

Câu 1 (5,0 điểm). Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = \frac{(n+1)x_n^2}{1+(n+2)x_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh rằng dãy số $(y_n): y_n = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \dots + \frac{x_{n+1}}{x_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 2 (5,0 điểm). Gọi α là nghiệm dương của phương trình $x^2 + x - 5 = 0$. Với số nguyên dương n nào đó, gọi $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ là các số nguyên không âm thoả mãn đẳng thức $c_0 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + \dots + c_n\alpha^n = 2025$.

a) Chứng minh rằng $c_0 + c_1 + c_2 + \dots + c_n \equiv 3$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $T = c_0 + c_1 + c_2 + \dots + c_n$.

Câu 3 (5,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn, không cân. Gọi O, N lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, tâm đường tròn Ôle của tam giác ABC . Tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại A' . Gọi A_1 là trung điểm của OA' . Tương tự dựng B_1, C_1 .

a) Chứng minh các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại điểm K là điểm liên hợp đẳng giác của N trong tam giác ABC .

b) Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là giao điểm của AK, BK, CK với (O) . Các điểm A_3, B_3, C_3 lần lượt là các điểm đối xứng của A_2, B_2, C_2 qua BC, CA, AB . Chứng minh các điểm O, H, A_3, B_3, C_3 cùng thuộc một đường tròn.

Câu 4 (5,0 điểm). Cho n là số nguyên dương. Một hoán vị $a_1, a_2, \dots, a_n$ của dãy $1, 2, \dots, n$ được gọi là tốt nếu thoả mãn $a_1 \leq 2a_2 \leq 3a_3 \leq \dots \leq na_n$.

a) Chứng minh nếu $a_1, a_2, \dots, a_n$ là một hoán vị tốt thì hoặc $a_n = n$ hoặc $a_{n-1} = n$ và $a_n = n - 1$.

b) Tìm số các hoán vị tốt.

===== Hết =====

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.
Họ và tên thí sinh: Số báo danh: