2, \forall x \neq 0.$$

Bài 6. (7,0 điểm) Tìm số tập con A của $X = \{1; 2; 3; \dots, 2023\}$ sao cho tổng các phần tử của A chia hết cho 7.

Bài 7. (7,0 điểm)

Cho $\triangle ABC$ đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với các cạnh BC , CA và AB tương ứng tại D , E , F . Đường thẳng EF cắt BC tại G . Gọi K là trung điểm đoạn GD . Đường tròn đường kính GD cắt (I) tại R ($R \neq D$). Gọi P , Q ($P \neq R$, $Q \neq R$) tương ứng là giao của (I) với BR , CR . Hai đường thẳng BQ và CP cắt nhau tại X . Đường tròn (CDE) cắt QR tại M và đường tròn (BDF) cắt PR tại N .

a) Chứng minh rằng KR là tiếp tuyến của đường tròn (RBC) .

b) Chứng minh rằng PM , QN và RX đồng quy.

----HẾT----

Thí sinh không được sử dụng MTCT và tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm